EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA DEL LÍMITE AL INFINITO DE UNA FUNCIÓN: UN ESTUDIO DE CASOS

Rafael Couoh-Noh, Guadalupe Cabañas-Sánchez, Salvador Llinares, Julia Valls
Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
Universidad de Alicante. (España)
rcouoh@uagro.mx, gcabanas@uagro.mx, sllinares@ua.es, julia.valls@ua.es

Palabras clave: Conocimiento matemático del profesor, límite al infinito, planificación
Key words: Teacher mathematical knowledge, limit to infinity, planning

RESUMEN

Presentamos la caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza que moviliza un profesor de matemáticas de España (PEA) en la planificación del concepto de límite al infinito de una función. Este estudio de caso forma parte de una investigación más amplia. El modelo teórico que se usa para caracterizar el *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* (MKT) movilizado por el profesor es el planteado por Ball, Thames y Phelps (2008). Los datos se obtuvieron a través de una entrevista semiestructurada que contempló: datos personales del profesor, el aula de clases y la planificación del investigador sobre el concepto de límite al infinito de una función. Los resultados indican características de la manera en la que el *Conocimiento didáctico del contenido* es usado por PEA para tomar decisiones y justificar la planificación de la enseñanza.

ABSTRACT

We present the characterization of mathematical knowledge for teaching that mobilizes a math Spanish teacher (PEA) in planning the concept of limit of a function at infinity. This case study is part of a broader research. The theoretical model used to characterize the Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) mobilized by the teacher is raised by Ball, Thames and Phelps (2008). Data were collected through a semi-structured interviews which included: personal data of the teacher, the classroom and planning of researcher on the concept of the infinite limit of a function. The results indicate characteristics of the way in which the pedagogical content knowledge is used by PEA to make decisions and justify the planning of instruction.

Introducción

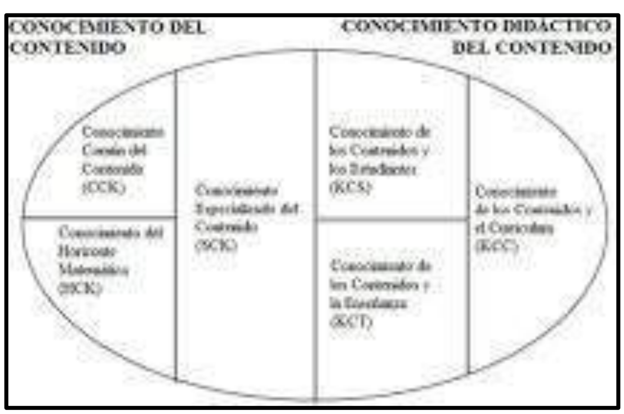
En Matemática Educativa se ha reconocido, en las últimas dos décadas, como una problemática de investigación el análisis del conocimiento profesional del profesor de matemáticas. Su importancia radica en que dota de elementos para la formación del profesorado y el desarrollo profesional, ya que las decisiones del profesor inciden directamente sobre el proceso de enseñanza (Ribeiro, Carrillo y Montero, 2012). No obstante, en México, son escasas las investigaciones realizadas en esta línea (Pinto y González, 2008). Esto motivó el estudio que se reporta cuyo objetivo fue *"caracterizar el conocimiento matemático para la enseñanza que moviliza el profesor en la planificación del concepto de límite al infinito de una función para su enseñanza".* Al estar interesados en analizar el conocimiento que moviliza el profesor de matemáticas, a través de la planificación para la enseñanza de un tópico en particular, nos enfocamos en comprender los instrumentos que la componen y las justificaciones que expone de su uso. El análisis del conocimiento profesional del profesor de matemáticas, desde una perspectiva cognitiva, supone determinar aspectos de la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje y ver al profesor como un profesional que construye su conocimiento a través de la reflexión y justificación sobre la acción (Llinares, 2000).

