CARACTERIZACIÓN DEL USO DE LAS TRANSFORMACIONES DE ISOMETRÍA MEDIANTE EL DISEÑO DE UNA SECUENCIA DE PROBLEMAS ABIERTOS DE CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA CON CABRI 3D

JOSÉ HUMBERTO ARCILA ATEHORTÚA

JHON ALEXANDER BONILLA GALLEGO

GUSTAVO ADOLFO CARDONA MUÑOZ

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SANTIAGO DE CALI
2012

CARACTERIZACIÓN DEL USO DE LAS TRANSFORMACIONES DE ISOMETRÍA MEDIANTE EL DISEÑO DE UNA SECUENCIA DE PROBLEMAS ABIERTOS DE CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA CON CABRI 3D

JOSÉ HUMBERTO ARCILA ATERHORTÚA
JHON ALEXANDER BONILLA GALLEGO
GUSTAVO ADOLFO CARDONA MUÑOZ

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de Licenciado en Matemáticas y Física

Director:

DIEGO GARZÓN CASTRO

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SANTIAGO DE CALI
2012

Nota de Aceptación

Director

Diego Garzón Castro

Jurado

María Fernanda Mejía Palomino

Jurado

Norma Lorena Vásquez Lasprilla

Santiago de Cali, 20 de Marzo de 2012

DEDICATORIA

A mis padres Reinel Cardona y Pilar Muñoz, y a mis hermanos Robert Cardona y Valentina Cardona, excelentes padres y hermanos.

Gustavo A. Cardona M.

A mi madre Mariana Gallego por brindarme su apoyo incondicional durante toda mi vida. Así mismo, a mi abuelo Luis Alberto Gallego por su amor y sabiduría.

Jhon A. Bonilla G.

A mi madre Esperanza Atehortúa y hermanas Maricela Arcila, Adriana Arcila y Rosalba Arcila las cuales creen en mi esfuerzo y me apoyan.

José H. Arcila A.

AGRADECIMIENTOS

Queremos expresar el más sincero agradecimiento a todas las personas que de forma directa o indirecta contribuyeron a la realización de este trabajo de grado.

En primer lugar al Magíster Diego Garzón Castro por su experta y oportuna labor de dirección durante el desarrollo de este trabajo de grado, por su gran disponibilidad, paciencia y sus continuas enseñanzas y sugerencias.

A las profesoras Marisol Santacruz y Maritza Pedreros, y al profesor Octavio Pavón, por sus correcciones y sugerencias durante la realización de este trabajo de grado.

A todos los compañeros del Área de Educación Matemática del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle por sus contribuciones

A la Universidad del Valle por poner a nuestra disposición más de lo necesario para una formación integral.

Finalmente, pero no menos importantes, a nuestras familias por los grandes esfuerzos realizados para que todo esto fuera posible.

CONTENIDO

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

ÍNDICE DE TABLAS

RESUMEN

Este trabajo de investigación toma como punto de partida la siguiente pregunta: ¿Qué papel juegan las transformaciones de isometría en el plano en la solución de problemas de construcción geométrica en el espacio mediados por Cabri 3D? En particular, con el paso del plano al espacio y viceversa. Y tiene objetivo general contribuir al mejoramiento de la enseñanza de la geometría en el espacio, mediante la elaboración de una propuesta alternativa para la enseñanza de la geometría en el espacio partiendo de los conocimientos geométricos del alumno en el plano.

Además, esta investigación ha sido analizada tomando como referente metodológico una aproximación de la microingeniería didáctica que, mediante la elaboración de una secuencia de problemas abiertos de construcción geométrica en el espacio mediados por el ambiente de geometría dinámica Cabri 3D, pretende analizar las estrategias de solución de tales problemas, así como la caracterización del papel que se le otorga a las transformaciones isometría en el plano cuando los alumnos resuelven problemas del tipo mencionado.

Palabras clave: Visualización, transformaciones de isometría, ambiente de geometría dinámica, esquemas de uso y de acción instrumentada, teoría de situaciones didácticas, secuencia didáctica, problema abierto.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo de investigación se realiza en el contexto de la Línea de Investigación de Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) del Área de Educación Matemática del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, Cali, Colombia. Además, se encuentra inscrito y toma en consideración algunos aspectos del proyecto de "*Caracterización de los vínculos entre los recursos pedagógicos y el conocimiento matemático en la enseñanza de las matemáticas en la educación básica*"[1].

En este contexto, se busca establecer el papel que pueden llegar a desempeñar las transformaciones de isometría en el plano, en el marco de los procedimientos de solución de problemas abiertos de construcción geométrica en el espacio mediadas por el ambiente de geometría dinámica Cabri 3D. Para esto se requiere involucrar dos temas-objetivos dentro del proceso investigativo como ejes del mismo: por un lado, el que corresponde a caracterizar la utilización o no de dichas transformaciones por parte de los alumnos, como instrumento que sintetice los procedimientos de construcción geométrica en el espacio, buscando responder al cómo de su utilización, qué es lo que se utiliza y dentro de este sentido el qué se privilegia. El otro eje lo representa un propósito: llegar a gestionar nuevos recursos que brinden la posibilidad de la enseñanza y aprendizaje de la geometría en el espacio en el marco del proyecto de incorporación de nuevas tecnologías al currículo de matemáticas de la educación media en Colombia.

[1] Proyecto COLCIENCIAS, Cód.1106-489-25213, Contrato Nº. 364 - 2009. Diego Garzón, Myriam Vega Restrepo, Gloria Castrillón, Jorge Arce Chaves & Octavio Pabón. Universidad del Valle, Cali, 2009.

De esta manera, aunque dichos ejes no corresponden al objetivo general pero se ven enlazados, requieren de un acervo bibliográfico que dentro de la construcción de la investigación documentada abarca tanto el componente epistemológico, en cuanto a fundamentos, prácticas y los métodos en la didáctica de las matemáticas; como un elemento importante y consecuente con la investigación, esto es, los datos nacionales recopilados y el análisis con el fin de definir qué sucede dentro del campo de las pruebas censales por parte del gobierno, y más específicamente por parte del Ministerio encargado de la educación en Colombia, además del análisis de documentos referidos al tema y publicados por el ente de gobierno.

Adentrándonos, aunque se puede observar que a nivel curricular las transformaciones de isometría no trascienden del plano, y por ello este trabajo de investigación se atreve a comentar que su estudio no representa un fiel reflejo de la realidad física; establece que son los procesos de construcción los que fundamentan la atención dentro de esta investigación dado que involucran la relación entre plano y espacio. De esta manera se entiende por qué esta investigación tiene como propuesta el que las transformaciones de isometría podrían ser las que permitieran el tránsito entre lo tridimensional y lo bidimensional, he ahí la importancia que se le adjudica a esta investigación.

La misma que tiene como sustento básico el haber podido establecer una recurrente tendencia ha relegar, dentro del contexto del aula, el estudio de las transformaciones de isometría al plano. Situación que lleva a un propósito o finalidad igualmente de base, y que se traduce en la pregunta ¿qué papel juegan las transformaciones de isometría en el plano en la solución de problemas de construcción en el espacio mediadas por Cabri 3D?, en particular con el paso del plano al espacio y viceversa.

Proceso que dirigido en la búsqueda de una respuesta encuentra su sentido de desarrollo en dos elementos o fases de evolución específicas: la primera, en la que se busca elaborar una serie de situaciones ligadas a la construcción geométrica en el espacio y proponer dichas situaciones a un pequeño grupo de profesores en formación. Y una segunda fase que se propone hacer el análisis de las estrategias de resolución de los profesores en formación para las situaciones de profundización, determinando si los docentes hacen uso de los razonamientos efectuados en geometría plana extendiéndolos a la solución de problemas en geometría espacial. Asimismo esta segunda fase buscará establecer con qué frecuencia realizan dichos usos, buscando igualmente dilucidar si son o no vitales, se podría decir, en la solución de esta clase de problemas.

