

# DOMINIOS “EN ACCIÓN” DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA ENSEÑAR GEOMETRÍA ANALÍTICA A NIVEL UNIVERSITARIO. EL CASO DEL PROFESORADO EN MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO

**Virginia Ciccioli, Natalia Sgreccia**

FCEIA-UNR. (Argentina)

ENS 33. (Argentina)

CONICET. (Argentina)

ciccioli@fceia.unr.edu.ar, sgreccia@fceia.unr.edu.ar

**Palabras clave:** formación docente, geometría analítica, MKT

**Key words:** teacher's training, analytical geometry, MKT

## RESUMEN

*El conocimiento especializado del contenido, el conocimiento del contenido y de la enseñanza y el conocimiento del contenido y de los estudiantes son los dominios requeridos para enseñar Matemática más proclives de ser observados en prácticas de aula, es decir, “en acción”. En esta investigación interesa conocer parte de la formación que el Profesorado en Matemática (PM) de la Universidad Nacional de Rosario ofrece en geometría analítica elemental. Para ello, entre otras acciones, se analiza la activación de dichos dominios en la interacción alumno-profesor producida así como las configuraciones de mensajes emergentes durante las primeras clases de geometría analítica en el PM. El diseño de la investigación responde al de un estudio de caso: el PM, y el alcance es eminentemente descriptivo.*

## ABSTRACT

*The specialized content knowledge, knowledge of content and teaching and knowledge of content and students are required to teach domains more likely to be observed in Mathematics classroom practice, “in action”. In this research interests determine the Formation of the Teacher of Mathematics (PM), National University of Rosario offers in elementary analytic geometry. For this, among other actions, activation of these domains in the student-teacher interaction produced and configurations popups during the first classes of analytical geometry in the PM are analyzed. The design of the research is a case study: the PM, and the scope is a descriptive one.*

## ■ Presentación

El interés por el tema emerge ante la reducida investigación educativa que se centre en clases de geometría analítica, siendo el objeto observado el profesor en Matemática que imparte la clase. Las investigaciones consultadas señalan lo dificultoso que resulta el aprendizaje de la geometría analítica (entre ellas: Alves, Mendonça y Coletti, 2010; Bonilla y Parraguez, 2013; Dallemole, Oliveira y Moreno, 2014) y revelan que esas dificultades, en su mayoría, aluden a deficiencias desde la enseñanza. En este sentido, concluyen en algunos casos con propuestas de enseñanza superadoras, restando avanzar en la investigación en sí de la enseñanza de geometría analítica basada en tales propuestas.

La teoría de los registros semióticos de Duval (1999) resulta muy apropiada para analizar la enseñanza y el aprendizaje de esta rama de la Matemática. Entre las investigaciones consultadas se observa el modo en que desde la enseñanza se favorece o desfavorece la construcción de significados de los conceptos de la geometría analítica en los distintos registros. También se hace referencia a las dificultades en el aprendizaje propias del tratamiento y conversión entre registros, asociadas a la naturaleza de los mismos.

Es así que Alves, Mendonça y Coletti (2010) concluyen que el desarrollo de las nociones básicas de geometría analítica (como las de rectas y planos) alcanza un nivel prioritariamente técnico en la enseñanza secundaria. No se explica específicamente la transición del marco geométrico al algebraico, esencial para la comprensión de la geometría analítica.

Asimismo, la falta de vinculación entre los marcos geométrico y algebraico, constituyentes de la geometría analítica, amplía las dificultades. Esto es revelado por Bonilla y Parraguez (2013) quienes observan que si desde la enseñanza se promueve inicialmente un modo de pensamiento estructural (integrando lo geométrico y lo algebraico), los estudiantes son capaces de comprender conceptos (tales como el de elipse) de manera más profunda.

También Dallemole, Oliveira y Moreno (2014) hacen referencia a las dificultades que surgen en las conversiones entre registros aseverando que dichas conversiones suelen ser más complejas cuando uno de los dos registros en cuestión (como el de la lengua natural) es plurifuncional.