Marco teórico

El conocimiento matemático para la enseñanza (Mathematical Knowledge for Teaching, MKT)

Con base en el trabajo de Shulman (1986), Ball et al (2008) proponen seis subdominios del modelo del MKT (ver figura 1). Este modelo representa la unión del conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico del contenido, necesario para llevar a cabo el trabajo de enseñanza de las matemáticas. Involucra las tareas implicadas en la enseñanza y sus exigencias, una comprensión de los contenidos del currículo escolar, la planificación de las lecciones y la evaluación de los estudiantes. Los subdominios Conocimiento común del contenido (CCK), Conocimiento del horizonte matemático (HCK) y Conocimiento especializado del contenido (SCK) corresponden al dominio *conocimiento del contenido* y los tres restantes, el Conocimiento de los contenidos y los estudiantes (KCS), el Conocimiento de los contenidos y la enseñanza (KCT) y el Conocimiento de los contenidos y el currículum (KCC) corresponden al *conocimiento didáctico del contenido*.

Figura 1. Dominios y subdominios del MKT. (Ball et al., 2008)



A continuación, se describe de forma sucinta los subdominios del modelo.

1. *El conocimiento común del contenido*. Refiere a los conocimientos matemáticos y las técnicas utilizadas en una amplia variedad de entornos que no es exclusiva de la enseñanza.
2. *El conocimiento especializado del contenido.* Involucra los conocimientos matemáticos y las habilidades únicas para la enseñanza, considerados como innecesarios en otros ámbitos. Las actividades del profesor exigen una única comprensión y razonamiento matemático, así como la habilidad para desempaquetar los conocimientos matemáticos con el fin de hacer visibles, a los estudiantes, determinados aspectos del mismo.
3. *El conocimiento del horizonte matemático.* Refiere al conocimiento del profesor sobre la relación de los tópicos matemáticos en estudio con otros contemplados en el plan de estudios, para establecer el fundamento matemático de lo que vendrá después y en consecuencia, ayudar en la toma de decisiones.
4. *El conocimiento de los contenidos y los estudiantes*. Es el conocimiento que combina el saber acerca de los estudiantes y sobre las matemáticas. Los profesores deben anticipar las respuestas de los estudiantes ante una tarea y las dificultades que pueden enfrentar en el proceso de solución. Al elegir un ejemplo, deben predecir aquello que los estudiantes encontrarán interesante y motivador, asimismo tener la capacidad de interpretar el pensamiento de los escolares.
5. *El conocimiento de los contenidos y la enseñanza*. Combina el conocimiento sobre la enseñanza y el de las matemáticas. Las tareas matemáticas en la enseñanza requieren un conocimiento matemático para su diseño y secuenciación. Por ello, los profesores evalúan las ventajas y desventajas de las representaciones que utilizan para enseñar un concepto e identifican lo que ofrecen para la instrucción los diferentes métodos.
6. *El conocimiento de los contenidos y el currículum.* Es el conocimiento, en un determinado nivel educativo, de los programas de estudio, temas particulares, materiales educativos disponibles e indicaciones para implementar un currículo.

Los subdominios del MKT permiten, analizar los datos, determinar y clasificar el tipo de conocimiento que moviliza el profesor de matemáticas en la planificación del concepto de límite al infinito de una función para su enseñanza.

■ Metodología

Participante

En este reporte damos cuenta de los resultados obtenidos en el estudio de un profesor de matemáticas de secundaria de España (PEA). Este caso pertenece a una investigación más amplia con profesores de México y España. PEA tiene 59 años de edad, es licenciado en Ciencias Exactas, con 36 años de experiencia docente en la escuela secundaria (estudiantes de 12 a 18 años). Ha asistido a varios cursos de actualización docente relacionados con la Didáctica de las Matemáticas. Actualmente, estudia un doctorado en la Universidad de Alicante, España, donde desarrolla una investigación que versa sobre la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite de una función.

La recolección de los datos

Los datos de esta investigación son las respuestas de PEA a una entrevista sobre la planificación del concepto de límite al infinito de una función. Asumimos por planificación un proceso de diseño y secuenciación de tareas y actividades de enseñanza y aprendizaje cuyo propósito es generar experiencias en las cuales los escolares construyan su conocimiento (Gómez, 2006). En este proceso, el profesor usa diversos instrumentos para promover el aprendizaje en sus estudiantes, tales como: el lenguaje hablado, los modos de representación simbólica, los materiales físicos, los símbolos convencionales, las tareas-problemas instruccionales, etc., (Llinares, 2000). El foco de esta investigación se centra en la manera en la que estos diferentes instrumentos de la práctica de enseñar matemáticas se reflejan en el proceso de planificar las lecciones.

