ESTUDIO SOBRE LA ORGANIZACIÓN DEL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA PLANA

Elizabeth Rincón Santana, José Manuel Ruíz Socarras, Ramón Blanco Sánchez
Universidad Autónoma de Santo Domingo. (República Dominicana)
Universidad de Camagüey. (Cuba)
te10elirisa@gmail.com, jose.ruiz@reduc.edu.cu, ramón.blanco@reduc.edu.cu

Palabras claves: geometría, trigonometría, semiótica, enfoque sistémico
Key words: geometry, trigonometry, semiotic, systemic approach

RESUMEN

Se realiza una investigación empírica de corte cualitativo (Álvarez-Gayou, 2003), con el objetivo de indagar sobre la opinión de los profesores, de la carrera de Educación, mención Matemática, de la Universidad Autónoma de Santo Domingo, en relación a las causas por las que los contenidos de la asignaturaGeometría y Trigonometría en dicha carrera, no pueden ser enseñados con el nivel de profundidad que exige el programa de la asignatura. El estudio realizado es partedel proyecto de doctorado de la autora principal del trabajo, el cual está orientado a investigar sobre las estrategias docentes para la enseñanza aprendizaje de la Geometría y Trigonometría plana.

ABSTRACT

An empirical research of qualitative type have been carried out (Álvarez-Gayou, 2003), with the goal to ask for the opinion that the teachers from the career of Education, Mathematical mention, of the Autonomous University of Saint Domingo, have about the causes conducive to why the subject matter of Geometry and Trigonometry, of the mentioned career cannot be taught with the level of depth that are demanded by the subject matter program. The executed study is part from the doctoral project of the principal author of the present work, the one that is oriented to find out the teaching strategies for the learning and teaching of the subject matter of plane Geometry and Trigonometry.

Introducción

La autora principal de la investigación entrevistó a la totalidad de los profesores de la carrera Educación mención Matemática de la Universidad Autónoma de Santo Domingo (UASD) que han impartido la asignatura Geometría y Trigonometría en los últimos 5 años, los cuales son un total de 18profesores, siendo el objetivo principal de indagar sobre las causas por las cuales no se imparte con la profundidad requerida en las temáticas y se observa bajo dominio de los contenidos en los alumnos egresados.

Las entrevistas realizadas tuvieron un grado de dispersión considerable, según la opinión de los entrevistados, las causas varían de los estudiantes a los profesores, incluido la longitud del programa en lo que respecta a la cantidad de contenido.

Los que responsabilizan a los estudiantes alegan que la débil formación precedente de los mismos, determina un avance muy lento en el desarrollo del nuevo contenido, si se quiere que el nuevo contenido sea asequible a los estudiantes, razón por la cual la impartición del contenido programado toma mucho más tiempo del planificado al efecto.

Por su parte los que responsabilizan a los maestros, alegan falta de preparación de los mismos, o bien mal aprovechamiento del tiempo planificado, descuido en el cumplimiento de las actividades docentes o métodos de enseñanza inapropiados que consumen demasiado tiempo. Además también están los que consideran que la demanda del programa de la asignatura es demasiado ambiciosa, o sea, que no es factible impartir una docencia con el nivel adecuado y cumplir el programa.

Dado la diversidad de criterios aportados por los maestros, el presente trabajo se orientará a analizar criterios estándares en la bibliografía para establecer bases teóricas a partir de las cuales establecer orientaciones metodológicas en aras de que los docentes logren cumplir el programa de la asignatura con un nivel de profundidad adecuado.

Desarrollo

Desde la década del ochenta se han desarrollado diferentes propuestas teóricas con el fin de mejorar el proceso enseñanza aprendizaje de la Matemática, además de las existentes desde antes de esa época, entre la más difundidas se pueden señalar, la teoría de las situaciones didácticas TSD, estilo de organización de las lecciones que se sugiere lo constituye, elaborada por G. Brousseau desde la década de los sesenta del siglo pasado (Artigue yHoudement, 2007).

Es de señalar también la teoría antropológica de lo didáctico (TAD). En ésta se toma inicialmente como objeto primario de investigación la actividad matemática institucionalizada y, por tanto, debe explicitarse un modelo general de las matemáticas institucionalizadas,en los últimos desarrollos de la teoría antropológica de lo didáctico, dichos modelos se articulan alrededor de la noción de praxeología (matemática y didáctica) y constituyen el núcleo firme de la teoría antropológica en su versión actual (Chevallard, 2006).

