REFINAMIENTO DE UNA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA PARA EL CONCEPTO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Isabel García Martínez, Marcela Parraguez González
Universidad Católica del Norte. (Chile), Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. (Chile)
igarcia@ucn.cl, marcela.parraguez@ucv.cl

Palabras clave: APOE, descomposición genética, inducción matemática
Key words: APOS, genetic decomposition, mathematical induction

RESUMEN

En este trabajo se presenta un estudio del concepto de inducción matemática en la enseñanza superior, bajo el marco de la teoría APOE y el estudio de casos como diseño metodológico. Con base en una descomposición genética diseñada por Dubinsky y Lewin para dicho concepto, se analizan las producciones de diez estudiantes universitarios para sustentar cuáles de las construcciones que propone la descomposición genética muestran los estudiantes. A la luz de los resultados obtenidos, se refina la descomposición genética, explicitando en ella el paso base de inducción matemática como construcción mental proceso.

ABSTRACT

This paper presents a study of the concept of mathematical induction in higher education, under the framework of APOS theory and a case study as methodological design. Based on a genetic decomposition designed by Dubinsky and Lewin of this concept, the productions of ten undergraduate students are analyzed to support which of the constructions proposed by the genetic decomposition, are shown by the students. Based on the results obtained, the genetic decomposition is refined, specifying the basis step of mathematical induction as a mental construction process.

Introducción

Problemática y objetivos de investigación

A partir de las experiencias laborales educacionales en instituciones universitarias de la segunda y quinta región de Chile, hemos podido percibir la dificultad que tienen estudiantes universitarios con el concepto inducción matemática. Consideramos que los estudiantes universitarios aplican el principio de inducción matemática en forma mecánica, sin comprenderlo como un todo, es decir, ellos no consideran las dos afirmaciones que involucra el principio de inducción, dando prioridad a una de las afirmaciones por sobre la otra.

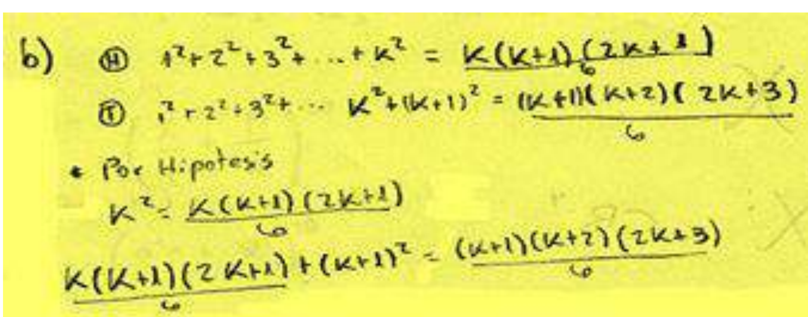
El principio de inducción matemática afirma que si $P(n)$ es una función proposicional, donde n representa un número natural, que cumple:

a) $P(n_0)$ es verdadera para un valor natural inicial n_0 (paso base) y
b) si $P(k)$ es verdadera para un valor natural k $(k \geq n_0)$, entonces $P(k+1)$ es verdadera (paso inductivo), entonces $P(n)$ es verdadera para todo natural mayor o igual que n_0 (Grimaldi, 1997).

Resaltamos que en este principio descrito, el paso base no es una hipótesis superflua, ya que si este paso no se cumple, la función proposicional no es verdadera para todos los números naturales e incluso puede no ser verdadera para ningún número natural, aunque sea verdadero el paso inductivo. Por ejemplo, la función proposicional en los números naturales $n = n + 1$ cumple el paso inductivo, pero no el paso base, sin embargo no es verdadera para ningún número natural.

Como evidencia de la problemática expuesta, se muestra en la Figura 1, la forma en que uno de nuestros estudiantes universitarios realiza la primera parte del paso inductivo, cuando se le solicita que demuestre por inducción que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Figura 1: Estudiante universitario haciendo uso de inducción matemática.



Lo que hace aquí el estudiante es considerar solamente el último sumando de la suma, en lugar de considerar toda la suma y realiza una demostración (incorrecta), que se considera una forma mecanizada de proceder.

