ESPACIOS DE DESARROLLO DEL POTENCIAL HUMANO EN EL APRENDIZAJE DE LA INTEGRAL IMPROPIA

Lorenza Illanes, Armando Albert
Tecnológico de Monterrey Campus Monterrey. (México)
lillanes@itesm.mx, albert@itesm.mx

Palabras clave: matemática educativa, desarrollo humano, epistemología
Key words: mathematics education, human development, epistemology

RESUMEN

Esta investigación presenta un estudio del Desarrollo Humano y la Matemática Educativa como una metodología para aprender la Integral Impropia. El Desarrollo Humano permite el desarrollo del potencial de la persona a partir de cuatro principios básicos y de doce características del profesor facilitador. Paralelamente se hizo un estudio histórico-epistemológico de la Integral Impropia que propició una didáctica específica. Se investigó en la Historia de las Matemáticas el concepto de infinito, el concepto del límite, y el concepto de Integral Impropia. El Desarrollo Humano a su vez, es utilizado en esta investigación para la creación de los espacios pertinentes que permiten el desarrollo del potencial del estudiante para el aprendizaje de la Integral Impropia. La didáctica construida cuida la transposición didáctica y favorece el aprendizaje. En este estudio se presentan los elementos y vinculación del Desarrollo Humano y de la Matemática Educativa que propician el aprendizaje de la Integral Impropia.

ABSTRACT

This research presents a study of Human Development and Mathematics Education as a methodology to learn the Improper Integral. The Human Development enables the personal potential by working with four basic characteristics of the Human Development theory, and twelve principles of teaching as a facilitator. At the same time, a historical-epistemological study of the concept of infinity, the limit concept, and the concept of Improper Integral was investigated. The Human Development theory is used to create spaces for the development of the personal potential to learn the Improper Integral. The constructed didactic takes care of the transposition and improves the learning that emerges in the classroom. In this study, the elements and their relationship between the Human Development and Mathematics Education are provided to promote the learning of Improper Integral.

Introducción

Al ver a la persona como centro del aprendizaje dentro de la Matemática Educativa (Imaz, 1987; Farfán, 1997; Kilpatrick, 1992) hay un trabajo que se desarrolla dentro del aula. El Desarrollo Humano (Carl, 1990, 1995; Lafarga, y Gómez del Campo, 1992) es una corriente de la psicología que permite la creación de los espacios pertinentes (García Muriel, Gómez del Campo, Quintanilla, Acévez, Quintanilla, y Illanes, 2005), para el desarrollo del potencial de la persona (Lafarga, y Gómez del Campo, 1992). En esta investigación se presentan los elementos del Desarrollo Humano que se tienen que dar para generar estos espacios, apoyándonos en la Corriente Sistémica (Brousseau, 1986) cuidando los obstáculos epistemológicos al hacer un estudio histórico-epistemológico (Loria y Vassura, 1919; Bachelard, 1971; Boyer, 1986; Collete, 1985, Gullberg, 1997; Cariu, 2005) de la Integral Impropia, pues es en ellos donde se puede dar un desarrollo del potencial (Lafarga, y Gómez del Campo, 1992), al crear una ingeniería didáctica (Artigue, 1989, 1992), para la Integral Impropia y al cuidar la transposición didáctica (Chevallard y Joshua, 1991) haciendo espacios que favorezcan el aprendizaje dentro de la fenomenología (Husserl, 1991) del aula. En esta investigación se presenta como estos elementos se tienen que dar para propiciar el aprendizaje de la Integral Impropia y como se debe de construir la relación entre los mismos dentro del aula, para comprobar los beneficios de la generación de los espacios del Desarrollo Humano (García Muriel et. al., 2005), en dicho aprendizaje.

Para poder presentar este estudio, el presente escrito se dividió en las secciones que describimos a continuación. Iniciamos con un marco teórico compuesto de los elementos que fundamentan los elementos del Desarrollo Humano (Carl, 1990, 1995; Lafarga, y Gómez del Campo, 1992) y de la Matemática Educativa (Kilpatrick, 1992) que están presentes en este estudio; se continúa con la descripción de la metodología que se utilizó y un ejemplo que se trabajó. Para concluir que metodología es adecuada para el aprendizaje de la Integral Impropia. A continuación iniciamos con los fundamentos que dan sustento a esta investigación.

