

## LOS SIGNIFICADOS DE LA PROBABILIDAD EN LOS PROFESORES DE MATEMÁTICA EN FORMACIÓN: UN ANÁLISIS DESDE LA TEORÍA DE LOS MODELOS MENTALES

**AmableMoreno, José María Cardeñoso, Francisco González-García**

Universidad Nacional de Cuyo. (Argentina)

Universidad de Cádiz. (España)

Universidad de Granada. (España)

morenoamable6@gmail.com, cardenoso.josemaria@uca.es, pagoga@ugr.es

**Palabras clave:** modelos mentales, probabilidad, tendencias, pensamiento

**Key words:** mental models, probability, trends, thought

### RESUMEN

En este trabajo analizamos los significados de la probabilidad que tienen los estudiantes para profesor de matemáticas, de la provincia de Mendoza, Argentina; a partir del marco teórico proporcionado por Cardeñoso (2001), para determinar las *tendencias de pensamiento probabilístico*; y la teoría de los modelos mentales (Johnson-Laird, 1994).

Se aplicó un cuestionario a 583 estudiantes y el análisis de las respuestas se realizó a partir de la aplicación de diversas técnicas estadísticas, como el test de Pearson, test de Friedman, test de Wilcoxon. Los resultados evidencian una variedad de significados dependiendo del nivel propedéutico.

### ABSTRACT

In this paper we analyze the meanings of the likelihood that students have for math teacher, in the province of Mendoza, Argentina; from the theoretical framework provided by Cardeñoso (2001) to determine trends in probabilistic thinking; and the theory of mental models (Johnson-Laird, 1983, 1994).

A questionnaire was administered to 583 students and the analysis of the responses was conducted from the application of various statistical techniques such as the Pearson test, Friedman test, Wilcoxon test. The results show a variety of meanings depending on the preparatory level.

## ■ Introducción

El análisis de las causas que producen el fracaso evidenciado de los estudiantes nos conduce a reflexionar sobre distintos aspectos, que van desde el mensaje que se transmite sobre la naturaleza del conocimiento probabilístico a los métodos de enseñanza, las herramientas empleadas, la planificación realizada y la evaluación; y de manera prioritaria nos hace pensar sobre los alumnos y en las barreras que impiden que el aprendizaje sea eficaz (Azcárate, 1996; Cardeñoso, 2001). En este sentido, consideramos que la teoría de los modelos mentales (Johnson-Laird, 1983, 1994) nos puede ayudar a interpretar mejor el pensamiento probabilístico de los profesores en formación.

## ■ Marco Teórico

A partir de las investigaciones sobre concepciones alternativas, llegamos a la conclusión de que los alumnos llegan a la clase con una *ciencia alternativa*; luego nos interesa producir un cambio conceptual en los mismos; es decir, pretendemos que abandonen las concepciones alternativas y se apropien de las concepciones científicas. Sin embargo, nos dimos cuenta que el cambio conceptual es una cuestión bastante complicada y debemos pensar de otra manera. Es decir, debemos pensar en una evolución conceptual y no en una sustitución de concepciones (Moreira, 1994).

Así, Vosniadou y Brewer (1994) interpreta el cambio conceptual como una modificación progresiva de los modelos mentales que el alumno tiene sobre el mundo físico, que logra por medio de enriquecimiento o revisión. Entendiendo enriquecimiento como adición de informaciones, y donde la revisión implica cambios en las creencias o presupuestos individuales en la estructura relacional del modelo.

Desde esta perspectiva, los resultados de la investigación educativa plantean la necesidad de considerar al aprendizaje como un proceso cognitivo, como un modo de procesar mentalmente la información y de utilizarla; y de aquí surge la importancia que tienen las representaciones internas. Para Greca & Moreira (1997: p. 712):

Asumimos que construimos representaciones internas del mundo en lugar de aprehenderlo directamente, debe ser posible que el estudio de la estructura de estas representaciones nos suministre una mejor comprensión de los procesos de aprendizaje de nuevas estructuras conceptuales

Para Johnson-Laird (1983), la mente humana representa el mundo ante la imposibilidad de aprehenderlo directamente y lo hace según un triple código, opera mentalmente con proposiciones, imágenes y modelos mentales. Éstos son análogos estructurales del mundo que la mente genera para comprenderlo, de lo que se deriva que la conceptualización científica requiere la construcción de modelos mentales, estos modelos mentales tienen poder predictivo y explicativo, y se caracterizan por su funcionalidad; siendo por ello por lo que dotan al individuo de comprensión. Son los modelos de trabajo que actúan en la memoria a corto plazo.