Se incluye además la teoría de los Van Hiele según la cual el aprendizaje de la geometría se desenvuelve en 5 etapas(Atebe y Schäfer, 2011) que son: Visualización, Análisis, Deducción informal, Deducción formar y Rigor(Mayberry, 1987); así como la teoría APOE (Acción, Proceso-Objeto-Esquema), en la cual se plantea que la apropiación del contenido a través de acciones, que se convierten en proceso, desde donde se identifica el objeto, que finalmente se incorpora en un esquema (Dubinsky, 1996).

Es de destacar dos teorías que se entrelazan fuertemente y que en opinión de los autores tienen su raíz en la Escuela Histórico Cultural, aunque no siempre se haga referencia a dicha escuela, en particular se sustentan en el carácter mediatizado de la psiquis humana, donde se plantea la materialización del pensamiento a través de los símbolos (Vygotsky, 1981). Plantea que el signo no es simplemente una pieza diferencial de un sistema de estructuras ni mero medio de pensamiento y de transformación de ideas, sobre todo es un medio para la transformación de las funciones psíquicas superiores.

Estas teorías son el Enfoque Ontosemiótico de Godino y sus seguidores, (Font, Planas yGodino, 2010), y la teoría de la mediación semiótica (TMS), en la cual resulta fundamental al transferencia de registro semiótico, que tiene a Duval como su principal exponente (Duval, 1998). Teorías originadas en España y Francia respectivamente, pero que en la actualidad son conocidas ampliamente.

En la TMS se siguela distinción entre herramienta material y herramienta simbólica que plantea Vygotsky, quien destaca que una herramienta material, tal como un instrumento de trabajo, afecta la naturaleza de la actividad humana mediada, la cual puede modificar el objetivo de la actividad,pero una herramienta simbólica, tal como el lenguaje, afecta el conocimiento del lector, elefecto de las herramientas simbólicas no essobre el objeto sino sobre la persona, el efecto es inter psíquico.

La TMS reconoce el papel de los símbolos en el aprendizaje y destaca la mediación del profesor al gestionar la doble función de la herramienta semiótica, en la materialización del pensamiento, por una parte para comunicarlo, función social y por otra para manipular el objeto matemático (Bartolini-Bussi y Mariotti, 2008) la expresión “potencial semiótico de un artefacto” es usada en la enseñanza, para referirse al doble vínculo semiótico de una representación, por una parte con los significados personales evidenciados en los signos que surgen al usarla para realizar una tarea, y por otra, los significados matemáticos evocados por su uso, que un experto puede reconocer en los signos producidos.

En los estudios realizados se concuerda con Duval, respecto a la necesidad de que el alumno vea el objeto en diferentes representaciones semióticas, para que lo pueda comprender en su totalidad, dado que cada representación pone de relieve diferentes aspectos del objeto, y se considera que la TMS apoyada con el uso de las TIC, es uno de los elementos que debe contribuir a que los maestros puedan lograr satisfacer las demandas establecidas en el programa de geometría y trigonometría plana.

Además es menester tomar en cuenta otro elemente derivado de la propia epistemología de la Matemática, que es la estructura sistémica de la Matemática como ciencia (Ruiz, Barreto y Blanco, 2008). Toda ciencia posee una estructura sistémica, que generalmente cuando una parte de la misma es transpuesta a una asignatura docente, esta estructura sistémica no se evidencia.

Es usual que el contenido de las diferentes asignaturas de Matemática se imparta en una forma asistémica, siendo ésta una de las razones por la que los estudiantes ven la Matemática como partes independientes conformando las diferentes asignaturas que debe cursar en un currículo dado.

Precisamente la asignatura Geometría y Trigonometría permite una impartición sistémica, a través de la cual se puede lograr impartir mayor cantidad de contenido con un nivel de profundidad adecuado, propiciando además el uso del razonamiento prioritariamente a la memoria.

La propuesta a la que se ha arribado a través del proceso investigativo realizado, parte del planteamiento de que no es necesario terminar con el contenido de Geometría para entonces iniciar el de Trigonometría, si es una asignatura el contenido de ambas ramas se debe ir desarrollando simultáneamente (Rincón, 2013), por ejemplo cuando se estudia el triángulo rectángulo, a continuación del teorema de Pitágoras, se pueden estudiar las relaciones métricas en el triángulo.

