LA RECTA Y LAS ESTRATEGIAS DE SOLUCIÓN NUMÉRICAS

Rubén Darío Santiago, Ma. de Lourdes Quezada
Tecnológico de Monterrey, Campus Estado de México. (México)
ruben.dario@itesm.mx, lquezada@itesm.mx

Palabras clave: estrategias numéricas, solución de problemas
Key words: numerical strategies, problem solving

RESUMEN

En este trabajo se describe el diseño e implementación de un curso piloto de cálculo utilizando una metodología que combina ciclos ACE con actividades de aprendizaje basado en problemas (ABP). Los ciclos ACE están organizados en actividades colaborativas, discusiones en clase y solución de ejercicios, enmarcadas en la teoría APOE. En las actividades de ABP, los alumnos resuelven problemas no rutinarios. En la solución de ejercicios y actividades se enfatiza el uso de estrategias numéricas basadas en el concepto de línea recta que se derivan de las estudiadas en cursos más avanzados. Los alumnos modelan la solución de los problemas propuestos usando herramientas del cálculo, pero lo resuelven usando aritmética y estrategias numéricas. Al final de cada ciclo de aprendizaje, los alumnos reflexionan, orientados por el profesor, sobre la relación que existe entre el cálculo y la aritmética. Reflexión que, generalmente no se enfatiza en cursos convencionales. Los resultados obtenidos en el curso piloto indican que los alumnos mejoran su comprensión del cálculo y aprenden, al mismo tiempo, métodos numéricos clásicos.

ABSTRACT

In this work, we describe the implementation and design of a prototype course of calculus by using a methodology that combines ACE cycles, with problem based learning activities (PBL). The ACE cycles are organized into collaborative activities, discussions in class and problem solution skills, based in the APOS framework. In PBL activities, the students are asked to solve problems that go beyond the routine. In the solution of exercises and activities, is emphasized the use of numerical strategies that are based in the concept of the straight line, which is the core concept of those studied in more advanced courses. The students, through the basic tools of calculus, model the solution of the proposed problems; however, these problems are actually solved by numerical strategies and arithmetic. At the end of each learning cycle, the students, guided by the professor, reflect over the relation between calculus and arithmetic. These reflections are not emphasized in conventional courses. According to the results obtained through this prototype course, the students improve their understanding of calculus, and at the same time, they learn classical numerical methods.

Introducción

Una tendencia educativa en los cursos de matemáticas es provocar al estudiante para que resuelva problemas no rutinarios mediante el uso de los conceptos estudiados en dichos cursos. Sin embargo, diversos estudios indican que las estrategias que utilizan los estudiantes son limitadas y que requieren mecanismos de apoyo para clarificar diferentes esquemas de solución (Polya, 1981). Algunos trabajos de Schoenfeld (1992; 1994) muestran que es posible enseñar, desarrollar y fortalecer estrategias innovadoras de solución de problemas mediante un esquema que considere: análisis del problema, diseño, exploración, implementación y verificación. El mismo autor asegura que los estudiantes adquieren habilidad en alguna estrategia cuando los docentes les proponen un conjunto de problemas similares, donde los estudiantes piensan la estrategia, la llevan a la práctica, hacen analogías y utilizan el método de forma natural.

Por otra parte, los autores de este trabajo han observado, en su quehacer docente, que los estudiantes prefieren, al intentar resolver problemas no rutinarios, usar estrategias analíticas derivadas del cálculo diferencial e integral, sobre las estrategias numéricas basadas en la aritmética. Además han observado que los alumnos no siempre conectan las ideas del cálculo con sus antecedentes aritméticos. Por esa razón, se estructuró un proyecto para fomentar y fortalecer las estrategias numéricas que utilizan los estudiantes al intentar resolver problemas del cálculo. El proyecto pretende observar cómo los estudiantes vinculan sus propias ideas del cálculo (derivada e integral) con sus equivalentes en la aritmética.

Como segundo objetivo, se pretende que los alumnos desarrollen sus habilidades numéricas de forma que puedan utilizarlas para resolver problemas matemáticos o físicos complejos. Algunas de las preguntas de investigación que se plantean son: ¿una mejora en estrategias numéricas ayuda a que los alumnos puedan elaborar un método para resolver problemas?, ¿las estrategias apoyan a comprender las relaciones del cálculo con la aritmética? ¿Qué dificultades matemáticas deben superar los alumnos para desarrollar estrategias numéricas de solución de problemas? En este trabajo presentamos: un esbozo teórico que soporta el proyecto, la experiencia en el aula, algunos resultados y breves conclusiones.