Como los modelos mentales operan con la abstracción, y los conceptos científicos poseen un alto grado de abstracción y complejidad, de aquí se deriva la consideración de que el aprendizaje de los conceptos científicos requiere de la construcción de un modelo mental de los mismos.

Lograr el conocimiento de los modelos mentales de los sujetos en formación y cómo se construyen, es una prioridad, si pretendemos que el conocimiento científico se construya, porque a partir de dicho conocimiento, podremos determinar las estrategias y los procesos adecuados para que los estudiantes recorran el camino que va desde los modelos mentales a los modelos conceptuales científicos. Si bien sabemos que, los modelos mentales de las personas son difíciles de investigar, porque son confusos, incompletos e inestables; a diferencia de los modelos científicos que son precisos, consistentes y completos.

Para Johnson-Laird (1994) la construcción de los modelos mentales se basa en el conocimiento, las creencias y las concepciones. La teoría de los modelos mentales es una teoría apropiada para estudiar el pensamiento probabilístico, porque es una teoría que fue pensada para explicar los procesos superiores de la cognición, en particular la comprensión y la inferencia. Este autor realiza un estudio sobre el conocimiento general de las creencias y las descripciones de situaciones que conducen a los modelos mentales que se utilizan para evaluar probabilidades.

Mientras que para Cardeñoso (2001) la estimación de la cuantificación de la probabilidad, a lo que llamamos *nivel de confianza*, se puede argumentar desde cinco categorías:

- *Contingencia*: Argumentaciones estimativas de cuantificación de la probabilidad basadas en la comparación entre los casos favorables y desfavorables de un suceso.
- *Laplaciana*: Argumentaciones estimativas de cuantificación de la probabilidad basadas en la proporción entre los casos favorables y posibles del fenómeno.
- *Frecuencial*: Argumentaciones estimativas de cuantificación de la probabilidad basadas en la lectura frecuencial del fenómeno o de la información aportada.
- *Equiprobabilidad*: Argumentaciones estimativa de cuantificación de la probabilidad basadas en justificaciones desde la equiposibilidad entre los resultados del fenómeno.
- *Experiencial*: Argumentaciones estimativas de cuantificación de la probabilidad basadas en criterios fruto de la experiencia personal.

## ■ Metodología

En el presente trabajo, el método de investigación utilizado es el descriptivo. El instrumento es un cuestionario que consta de tres partes: la primera destinada a indagar acerca de las características sociodemográficas de los estudiantes; la segunda consta de doce ítems relativos al reconocimiento de la aleatoriedad de distintos sucesos; y finalmente la tercera consta de doce ítems dedicados a la estimación de la probabilidad de sucesos y su correspondiente argumentación. La estimación de la probabilidad se realiza en una escala cualitativa y ordinal: baja, media, alta; y la argumentación consiste en justificar coloquialmente la estimación realizada mediante la aplicación de alguna de las cinco categorías propuestas por Cardeñoso (2001). Los sucesos planteados hacen referencia de forma equitativa al contexto de juego, cotidiano y físico-natural. En este trabajo analizamos en particular, los resultados de la tercera parte del cuestionario, es decir, la que se refiere a la estimación de la probabilidad y su argumentación. A modo de ejemplo presentamos un ítem del contexto de juego:

En una mesa de juego se dispone de una caja de fichas, contiene 29 fichas negras y 16 amarillas. La confianza que tengo en que salga una ficha negra, a lo largo de toda una tarde de juego, es...

*baja*

*media*

*alta*

1. *porque todas las fichas tienen las mismas posibilidades, en cualquier extracción puede salir tanto una ficha amarilla como una negra.*
2. *porque en esta caja hay más fichas negras y puede salir más fácilmente este color.*
3. *porque hay una proporción de 29 a 45 de fichas negras en la caja.*
4. *porque si repetimos la extracción es así de frecuente que esto ocurra.*
5. *porque.....*

El estudiante debe seleccionar uno de los tres niveles de confianza propuestos (bajo, medio, alto) y argumentar su elección anterior, marcando una de las cuatro opciones siguientes; y si no está de acuerdo con ninguna de ellas, debe completar la opción 5. Si el estudiante elige la opción 1, argumenta desde la *Equiprobabilidad*; si elige la opción 2 lo hace desde la *Contingencia*; en la opción 3 argumenta desde la categoría *Laplaciana*; y si elige la 4 argumenta lo hace desde la categoría *Frecuencial*. También puede argumentar desde sus experiencias de vida y creencias, en ese caso tiene la opción 5, que puede completar y estaría argumentando desde la categoría *Experiencial*.