Marco Teórico

El Desarrollo Humano (Carl, 1990, 1995; Lafarga, y Gómez del Campo, 1992) es una corriente de la psicología que permite la creación de los espacios pertinentes (García Muriel et. al., 2005), para el desarrollo del potencial de la persona (Lafarga, y Gómez del Campo, 1992). Para esta investigación el marco teórico se divide en varias partes: filosofía y psicología, predecesores del Desarrollo Humano (García Muriel et. al., 2005), las características principales del Desarrollo Humano (Rogers 1990). Características que debe de poseer un facilitador de Desarrollo Humano (Rogers, 1995) para propiciar espacios áulicos adecuados para el aprendizaje de la Integral impropia. Carl Rogers (1990), fue también un ávido y persistente investigador del Desarrollo Humano, lo que lo llevó a demostrar la validez de varias de sus hipótesis.

Algunas de las enseñanzas que dejó, fue el resumen la filosofía del Desarrollo Humano mediante cuatro principios básicos, que son: ser congruente, escuchar, la empatía y confiar. Rogers (1995), propone además doce características que debe tener el profesor facilitador:

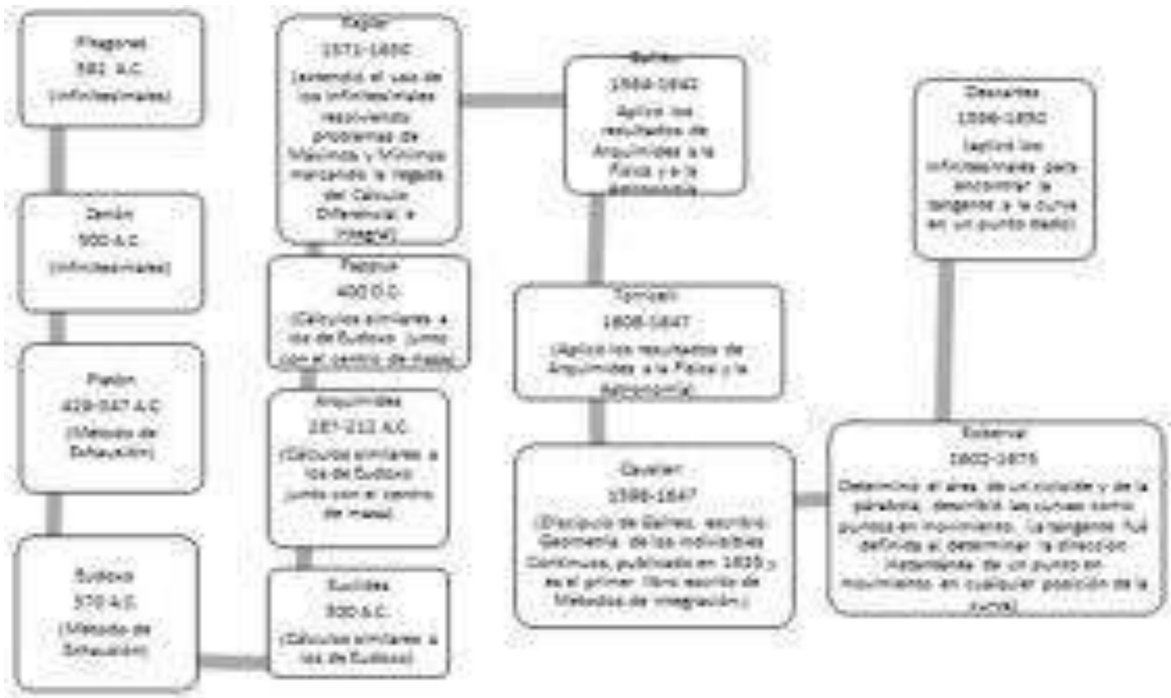
- Sinceridad tanto para el mundo interior como para el exterior.
- Deseo de autenticidad. Son las personas que valoran la comunicación para expresar las cosas como son.