Marco teórico

Para este proyecto se ha considerado la teoría APOE constituida por acciones, procesos, objetos y esquemas. Esta teoría pretende entender cómo se aprende matemáticas y fortalecer, de alguna manera, el proceso de enseñanza para aumentar la calidad del aprendizaje de los alumnos (Dubinsky, 1991). Se parte de intentar descubrir y explicar que hacen los estudiantes cuando aprenden conceptos matemáticos. Al analizar las construcciones mentales de los alumnos se sugieren acciones didácticas que apoyen su aprendizaje. La teoría explica que las acciones son transformaciones de los objetos cognitivos previamente construidos que un alumno percibe como externas o que constituyen instrucciones que el alumno requiere para operar un procedimiento. Cuando las acciones se repiten, el alumno reflexiona y deja de requerir las instrucciones externas, ya que las imagina y las lleva a cabo sin seguir un orden preestablecido. Cuando esto ocurre se dice que las acciones han sido interiorizadas en un proceso.

Si un alumno, puede reflexionar de forma general sobre un proceso particular concibiéndole como una totalidad y puede hacer transformaciones se dice que ha encapsulado el proceso en un objeto. Al estructurar objetos y procesos se forman esquemas complejos de alto nivel (Dubinsky y McDonald, 2002). En general, un esquema de un tema matemático determinado es el conjunto de acciones, procesos, objetos y, posiblemente esquemas de otra índole, unidos por relaciones diversas que el alumno utiliza como referente para resolver problemas ligados al tema matemático en cuestión. Si el esquema es coherente el alumno podrá reconocer sus alcances y limitaciones en la solución de problemas (Salgado y Trigueros, 2014).

La teoría APOE en la práctica se usa mediante ciclos de aprendizaje ACE formados por actividades, discusiones en clase y ejercicios. Por ejemplo, Vizcaíno (2004) utilizó el ciclo en un curso de cálculo, y sugiere: organizar a los alumnos en equipos de trabajo desde el principio del curso. Propone además que todas las actividades sean colaborativas y desarrolladas en un laboratorio de cómputo utilizando paquetes computacionales de análisis matemático. Allí los estudiantes realizan tareas diseñadas exprofeso para desarrollar construcciones mentales adecuadas al tema matemático a explorar y estudiar. Las discusiones en clase también son en equipos, se orienta a los alumnos a discutir y reflexionar sobre el trabajo realizado en el laboratorio. Finalmente, el ciclo se culmina mediante una actividad de solución de ejercicios individual que se realiza fuera del aula.

Por otra parte, Shoenfeld (1992) plantea que "las matemáticas revelan patrones que ayudan a comprender el mundo que nos rodea…". En consecuencia, hacer matemáticas no es sólo calcular y deducir formalmente, involucra observar patrones, explorar y probar conjeturas, estimar y analizar resultados. Santos (2008) indica que estos patrones pueden ser de diferentes tipos, destacando los numéricos, de razonamiento, de movimiento y cambio, de figuras, de simetría, de regularidad y de posición.

Devlin (1994) escribe que la matemática es la ciencia de los patrones, y que el movimiento y el cambio ocupan un lugar importante donde el desarrollo del pensamiento matemático ocurre naturalmente, pues nuestro mundo siempre está en movimiento. Que los alumnos enfrenten problemas no rutinarios permite entonces que busquen, representen y describan cambios entre objetos que los lleve a identificar patrones o relaciones.

La técnica didáctica de aprendizaje basado en problemas (ABP) es una metodología constructivista que se basa en proponer a los alumnos problemas y/o escenarios reales para que encuentren colaborativamente soluciones viables. En el ambiente de ABP los alumnos aprenden contenidos matemáticos, desarrollan habilidades sociales de comunicación, establecen estrategias, toman decisiones y encuentran sentido a lo que aprenden (ITESM, 1999). Una buena estrategia de enseñanza es considerar ciclos de aprendizaje que terminen con problemas o situaciones reales. Es decir, un curso de matemáticas puede desarrollarse con actividades, discusiones en clase y ejercicios, en concordancia con los ciclos ACE, culminadas con la resolución de problemas reales, en el sentido metodológico del ABP.