La población estudiada está constituida por 583 estudiantes para profesor de matemáticas del nivel de secundaria, constituyendo la totalidad de los estudiantes de esta carrera en la provincia de Mendoza, Argentina. Los estudiantes se encuentran cursando alguno de los cuatro niveles propedéuticos que conforman la carrera, la que se cursa en Institutos de Formación Docente, de nivel superior no universitario. Las edades de los estudiantes oscilan entre 18 y 57 años.

En el análisis de las respuestas del cuestionario aplicamos diversas técnicas estadísticas, como tablas de frecuencias, y sus gráficos correspondientes, el test de Pearson para analizar la independencia entre variables, el test de Friedman para detectar diferencias significativas entre tres o más variables, el test de Wilcoxon para determinar diferencias significativas entre dos variables (Moreno, Cardeñoso y González-García; 2013, 2014).

## ■ Resultados

### **Categorías argumentativas de la probabilidad**

A partir de las respuestas proporcionadas por los estudiantes, calculamos las medidas descriptivas de las variables que cuentan el número de veces que el estudiante elige cada una de las categorías argumentativas de la probabilidad, como se muestra en la Tabla 1. Por ejemplo, la categoría *Equiprobabilidad* es aplicada, en promedio en 3,52 ítems de los doce propuestos, por estudiante.

**Tabla 1 Medidas descriptivas de las categorías argumentativas usadas para justificar la estimación de la probabilidad**

Variable	Mínimo/Máximo	Media	Desviación estándar
Cantidad de veces que se elige la <i>Equiprobabilidad</i> por estudiante	0 / 11	<b>3,52</b>	2,187
Cantidad de veces que se elige la <i>Contingencia</i> por estudiante	0 / 9	<b>3,21</b>	1,614
Cantidad de veces que se elige la <i>Laplaciana</i> por estudiante	0 / 9	2,41	1,763
Cantidad de veces que se elige la <i>Frecuencial</i> por estudiante	0 / 7	2,00	1,220
Cantidad de veces que se elige la <i>Experiencial</i> por estudiante	0 / 8	0,40	0,952

El test de Friedman aplicado a las cinco variables de la Tabla 1, proporcionó un valor de  $\chi^2=917,294$ , g.l.=4 y un valor  $p<0,001$ . Este resultado nos permite afirmar que existen diferencias significativas entre las cinco categorías argumentativas de la estimación de la probabilidad. Para saber qué argumentos se aplican de manera significativamente mayor que otros, instrumentamos el test de Wilcoxon a cada par de variables. Los resultados indicaron, que si bien el uso de la *Equiprobabilidad* es ligeramente mayor que el uso de la *Contingencia*, esta diferencia no es significativa con un valor  $p=0,053$ . Sin embargo, podemos afirmar que estas dos categorías se emplean de manera significativamente mayor que el resto de las categorías.

### ■ Análisis de las categorías argumentativas de la estimación de la probabilidad y el nivel propedéutico

Analizamos la relación de dependencia entre la categoría argumentativa de la probabilidad y el nivel propedéutico de los estudiantes, mediante la aplicación del test de Pearson. En primer lugar se determinó la media y la desviación estándar de cada una de las categorías, como se muestra en la Tabla 2. El test de Pearson se aplicó a cada una de las categorías, los resultados mostraron que hay dependencia entre el nivel propedéutico y la categoría *Laplaciana* (valor  $p<0,001$ ) y con la categoría de *Equiprobabilidad* (valor  $p=0,008$ ). En esta categoría se ven agrupadas las respuestas a los ítems donde la estimación de probabilidad es de nivel medio, con aquellas que usan esta argumentación de forma heurística, que Lecoutre (1992) considera como un sesgo.

**Tabla 2 Media y Desviación estándar de las categorías argumentativas de la probabilidad en cada uno de los niveles propedéuticos**

Categoría	1° nivel	2° nivel	3° nivel	4° nivel
<b>Contingencia (CAT5)</b>	3,167 (0,103)	3,200 (0,154)	3,331 (0,137)	3,170 (0,172)
<b>Laplaciana (CAT6)</b>	1,825 (0,107)	2,564 (0,160)	2,777 (0,143)	<b>3,261 (0,179)</b>
<b>Frecuencial (CAT7)</b>	2,081 (0,078)	1,873 (0,116)	2,029 (0,103)	1,886 (0,130)
<b>Equiprobabilidad (CAT8)</b>	<b>4,049 (0,136)</b>	3,536 (0,203)	3,122 ( 0,181)	2,659 (0,227)
<b>Experiencial (CAT9)</b>	0,455 (0,061)	0,345 (0,091)	0,324 ( 0,081)	0,409 (0,102)

Como se puede observar en la Tabla 2, la *Equiprobabilidad* se usa con mayor frecuencia en el primer nivel y la categoría *Laplaciana* en el cuarto nivel. También se puede apreciar en ambos casos, un nivel decreciente de la *Equiprobabilidad* a la vez que va evolucionando de forma creciente el uso de la argumentación *Laplaciana*, de carácter más normativo y científico, conocido como el Modelo Clásico de Laplace.