El reporte que estamos presentando se encuadra en una investigación más amplia interesada en conocer la formación que se ofrece a los futuros profesores en Matemática -en particular, en el PM de la Universidad Nacional de Rosario, Argentina- en la configuración del *conocimiento matemático para enseñar (MKT)* (Ball, Thames y Phelps, 2008) geometría analítica elemental. El *MKT* comprende seis dominios de conocimiento: *común del contenido (CCK)*; *en el horizonte matemático (HCK)*; *especializado del contenido (SCK)*; *del contenido y de los alumnos (KCS)*; *del contenido y de la enseñanza (KCT)*; *del contenido y del currículum (KCC)*. El *SCK*, el *KCS* y el *KCT* son los dominios requeridos para enseñar Matemática más proclives de ser observados en prácticas de aula, es decir, “en acción” (Fernández y Figueiras, 2014).

Para ello, entre otras acciones, se analiza la activación de los dominios “en acción” en la interacción alumno-profesor producida así como las configuraciones de mensajes emergentes durante las clases

iniciales de geometría analítica en el PM, en la asignatura Geometría I de carácter anual, ubicada en el primer año de la carrera. Cómo están constituidos esos dominios en lo referente a geometría analítica en el tramo de formación inicial de futuros profesores es lo que deseamos, en esta instancia, comenzar a develar.

### ■ Marco teórico

Shulman (1986) inicia una línea de investigación sobre la clase de conocimiento requerido por el profesor en la enseñanza de cualquier asignatura. Ball *et al.* (2008), de la Universidad de Michigan, orientan dicha línea hacia la Matemática (Fig. 1).

El contenido que aquí interesa se encuadra en la rama de la Matemática denominada geometría analítica. La geometría analítica unifica el álgebra y la geometría, como consecuencia de la asociación de números con puntos de la recta, de pares de números con puntos del plano, de ternas de números con puntos del espacio y de ecuaciones con figuras por medio de la definición de un sistema de referencia, llamado también sistema de coordenadas. La geometría analítica tiene múltiples aplicaciones en diversas áreas del desarrollo de la humanidad y está presente, como asignatura obligatoria, en la formación de profesionales de diversos campos. La asignatura Geometría I del PM está constituida por dos partes: geometría sintética y geometría analítica, desarrolladas en el primer y segundo semestre de cursado respectivamente. En este reporte se entiende por “geometría analítica elemental” a la conformada por los bloques temáticos que conforman la parte de geometría analítica. Estos son: vectores; recta en el plano; plano; recta en el espacio; cónicas; ecuación general de segundo grado con dos incógnitas; superficies y curvas en el espacio.

Para estudiar la interacción alumno-profesor que se produce en las clases (Coll, Colomina, Onrubia y Rochera, 1992), se consideran como unidades de análisis las *sesiones* (S), en este caso las clases, que se desarrollan en el marco de una *secuencia didáctica* (SD) asociada a un cierto bloque temático. A nivel micro, se tienen en cuenta los *segmentos de interactividad* (SI), que responden a una determinada estructura de participación y se secuencian constituyendo para cada sesión un *mapa de interactividad* (MI). Para profundizar en el proceso de construcción de significados se recurre a una unidad de análisis mucho más fina, de naturaleza esencialmente semiótica: los *mensajes* (M) que a su vez pueden agruparse en *configuraciones de mensajes* (CM).

Figura 1: Dominios del MKT (Ball et al., 2008)



### ■ Metodología de la investigación

La investigación, que se aborda mediante un estudio de caso, tiene un enfoque eminentemente cualitativo y alcance principalmente descriptivo (Hernández, Fernández y Baptista, 2006).

Se realizan observaciones de las tres primeras clases de geometría analítica para recolectar información. Se utiliza el análisis de contenido como técnica de procesamiento de la información recolectada.

El sistema de categorías de análisis está delimitado por los tres dominios “en acción” del MKT (SCK, KCS y KCT). Cada categoría está constituida por una cierta cantidad de modalidades identificadas a partir de un proceso gradual de inmersión en los datos.

A continuación se comparte, para cada dominio estudiado, las modalidades surgidas del análisis de las tres primeras clases de Geometría I, indicando entre paréntesis un código asignado según su orden de detección.

SCK: representación gráfica (a); reflexión sobre significados (b); escritura simbólica (c); lenguaje accesible (d); orden de presentación de ejemplos (e); reformulación de preguntas (f); variedad en la elección de ejemplos (g); sentido de las denominaciones (h); interpretación gráfica (i); otro procedimiento de representación del objeto geométrico (j); precisión en la representación gráfica (k); ejemplificación gráfica (l); enunciado coloquial y escritura simbólica (m); demostración gráfica (n).