Los anteriores tópicos u objetivos específicos propuestos, se presupuesta colaboren en la caracterización del papel que se le otorga a las transformaciones en el plano cuando los alumnos empiezan a resolver problemas de construcción geométrica en el espacio mediados por el ambiente de geometría dinámica Cabri 3D. Cuestión que encuentra un camino más claro en su emprendimiento cuando se tienen en presentes dos hipótesis en torno al tema de investigación: una primera que señala que en nuestro medio, poco son usadas las transformaciones en los procedimientos de construcción en el espacio y lo que generalmente hacen los alumnos es extender los razonamientos efectuados en geometría plana a geometría espacial; y una segunda hipótesis, que enuncia que las transformaciones de isometría constituyen una condición indispensable para el desarrollo de pensamiento espacial y en la resolución de dichos problemas de construcción.

A continuación presentamos una breve descripción de los cuatro capítulos que conforman el presente trabajo de investigación, todo en virtud del objetivo general: contribuir al mejoramiento de la enseñanza de la geometría en el espacio, mediante la elaboración de una propuesta alternativa para la enseñanza de la geometría en el espacio partiendo de los conocimientos geométricos del alumno en el plano.

El *capitulo 1* se refiere intrínsecamente al problema de investigación. En este capitulo se presenta la descripción y contextualización del problema, su justificación y los objetivos de la investigación.

El *capitulo 2* atiende a los antecedentes de investigación y al marco teórico concebido. Los antecedentes de investigación muestran algunos aspectos de dos investigaciones a fin que preceden este trabajo. El marco teórico se subdivide en tres dimensiones: la Dimensión Matemática, la Dimensión Cognitiva y Dimensión Didáctica. La Dimensión Matemática caracteriza las transformaciones de isometría en el plano y espacio, y el concepto de construcción geométrica. La Dimensión Cognitiva define los procesos ligados a la génesis instrumental, expone algunos aspectos relacionados con la semiosis y los registros de representación semiótica y estructura el concepto de visualización utilizado. La Dimensión Didáctica presenta las nociones más relevantes de la teoría de situaciones didácticas y enmarca las construcciones geométricas dentro de ella mediante el concepto de problema abierto.

El *capitulo 3* comprende la metodología de investigación utilizada y el diseño de la secuencia didáctica el cual constituye uno de los objetivos de este trabajo. Específicamente, en este capitulo la *microingeniería didáctica* se constituye como referente metodológico y en el diseño aparecen las situaciones que hacen parte de la secuencia con su respectiva descripción y análisis preliminares.

Finalmente, en el *capitulo 4* se presentan las conclusiones del trabajo. Éstas atienden principalmente al problema e hipótesis de investigación, se derivan a partir tanto de la reflexión teórica como de los resultados obtenidos conforme al referente metodológico utilizado en un contexto experimental.

CAPITULO 1

APROXIMACIÓN AL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

A partir de nuestra propia experiencia y de aproximaciones investigativas en el campo de la Educación Matemática hemos podido establecer una tendencia recurrente a relegar, en el contexto escolar, el estudio de las transformaciones de isometría al plano.

A nivel escolar, cuando se da el salto abrupto al concepto de espacio, el trabajo geométrico alrededor de éste, hace especial énfasis en el estudio del volumen de los sólidos. Sin embargo es factible ampliar el horizonte de estudio del espacio. Por ejemplo, es posible mostrar que a partir de distintos objetos geométricos en el plano y utilizando tanto transformaciones de isometría como un ambiente de geometría dinámica, se pueden realizar diversas construcciones geométricas.

Escenarios como los anteriores justifican el planteamiento de la siguiente pregunta: ¿Qué papel juegan las transformaciones de isometría en el plano en la solución de problemas de construcción geométrica en el espacio mediadas por Cabri 3D? En particular, con el paso del plano al espacio y viceversa. En nuestra investigación este problema será analizado tomando como referente metodológico una aproximación de la microingeniería didáctica.

Mediante el uso del ambiente de geometría dinámica Cabri 3D y apoyados en la teoría de situaciones didácticas desarrollada por Brousseau (1986), en los trabajos realizados en el campo cognitivo por Presmeg (1997, 2006) y, desde una perspectiva instrumental, en los trabajos de Trouche (2004); pretendemos caracterizar, mediante el diseño de una secuencia didáctica, el papel que se le otorgan a las transformaciones de isometría en el plano cuando los alumnos empiezan a resolver problemas abiertos de construcción geométrica en el espacio, lo cual se asocia con interrogantes como: ¿se encuentran presentes en las estrategias de solución?, y si es así, ¿qué papel les asigna el alumno?, ¿constituyen un instrumento indispensable para resolver tales problemas?, en caso afirmativo, ¿en qué consiste este instrumento?, ¿cómo funciona?, entre otros.

Basados en los interrogantes presentados anteriormente planteamos tres hipótesis para este trabajo de investigación. La primera hipótesis supone que en nuestro medio poco son usadas las transformaciones de isometría en los procedimientos de construcción en el espacio. La segunda hipótesis presume que generalmente los alumnos extienden los razonamientos efectuados en la geometría plana a la geometría espacial. Sin embargo, nuestra tercera hipótesis considera que las transformaciones de isometría constituyen un instrumento potente para el desarrollo del pensamiento espacial y para resolver dichos problemas de construcción.

Como alumnos y futuros docentes, consideramos relevante el hecho de ofrecer, por lo menos, una primera aproximación a las cuestiones referidas en las hipótesis. Particularmente, nos gustaría establecer si los alumnos utilizan o no las transformaciones de isometría como instrumento para simplificar o resolver los problemas abiertos de construcción geométrica propuestos, ¿cómo las usan?, ¿qué usan? o ¿qué privilegian?.

Nuestro problema de investigación se encuentra íntimamente relacionado con el estudio de la geometría en el espacio y por esto afirmamos que si cotidianamente nos desenvolvemos en un mundo tridimensional, entonces no tiene sentido el hecho de no profundizar en temas relacionados con este tipo de geometría.

Por su parte, el Ministerio de Educación Nacional (MEN), en 1998 plantea la importancia del estudio de la geometría espacial y escribe que: “otro aspecto importante del pensamiento espacial es la exploración activa del espacio tridimensional en la realidad externa y en la imaginación, y la representación de objetos sólidos ubicados en el espacio” (p. 59). Complementariamente a esta afirmación, el MEN declara, a partir de una cita de Lappan y Winter que:

> A pesar de que vivimos en un mundo tridimensional, la mayor parte de las experiencias matemáticas que proporcionamos a nuestros niños son bidimensionales. Nos valemos de libros bidimensionales para presentar las matemáticas a los niños, libros que contienen figuras bidimensionales de objetos tridimensionales. A no dudar, tal uso de “dibujos” de objetos le supone al niño una dificultad adicional en el proceso de comprensión. Es empero, necesario que los niños aprendan a habérselas con las representaciones bidimensionales de su mundo. En nuestro mundo moderno, la información seguirá estando diseminada por libros y figuras, posiblemente en figuras en movimiento, como en la televisión, pero que seguirán siendo representaciones bidimensionales del mundo real. (p. 60).

Puede ser que la carencia de experiencias en el espacio se encuentre ligada con la dificultad para visualizar y representar objetos geométricos en este marco referencial. En el caso específico de las transformaciones de isometría en el espacio, la mayor dificultad se relaciona con el ¿cómo develar lo que subyace bajo una traslación, una reflexión o una rotación que se aplica sobre una figura geométrica en tres dimensiones?

Por ejemplo, en relación a las transformaciones de isometría, es verdaderamente complicado advertir mediante la utilización de dibujos en el plano lo que le sucede a un cubo cuando es rotado. La mayoría de los diseños que se presentan para problemas de este tipo tan solo muestran el objeto inicial y el final, y no el proceso de dicha transformación, esto es, no aclaran el por qué de la imagen final.