### ■ Análisis de las categorías argumentativas de la probabilidad y el nivel de confianza

De acuerdo a los datos consignados en la Tabla 3; podemos afirmar, de manera global, que estos estudiantes argumentan en primer lugar desde la *Equiprobabilidad* conjuntamente con el nivel de confianza *medio*. Sin embargo, si analizamos las respuestas en función del contexto del suceso, se detecta que en el contexto de juego se aplica la categoría *Contingencia* con el nivel de confianza *medio*, en el contexto cotidiano la categoría *Laplaciana* con el nivel de confianza *bajo*; y en el físico-natural la categoría *Equiprobabilidad* con el nivel de confianza *medio*.

Tabla 3 Relación entre la categoría argumentativa y el nivel de confianza

Contexto	Nivel de confianza (en %)			Categorías (en %)				
	Bajo	Medio	Alto	CAT5	CAT6	CAT7	CAT8	CAT9
Juego	29,84	<b>48,8</b>	20,14	<b>43,14</b>	20,97	6,69	22,38	3,09
Cotidiano	<b>44,85</b>	32,8	21,61	15,95	<b>30,74</b>	21,91	24,27	4,42
Físico-Natural	35,42	<b>53,09</b>	10,72	21,35	8,7	21,95	<b>41,46</b>	3,56
% Total	31,54	<b>50,18</b>	17,25	27,08	17,10	16,56	<b>32,03</b>	2,77

### ■ Conclusiones y discusión

Las respuestas que dieron los estudiantes sobre la estimación de la probabilidad en una escala cualitativa, en la que los niveles ordinales son expresados con los rangos: bajo, medio y alto; nos permitieron obtener los siguientes resultados:

- El nivel de confianza asignado a la estimación de la probabilidad de un suceso, en general no coincide con el asignado apriorísticamente por los investigadores; únicamente en dos sucesos del contexto juego la discrepancia es mínima. La falta de estrategias combinatorias impiden el conteo del número de casos favorables, cuando este es elevado.
- Se ha probado que existe una relación entre el nivel propedéutico de los estudiantes y la categoría argumentativa. Los estudiantes de primer año aplican con mayor frecuencia la *Equiprobabilidad* y los de cuarto año, la categoría *Laplaciana*.
- El contexto de juego es el que ofrece una menor dificultad para estimar probabilidades; debido a que es fácilmente imaginable el espacio muestral asociado. En este contexto se argumenta fundamentalmente desde la *Contingencia*, que asocian fundamentalmente al nivel de confianza *medio*.
- En el contexto cotidiano se argumenta preferentemente desde la estrategia *Laplaciana*, asociada a los niveles de confianza *bajo*.
- En el contexto físico-natural se argumenta desde la *Equiprobabilidad*, si bien los sucesos planteados no corresponden a espacios muestrales equiprobables. Por lo que podemos concluir, que este

contexto, la *Equiprobabilidad* representa un sesgo y no una categoría argumentativa apropiada (Lecoutre, 1992); es decir, un verdadero obstáculo en la estimación de la probabilidad; en el que se esperaba la emergencia de argumentaciones de tipo *Frecuencial*.

- Luego, la variable contexto tiene una fuerte influencia sobre los argumentos. En efecto, confirma resultados como los encontrados por Maury (1984); basando sus investigaciones en las estrategias utilizadas por adolescentes de 15 a 16 años en problemas relativos a la cuantificación de la probabilidad, atendiendo a la influencia del contexto y al vocabulario para el uso de diferentes modelos mentales espontáneos que el alumno posee.

Los resultados evidencian una variedad de significados, asociados al conocimiento en general que poseen los futuros profesores de matemáticas para la educación secundaria, a sus creencias, a la descripción que realizan de las situaciones planteadas (Moreno, Cardeñoso y González-García, 2012, 2013), al pensamiento analógico y del nivel propedéutico de los estudiantes (Moreno, Cardeñoso y González-García, 2014).