- Valoran la Ciencia y la Tecnología cuando se transmite por el camino del autoconocimiento y el autocontrol.
- Aspiración a la totalidad en su persona lo físico, lo intelectual y lo sentimental integrado en la experiencia personal.
- El deseo de intimidad, buscan nuevas formas de comunicación en la comunidad, tanto verbal como no-verbal, sentimental como intelectual.
- Personas en proceso, están conscientes que la vida es cambio y lo enfrentan con vitalidad.
- Son personas cariñosas que están dispuestas a ayudar a los demás si la necesidad es real.
- Sienten afinidad y cariño por los elementos de la naturaleza.
- Solo creen en las instituciones que están al servicio de los demás.
- Tienen autoridad interna ya que creen en su propia experiencia y desconfían fundamentalmente de la autoridad externa. Desobedecen las normas o leyes que les parecen injustas.
- Las cosas materiales carecen de importancia para los facilitadores. Pueden vivir en la abundancia pero también pueden prescindir de ella.
- Tienen anhelo por lo espiritual, buscan la paz interna.

Por otro lado, en la presente investigación, se establecen los fundamentos del obstáculo epistemológico (Brousseau, 1978) y la transposición didáctica (Chevallard y Joshua, 1991), pues son importantes para fundamentar un análisis Histórico-Epistemológico (Loria y Vassura, 1919; Bachelard, 1971; Boyer, 1968; Collete, 1985, Gullberg, 1997; Cariu, 2005) del concepto de la Integral Impropia. Se investiga históricamente el concepto de infinito dentro de la Paradoja de Zenon (Lasserre, 1966), el concepto del límite a través el método de Eudoxo (Boyer, 1986), y el concepto de Integral Impropia a través del problema de la Trompeta de Evangelista Torricelli (1608-1647) (Loria y Vassura, 1919).

El análisis Histórico-Epistemológico de la Integral Impropia es imposible de hacer sin pasar por el análisis Histórico-Epistemológico del Cálculo ya que la historia de la Integral Impropia está contenida dentro de la historia del cálculo, por lo cual se presenta someramente un diagrama de la historia del cálculo (ver figura 1).

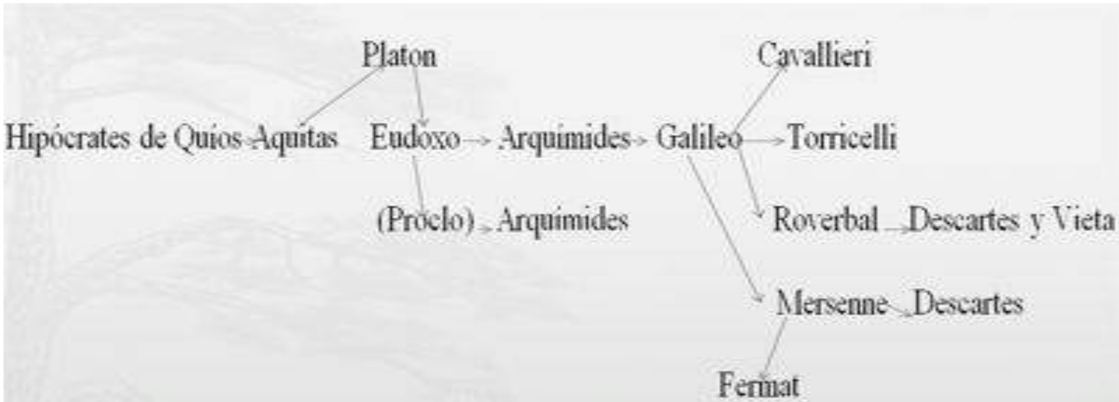
Figura 1. Historia del cálculo tomando como referencia la integral impropia.



Dentro de la Historia del Cálculo se puede hacer un análisis Histórico-Epistemológico de los elementos y del desarrollo de la integral impropia (ver figura 2). Históricamente al buscar la aparición de la Integral Impropia es atribuída a tres autores: Cavallieri, Torricelli y Roverbal (Boyer, 1986; Collete, 1985), en esta investigación después de analizar a los tres se tomó a Torricelli (Loria y Vassura, 1919) para estructurar el aprendizaje de la integral impropia.

Evangelista Torricelli (1608-1647), físico matemático italiano nació el 15 de octubre de 1608 en Faenza cerca de Ravena. Estudio en el colegio de jesuitas de su ciudad natal. Su formación matemática la obtuvo en Roma. Torricelli fue alumno de Galileo con el que trabajo 3 meses como secretario, sucesor de Galileo como el matemático del gran duque y Toscana. Era amigo de Roberval y Mersenne (Boyer, 1986; Collete, 1985), Roberval era profesor del Royal College en Francia de 1634 a 1675, su idea, que no era nueva, era concebir las curvas como un camino de un punto en movimiento. Si el movimiento del punto generaba una curva, es la resultante o combinación de dos movimientos simples, entonces la línea instantánea del movimiento podía ser compuesta de movimientos constituidos.