Por otra parte, consideramos factible que ambientes de geometría dinámica [AGD] como Cabri 3D que hacen posible la visualización y la identificación de propiedades invariantes mediante el *arrastre*, pueden jugar un papel importante en el aprendizaje y la enseñanza de la geometría.

1.2. JUSTIFICACIÓN

De acuerdo con lo expuesto por Villani (2001) sobre el hecho de que el estudio de la geometría tridimensional es en muchos países nulo o escaso, es de nuestro interés gestionar nuevos recursos que posibiliten la enseñanza y aprendizaje de la geometría en el espacio.

La geometría entendida como ciencia del espacio permite caracterizar y analizar objetos geométricos abstraídos del mundo físico, y si ha ello le añadimos "dinamismo" podemos enmarcar el estudio de dichos objetos en virtud del cambio que generan las transformaciones de isometría en ellos.

Es aquí donde cobra sentido el uso de ambientes de geometría dinámica. Un AGD como el Cabri 3D permite el estudio de cualquier aspecto de las matemáticas susceptible de ser interpretado geométricamente. Estos ambientes facilitan a los alumnos el aprendizaje mediante construcciones complejas a partir de piezas simples, materiales o conceptuales.

Estos ambientes funcionan como un instrumento de valiosa utilidad para realizar exploraciones, conjeturas y posteriormente proponer argumentos que las soporten. Estos ambientes ponen el énfasis en favorecer la visualización matemática, esto bajo el juicio que postula que la manipulación del entorno geométrico permite la ampliación de la experiencia del alumno, debido a que, el conocimiento adquirido por el alumno queda marcado por la relación de retroacciones que este establece con el ambiente mediante la manipulación directa de los objetos matemáticos.

Con la utilización de los AGD el alumno se encontrará en un contexto de simulación de la realidad, que suministra representaciones del objeto geométrico que posibilitan el acercamiento a algunas de sus propiedades. Bajo este criterio, el conocimiento y el aprendizaje se consideran como situados, es decir, dependen en su construcción y en su interpretación, de la especificidad del contexto en el que surgen.

En este sentido, nuestro de trabajo de investigación pretende crear una conexión entre lo que generalmente se privilegia, la geometría bidimensional; y lo que se ha marginado, la geometría espacial. Para lograr esto haremos especial énfasis en los problemas de construcción geométrica en los que intervienen las transformaciones de isometría. Estos particulares procesos de construcción serán mediados por Cabri 3D y permitirán al alumno el frecuente paso del plano al espacio y viceversa, develando las relaciones existentes entre estos dos marcos de referencia.

Asimismo, procuramos que a partir de una aproximación intuitiva y de la posterior exploración con el ambiente, el alumno pueda avanzar hasta una aproximación formal o axiomática que le permita modelar las situaciones matemáticas que le son presentadas.

1.2.1. Una mirada a las selecciones que determina el currículo

A continuación, presentamos los resultados de un breve análisis a las selecciones de estándares básicos de competencias en matemáticas que determina el currículo colombiano, específicamente los relacionados con el pensamiento geométrico.

Alrededor de las transformaciones de isometría, el MEN (2003) propone estándares tales como:

- Construyo objetos tridimensionales a partir de representaciones bidimensionales y puedo realizar el proceso contrario en contextos de arte, diseño y arquitectura.
- Represento objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas.
- Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte. (pp. 82-84).

Como podemos observar, esta visto que a nivel curricular las transformaciones de isometría no trascienden del plano y es por esto que nos atrevemos a comentar que su estudio no representa un fiel reflejo del mundo real. Sin embargo, los procesos de construcción son los que nos llaman la atención por cuanto involucran la relación entre plano y espacio. En este caso, nuestro trabajo de investigación propone que las transformaciones de isometría se constituyan en un instrumento potente para que el transito entre lo tridimensional y lo bidimensional.

Además, el MEN (2003) define el pensamiento geométrico como: “el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales" (p. 61).

De acuerdo con esto, la geometría puede entenderse como un instrumento que permite a los individuos la exploración y representación del espacio. Entonces ¿por qué limitar el estudio de las transformaciones al plano?

1.2.2. Las transformaciones de isometría en los libros de texto escolares

Como hemos podido observar, el estudio de la geometría en el espacio y específicamente, el estudio de las transformaciones de isometría en el espacio es nulo o muy escaso. Como veremos a continuación, los libros de texto escolares no son ajenos a este fenómeno.

Como resultado del sondeo realizado por nosotros en algunos libros de texto, encontramos que frecuentemente los apartados concernientes a la geometría favorecen al plano como sistema de referencia. En los casos en los cuales se consideran objetos geométricos en el espacio, el estudio centra su atención en la caracterización de los sólidos más conocidos (la pirámide, el cubo, el cono, el cilindro, la esfera) y en particular, el cálculo del volumen de dichos sólidos; pero muy poco relacionado con las transformaciones de isometría. Tan solo en uno de los libros se menciona que es posible obtener un cilindro a partir de la rotación de un rectángulo alrededor de un eje.

Para evidenciar este fenómeno tomamos tres ejemplos puntuales: Villegas & Melo (1991); Londoño, Guarín & Bedoya (1993); Ardila, Castiblanco, Pérez & Samper (2005). Respectivamente, el primer y el segundo libro son anteriores a los estándares y competencias propuestos por el MEN (2006), mientras que el tercero es posterior a ellos.

- **Villegas & Melo (1991):** Cada unidad en este libro comienza con una sección en la cual el alumno debe reflexionar sobre determinados problemas o situaciones que le son propuestos y que constituyen una aproximación intuitiva a los conceptos que posteriormente serán definidos. En la unidad concerniente a la geometría, las transformaciones de isometría son definidas exclusivamente en el plano y la actividad matemática alrededor de ellas se realiza, sin excepción, en el plano cartesiano. Generalmente, las situaciones consisten en trasladar, rotar o aplicar reflexiones y homotecias a figuras planas.

- **Londoño et al. (1993):** Los capítulos en este libro empiezan con una breve descripción de las temáticas a desarrollar y finalizan con una recapitulación de los conceptos estudiados. Para geometría son designados dos capítulos no consecutivos: el primero dedicado a las traslaciones, rotaciones y simetrías, y el segundo a las homotecias y semejanzas. En ambos capítulos se parte de definir las respectivas transformaciones en el plano para después resolver ejercicios que involucran la aplicación de estas transformaciones a determinadas figuras. Todo el trabajo se realiza en torno al plano cartesiano.

- **Ardila et. al. (2005):** Al comienzo de cada unidad de este libro se presentan los pensamientos correspondientes a las temáticas en esa unidad. Además, también se muestran los respectivos estándares a trabajar, según el tipo de pensamiento, y los procesos a desarrollar. Para la parte de geometría son dedicadas dos unidades consecutivas: la primera relativa a las trasformaciones geométricas (traslaciones, reflexiones, rotaciones, homotecias) y la segunda correspondiente a los sólidos. El trabajo en la primera unidad se realiza con base en la noción de plano cartesiano y en las definiciones de cada tipo de transformación. Las situaciones requieren que el alumno aplique transformaciones e identifique características y relaciones entre la figura inicial y la final. En la segunda unidad, se presentan las características de algunos sólidos privilegiando al volumen y su método de obtención.

También logramos establecer que ninguno de los libros analizados concibe la incorporación de ambientes de geometría dinámica en el desarrollo de las unidades propuestas para geometría.

Pensamos que, en este sentido, este trabajo de investigación resulta innovador ya que a partir de la mediación con el ambiente de geometría dinámica Cabri 3D es posible construir objetos geométricos en el espacio utilizando las transformaciones de isometría como están definidas en el plano.