Los objetivos de esta investigación son: analizar las construcciones mentales que realizan los estudiantes universitarios al construir el concepto de inducción matemática, y refinar la descomposición genética para inducción matemática diseñada por Dubinsky y Lewin (1986).

Antecedentes

Hay varias versiones sobre el origen de la inducción matemática. Según Bourbaki (1972), el principio de inducción fue concebido y empleado por primera vez por B. Pascal en el siglo XVII, aunque era utilizado por los matemáticos desde la primera mitad del siglo XVII. Pero fue solamente en el año 1888 cuando se formula de manera precisa el principio, al presentar Dedekind un sistema completo de axiomas para la aritmética (sistema reproducido posteriormente por Peano y que hoy lleva su nombre), uno de estos axiomas es el principio de inducción matemática.

En Reid (1992) se afirma que la primera prueba con inducción matemática fue publicada por Francesco Maurolico en 1575. Pascal (1623-1662) es más explícito que Maurolico cuando realiza pruebas por el método de inducción matemática en el hoy conocido “triángulo de Pascal”.

A continuación se presenta un breve análisis de trabajos en Matemática Educativa relacionados con el principio de inducción matemática.

Dubinsky y Lewin (1986) estudian la inducción matemática basándose en la teoría APOE, la cual, en ese entonces, era solamente la interpretación de la epistemología de Piaget. Investigaciones posteriores (Dubinsky, 1986; 1989) se basan en un análisis teórico (descomposición genética) reportado en el artículo de Dubinsky y Lewin (1986), para realizar actividades con estudiantes, a través de computadores (usando lenguaje de programación SETL e ISETL) para ayudarlos a hacer ciertas construcciones mentales desde la abstracción reflexiva.

Por otro lado, Reid (1992) en su tesis explora las diferentes formas de entender la inducción matemática que los alumnos universitarios desarrollan, con el fin de aclarar la naturaleza de las dificultades asociadas a ellas.

Años más tarde, en el artículo de Crespo, Lestón y Homilka (2011) sobre la argumentación en el aula de matemática, se hace referencia al tema de inducción matemática en la universidad. Ellas afirman que en las demostraciones por inducción matemática muchas veces los estudiantes descuidan el paso base, por ser más fácil que el inductivo y olvidan su significado e importancia.

Marco teórico

La teoría APOE, cuya sigla significa Acción, Proceso, Objeto y Esquema, fue creada por Ed Dubinsky (1996) y está basada en la teoría de Piaget sobre la construcción del conocimiento; posteriormente se ha seguido desarrollando por el grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community) y otros investigadores (Arnon et al., 2014).

Según esta teoría todos los conceptos matemáticos pueden representarse en términos de acciones, procesos, objetos y esquemas. Las acciones son transformaciones de los objetos que el estudiante percibe, en general, como externas. Al ser repetida una acción y el estudiante reflexionar sobre ella, se interioriza y se obtiene un proceso, aquí ya no precisa más del estímulo externo. Al coordinar dos o más procesos también se obtiene otro proceso. Cuando el estudiante es capaz de pensar el proceso como un todo y actuar sobre él, se dice que ha encapsulado el proceso en un objeto.