Figura 2. Línea histórica somera de la integral impropia.



Roberval fue más allá de aplicar la ley del paralelogramo para vectores de velocidad instantánea. Esto es si el movimiento de un puno está compuesto de dos movimientos simples, el asumió que su vector de velocidad instantánea es la suma de los vectores de las velocidades instantáneas del paralelogramo, que corresponden a dos simples movimientos. Estos conceptos fueron aplicados al cicloide, la parábola y la elipse.

El método era correcto en cuanto la dirección de la velocidad, pero no en cuanto a su magnitud, sólo era correcto el cálculo de la velocidad instantánea (Edwards, 1937). Roverbal utilizaba el método de los indivisibles de los antiguos geómetras circunscritos e inscritos y en la utilización de la doble desigualdad:

$$1^n + 2^n + 3^n + \ldots + a^n > \frac{a^{n+1}}{n+1} > 1^n + 2^n + 3^n + \ldots + (a-1)^n$$

Este método le permitió, entre otras cosas, integrar las funciones de una potencia entera, al cuadrar todas las parábolas se construye el infinito, resolver problemas sobre la hipérbola, el conoide hiperbólico y la concoide de circunferencia (área del caracol), y demostrar que un espacio infinito puede ser igual a un dominio finito. Tiene 3 obras (Loria y Vassura, 1919): *El De recognitione aequatonum, De geométrica planarum et cubicarum aequationum resolutione* y el tratado de geometría elemental (libro de texto), Torricelli conocía bien los trabajos de Arquímides, Galileo y el método de los indivisibles de Cavalieri, elaboró otras pruebas a la manera de Arquímides utilizando el método de Eudoxo (Exhaustión).

Eudoxo estudio Matemáticas con Aquitas, Proclo afirma que Eudoxo aumento el número de teoremas generales de la geometría, se le atribuyen las propocisiones del libro V de los Elementos y sobre la sección aurea en el libro XIII proposiciones de la 1 a la 6.

La teoría de Eudoxo (Boyer, 1986), está precedida por 4 definiciones sobre la naturaleza de las razones y sobre las magnitudes entre las que existe una razón, la igualdad de las razones definida en el libro V de los elementos de Euclides. La proposición 2 del libro XII de los elementos. Arquímides atribuye a Eudoxo el axioma de continuidad: dadas 2 magnitudes entre las que existe una razón, se puede encontrar un múltiplo de alguna de éllas que exceda a la otra, esto da pie al método exhaustivo:

> Si de cualquier magnitud se substrae una parte superior o igual a su mitad, y si del resto se substrae una parte superior o igual a su mitad y si se continua este procedimiento de subdivisión quedará una magnitud más pequeña que cualquier magnitud dada de la misma especie. Esta proposición es equivalente al enunciado:
>
> $\lim_{n\to\infty} G(1-r)^n = 0$, donde G es la magnitud inicial, *r* la razón tal que $\frac{1}{2} \leq r < 1$
>
> y n el número de subdivisiones efectuadas.

Eudoxo (Boyer, 1986) es el primer matemático conocido que empleo un algoritmo eficaz en el cálculo integral. Torricelli en 1641 contribuyó al desarrollo del cálculo integral demostrando que la rotación de sólidos de longitud infinita engendraban un volumen finito.

Torricelli creía erróneamente haber sido el primero en descubrir un resultado de esta naturaleza ya que Oresme, Fermat y Roverbal (Boyer, 1986, Collete, 1985) habían previsto resultados semejantes. Torricelli hizo la demostración de un sólido hiperbólico agudo. Para hacer esta demostración hay 5 lemas y 21 corolarios, que están incluidos en el libro Opere Geométrica bajo el título de "*De solido Hiperbólico acuto*".

En su tratado: "*De infinitis hyperbolis*" (Loria y Vassura, 1919) se encuentra el primer teorema general del cálculo, enunciado en una terminología geométrica al mismo tiempo que lo hizo Fermat. Una vez establecidos los elementos históricos epistemológicos de la Integral Impropia y los elementos del Desarrollo Humano que fundamentan esta investigación, se puede describir la metodología que se usó en este estudio.