1.2.3. Lo que sucede en las pruebas censales

A nivel nacional, de acuerdo con el análisis del tópico de Geometría y Medición de grado noveno de las pruebas censales realizadas en el departamento del Valle del Cauca: "lo visual se convierte en una variable importante que condiciona los procedimientos de solución de los alumnos" (Vázquez et al., 2005, p.89). Esto, en tanto que el único ejercicio planteado en la prueba que tiene que ver indirectamente con transformaciones de isometría requiere que los alumnos reconozcan la semejanza que existe entre determinadas figuras geométricas presentadas en el plano.

Consideramos relevante el hecho de que nuevamente nos encontramos ante un tratamiento dominante de las transformaciones de isometría en el plano. Además, también es de notar que este contenido tiene al parecer menor relevancia que el estudio de conceptos como el de perímetro, área y la caracterización de figuras planas ya que el número de preguntas en la prueba relacionados con estos es mayor comparado con el número de preguntas que atiende a las transformaciones.

Por otra parte, a nivel internacional, en el análisis de las pruebas TIMSS en las que participó Colombia en el año de 1995, se establecen dos puntos a considerar en torno a la geometría y a las transformaciones:

- En lo referente a Geometría del espacio, los alumnos colombianos presentan cierta facilidad para manejar mentalmente figuras tridimensionales.
- En cuanto a Transformaciones, es posible reseñar que los alumnos colombianos revelan un deficiente nivel de las rotaciones en el plano. (Díaz, Álvarez, Torres & Guacaneme, 1997, p. 83).

Este análisis pone de manifiesto un problema paradójico que nos conduce al siguiente interrogante: ¿Por qué los alumnos parecen tener mayores dificultades con el estudio de las transformaciones en el plano en relación con el espacio, siendo lo bidimensional la prioridad en la enseñanza de la geometría?

A modo de conclusión, consideramos pertinente el estudio de la geometría en el espacio basándonos en los hechos y documentación ya establecidos. Asimismo, proponemos que dicho estudio involucre las transformaciones de isometría e incorpore el manejo tecnologías, en particular el uso de un ambiente de geometría dinámica como Cabri 3D.

Creemos que la utilización de Cabri 3D, aunque este ambiente solo provea una representación plana del espacio, le hace posible al alumno una mayor abstracción espacial de las propiedades de los objetos geométricos ya que le permite visualizar de manera concreta las formas tridimensionales. Es decir, el trabajo geométrico a partir de la mediación de un ambiente de geometría dinámica potencia la visualización.

1.3. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.3.1. Objetivo general

Contribuir a la enseñanza de la geometría en el espacio, mediante la elaboración de una propuesta alternativa para la enseñanza de la geometría en el espacio partiendo de los conocimientos geométricos del alumno en el plano.

1.3.2. Objetivos específicos

- Elaborar una secuencia didáctica de problemas abiertos de construcción geométrica en el espacio mediados por el ambiente de geometría dinámica Cabri 3D.

- Analizar las estrategias de solución de los problemas abiertos de construcción geométrica en el espacio, mediados por Cabri 3D, de un grupo de profesores en formación.

- Caracterizar el papel que se le otorgan a las transformaciones isometría en el plano cuando los alumnos empiezan a resolver problemas abiertos de construcción geométrica en el espacio, mediados por Cabri 3D.

CAPITULO 2

MARCO TEÓRICO

2.1. ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN

En el año de 1976 Kidder publicó un estudio que se realizó para investigar la comprensión de las transformaciones euclidianas en los niños de las escuelas básica y media, específicamente en niños de 9, 11, y 13 años de edad. En este estudio se indago sobre la capacidad de los niños para formar una imagen mental de una figura plana, de realizar una operación mental (una transformación euclidiana) en esta representación y, finalmente, después de aplicada la transformación, construir la figura final en la posición correcta.

Al contrario de lo expuesto por Piaget (citado en Kidder, 1976), en lo relacionado con el desarrollo cognoscitivo del niño, que establece que alrededor de los 13 años de edad los sujetos podrían realizar transformaciones euclidianas, composiciones de transformaciones, y transformaciones inversas en el nivel representativo; los resultados indicaron lo contrario.

Los resultados de la investigación evidenciaron que la mayoría de los errores cometidos por los alumnos al realizar una trasformación euclidiana estaban ligados a la falta de conservación de la longitud. Al respecto, Kidder explica que la inhabilidad de los alumnos para realizar trasformaciones no debe entenderse como una refutación de la teoría piagetiana sino que, los resultados de este estudio y de estudios anteriores, sirven para destacar la necesidad de la investigación en el área de la geometría transformacional.

Una de los estudios más recientes, y del cual deriva nuestro trabajo de investigación, es el realizado por Álvarez & Fernández (2009). A partir de la utilización del ambiente de geometría dinámica Cabri 3D para caracterizar la transformación de rotación en el espacio, Álvarez & Fernández (2009) lograron concluir que los alumnos extienden sus conocimientos sobre esta transformación en el plano para dar cuenta de sus propiedades en el espacio. El presente trabajo de investigación acoge esta conclusión como uno de los objetivos a determinar, pero amplía los marcos de referencia en tanto se consideran otras transformaciones.

2.2. DIMENSIONES TEÓRICAS

El marco teórico de este trabajo de investigación considera tres dimensiones teóricas: la dimensión matemática, la dimensión cognitiva y la dimensión didáctica. En conjunto, estas dimensiones constituyen una directriz para los objetivos que nos hemos planteado.

2.2.1. Dimensión matemática

Instaurados en el marco de la geometría euclidiana y bajo el precepto que establece que “los axiomas de congruencia […] se pueden extender de manera natural de la geometría plana a la sólida” (Coxeter, 1971, p. 125) pretendemos delimitar dos conceptos desde las matemáticas: el concepto de transformación y el concepto de construcción geométrica.

Referente a la noción de trasformación, concordamos con la siguiente afirmación:

> Encontraremos conveniente emplear la palabra *transformación* en el sentido especial de una correspondencia uno-a-uno $P \to P'$ entre todos los puntos del plano (o del espacio), es decir, una regla que asocia pares de puntos, donde se entiende que cada par se compone de un primer miembro P y un segundo miembro P', y que cada punto aparece como el primer miembro de un solo par y también como el segundo miembro de un solo par. Puede suceder que los miembros de un par coincidan, es decir que P', coincida con P, en este caso, P se llama punto *invariante* (o "doble") de la transformación. (Coxeter, 1991, p. 54)

En particular, este trabajo de investigación tomara en consideración solo las *transformaciones de isometría* (o simplemente *isometrías*) las cuales corresponden a una transformación T tal que $T(A) = A'$ y $T(B) = B'$ implica que la distancia entre A y B es la misma que entre A' y B'. Son isometrías las rotaciones, traslaciones y reflexiones.

Basándonos en lo planteado por Garzón & Valoyes (2005), nos aventuramos a concretar las definiciones de las isometrías que pretendemos involucrar en este trabajo de investigación:

- **Traslación:** Sean dos puntos P y P' en el plano y un vector $\vec{r}$ de magnitud y dirección conocidas. Diremos que los puntos P y P' están relacionados mediante una traslación si el segmento $\overline{PP'}$ tiene la misma dirección y longitud del vector $\vec{r}$.

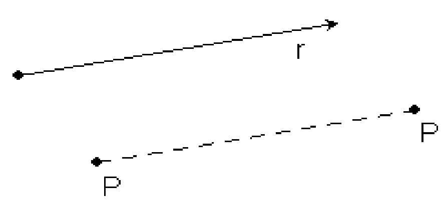

Ilustración 1: Traslación de un punto en el plano.

En este sentido, la traslación es un tipo de isometría que no deja ningún punto invariante.

- **Rotación:** Supongamos un punto O en el plano, un ángulo α dado y una dirección de rotación (por ejemplo, en dirección opuesta a las manecillas del reloj. Sea P un punto cualquiera en el plano y sea P' el punto tal que $\overline{OP} = \overline{OP'}$ y $\angle POP' = \alpha$.