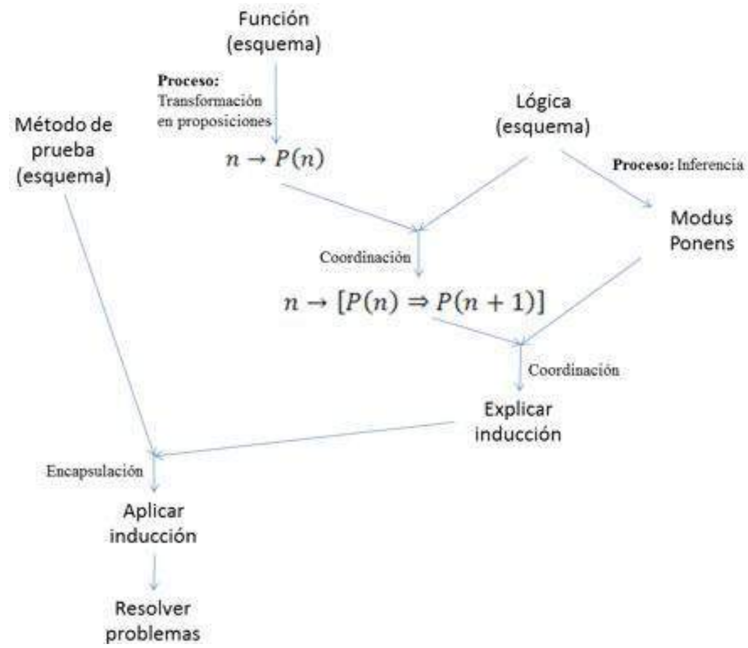
También es importante la desencapsulación que consiste en volver al proceso que generó cierto objeto, para coordinarlo con otros procesos y encapsularlos en nuevos objetos. Un conjunto de acciones, procesos y objetos relacionados con un concepto matemático y las relaciones entre éstos forman un esquema; que es una estructura coherente e inacabada ya que un esquema puede asimilar un nuevo objeto que se reacomoda a las estructuras existentes. Por otro lado, un esquema puede ser visto como un objeto, en tal caso se dice que el esquema se ha tematizado.

La teoría APOE también proporciona un ciclo de investigación compuesto por tres componentes: análisis teórico o descomposición genética, diseño y aplicación de instrumentos y análisis y verificación de los datos. Sin embargo, la descomposición genética es la hipótesis de investigación, representada a través de un modelo para el aprendizaje de un determinado concepto matemático, esta se prueba, se analiza y en caso de ser necesario se vuelve a la descomposición genética y se refina. Se sigue este ciclo las veces que sea necesario.

■ La investigación propuesta

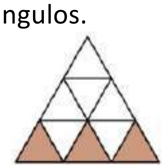
En este estudio se considera una descomposición genética de inducción matemática que ya diseñaron Dubinsky y Lewin (1986), la cual se presenta en la Figura 2. A partir del diseño de la Figura 2, se indaga la viabilidad de dicha descomposición genética para que estudiantes universitarios lleguen a construir el concepto de inducción matemática como objeto. Para testear la descomposición genética, como camino viable de construcción de inducción matemática, se elaboró un cuestionario de 3 preguntas, que fueron aplicadas a diez estudiantes de diversas universidades de Chile (los que están etiquetados como E1, E2,…, E10). Estos estudiantes eran de diferentes carreras y niveles, pero todos ellos ya habían estudiado en algún curso el principio de inducción matemática. En las dos primeras preguntas del cuestionario, que se detalla a continuación, los estudiantes realizan demostraciones geométricas a partir del principio de inducción matemática.

Figura 2: Descomposición genética de inducción matemática (Arnon et al., 2014, p. 31).



Las preguntas del cuestionario fueron las siguientes:

1. Demuestre por inducción matemática que el número de diagonales de un polígono convexo de n lados es $\frac{n(n-3)}{2}$.
2. Se considera un triángulo como el de la figura, formado por triángulos equiláteros. En este caso en la base hay 3 triángulos y en total hay 3^2 triángulos.



c) Demuestre por inducción matemática que esto es cierto para cualquier número de triángulos de la base, o sea que si en la base hay n triángulos, entonces en total hay n^2 triángulos.

d) La intensión de las preguntas 1 y 2 es indagar el tipo de construcción mental que muestra un estudiante con respecto a $n \to [P(n) \Rightarrow P(n+1)]$, a "aplicar inducción" y a "*Modus Ponens*".

3. ¿Cómo le explicaría a un estudiante que no sabe mucho del tema, qué es el principio de inducción matemática? Suponga que después de explicarle al estudiante, le muestra un ejemplo y él todavía no entiende. ¿Cómo lo convencería de que es cierto, por ejemplo para $n = 1000000$?

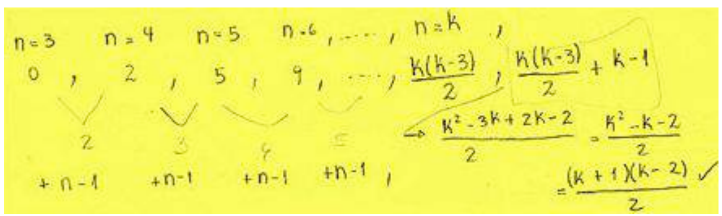
En esta pregunta se quiere indagar la concepción que muestra el estudiante respecto a "explicar inducción" y a "*Modus Ponens*".