KCS: ejemplificación según nivel de abstracción de los alumnos (a); consideración de las respuestas de los estudiantes con justificación dada por el docente (b); previsión de creencias (c); previsión de dificultades (d); indagación sobre entendimiento (e); previsión de errores (f); supuesto sobre menor complejidad (g);

potenciación de las respuestas de los alumnos desde la justificación (h); supuesto de ausencia de complejidad (i).

*KCT*: invitación a la participación (a); direccionamiento de preguntas (b); evocación de conocimientos previos (c); uso de ideas recientes (d); uso del apunte como material de estudio (e); uso de metáforas y analogías (f); administración del tiempo (g); uso de elementos del aula para modelizar (h); elección de ejemplos vinculados con la cotidianidad (i); recapitulación (j); uso de colores (k).

## ■ Resultados

En las Tablas 1 a 3 se detalla, para cada una de las sesiones (S1 a S3 respectivamente), las CM que las constituyen, la cantidad de activaciones de cada categoría de análisis (dominios “en acción” del *MKT*) y las modalidades detectadas (mediante su letra asociada).

Tabla 1. Dominios “en acción” del *MKT* activados – S1

Sesión 1	<i>SCK</i>	<i>KCS</i>	<i>KCT</i>
<b>CM1: Idea global de la esencia de la geometría analítica</b>	4 a b a b	1 a	
<b>CM2: Procedimiento base para la correspondencia en la recta</b>	10 c a d c c a c a e d	2 b b	3 a b c
<b>CM3: Desmenzamiento del tributo de biunívoca de la correspondencia en la recta</b>	2 b f	3 b b c	1 a
<b>CM4: Procedimiento base para la correspondencia en el plano</b>	10 b a a b b a b e a b	3 b b b	6 c c a d a a
<b>CM5: Desmenzamiento del tributo de biunívoca de la correspondencia en el plano</b>	2 a c		1 e
<b>CM6: Importancia de la geometría analítica y del método de Descartes</b>	2 a a		2 a f
<b>CM7: Relación 1-1 como base de la geometría analítica</b>	6 a g d a g h		5 c c a a g
<b>CM8: Ampliación de la relación 1-1</b>	4 a i c c		2 c b

En relación con el *SCK*, es posible observar que la representación gráfica (a) se realiza en todas las configuraciones excepto la tercera. Al inicio de la clase (CM1, CM3 y CM4) se promueve la reflexión sobre significados (b). La escritura simbólica (c) aparece en tres momentos distintos de la clase: comienzo (CM2), intermedio (CM5) y final (CM8), siempre acompañada por otra modalidad.

El dominio *KCS* se activa en la primera mitad de la clase (CM1 a CM4). La consideración de las respuestas de los estudiantes con justificación dada por el docente (b) aparece, y con marcada recurrencia, en las configuraciones CM2 a CM4.

En todas las configuraciones excepto CM1 se activa el dominio *KCT*. En cinco de ellas el docente invita explícitamente a los alumnos a participar (a). En tres ocasiones, sobre la segunda mitad de la clase, inicia la actividad de la CM evocando conocimientos previos (c).

En la S2 (Tabla 2), el *SCK* se activa un gran número de veces a largo de toda la clase variando desde cuatro apariciones (en CM3) a 14 (en CM8). La representación gráfica (a) aparece en todas las configuraciones y con una marcada recurrencia en CM1 y CM6. En ambas es acompañada por otras acciones basadas en el registro gráfico. La escritura simbólica (c) se presenta en todas las configuraciones excepto la primera y la quinta y en la mayoría de los casos lo hace junto a la reflexión sobre significados (b).

El dominio *KCS* se activa en todas las configuraciones, con una notable diferencia en cantidad de apariciones en CM1 y CM4. Estas dos configuraciones, una al inicio de la clase y otra en la parte central de la misma, son bastante diferentes entre sí: en CM1 se activan seis modalidades distintas y de manera alternada; CM4 se centra, casi en su totalidad, en la consideración de las respuestas de los estudiantes con justificación dada por el docente (b). Esta última modalidad es la que mayor cantidad de veces se activa, dando inicio a la actividad en cada configuración en la primera mitad de la clase (CM1 a CM4) y al final de la misma (CM8). En seis de las ocho configuraciones de la clase aparecen comentarios, aislados, por parte del docente acerca del grado de complejidad de lo que se está desarrollando: leve (g, cinco veces) o nula (i, una vez).