  En este caso, decimos que $\overline{OP}$ ha sido rotado un ángulo α de modo que coincide con $\overline{OP'}$. En consecuencia, podemos afirmar que los puntos P y P' están relacionados mediante una rotación o giro.

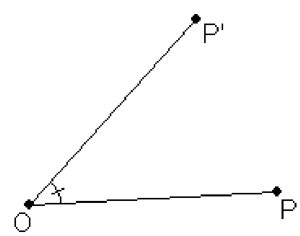

Ilustración 2: Rotación de un punto en el plano.

  El punto O y el ángulo α son denominados centro de rotación y ángulo de rotación, respectivamente. Estos dos elementos son los que caracterizan esta clase de movimiento.

  Además, si consideramos una rotación del plano en torno a un punto O (o a una recta perpendicular al plano que pase por O) observaremos que O es un punto invariante.

- **Reflexión central:** Sean dados un punto O en el plano y el segmento $\overline{PP'}$, de modo que se cumple que $\overline{OP} = \overline{OP'}$. Es decir, el punto O es el punto medio de

$\overline{PP'}$. Entonces, diremos que los puntos P y P' se encuentran relacionados mediante una reflexión central o semigiro alrededor del punto O.

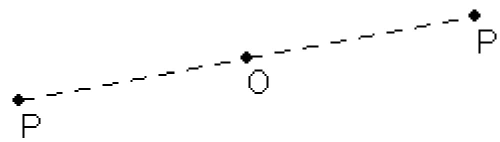

Ilustración 3: Reflexión central de un punto en el plano.

Una transformación de este tipo corresponde a un semigiro S con centro en O y ángulo $\alpha = 180°$.

- **Reflexión axial:** Supóngase una recta l y dos puntos en el plano P y P', de tal manera que se cumpla que: a) $\overline{PP'}$ es perpendicular a $\overleftrightarrow{l}$y b) $\overleftrightarrow{l}$ pasa por el punto medio de $\overline{PP'}$; es decir, la recta $\overleftrightarrow{l}$ es la mediatriz del segmento $\overline{PP'}$. Luego, afirmaremos que los puntos P y P' están relacionados mediante una reflexión o semigiro.

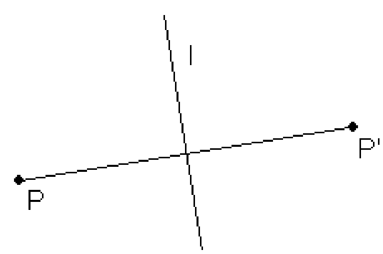

Ilustración 4: Reflexión axial de un punto en el plano.

A la recta l se le conoce comúnmente como eje de simetría.

En el caso de la reflexión, los puntos invariantes corresponden a los de una recta (eje de simetría) o a los de un plano (espejo) perpendicular al plano de los puntos dados.

Descritas las transformaciones en el plano entonces es necesario cuestionarnos ¿si algunas de las propiedades de éstas se pueden extender o tienen validez en el espacio?. En consecuencia y de acuerdo a Coxeter (1971), presentamos las transformaciones de isometría en el espacio donde, además de las transformaciones de rotación, translación y reflexión, es necesario hablar del concepto de *torcedura*.

- **Reflexión**: Supóngase un plano m y dos puntos en el espacio P y P', de tal manera que se cumpla que: a) $\overline{PP'}$ es perpendicular a m y b) m pasa por el punto medio de $\overline{PP'}$; es decir, m es el plano mediatriz del segmento $\overline{PP'}$. Decimos que los puntos P y P' están relacionados mediante una reflexión.

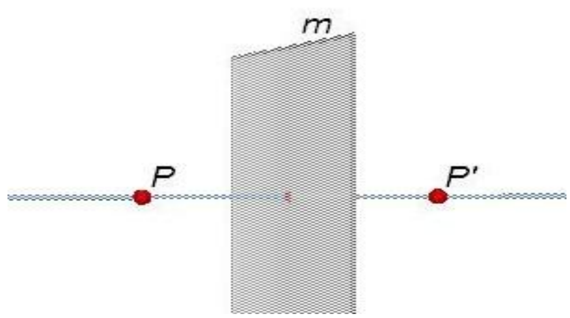

Ilustración 5: Reflexión de un punto en el espacio.

- **Reflexión central**: También llamada inversión central o reflexión central. Dados dos puntos O y P en el espacio, y un tercero P' de modo que se cumple que $\overline{OP} = \overline{OP'}$, donde O es invariante y punto medio de $\overline{PP'}$, diremos entonces que los puntos P y P' se encuentran relacionados mediante una simetría central o alrededor del punto O.

  Ahora bien, la reflexión central vista desde otro marco geométrico en el cual se utiliza un sistema de coordenadas cartesianas, transforma el punto $P(x, y, z)$ de una figura en el punto $P'(-x, -y, -z)$ donde O es el origen de coordenadas.

Por otro lado, llamamos una reflexión rotatoria o *inversión rotatoria* al producto de una simetría central y una rotación cuyo eje pasa por el centro.

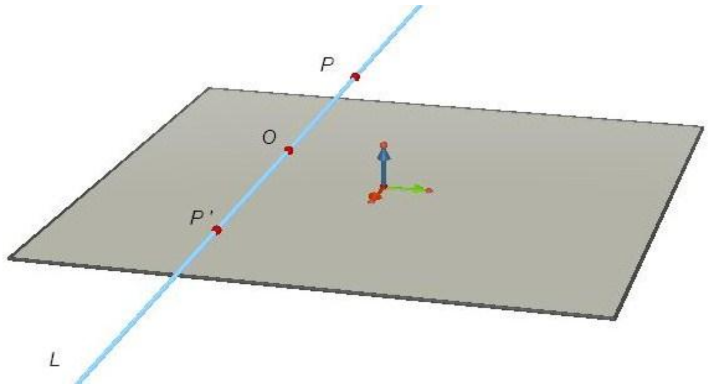

Ilustración 6: Reflexión central de un punto en el espacio.

- **Traslación**: Sean dos puntos P y P' en el espacio y un vector $\vec{r}$ de magnitud y dirección conocidas. Diremos que los puntos P y P' están relacionados mediante una traslación si el segmento $\overline{PP'}$ tiene la misma dirección y longitud del vector $\vec{r}$.

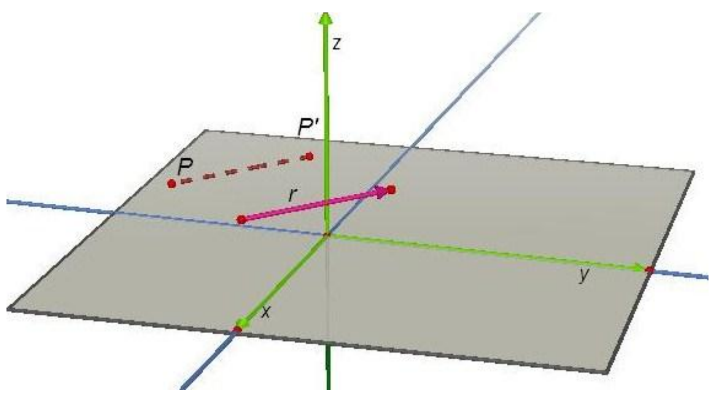

Ilustración 7: Traslación de un punto en el espacio.