En la búsqueda de evidencias para la descomposición genética

Para el análisis de los datos obtenidos de la aplicación del cuestionario, se consideraron estudiantes quienes parecen comprender la inducción matemática y otros que no lo hacen, y luego se discute que la diferencia radica en la presencia o falta de una construcción mental en particular que aparece en la descomposición genética de la Figura 2.

Siete de los diez estudiantes tratan de resolver los problemas del cuestionario de forma algebraica, de manera incorrecta. En la pregunta 1, algunos de ellos calculan el número de diagonales para varios polígonos, buscan un patrón en las diferencias de los números de diagonales de dos polígonos con números de lados consecutivos y eso es lo que suman cuando tratan de probar el paso inductivo, para pasar del número de diagonales de un polígono de k lados a otro de $k+1$ lados (Figura 3).

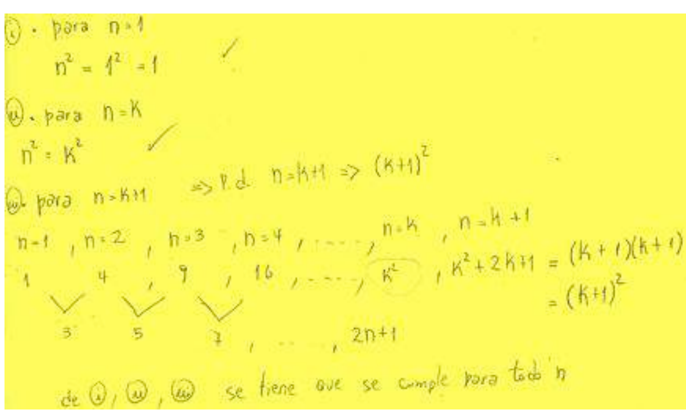
Figura 3: ***Respuesta del paso inductivo de la pregunta 1, E2.***



En la pregunta 2, en general, los estudiantes proceden de forma similar a la pregunta 1, la diferencia es que en este caso, algunos no cuentan los triángulos, sino que simplemente ven las diferencias de los cuadrados de los números naturales.

Hay estudiantes, como E2, que no muestran ni siquiera la concepción acción de $n \rightarrow [P(n) \Rightarrow P(n+1)]$, ya que dividen la demostración en tres partes (i), (ii) y (iii) (Figura 4) y, luego de demostrar (de forma incorrecta) el paso inductivo, afirman que la proposición se cumple para todo n por (i), (ii) y (iii).

Figura 4: ***Respuesta de la pregunta 2, E2.***



Hay dos estudiantes (E4 y E10) que prueban el paso base, el paso inductivo, pero no concluyen que la proposición se cumple para todos los números naturales, esto nos indica que dichos estudiantes muestran una concepción proceso de "$n \rightarrow [P(n) \Rightarrow P(n+1)]$".

En cuanto a "explicar inducción", no lo hacen en forma correcta por no coordinar el paso base con el paso inductivo y por no tener interiorizado el concepto "*Modus Ponens*". Esto se evidencia cuando el estudiante E10 responde la segunda parte de la pregunta 3, así: *"No intentaría convencerlo sin que antes comprenda cómo funciona la inducción, y primeramente se lo probaría para valores menores de n."*

Respecto al paso base, aproximadamente la mitad de los estudiantes lo demuestra, los otros hacen una especie de chequeo, sin mencionarlo y en algunos casos ni siquiera explican por qué es verdadero.

A partir de los comentarios en las respuestas que realiza el estudiante E5, se puede percibir que él es el único que muestra la importancia del paso base, cuando en la pregunta 2 dice: "*Si no hubiese podido demostrar el paso base, no podría concluir que la proposición es verdadera, aun si hubiese hecho el resto de la demostración por inducción.*" Dicho estudiante muestra una concepción objeto de inducción matemática, a diferencia de los demás estudiantes. E4 y E10 no llegan a coordinar el paso base y el paso inductivo.