En otro contexto, las estrategias numéricas de solución de problemas no forman parte, en general, de las estrategias a fomentar en cursos de cálculo, donde primordialmente se promueven estrategias analíticas propias de la materia. En consecuencia, los estudiantes deben esperar a los cursos de métodos numéricos para adquirirlas mediante el uso de métodos aritméticos masivos y el análisis de situaciones complejas. Posiblemente, es hasta este momento que ellos pueden conectar sus conocimientos del cálculo con sus ideas aritméticas previas, según Hegarty, Mayer y Monk (1995) su éxito dependerá de la habilidad de los alumnos para transferir el lenguaje del cálculo a la aritmética.
Al revisar los contenidos usuales de los libros de métodos numéricos se encuentran aplicaciones basadas en describir la derivada y la integral mediante el uso del concepto de recta. Por ejemplo, se utiliza la recta para aproximar la solución de una ecuación diferencial mediante el método de Euler. También se utiliza para determinar la raíz de una ecuación algebraica o trascendente mediante los métodos de Newton y de la secante. El cálculo de una integral se aproxima mediante el método del trapecio (Delgado, 2011). Reportes de investigación (Delgado, 2008) muestran alternativas para utilizar esquemas de solución de problemas basados en el concepto de la recta. En dicho trabajo, se plantea la necesidad de desarrollar las estrategias numéricas para resolver problemas complejos que requieren para su solución de conocer las relaciones que guardan la aritmética y el cálculo.

Experiencia en el aula

En el año 2013 se llevó a la práctica un modelo básico para desarrollar estrategias numéricas dentro de un curso de cálculo donde se utilizaron los ciclos ACE y diversas actividades de ABP. El modelo consiste en proponer actividades, ejercicios y problemas no rutinarios para fomentar y desarrollar estrategias de solución numéricas. Se enfatiza el uso de la recta como elemento clave en la generación de métodos de solución.

Para cada tema del curso, se construyeron actividades tecnológicas colaborativas a trabajar en un laboratorio, se organizaron sesiones de discusión matemática y de solución de ejercicios. Finalmente, cada tema culminó con la puesta en escena de un problema no rutinario o de un escenario real que requiriese de una solución numérica. Antes de iniciar el curso, se diseñó y elaboró una red de problemas suficientemente amplia.

En su construcción se consideraron lineamientos básicos de diseño instruccional como: solución base, estrategias posibles y sistema de evaluación (Ortega y Ruiz, 1999; Santiago y Quezada, 2003), La experiencia se llevó a cabo con 29 estudiantes de primer semestre de las carreras de ingeniería divididos en equipos de 3 y 4 estudiantes. Se trabajaron problemas relacionados con la derivada y el movimiento, el límite y raíces de ecuaciones, la integral y sumas finitas, extremos relativos y parábolas.

En cada uno de estos temas los estudiantes resolvieron actividades de exploración, de uso de tecnología, de ejercicios y de solución de problemas y de análisis de la estrategia. Algunos de los métodos numéricos trabajados fueron: el método de Euler para solución de ecuaciones diferenciales, el método del trapecio para cálculo de integrales y los métodos de Newton y de la secante para la solución de ecuaciones algebraicas o trascendentes.

En las actividades de exploración de conceptos se procuró relacionar los conceptos del cálculo con la aritmética y/o con la física. Por ejemplo, en la figura 1 se muestra una parte de una actividad que relaciona los conceptos de derivada y velocidad con gráficas de rectas en movimientos rectilíneos. Aquí se pretende que los estudiantes dibujen diagramas, examinen casos básicos y/o especiales y escriban un método de solución.

Figura 1. Actividad de exploración.


MOVIMIENTO DE UNA PARTÍCULA

En las actividades tecnológicas se utilizaron los paquetes Excel y Mathematica para graficar expresiones y analizar situaciones. En la misma figura 1, se ilustra la forma de graficar dos rectas en regiones diferentes en una sola figura con el paquete Mathematica. El objetivo es que los alumnos usen estas herramientas para visualizar y entender mejor los ejercicios propuestos y, al mismo tiempo, desarrollen competencias tecnológicas útiles en la solución de problemas.

Las actividades de solución de ejercicios pretenden que los estudiantes practiquen algoritmos analíticos y numéricos para observar sus diferencias y similitudes. Aquí se procura que los estudiantes vinculen las ideas del cálculo con sus referentes aritméticos.