Metodología

El estudio es de corte cualitativo y se trabajó con un grupo de 30 estudiantes en promedio del curso de Cálculo II de la carrera de Ingeniería. Con respecto a la medición de conocimientos previos, se hace una prueba diagnóstica (Slavin y Crisonino, 2001) y de acuerdo a los resultados se asigna una batería de ejercicios, para posteriormente volver a evaluar y verificar que el aprendizaje se haya dado de manera autorregulada. El modelo didáctico constructivista y centrado en el estudiante nos motiva a considerar varias facetas del estudiante: su persona, mediante el Inventario de Orientación Personal (Shostrom, 1964), su actitud hacia las matemáticas (Manning, 1998), sus conocimientos previos.

El pretest y postest diagnóstico (Slavin y Crisonino, 2001) que permite trabajar uno de los principios del Desarrollo Humano: la generación de espacios para el crecimiento de toda persona, el cual, se logra empezando donde está la persona (Lafarga, 2005); principio que esta investigación extiende al aprendizaje de la Integral Impropia.

Se construyó actividades que siguen la epistemología dada en el marco teórico con tres elementos:

- El concepto de infinito dentro de la Paradoja de Zenon (Lasserre, 1966),
- El concepto del límite a través el método de Eudoxo (Boyer, 1986).
- El concepto de Integral Impropia a través del problema de la Trompeta de Evangelista Torricelli (1608-1647) (Loria y Vassura, 1919).

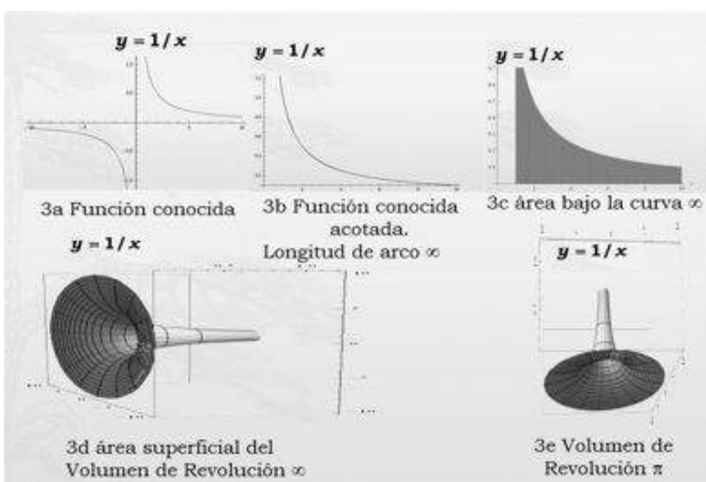
En el aspecto metodologíco para la creación de las actividades se utilizó:

- Para establecer los fundamentos del obstáculo epistemológico (Brousseau, 1978a)
- Para la transposición didáctica (Chevallard y Joshua, 1991)
- Artigue M. (1992) Ingeniería Didáctica
- Artigue M. (2008). Diseño de Ingeniería Didáctica

Para la elaboración de las actividades se tomó en cuenta los obstáculos de los que nos habla Artigue (1992): la complejidad de los objetos básicos del cálculo (números reales, sucesiones, funciones); la conceptualización y a la formalización de la noción de límite, centro del campo del cálculo y aquellas vinculadas con las rupturas necesarias de los modos de pensamiento puramente algebraicos. El trabajo sobre el concepto de infinito se estableció bajo el punto de vista numérico, algebraico y geométrico para terminar con la Paradoja de Zenón (Lasserre, 1966).

Se trabajó el concepto del límite con el método de Eudoxo (Boyer, 1986). La construcción del concepto de integral impropia se trabajó con la trompeta de Torricelli (Loria y Vassura, 1919). Se partió de una función conocida (ver figura 3a) la cual se acotó a un dominio de $[1,\infty)$ a la cual se le calculó la longitud, de arco (ver figura 3b), el área bajo la curva (ver figura 3c), el área superficial (ver figura 3d) y el volumen de revolución (ver figura 3e); causando gran controversia entre los estudiantes que la longitud de arco infinita, el área bajo la curva infinita, el área superficial del volumen infinito de un volumen finito e igual a π.

Figura 3. Construcción de la trompeta de Torricelli para el aprendizaje de la integral impropia.



Se obtuvieron frecuencias, medias y varianzas de todas estas actividades que por limitaciones de espacio para esta publicación no se incluyen. Procederemos ahora a las conclusiones.