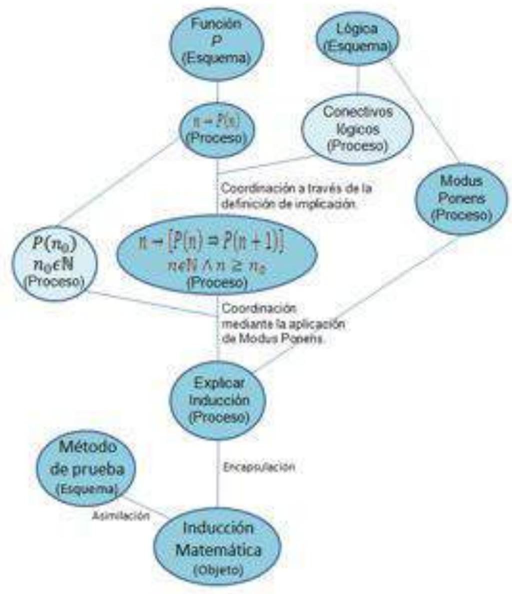
Si bien es cierto, el paso base no aparece en forma explícita, en la descomposición genética de la Figura 2, consideramos que debe estar presente en la descomposición genética como construcción mental proceso, para que sea coordinado con "$n \rightarrow [P(n) \Rightarrow P(n+1)]$", ya que es un constructo por el cual deben transitar los estudiantes para hacer demostraciones por inducción matemática.

■ Descomposición genética refinada de inducción matemática

En la Figura 5 se muestra la descomposición genética refinada, en la cual se incorporó el paso base como construcción mental proceso, así como también se han explicitado los estados de las construcciones y los mecanismos mentales que son necesarios, razón por la cual se adicionó "conectivos lógicos" como construcción mental proceso, para poder coordinarlo con el proceso "$n \rightarrow P(n)$".

Si el estudiante muestra el concepto de "función" como esquema, es capaz de construir el proceso que asocia a cada número natural n una proposición, además podrá determinar si dicha proposición es verdadera para un determinado número natural n_0 (que se considerará en esta investigación como paso base). Dentro del esquema "lógica", el estudiante puede considerar "conectivos lógicos" como proceso, el cual puede coordinar con el proceso que asocia a cada número natural n una proposición, a través de la definición de implicación, para obtener como proceso el determinar si es verdadero el paso inductivo. El paso base y el paso inductivo se coordinan a través de "*Modus Ponens"* para obtener como proceso "explicar inducción", que es encapsulado en el objeto "inducción matemática".

Figura 5: Descomposición genética refinada del concepto de inducción matemática.



Conclusiones

En las producciones de estos diez estudiantes, casi todos ellos presentan problema con la implicancia de $P(n)$ a $P(n+1)$, una explicación de esta dificultad desde APOE, es que no tienen el concepto "lógica" como construcción mental esquema. Los resultados hasta ahora obtenidos dan cuenta que la construcción mental $P(n_0)$ es fundamental para construir el concepto inducción matemática como objeto.

Referencias bibliográficas

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS theory*. A framework for research and curriculum development in mathematics education. New York: Springer.

Bourbaki, N. (1972). *Elementos de la historia de las matemáticas.* España: Alianza Edito-rial.

Crespo, C., Lestón, P. y Homilka, L. (2011). La argumentación en el aula de matemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24*, 845-851. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Dubinsky, E. (1986). On teaching mathematical induction I. *The Journal of Mathematical Behavior*, *5*, 305-317.

Dubinsky, E. (1989). On teaching mathematical induction II. *The Journal of Mathematical Behavior*, 8, 285–304.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática, 8*(3), 25-41.

Dubinsky, E. y Lewin, P. (1986). Reflective abstraction in mathematics education: The genetic decomposition of induction and compactness. *The Journal of Mathematical Behavior*, *5*, 55-92.

Grimaldi, R. (1997). *Matemáticas discreta y combinatoria.* Una introducción con aplicaciones. Estados Unidos: Addison - Wesley Iberoamericana, S. A.

Reid, D. (1992). *Mathematical induction. An epistemological study with consequences for teaching.* (Thesis for the degree of Master of Teaching Mathematics). Montreal: Concordia University.