Una traslación también se puede obtener a partir de aplicar dos reflexiones sucesivas R_1 y R_2. Esta composición R_1R_2 de dos reflexiones, ambas con respecto a dos planos paralelos entre sí, se ejemplifica en la siguiente figura:

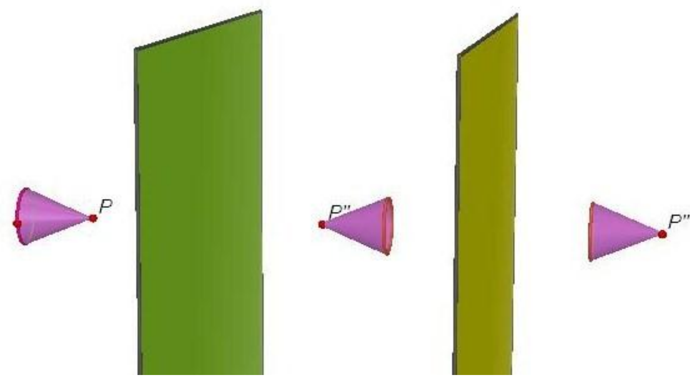

Ilustración 8: Traslación de una figura a partir de la composición de dos reflexiones realizadas respecto a dos planos paralelos.

- **Rotación**: Dado un punto P que pertenece a una figura espacial F, una recta L en el espacio a la cual pertenece un punto O, un ángulo *α* y una dirección de rotación (ver sentido en isometrías directas y puestas), y sea P' punto del espacio tal que $\overline{OP}$ y $\overline{OP'}$ sean perpendiculares a L, $\overline{OP} = \overline{OP'}$ y $\angle POP' = \alpha$. En este caso, decimos que $\overline{OP}$ ha sido rotado un ángulo α de modo que coincide con $\overline{OP'}$. En consecuencia, podemos afirmar que los puntos P y P' están relacionados mediante una rotación o giro.

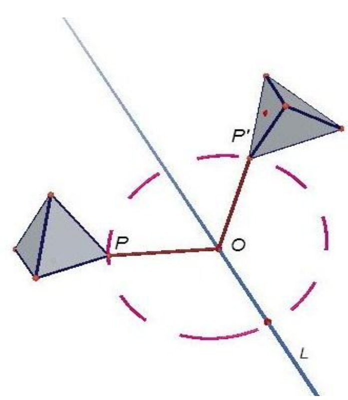

Ilustración 9: Rotación de una figura en el espacio.

El punto O y el ángulo α son denominados centro de rotación y ángulo de rotación, respectivamente.

Una rotación también se puede obtener por la composición de dos reflexiones R_3 y R_4, es decir, R_3R_4 realizadas respecto a dos planos que se intersecan en una recta l como se muestra en la siguiente figura:

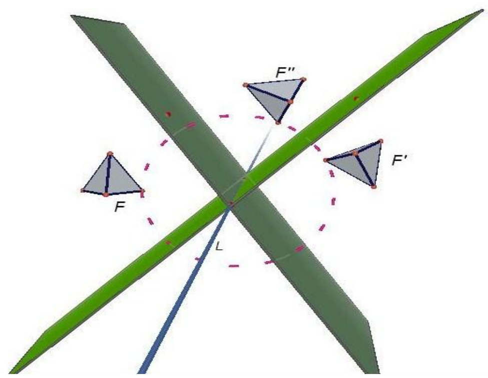

Ilustración 10: Rotación de una figura a partir de la composición de dos reflexiones.

- **Torcedura**: Una torcedura se obtiene a partir de dos transformaciones sucesivas, una rotación y seguido una traslación de una figura F.

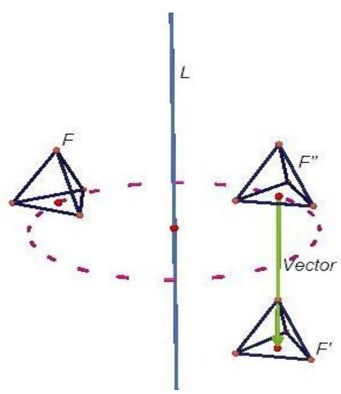

Ilustración 11: Torcedura generada por la composición de una traslación y una rotación.

Como ha sido expuesto en los párrafos anteriores, la composición de dos reflexiones R_1R_2 respecto a planos no paralelos es una rotación y cuando los planos son paralelos R_3R_4 genera una traslación de lo cual se obtiene que la composición o la aplicación sucesiva de R_1R_2 y R_3R_4 producen una torcedura. La torcedura permite definir cuando una isometría es directa. Se llama isometría directa al resultado de una torcedura. Y la isometría opuesta en el espacio se obtiene a partir de una inversión central, como se ha mencionado anteriormente.

Las transformaciones de rotación, translación, reflexión y torcedura aquí definidas permiten caracterizar cualquier movimiento en el espacio. Éste hecho se expresa en el siguiente teorema: “Todo desplazamiento es o bien una rotación, o bien una traslación, o bien una torcedura (Coxeter, 1971, p.130)”.

Además, éste teorema es relevante en nuestro trabajo porque permite acotar cualquier movimiento en el espacio a solo tres tipos de transformaciones, lo cual es útil a la hora de realizar construcciones geométricas buscando y siguiendo diferentes vías de solución. Es más, como tanto las rotaciones y traslaciones se pueden obtener a partir de la composiciones de reflexiones entonces cualquier movimiento en el espacio se puede obtener por la composiciones de sucesivas reflexiones. Este resultado permite solucionar un problema de construcción en el espacio por diferentes caminos, en términos de transformaciones de isometría.

Ahora bien, en este trabajo de investigación el concepto de construcción geométrica resulta verdaderamente importante ya que en las situaciones de profundización en la metodología se requiere que los alumnos realicen construcciones geométricas. Y son estas construcciones las que nos permitirán determinar la relevancia que tuvieron las transformaciones de isometría en los procesos de construcción de los alumnos. Por lo tanto, solo queda por definir lo que denominamos construcción geométrica. Al respecto, concordamos con la definición presentada por Martin (1998):

> Each Book of Euclid's Elements contains a sequence of Propositions, which are of two types: the theorems and the problems. In general, a theorem is a statement that has a proof based on a given set of postulates and previously proved theorems. A proof is a convincing argument. A problem in Euclid asks that some new geometric entity be created from a given set. We can a solution to such a problem a construction. This construction is itself a theorem, requiring a proof and having the form of the recipe: If you do this, this, and this, then you will get that. Such a mathematical recipe is called an algorithm. So a construction is the especial type of theorem that is also an algorithm. (We hesitatingly offer the analogy: Problem: Make a pudding; Construction: Recipe; Proof: Eating.). (p. 2).

Al respecto, es ineludible destacar el sentido que Martín (1998) le da a las construcciones geométricas. Martin concibe la construcción geométrica como un *algoritmo* en tanto un procedimiento que presenta una serie de pasos y como un *teorema* en virtud de que se puede demostrar con base en un marco axiomático definido.

2.2.2. Dimensión cognitiva

2.2.2.1. La génesis instrumental

Con el firme propósito de una teoría que sustente las posibles variables de orden instrumental en el diseño de las situaciones de profundización para llevar a cabo en este trabajo de investigación, introducimos algunos conceptos ligados a la denominada *génesis instrumental*.

Artigue (2002) sugiere que la génesis instrumental se constituye en un proceso que atiende a los fenómenos asociados a la transformación de un *artefacto* en un *instrumento* de modo que este último se integra a la situación matemática del sujeto.

En consecuencia, artefacto e instrumento son distintos en su naturaleza. Rabardel (1999) realiza la distinción entre estos dos conceptos y sostiene que el artefacto puede ser un objeto físico o abstracto, creado por el ser humano para cumplir tareas específicas; mientras que el instrumento es una entidad mixta construida por el sujeto a partir del artefacto. Además, Rabardel (1999) enfatiza en que el instrumento nunca puede reducirse al artefacto.