Tabla 2. Dominios “en acción” del MKT activados – S2

Sesión 2	<i>SCK</i>	<i>KCS</i>	<i>KCT</i>
CM1: Representación de un punto en el espacio	10 aaajgakeda	11 bdaae dfdfge	8 ahiidea h
CM2: Lugares geométricos de dimensión 0, 1 y 2	9 haacceacc	4 bbge	5 abaca
CM3: Operaciones con lugares geométricos	4 acbb	2 bb	4 aaab
CM4: Lugares geométricos de dimensión 3	11 eagbcbgacba	9 bbbbbb bdbg	8 babbbh bg
CM5: Introducción a vectores	5 aabab	3 gah	7 ejgciab
CM6: Igualdad de vectores	12 aalaialclacb	2 hg	5 aacaj
CM7: Propiedades de la igualdad de vectores	13 ccccabaabbci	4 icfe	6 cbabec
CM8: Ángulo entre vectores	14 ahaacbcaabb acc	2 be	10 egdbae abjg

En todas las configuraciones se activa el *KCT* y lo hace de manera relativamente significativa en cuanto a la cantidad de apariciones (entre cuatro y 10 en cada configuración) y en cuanto a la variedad de modalidades evocadas (todas excepto dos: uso de metáforas y analogías (f) y uso de colores (k)). Aparecen indicios de invitación a la participación (a) en todas las configuraciones y de direccionamiento de las preguntas efectuadas al grupo-clase (b) en seis de ellas. También, en la mayoría de las CM se busca anclar lo que se está construyendo con herramientas relativamente a disposición por parte de los alumnos, mediante evocación de conocimientos previos (c) y uso de ideas recientes (d). Las

vinculaciones con elementos concretos, ya sea del aula (h) o de la cotidianeidad (i), se dan en tres oportunidades: al introducir nociones (CM1 y CM5) o al ejemplificar (CM4).

La activación del *SCK* en S3 (Tabla 3) fue ligeramente menor que la de S2, sobre todo en las últimas cuatro configuraciones. La configuración donde aparecen más activaciones es la CM5 y se trata de representación gráfica (a) acompañada de demostración gráfica (n). En casi todas las configuraciones la representación gráfica (a) aparece acompañada de otras acciones desde lo gráfico: ejemplificación (l), interpretación (i) y demostración (n), que le otorgan un mayor nivel de profundización. La escritura simbólica (c) es prácticamente transversal a toda la clase, potenciándose en CM4 por estar acompañada de enunciado coloquial simultáneo (m).

Si bien el dominio *KCS* se activa en siete de las nueve configuraciones (CM1 a CM5, CM7 y CM8), lo hace de manera menos recurrente que en S2. Se observa una gran cantidad de apariciones de la indagación sobre entendimiento (e), especialmente en aquellas configuraciones asociadas a demostraciones o justificaciones de reglas (CM5 y CM8). La consideración de las respuestas de los alumnos con justificación dada por el docente (b) se produce al inicio de la clase (CM1 y CM2) y en el cierre de la misma (CM7 y CM8).

En cuanto al *KCT*, a diferencia de las clases anteriores, en la tercera parte de S3 el docente no promueve de manera explícita la participación de los estudiantes (a), evidenciándose cuando: enuncia propiedades (CM4), presenta reglas (CM6 y CM8) y expone una definición asociada a otra recientemente dada (CM7). Con cinco apariciones y en los distintos momentos de la clase, se alude al apunte diseñado por el docente como material de estudio para los alumnos (e).