■ Conclusión

El estudio de la Integral Impropia es de difícil aprendizaje ya que contiene conceptos muy complejos de las matemáticas como lo es el límite y el infinito, es motivo de otro tema de investigación ver las diferentes concepciones que se tienen los estudiantes del infinito y el límite, existen muchas dificultades para la notación del límite entre los estudiantes. Fue importante para la creación de espacios de Desarrollo Humano el que al estar trabajando la Integral Impropia, encontramos un potencial de desarrollo como lo fue la Ley de L'Hopital, la cual causo dificultades entre los estudiantes y se abrió un espacio para su aprendizaje, espacio que no estaba contemplado en este trabajo de investigación. Definitivamente el abrir espacios de aprendizaje apoyados en Desarrollo Humano nos permite estar más atentos al desarrollo del potencial de nuestros estudiantes como lo es el aprendizaje de la Integral Impropia.

■ Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1989). Epistemologie et didactique. *Cahier de Didactique des Mathematiques*, Paris: Universite de Paris 7, Vol. 3.

Artigue, M. (1992). Didactical engineering. In R. Douady y A. Mercie (Eds). *Recherches en Didactique des Mathématiques. Selected papers* (pp. 41–70). Paris.

Artigue, M. (2008). Didactical design in mathematics education. *Proceedings from Nordic Research in Mathematics (NORMA08)*. Copenhagen, Denmark: Carl Winsløw University of Copenhagen.

Bachelard, G. (1971). *Épistémologie*. France: Presses Universitaires de France.

Boyer, C. B. (1986). *A history of mathematics*. India: Wiley International Editions.

Brousseau, G. (1978). Les obstacles épistémologiques et les problemes en mathématiques. *En Recherches en didactique des mathématiques*, *4*(2), 165-198.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática educativa. Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 6*(1), 27-40.

Cariu, J. Y. (2005). *Former l'esprit scientifique en privilégiant l'initiative des élèves dans une démarche s'appuyant sur l'épistémologie et l'histoire des sciences*. Université de Genève. Geneve: Université de Genève

Chevallard, Y. y Joshua, M.A. (1991). *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Collette, J. P. (1985). *Historia de las matemáticas*. Vol. I-II. México: Siglo XXI.

Dollard, J. (1935). *Criteria for life history*. Yale: Universidad de Yale.

Farfán, R. M. (1997). La investigación en matemática educativa en la reunión Centroamericana y del Caribe referido al nivel superior. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *1*(0), 6-26

García Muriel, L., Gómez del Campo, J., Quintanilla, L., Acévez, L. M., Quintanilla, A. E. e Illanes, L. (2005). *Juan Lafarga Corona*: un sembrador de esperanza*.* Monterrey, México: AGISA.

Gullberg, J. (1997) *Mathematics:* from the birth of numbers*.* United States: W. W. Norton y Company, Inc.

Husserl, E. (1991). Die krisis der Europäischen Wissenchaften und die Transzendentale Phänomenologie Ergänzungsband: *Texte aus dem Nachlass. Dordrechet* (pp. 1934-1937). Holland/Boston: Kluwer.

Imaz, C. (1987) ¿Qué es la matemática educativa? *Memorias de la Primera Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa*. México.

Kilpatrick, J. (1992). A history of research in mathematics education. En Grows, D. (Ed.). *Handbook of research on mathematics education teaching and learning*. New York: Macmillan, pp. 3-38.

Manning, R. (1998). *Mastering mathematics*: how to be a great math student (3a. ed.). EE.UU: Brooks/Cole.

Lafarga Corona, J.; Gómez del Campo, J. (1992) *Desarrollo del potencial humano*, Vol. I-IV. México: Editorial Trillas.

Lasserre, F. (1966). *Die fragmente des Eudoxos*. Berlin: von Knidos.

Loria, G. y Vassura, G. (1919). *Opere di Evalgelista Torricelli*. Vol. I-II. USA: Reimpresión de la University of Michigan

Rogers, C. R. (1990) *Psicoterapia centrada en el cliente*, México: Paidós.

Rogers, C. R. (1995), *El camino del ser*. Tercera Edición: España: Kairós.

Slavin, S., y Crisonino, G. (2001). *Precalculus: a self-teaching guide*. EE.UU: Wiley.

Shostrom, E.L. (1964) *Personal orientation inventory*. San Diego: Educational and Industrial Testing Service.