El conjunto de actividades de solución de problemas tienen como objetivo que los alumnos fortalezcan las competencias y habilidades matemáticas desarrolladas en las actividades previas. En la figura 2 se muestra una de las actividades de solución de problemas que los estudiantes resolvieron en el aula. Ésta está relacionada con el movimiento de objetos. El objetivo es que los estudiantes aborden problemas ligeramente similares, donde puedan usar la estrategia con variantes, se hagan cuestionamientos y los resuelvan.

Al terminar el ciclo de actividades se pasa a una actividad de reflexión que ayuda a analizar, comprender y profundizar la estrategia utilizada, sus ventajas y desventajas, se analizan también las soluciones obtenidas. Este proceso se repite siguiendo las indicaciones de los ciclos ACE y la técnica de ABP.

Figura 2. Actividades correspondientes al movimiento de objetos.

1° de noviembre de 2002.

Objeto M-23041

El año pasado, científicos del laboratorio de radioastronomía de Arecibo, Puerto Rico detectaron una débil señal de radio en el firmamento, la cual al parecer corresponde a un objeto desconocido en la vecindad del sistema solar. Más tarde, pruebas realizadas por el observatorio orbital Hubble confirmaron lo anterior y demostraron que este objeto se encuentra en el sistema solar interior. Su órbita se aproxima al Sol y tendría posibilidades de hacer contacto con la Tierra según el levantamiento hecho por el método de triangulación de distancias por el laboratorio Hubble, mostrado en la figura 1.

Figura 1

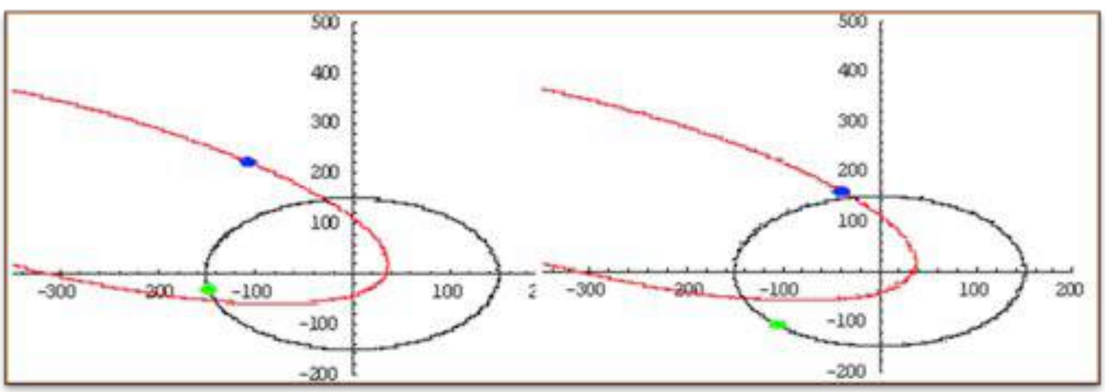
El observatorio Hubble reporta que el objeto se mueve coplanarmente a la órbita terrestre lo que incrementa las probabilidades de impacto. La figura 2 muestra el espectro de emisión del hidrógeno solar y de la misma luz reflejada en el objeto que en combinación con la figura 1 permiten evaluar la velocidad de éste.

A continuación se describen los problemas considerados para trabajar con los estudiantes correspondientes a derivada y movimiento y comentarios sobre sus propuestas de solución.

Problema 1. Estudiar el movimiento de un cohete con aceleración no uniforme y masa variable- En este problema se provoca a los alumnos para que analicen el movimiento de un objeto cuya masa cambia en el tiempo. Se les pide explicar si es posible que un cohete de 4 fases y 4 motores pueda llegar al espacio cuando ha sufrido daños irreversibles en el lanzamiento. Los estudiantes empiezan por suponer que el movimiento en espacios de tiempo pequeños se hace mediante líneas rectas, después reconstruyen el movimiento. Pocos equipos resuelven el problema, pero algunos logran analizar diferentes posibilidades de daños y concluyen adecuadamente.

Problema 2. Se ha detectado un asteroide que viaja hacia el centro del sistema solar y se pregunta si colisionará con la Tierra. Este escenario es una simplificación del problema de los tres cuerpos (Ordóñez y Rioja, 1999; Santiago, Delgado y Villegas, 2011). Algunos equipos suponen que la Tierra se mueve en un círculo y que afecta poco al asteroide. Para la descripción del movimiento del asteroide suponen que sólo el Sol lo afecta. Usan la aproximación por rectas para el movimiento y logran encontrar trayectorias del asteroide que cruzan la trayectoria de la Tierra, sin que haya colisión entre los objetos. Otros dos equipos suponen que la Tierra se mueve en una elipse y para resolver el problema usan rectas y programación procedural, ver figura 3.