Antes de iniciar la entrevista PEA facilitó al investigador su planificación, enmarcada en el programa de enseñanza del Bachillerato de la Comunidad Valenciana (España), sobre el concepto de límite al infinito de una función, a fin de comprenderla y con base en ella elaborar el guión de la entrevista. El investigador entregó a PEA su planificación, enmarcada en el Nivel Superior de la UAGro (México), con el fin de que la analizara previo a la entrevista. Esta forma de proceder la justificamos al considerar que el profesor de matemáticas moviliza determinados conocimientos en su planificación y reafirma éstos o manifiesta otros cuando analiza una planificación externa, lo que permite tener una mejor aproximación al conocimiento que se pretende examinar. Se realizaron una serie de entrevistas centradas en cada momento en las dos planificaciones consideradas.

La entrevista se desarrolló en cuatro sesiones, las cuales fueron audiograbadas con un dispositivo móvil y posteriormente transcritas. A continuación, se detallan los aspectos desarrollados en cada una de ellas.

a. *Primera sesión.* Su objetivo fue contextualizar al participante y conocer aspectos relativos a los estudiantes y al programa de estudios, y cómo éstos influyen en su planificación. Algunas preguntas propuestas fueron: ¿Cuál es su formación académica? ¿Cuánto tiempo lleva impartiendo clases y en qué nivel educativo? ¿Qué edad tienen en promedio sus estudiantes? ¿Qué materiales utiliza para planificar su clase?
b. *Segunda sesión.* Su propósito fue comprender, cómo el profesor justificaba su planificación del concepto de límite al infinito de una función (secuencia de tareas y su articulación con la propuesta curricular de la administración). Para ello, se plantearon los aspectos siguientes: ¿Qué objetivo plantea el currículo respecto al concepto del límite al infinito? ¿Cuáles serían los objetivos principales de su planificación del límite al infinito? ¿Cuáles son las actividades que plantea a los estudiantes?
c. *Tercera sesión.* Su finalidad fue indagar sobre las justificaciones del profesor respecto a los instrumentos contemplados en la planificación del investigador para la enseñanza del tópico de interés. Las preguntas desarrolladas fueron: ¿Qué tan apegado se encuentra el objetivo de la planeación respecto al currículum español? ¿Considera adecuado el contexto presentado, por qué? ¿Qué actividades incluiría o eliminaría?
d. *Cuarta sesión.* Su propósito fue conocer las argumentaciones del profesor sobre los instrumentos contemplados en su planificación. Algunas cuestiones planteadas fueron: ¿A qué se debe que potencie el uso de la calculadora científica? ¿Por qué favorece el registro numérico en el estudio del límite al infinito de una función? ¿Los estudiantes realizan gráficas en algún momento, por qué?

El análisis de los datos

El análisis contempló tres fases y se realizó a nivel descriptivo. La primera, radicó en el preanálisis de las entrevistas para reducir el volumen de los datos e involucró las tareas siguientes: triangular los instrumentos de la planificación del profesor y del investigador con las entrevistas; seleccionar las unidades de análisis y anotar las ideas asociadas a éstas. Las unidades de análisis refieren al conjunto de frases que, a lo largo de la entrevista, ha usado el profesor vinculado a su conocimiento matemático para la enseñanza de un tópico matemático en particular. La segunda, implicó agrupar las unidades de análisis en cada uno de los seis subdominios del MKT. La tercera, consistió en mirar todas las unidades de análisis en cada subdominio, para determinar el conocimiento que moviliza PEA.

En el análisis de los datos se contempló la aproximación dinámica del concepto de límite de una función, entendida como *"Sea f una función y a un número real, el número L es el límite de la función f en el punto a, y se escribe* $Lim_{x\to a} f(x)$*, si cuando x se acerca al número a, sus imágenes f(x) se acercan a L"*y la aproximación métrica en términos de desigualdades (Valls, Pons y Llinares, 2011), tomando como referencia la definición formal de límite que incorpora la notación épsilon-delta, esto es$\mathrm{Lim}_{\mathrm{x}\to\mathrm{a}} \mathrm{f(x)} = \mathrm{L} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, 0 < |\mathrm{x}-\mathrm{a}| < \delta \Rightarrow |\mathrm{f(x)} - \mathrm{L}| < \varepsilon$.