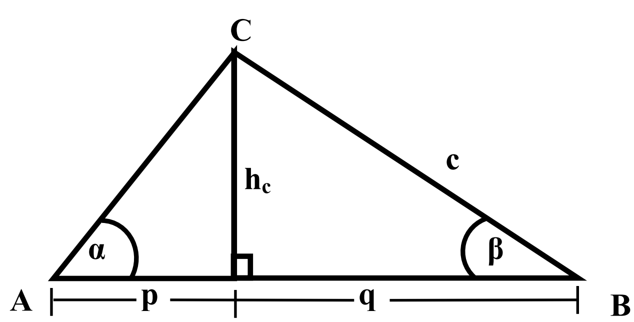
Una vez estudiadas ambas cosas, un elemento que vincula ambos contenidos, es el llamado teorema de las proyecciones, el cual se puede plantear como un ejercicio de aplicación y posteriormente plantear a los estudiantes que el resultado obtenido será usado como herramienta para obtener nuevos resultados.

Dicho teorema plantea que en un triángulo cualquiera:

$$\begin{aligned} a &= b\cos(\gamma) + c\cos(\beta) \\ b &= c\cos(\alpha) + a\cos(\gamma) \\ c &= a\cos(\beta) + b\cos(\alpha) \end{aligned}$$

Donde la obtención de las igualdades planteadas es una simple aplicación de las relaciones métricas en el triángulo rectángulo, como se ilustra en la figura 1.

Figura 1



De la figura 1 se tiene: $\cos(\alpha) = \dfrac{p}{b}$ o bien: $b\cos(\alpha) = p$

Además $\cos(\beta) = \dfrac{q}{a}$ o sea: $a\cos(\beta) = q$

Sumando ambas igualdades como p + q = c, se tiene el resultado:

$$c = b\cos(\alpha) + a\cos(\beta).$$

De la misma forma se procede para los otros dos lados y se puede encomendar como tarea que los estudiantes consideren el caso cuando el triángulo es obtusángulo. Por supuesto en este momento también se puede incluir la Ley de los senos y la Ley de los cosenos.

De esta forma el estudiante usa diferentes representaciones semióticas de los objetos estudiados, además es oportuno usar un software animado, de modo que el movimiento del vértice C haga caer la altura fuera y dentro del triángulo, pues cuando siempre se usa una semiótica para representar las alturas del triángulo, donde ésta siempre esté dentro del triángulo, el estudiante termina por desconocer los casos donde la altura cae fuera del triángulo.

Procurando mantener esta estructura sistémica, al estudiar el área del triángulo, se puede expresar también a través de las funciones trigonométricas, como se ilustra a continuación:

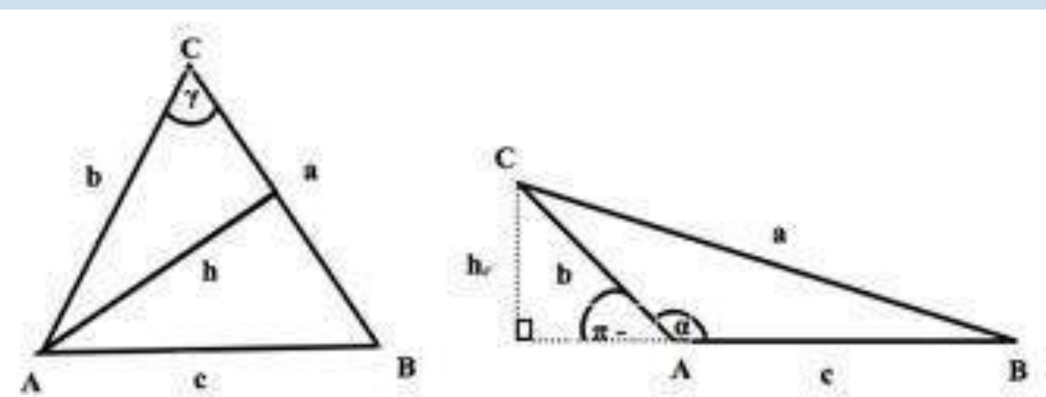
$$A = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$

Donde sustituyendo las alturas por sus valores correspondientes se obtiene:

$$A = \frac{1}{2}absen(\gamma) = \frac{1}{2}bcsen(\alpha) = \frac{1}{2}casen(\beta)$$ como se puede apreciar de la figura 2.

Aquí de nuevo se usan diferentes registros semióticos, esto es el área se expresa en una semiótica puramente geométrica y en otra vinculada a la Trigonometría, además con el uso de las TIC se puede ilustrar con agilidad la gráfica correspondiente a la altura asociada a cada uno de los lados del triángulo, pues también suele suceder que el estudiante no tiene en cuenta que en la expresión base por altura, la altura está vinculada al lado sobre el cual se traza la altura.