Figura 3. Solución de los alumnos al problema del asteroide.



Problema 3: Analizar el movimiento de una pelota de béisbol sometida a fuerzas de gravedad, boyantes y de resistencia del aire (Simmons, 1993). En este problema los estudiantes analizan el movimiento de una partícula en el espacio. Dos equipos analizaron primero el movimiento en una dimensión como caída libre y fuerza de resistencia del aire, después notaron que pueden considerar rectas en el espacio como primera aproximación de la solución del problema. Aun cuando no alcanzan a resolver el problema se observa que ya usan pequeñas escalas de tiempo donde pueden suponer que la velocidad es constante. Los otros equipos no alcanzan a considerar la fuerza boyante y el movimiento de rotación de la pelota que motiva el movimiento fuera de un plano.

Conclusiones

Las estrategias numéricas apoyadas con tecnología son una buena alternativa para resolver problemas complejos de la matemática y de la física. En general, los estudiantes no utilizan estas estrategias porque no vinculan el cálculo con la aritmética. En el curso piloto se establecieron pautas para que los alumnos desarrollen competencias numéricas mediante el uso de ciclos ACE y actividades de ABP. Los ciclos ACE permiten que los estudiantes enfrenten situaciones diversas y similares continuamente, lo que garantiza que muchos de ellos adquieran la habilidad de generar estrategias numéricas de solución. Las actividades de ABP facilitan que el estudiante desarrolle y fortalezca sus habilidades de solución de problemas. La propuesta didáctica presentada provoca que los alumnos usen su conocimiento de la aritmética para entender mejor los conceptos del cálculo. Finalmente, observamos que los problemas de carácter físico utilizados aportan elementos motivacionales para el análisis y solución de problemas que requieren del uso de conceptos del cálculo.

Referencias bibliográficas

Delgado, F. (2008). Aprendizaje basado en problemas en los cursos de métodos numéricos para posgrado en ingeniería. *Tecnológico de Monterrey, 2º intercambio de experiencias, Toluca, México*.

Delgado, F. (2011). Métodos numéricos en ingeniería México: Editorial digital del ITESM.

Devlin, K. J. (1994). *Mathematics, the science of patterns*: the search for order in life, mind, and the universe. New York: Scientific American Library

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.). *Advanced mathematical thinking,* Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 95-123.

Dubinsky, E., y McDonald, M. (2002). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In *The teaching and learning of mathematics at university level* (pp. 275-282). Springer Netherlands.

Hegarty, M. Mayer, R., y Monk, C. (1995). Comprehension of arithmetic word problems: a comparison of successful and unsuccessful problems solvers, *Journal of Educational Psychology, 87*, 18-32.

ITESM (1999). *El ABP como técnica didáctica*. México: ITESM.

Ordóñez, J., y Rioja, A. (1999). *Modelos del universo*. España: Síntesis.

Ortega, P., y Ruiz, B (1988). *La resolución de problemas en las clases de matemáticas ilustrada*: una red que prepara algunas situaciones típicas del cálculo. México: IPN.

Polya, G. (1981). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Quezada, L., y Santiago, R. *Experiencias en el diseño e implementación de cursos de cálculo usando web.* Recuperado de: http://dcb.fi-c.unam.mx/Eventos/ForoMatematicas2/memorias2/ponencias/15.pdf

Santiago, R. Delgado, F., y Villegas, M. (2011). *Física I*. México: Editorial digital del ITESM.

Salgado, H., y Trigueros, M. (2014). Una experiencia de enseñanza de los valores, vectores y espacios propios basada en la teoría APOE. *Educación MatEMática*, *26*(3), 75.

Santos, M. (2008). *La resolución de problemas matemáticos: avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica.* En Luengo, Ricardo; Gómez, Bernardo; Camacho, Matías; Blanco, Lorenzo (Eds.), Investigación en educación matemática XII (pp. 159-192). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 334-370.

Schoenfeld, A. (1994). Mathematical thinking and problem solving. In *This volume reflects the work of a conference on college mathematics held in Berkeley, CA in the early 1990s*. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Simmons, G. (1993). *Ecuaciones diferenciales.* México: Mc Graw Hill.

Vizcaino, O. (2004). *Evaluación del aprendizaje del cálculo desde una perspectiva constructivista*. México: IPN.