En este reporte presentamos los resultados del análisis de las entrevistas relativas a la planificación del concepto de límite al infinito de una función planteada por el investigador.

Resultados

Las justificaciones de PEA, respecto a los instrumentos que utiliza el investigador en su planificación: tareas; registro analítico, gráfico, numérico y verbal, favoreciendo una conversión entre estos; contexto extramatemático; aproximación dinámica; y función logística, permitieron reconocer que moviliza los siguientes subdominios del MKT: *El conocimiento de los contenidos y los estudiantes, de los contenidos y la enseñanza, de los contenidos y el currículum,* es decir, los tres subdominios correspondientes al *Conocimiento didáctico del contenido*, tal como se evidencia a continuación:

1. *El conocimiento de los contenidos y los estudiantes*. PEA reconoce limitaciones en la propuesta de planificación analizada para que los estudiantes se aproximen al concepto de límite al infinito de una función, las razones que establece son:

   a) La función utilizada plantea el estudio de un fenómeno que tiene un comportamiento similar en todos los casos, convergen rápidamente, lo que constituye un obstáculo de tipo didáctico, provocando una idea errónea del infinito como algo finito, y;

   > ***PEA:*** ***El tiempo con el tipo de función*** (alude a la función logística)... ***su comportamiento ya es muy estable****… es decir... en las tablas de valor o en las propias gráficas* ***a partir de la semana quince el comportamiento****...* ***está perfectamente determinado****…* ***es un infinito muy finito****.*

   b) El contexto manejado es adecuado, pero interesante sólo para algunos estudiantes con base en sus preferencias académicas y personales.

> ***I:*** *¿**Está cerca de la realidad del estudiante** esto que estamos haciendo* (estudiar el tópico usando el contexto enfermedades epidémicas y la función logística)*?*

> ***PEA:*** ***Si es un estudiante… que tiene aficiones**... por ejemplo... **a medicina sí**... **si es un ingeniero**... sería mejor haber utilizado... el contexto de redes sociales.*

Asimismo, reconoce la complejidad del concepto, razón por la que considera necesario plantear múltiples tareas sobre los tipos de límite y casos donde no exista.

> ***I:*** *La planeación dada* (se refiere a la del investigador)*… ¿**contribuye al aprendizaje del límite al infinito**?*

> ***PEA:*** ***El límite en el infinito… es un concepto complejo… la implementación ayuda a acercarse a una de las partes de ese concepto… pero no es el concepto en sí…pero si va en la línea del infinito**… ya te lo comentaba antes... **es vital que entiendan… que hay funciones que no tienen límite… no sería conveniente que ellos pensaran que siempre hay límite**.*

Es decir, estos protocolos ponen de manifiesto que PEA usaba elementos del conocimiento de matemáticas y los estudiantes en su análisis de la planificación de la enseñanza del límite al infinito de una función.

2. *El conocimiento de los contenidos y la enseñanza*. PEA identificó la construcción del concepto de límite al infinito de una función indicando:

a) El uso y la conversión de los registros analítico, gráfico, tabular y verbal favorece su interiorización por parte del estudiante;

> ***I:*** *¿**Haría alguna modificación en las actividades*** (se refiere a la planificación del investigador)*?*

> ***PEA:*** *Una vez que tu asumes que te has centrado en la función logística **pues no**... **la tarea uno te pide una tabla**... **la tarea dos… está relacionada con las gráficas**... la tarea tres vuelve a estar relacionada con una tabla... **la tarea cuatro** con una gráfica **ya se pide un poco más de comportamiento y expresiones analíticas**... **la cinco utiliza el lenguaje escrito**... **y el seis debe ser un resumen**... **está bastante bien… tocas todos los registros**... **es completo**.*

b) El uso de una función específica, cuyo comportamiento es similar en todos los casos, acota el estudio del tópico; y,

I: ***Las actividades*** (alude a las de la planificación del investigador) *que tenemos* ***contribuyen al logro del objetivo que planteamos****... que le mencioné al inicio.*

PEA: ***Si es al estudio en el infinito de la función logística****...* ***claro que sí***

c) Las actividades contemplan un estudio gradual y progresivo del tópico para el tránsito de una noción intuitiva a una formal desde el punto de vista del rigor de la matemática.