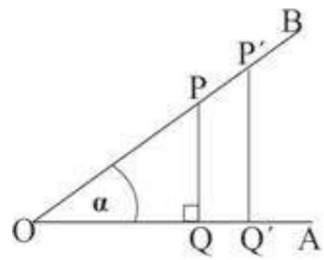
Figura 2



Las razones trigonométricas se pueden vincular a la semejanza de triángulos, con lo que se logra, por una parte ejercitar la semejanza de triángulos y por otra una mejor comprensión de las razones trigonométricas en los triángulos rectángulos, lo cual se ilustra en el siguiente ejemplo:

Sea P'Q' una perpendicular a OA distinta a PQ, ver Figura 3, demostrar que la razón seno no varía.

Figura 3



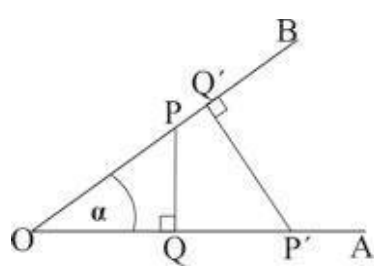
Como se puede apreciar los triángulos OPQ y OP'Q' son semejantes por tener todos sus ángulos iguales, por lo que se cumple la relación:

$$\frac{OP}{OP'} = \frac{PQ}{P'Q'} = \frac{OQ}{O'Q'}$$

De donde se obtiene: $sen(\alpha) = \frac{PQ}{OP} = \frac{P'Q'}{OP'}$; relación que establece que es lo mismo usar PQ que P'Q' ya que se obtiene el mismo valor del seno, lo cual le permite al estudiante comprender que el valor del seno de un ángulo en un triángulo rectángulo no depende de las dimensiones del triángulo, sino de la razón del cociente entre la hipotenusa y el cateto opuesto.

En este caso es oportuno asignar al estudiante una tarea asociada al ejemplo anterior, para contribuir al desarrollo de su razonamiento, que es la siguiente, plantear el mismo problema pero ahora la perpendicular P'Q' es al lado OB como se ilustra en la figura 4, dado que la solución de problemas siempre debe estar presente en la actividad matemática (Artigue y Houdement, 2007).

Figura 4



La solución se desarrolla de la misma forma que en el caso anterior pues los triángulos, OPQ y OP'Q' siguen siendo semejantes y por consiguiente, este hecho, conduce al mismo análisis del caso anterior.

Conclusiones

La conclusión a que se arriba en el presente trabajo consiste en que una propuesta didáctica sustentada en la TMS apoyada en las TIC en combinación con un tratamiento sistémico del contenido de la asignatura, puede lograr ganar suficiente tiempo para impartir todo el contenido con el nivel de profundidad requerido.

Evidentemente el alcance del presente trabajo no posibilita desarrollar una propuesta detallada de cómo llevar a cabo el desarrollo de la asignatura. Aunque las ideas planteadas son un punto de partida para el trabajo metodológico que debe ser ejecutado por el docente o por el colectivo de profesores que trabajan en dicha asignatura.

Referencias bibliográficas

Álvarez-Gayou, L. (2003). *Cómo hacer una investigación cualitativa*. Recuperado 23 de enero del 2014 de http://www.ceppia.com.co/Herramientas/Herramientas/Hacer-investigacion-alvarez-gayou.pdf

Artigue, M y Houdement, C. (2007). Problem solving in France: didactic and curricular perspectives. *ZDM: Mathematics Education* 39(3), 365–382.

Atebe, H. y Schäfer, M. (2011). The nature of geometry instruction and observed learning outcomes opportunities in Nigerian and South African high schools. *African Journal of Research in MST Education 15*(2), 191–204.

Bartolini-Bussi, M. y Mariotti, M. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. *Handbook of international research in mathematics education,* 295-3I1.

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. *Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4)*, 21-30.

Dubinsky, E. (1996). A frame work for research and curriculum development in Undergraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education*,1-32.

Duval, R. (1998). Signe et objet, I et II. *Annales de didactique et de sciences cognitives, IREM de Strasbourg 6*(2), 139-196.

Font, V., Planas, N., y Godino, J. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y aprendizaje 33*(1), 89-105.

Mayberry, J. (1987). The Van Hiele levels of geometric thought in undergraduate pre service teachers. *Journalfor Research in Mathematics Education1 4*(1), 58-69.

Rincón, E. (2013). *Organizacióndel proceso docente de la Geometría y Trigonometría plana*. Tesis de Doctorado no publicada, Universidad de Camagüey. Cuba.

Ruiz, J; Barreto, G. y Blanco, R. (2008).Organización del contenido de la disciplina matemática para ciencias técnicas en modalidad semipresencial. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*21, 78-88. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Vygotsky, L. (1993). *Pensamiento y lenguaje*. Madrid: Editora Visor.