Tabla 2. Dominios “en acción” del MKT activados – S2

Sesión 3	<i>SCK</i>	<i>KCS</i>	<i>KCT</i>
<b>CM1: Definición de suma de vectores</b>	13 adbaalbaac cab	3 abi	3 aae
<b>CM2: Ampliación de casos: análisis por casos del módulo del vector suma</b>	8 abaaabfc	2 bb	3 abb
<b>CM3: Buena definición de la suma de vectores</b>	11 aaacbcbial	2 ge	7 jekadkj
<b>CM4: Enunciación de las propiedades de la suma de vectores</b>	8 cmcmmicb	1 a	5 gccccg
<b>CM5: Demostración de propiedades</b>	15 ananabcana haaab	5 ieeee	7 eakkaak
<b>CM6: Regla del paralelogramo para la suma de vectores</b>	2 ah		1 e
<b>CM7: Diferencia de vectores</b>	4 iabi	1 b	
<b>CM8: Regla del paralelogramo para la diferencia de vectores</b>	4 aibj	5 behee	2 bj
<b>CM9: Producto de un número real por un vector</b>	8 alabaccl		5 gakge

Se usan colores (k) para resaltar ideas en la tercera parte de las configuraciones. La evocación de conocimientos previos (c) tiene una presencia relativamente importante en CM4, cuando se enuncian propiedades. En esta sesión, al igual que la anterior, la administración del tiempo (g) se activa en momentos clave: a mitad de la clase (recreo) y al finalizar (cierre).

### ■ Comentarios finales

Las clases observadas permiten vislumbrar acciones formativas tales como la reflexión sobre los significados de los conocimientos que se van construyendo. Este tipo de acciones propende a formar profesores en Matemática que trascienden un nivel técnico de enseñanza, intentando revertir el panorama de la escuela secundaria descripto por Alves, Mendonça y Coletti (2010).

También se valora el énfasis puesto por el docente en el tratamiento de lo gráfico al involucrarse operaciones mentales diversas, ya sea en la representación gráfica en sí como en otras acciones que robustecen el proceso. Es decir, se le otorga sentido geométrico (desde lo gráfico) a las ecuaciones que se obtienen sin priorizar las técnicas analíticas, en coincidencia con lo que proponen Bonilla y Parraguez (2013) para favorecer la comprensión de los estudiantes y desarrollar su pensamiento estructural.

Esas acciones que se realizan en el tratamiento gráfico, a su vez, suelen estar apoyadas con explicaciones en el lenguaje coloquial y simbólico. En este sentido, se favorece el uso de distintos registros, enfatizándose en algunos casos los plurifuncionales, intentando superar de este modo las dificultades que describen Dallemole, Oliveira y Moreno (2014).

Analizar mediante qué modalidades y asociados a qué acciones y contenidos se activan los dominios “en acción” se constituyó en el principal interés de este trabajo. El mismo puede considerarse como un aporte a una metodología de análisis para estudiar cómo están constituidos los dominios en acción del *MKT* geometría analítica elemental. Creemos que esta metodología puede ser de utilidad para estudios posteriores, al analizar por ejemplo los modos de activación de dichos dominios en diversas clases e identificar una tipología de “buena” enseñanza de la geometría analítica elemental a futuros profesores.

Todos los aspectos mencionados pueden asociarse a modalidades constitutivas de los dominios “en acción” para las clases observadas y son elementos clave en una formación de profesores en Matemática. Es por ello que consideramos que este estudio puede colaborar en una aproximación a conocer la formación que el PM ofrece en geometría analítica elemental.

### ■ Referencias bibliográficas

- Alves, M., Mendonça, T. y Coletti, C. (2010). A transição Ensino Médio e Superior: a noção de retas e planos em R2 e R3. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 23 (pp.179-188). México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.
- Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Bonilla, D. y Parraguez, M. (2013). La Elipse desde la perspectiva de la Teoría de los Modos de Pensamiento. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 26 (pp.611- 618).



México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Coll, C., Colomina, R., Onrubia, J. y Rochera, M. (1992). Actividad conjunta y habla: una aproximación al estudio de mecanismos de influencia educativa. *Infancia y Aprendizaje*, 59-60, 189-232.

Dallemole, J., Oliveira, C. y Moreno, L. (2014). Registros de representación semiótica y geometría analítica: una experiencia con futuros profesores. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(2), 131-163.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Universidad del Valle.

Fernández, S. y Figueiras, L. (2014). Horizon Content Knowledge: Shaping MKT for a Continuous Mathematical Education. *REDIMAT*, 3(1), 7-29.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación* (4<sup>º</sup> ed.). México, DF: Mc Graw Hill.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.