Nuestras conclusiones revelan la necesidad de mejorar la formación probabilística de los futuros profesores de matemática para la enseñanza en la educación secundaria, donde han de estar capacitados para el desarrollo de una actividad docente que les permita llevar a cabo la alfabetización probabilística de los alumnos, tan necesaria para afrontar la complejidad del mundo actual como ciudadanos del siglo XXI, cuestión que se reclama desde múltiples instancias (Cardeñoso, Azcárate y Oliva, 2013).

Estas carencias encontradas en los futuros profesores investigados, confirman los resultados de Azcárate (1996) y Cardeñoso (2001), evidenciando la “a priori”, inadecuada formación profesional de los profesores de matemáticas, cuestión imprescindible para la requerida Sostenibilización Curricular en el sistema educativo.

Se requiere más investigación en la línea de concepciones y creencias probabilísticas del Profesorado, de todos los niveles educativos, tanto si aun están en formación como si ya están en servicio, pues sus resultados nos permite concebir las cosmovisiones que tienen los sujetos al respecto de un saber de referencia, al cual nombramos como *Tendencias de Pensamiento Probabilístico* del profesor (Moreno y Cardeñoso, 2014).

### ■ Referencias bibliográficas

- Azcárate, P. (1996). *Estudio de las concepciones disciplinares de futuros profesores de primaria en torno a las nociones de aleatoriedad y probabilidad*. Granada: Editorial Comares.
- Cardeñoso, J. M. (2001). *Las creencias y conocimientos de los profesores de primaria andaluces sobre la matemática escolar. Modelización de concepciones sobre la aleatoriedad y probabilidad*. (Disertación doctoral, Universidad de Cádiz, 1998) Cádiz: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz.
- Cardeñoso, J. M.; Azcárate, P. y Oliva J. M. (2013). La inclusión de la sostenibilidad en la formación inicial del profesorado de Secundaria de Ciencias y Matemáticas. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias (REurEDC)* 10 (núm. extraordinario), 780-796, DOI: 10498/15627

- Greca, I. M. & Moreira, M. A. (1997). The kinds of mental representations - models, propositions and images - used by college physics students regarding the concept of field. *Internastional Journal of Science Education*, 19 (6), 711-724.
- Jones, G. A. y Thornton, C. A. (2005). An overview of research into the learning and teaching of probability. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 65-92). New York: Springer.
- Johnson-Laird, P. (1983). *Mental Models. Towards a Cognitive Science of Language, Inference, and Consciousness*. Harvard University Press. Cambridge.
- Johnson-Laird, P. (1994). Mental models and probabilistic thinking. *Cognition*, 50, 189-209.
- Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 557-568.
- Maury, S. (1984). La quantification des probabilités: analyse des argument utilices par les élèves de classe de seconde. *Recherches en Didactiques des Mathématique* 5 (2), 187-214.
- Moreira, M. A. (1994). Cambio conceptual: crítica a modelos y una propuesta a la luz de la teoría del aprendizaje significativo. En M. Rioseco (Eds.). *Science & Mathematics Education for the 21st Century: Towards innovatory approaches*, 81-92.
- Moreno, A. y Cardeñoso, J. M. (2014). Overview of prospective mathematics teachers' probabilistic thinking. *ICOTS 9. 9th. International Conference on Teaching Statistics*. Flagstaff, Arizona, USA, 13-18 July 2014. "Sustainability in statistics education".
- Moreno, A.; Cardeñoso, J. M. y González-García, F.(2012). Un estudio exploratorio de las tendencias de pensamiento probabilístico de los estudiantes del profesorado de biología. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.). *Actas Investigación en Educación Matemática XVI*, (pp. 407-415). Baeza, Jaén, España, 20-22 sept. 2012. Recuperado el 15/11/2013 <https://dl.dropboxusercontent.com/u/104572257/Actas/Actas16SEIEM.pdf>
- Moreno, A.; Cardeñoso, J. M. y González-García, F. (2013). La aleatoriedad desde la perspectiva de los estudiantes del Profesorado de Matemática. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.) *Actas de las I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*. Granada: Departamento Didáctica Matemática de la Universidad de Granada, (pp. 367-372). Recuperado 14 noviembre de 2013 desde <http://www.jvdiesproyco.es/documentos/ACTAS/Actas%20jornadas.pdf>
- Moreno, A., Cardeñoso, J. M. y González-García, F. (2014). La Aleatoriedad en los Profesores de Biología y de Matemática en Formación: Análisis y Contraste de Significados. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias, (REurEDC)* 11(2), 198-215. DOI: 10498/15975.
- Vosniasdou, S. y Brewer, W. (1994). Mental models of the day/night cycle. *Cognitive Science*, 18 (7), 123-183.