Más aún, Trouche (2004) reconoce en la génesis instrumental la intervención de dos procesos:

- *El proceso de instrumentalización*, dirigido del alumno al artefacto. Durante este proceso el sujeto utiliza el artefacto para llevar a cabo tareas especificas que involucran descubrir y conocer las funcionalidades del mismo, lo que deriva en la creación de esquemas de uso.
- *El proceso de instrumentación*, dirigido del artefacto hacia el alumno. Este proceso conduce al desarrollo y apropiación de esquemas de acción instrumentada que le permiten al sujeto entender las potencialidades y limitaciones de un artefacto de modo que su quehacer matemático sea más efectivo.

Es evidente que el concepto de esquema es inherente a la génesis instrumental. Vergnaud (citado por Guin & Trouche, 2004) define esquema como la "organización invariante de comportamientos frente a determinada clase de situaciones". Particularmente, en este trabajo pretendemos explicitar esos comportamientos que permanecen invariantes al hacer uso del artefacto "*arrastre*" de Cabri 3D.

Además, según Rabardel (como se cita en Trouche, 2004) es posible diferenciar en ella dos tipos de esquemas mencionados anteriormente:

- *Los esquemas de uso*, orientados hacia las “situaciones secundarias” que corresponden a la gestión de características y propiedades particulares del artefacto.
- *Los esquemas de acción instrumentada*, incorporan esquemas de uso; son relativos a las “situaciones primarias”, orientadas hacia el objeto de la situación, y para las cuales el artefacto es un medio de realización.

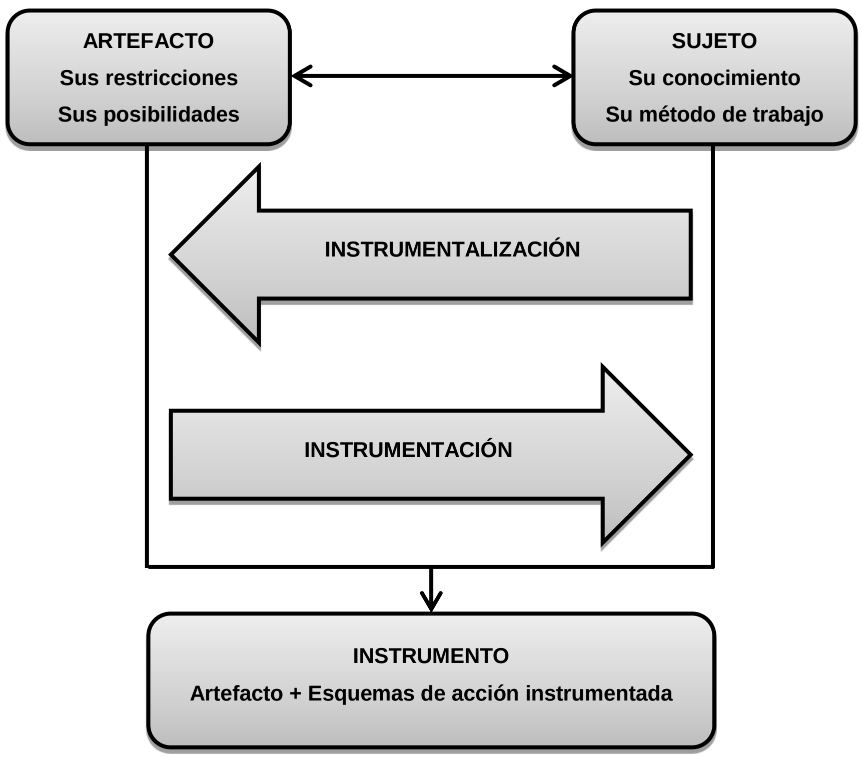

Ilustración 12: La génesis instrumental como la combinación de dos procesos.

En síntesis, y en concordancia con la *ilustración 12*, la génesis instrumental es un proceso que produce tantos esquemas de uso como esquemas de acción instrumentada a partir de los procesos de instrumentalización e instrumentación, respectivamente. En este sentido, creemos que es correcto afirmar: si la problemática de la génesis instrumental tiene que ver con la integración de los instrumentos a la situación matemática del sujeto, entonces el potencial de la inclusión de los AGD en dicha situación depende directamente de si estos llegan a constituirse en instrumentos que le permitan al sujeto optimizar su forma de hacer matemáticas.

Asimismo, cabe resaltar que en el desarrollo del presente trabajo se reconoce a Cabri 3D como un artefacto que influye en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, y solo cuando el alumno lo haya incorporado a su situación o a su tarea como un medio para alcanzar sus fines, podemos afirmar que se ha constituido en un instrumento.

Por otra parte, y con la intención de delimitar el concepto de visualización desde el cual pensamos desarrollar el trabajo, a continuación introducimos un ítem relacionado con la semiosis y, específicamente, con los registros de representación semiótica, desde el punto de vista de Duval (1999).

2.2.2.2. Semiosis y registros de representación semiótica

Duval define la semiosis como "la aprehensión o a la producción de una representación semiótica" (Duval, 1999, p. 14) y postula que para que un sistema semiótico pueda ser considerado un registro de representación debe permitir las tres situaciones cognoscitivas fundamentales ligadas a la semiosis:

- Formación de una representación identificable como una representación de un registro dado. Esta representación estará constituida mediante el uso de signos.
- Tratamiento de la representación esto es, la transformación de la representación realizada en el mismo registro en que ha sido formulada. El

tratamiento es una transformación interna a un registro.

- Conversión de la representación es la transformación de la representación en una representación de otro registro, conservando la totalidad o una parte solamente del contenido de la representación inicial. La conversión es una transformación externa a un registro. La conversión no debe ser confundida con la codificación que sería una especie de representación “puntual” que no tendría en cuenta al contenido representado.

Una representación semiótica está conformada por signos. En matemáticas es común observar que para un determinado objeto matemático pueden existir distintas representaciones, por ejemplo, una recta puede ser representada de manera algebraica como una ecuación o como una gráfica que cumple unas condiciones específicas, cuando se trabaja en geometría.

Las representaciones semióticas y los signos se encuentran dentro de un sistema de representación semiótica y según Duval (1999):

> Un sistema semiótico comporta reglas, más o menos explicitas, que permiten combinar los signos entre sí de tal manera que la asociación formada tenga también un sentido. Cada sistema semiótico, pues, puede tener un funcionamiento diferente: no todos los sistemas tienen las mismas reglas. (pp. 43–44).

A estos sistemas de representación semiótica Duval (1999) les denomina registros de representación semiótica.

Desde el punto de vista del aprendizaje, es importante considerar que un ente matemático puede tener una representación en un registro $A1$ al cual le corresponde otra representación en otro registro $A2$ o bien otra forma de visualizarla en el mismo registro $A1$. Y son las transformaciones que el sujeto realiza sobre una representación con el fin de obtener la otra, las que son significativas en el proceso de aprendizaje. En la situación de transformaciones sobre representaciones se genera otras representaciones nuevas lo cual es de suma importancia en el proceso de aprendizaje.

Son entonces los tratamientos y las conversiones integradas a un fuerte proceso de visualización por parte del alumno y en uso de una herramienta computacional, los que permitirán hacer un análisis de los elementos o unidades cognitivamente relevantes en los procesos y procedimientos de construcciones por medio de transformaciones de isometría de figuras en el espacio partiendo de objetos en el plano. La forma de determinar cuáles son estas unidades cognitivamente relevantes, según Duval (1999), es observar "si cuando la representación $A1$ se somete a variaciones estructurales, también se produce una variación en la representación convertida $A2$" (Duval, 1999, p. 73).

2.2.2.3. La visualización en los ambientes de geometría dinámica

Cuando se trabaja con un AGD como Cabri 3D creemos que es pertinente reflexionar sobre ¿cuál es el papel que juega la visualización en este tipo de ambiente?. Al respecto, Presmeg (1997) define visualización como: "the processes involved in constructing and transforming visual mental images, as well as those used in drawing figures or diagrams or constructing or manipulating them on computer screens" (p. 304).