PEA: *Y no digo que es equilibrado* (las actividades de la planificación del investigador)*… vamos* ***en un principio tocas… diferentes registros de representación… y tiene*** *digamos…* ***un avance progresivo****… a medida que vas avanzando… vas pidiendo más…* ***pasas del lenguaje común y empiezas a pedir también expresiones un poco más formales****.*

Por cuanto a la forma de organización de la actividad en el aula de clases, propone contemplar tiempo suficiente para que los estudiantes reflexionen sobre las tareas, las analicen y discutan sobre las mismas.

I: *El tiempo para el desarrollo de las actividades* (planificación del investigador) *es de dos sesiones de cien minutos cada uno… ¿****será adecuado este tiempo****?*

PEA: ***Dos sesiones de cien minutos… son tres horas… a dos problemas por hora****… podría ser… en un principio* ***irás justo de tiempo****… a no ser que las respuestas sean telegráficas* (alude a respuestas sin procedimientos)*… pero* ***si pides algún razonamiento*** *y que te escriban algún razonamiento…* ***irás corto de tiempo****.*

3. *El conocimiento de los contenidos y el currículum.* Admite la pertinencia de la planificación del investigador en su contexto particular, el Bachillerato de la Comunidad Valenciana (España). Lo justifica en el marco del programa de matemáticas correspondiente, el cual plantea el estudio de la tendencia de funciones y la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función mediante el registro algebraico.

I: *¿****Se puede implementar*** (se refiere a la planificación del investigador) ***en el currículum español****?*

PEA: *Bueno* ***en un principio sí… se buscan tendencias de funciones y las tendencias de funciones aparecen en el currículum español****.*

Su experiencia docente le lleva indicar que es posible que en la planificación dada exista falta de apoyo en el uso de los registros de representación gráfico y tabular para la enseñanza del tópico.

PEA: ***En el sistema español trabajamos más desde… las funciones algebraicas que desde las gráficas****… las gráficas las utilizamos como apoyo didáctico.*

Reflexiones

Nuestra investigación se ha interesado por caracterizar la manera en la que el conocimiento matemático para la enseñanza es movilizado por el profesor de matemáticas cuando analiza una planificación externa. En el caso estudiado, PEA, solo movilizó el *Conocimiento didáctico del contenido* del MKT cuando justificó el uso de los instrumentos contemplados en la planificación del investigador. No obstante, consideramos que PEA no ha movilizado los subdominios del MKT correspondientes al *Conocimiento del contenido* (*El conocimiento común del contenido, especializado del contenido y del horizonte matemático*) por las características del guión de entrevista. Pensamos que el análisis de su planificación permitirá confirmar no solo la movilización del conocimiento correspondiente a Conocimiento didáctico del contenido, sino que también permitirá determinar si pone en acción los subdominios correspondientes al Conocimiento del contenido. El caso PEA evidencia la importancia de contemplar diversos instrumentos en la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función y predecir posibles obstáculos del uso de éstas. Esto confirma nuestra hipótesis de que los estudios desarrollados sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas dotan de herramientas para la formación del profesorado y su desarrollo profesional. Para concluir, en estudios posteriores, consideramos pertinente el desarrollo de la planificación del investigador por un profesor de matemáticas, donde interesaría analizar su práctica profesional.

Referencias bibliográficas

Ball, D., Thames, M., y Phelps, G. (2008).Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59(5),* 389-407.

Gómez, P. (2006). La planificación: una competencia fundamental del profesor. Recuperado de http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/GomezP06-2799.PDF.

Llinares, S. (2000). Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas. En J.P. da Ponte & L. Serrazina (coord.). *Educaçao Matemática em Portugal, Espanha e Italia.* (pp. 109-132). Lisboa, Portugal: Secçao de Educaçao Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciêncas de Educaçao.

Pinto, J. y González, M. (2008). El conocimiento didáctico del contenido en el profesor de matemáticas: ¿una cuestión ignorada? *Educación matemática, 20(3)*, 83-100.

Ribeiro, M., Carrillo, J. y Monteiro, R. (2012). Cognições e tipo de comunicação do professor de matemática. Exemplificação de um modelo de análise num episódio dividido. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 15(1),* 93-121.

Shulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher, 15(2)*, 4-14.

Valls, J., Pons, J., y Llinares, S. (2011). Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función. *Enseñanza de las ciencias, 29(3),* 325-338.