En el marco teórico de este trabajo de investigación consideramos relevante la definición de visualización empleada por Presmeg (1997), ya que en ella se incluyen aspectos relacionados con el trabajo en ambientes informáticos. Concretamente, Presmeg (1997) precisa la visualización como el proceso asociado a la construcción y transformación de imágenes mentales visuales[2], y como éstas son utilizadas al dibujar figuras o diagramas o en la construcción y manipulación de ellas en el computador.

Así, es por medio de la visualización como el sujeto construye, modifica o transforma los objetos geométricos tanto en su mente como en la pantalla del computador aplicando y apropiándose de las propiedades geométricas de dichos objetos. Es aquí donde radica la importancia del AGD, debido a que este permite al sujeto operar en tiempo real con la representación semiótica de los objetos geométricos de manera similar a como se realiza en el espacio físico, teniendo en cuenta que este no constituye un registro de representación semiótica.

Por otra parte, es conveniente señalar la importancia de las imágenes mentales en la situación matemática en tanto que, según lo escrito por Plasencia (2000), optimizan las estrategias de resolución de problemas de los alumnos. Plasencia (2000) escribe:

> Investigaciones de autores como Wheatley (1990, 1991, 1997), Brown (1993), Brown y Wheatley (1989, 1990, 1991), han puesto de manifiesto que existe relación entre la utilización de imágenes y "tener éxito" en la resolución de problemas matemáticos. En sus estudios, básicamente de corte cualitativo, encontraron que los alumnos que frente a problemas "no rutinarios" usaron imágenes en sus razonamientos tuvieron más "éxito" que los alumnos que abordaron las tareas de forma procedimental. (p. 51).

Podemos concluir entonces, que la visualización comprende una situación realizada por el sujeto a nivel externo e interno, en tanto que involucra transformaciones, construcciones y manipulación de imágenes de objetos que

[2] Presmeg (2006) denomina imagen mental visual a un constructo mental que representa información visual o espacial.

existen en el mundo físico o que, por otro lado, son objetos matemáticos que, según Duval (1999), pueden ser representados por uno o varios registros de representación semiótica y/o en la mente del sujeto (en presencia o ausencia del objeto). Referente a esto, el MEN (2004) señala que:

> Muchas personas creen que la visualización es una habilidad innata y una cuestión que debe permanecer al margen de la situación educativa. Sin embargo, dado que los procesos de visualización están en la base de la situación cognitiva en geometría el alumno debe ir evolucionando en la "forma de mirar" los objetos, desde percepciones visuales simples, hasta aquellas que le permiten explotar el potencial heurístico de la visualización. (p. 10).

En conclusión, es correcto precisar que el proceso de visualizar no debe ser entendido simplemente como una capacidad fisiológica ya que dicho proceso incorpora las capacidades cognitivas del sujeto.

Con el uso de Cabri 3D en el desarrollo de las actividades, se busca que el alumno explore activamente el espacio, de modo que pueda construir habilidades para representar el espacio tanto mental como físicamente; originándose en el alumno procesos como el análisis y la organización de la información visual que registra; la coordinación y comparación de datos (entregados o puestos en la escena en las situaciones) y el reconocimiento de conocimientos previos asociados a la transformación de rotación y la construcción de nuevos conocimientos, las inferencias sobre fenómenos visuales que observa, entre otros.

2.2.3. Dimensión didáctica

2.2.3.1. La teoría de situaciones didácticas

Para llevar a cabo este trabajo de investigación y justificar la elaboración de una futura secuencia didáctica que de cuenta de la relevancia de las transformaciones de isometría en problemas abiertos de construcción geométrica en el espacio, se hace necesaria una teoría que la sustente. Por esta razón, sustentamos este trabajo en la teoría de situaciones didácticas desarrollada por el matemático francés Guy Brousseau.

La teoría de situaciones se enmarca en una concepción constructivista del aprendizaje a partir de la cual Brousseau (1993) postula que:

> El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje. (p.13).

Consecuentemente, podemos aseverar que la noción de medio es uno de los aportes más importantes de la teoría de situaciones didácticas ya que, en concordancia con lo expuesto por D'Amore (2008), es en el medio donde el alumno pone en juego sus conocimientos previos, experimenta, elabora hipótesis y conjeturas, todo ello con el fin de solucionar un problema matemático propuesto. En este sentido, el papel del docente consiste en asistir la adaptación del alumno al medio, ello en virtud de que el docente conoce bien las necesidades de dicho medio.

Esta claro entonces que la teoría de situaciones didácticas no solo caracteriza las relaciones que surgen en los procesos de enseñanza y aprendizaje entre el alumno, el docente, y el saber matemático sino también las relaciones existentes de esta triada con un medio didáctico determinado que, según Brousseau (1993) esta formado por el subsistema donde actúa el alumno (materiales, juegos, situaciones didácticas, etc.).

En este trabajo de investigación, Cabri 3D y las situaciones de profundización constituyen el medio con el cual interactúa el alumno. Esto se observa cuando el alumno, a fin de hallar solución a la situación propuesta, realiza construcciones geométricas explorando con los diversos artefactos del AGD. A su vez, Cabri 3D genera retroacciones que posibilitan en el alumno la creación de esquemas de uso y posteriormente posibles esquemas de acción instrumentada de construcción geométrica. Estos esquemas, producto de la interacción entre el medio y el alumno, podrían favorecer la emergencia de nuevo conocimiento matemático.

Al respecto de las retroacciones, estas le indican al alumno si la construcción que está realizando cumple con ser solución de la situación planteada, o si por el contrario debe modificar su estrategia de solución. Este conocimiento es entonces producto de la adaptación y conlleva a que los artefactos usados evolucionen hasta convertirse en instrumentos para el alumno.

Refiriéndonos a las relaciones existentes entre el sistema didáctico[3] y el medio podemos establecer que, por una parte, el saber matemático se relaciona con la situación en tanto que modela los problemas que sólo dicho conocimiento permite resolver de manera óptima.

Entretanto, el profesor debe concebir y proponer a los alumnos situaciones matemáticas que ellos puedan experimentar en la realidad, que provoquen la emergencia de genuinos problemas matemáticos y en las cuales el conocimiento en cuestión aparezca como una solución a dichos problemas, con la condición adicional de que dicho conocimiento sea construible por los alumnos.

En torno a las interacciones entre medio y alumno, el alumno responde a las

[3] Chevallard (1991) representa el sistema didáctico como una relación ternaria entre el profesor, el alumno y el saber enseñado.

variables didácticas del medio generando o utilizando conocimientos previos que le permitan dar respuestas cada vez cercanas al conocimiento que se pretende movilizar con la situación planteada. El medio en el cual el alumno debe resolver los problemas matemáticos, debe ser de alguna forma familiar o muy próxima a un entorno conocido por el alumno. Esto último, le permite reconocer y generar soluciones por adaptación a las pequeñas perturbaciones o variables didácticas introducidas por el profesor o por el mismo medio.

Por otra parte, es evidente que el concepto de situación es particularmente importante en la teoría de situaciones didácticas, Brousseau (citado en Panizza, 2004) la define de la siguiente manera:

> Hemos llamado "situación" a un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina a un conocimiento dado como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable. Algunas de estas "situaciones" requieren de la adquisición "anterior" de todos los conocimientos y esquemas necesarios, pero hay otras que ofrecen una posibilidad al sujeto para construir por sí mismo un conocimiento nuevo en un proceso "genético". (p. 61).

En general, la teoría de situaciones plantea tres tipos de situaciones: situaciones no didácticas, situaciones adidácticas y situaciones didácticas.

Según Margolinas (2009), las situaciones no didácticas, son aquellos problemas que se generan de forma espontánea, y se le presentan tanto al profesional como al sujeto en su vida cotidiana. Debido a su naturaleza espontanea no existe una persona, llamada profesor, que organice y gestione dicha situación y por tanto nadie tiene la intencionalidad de producir un aprendizaje. En estas situaciones el rol de profesor lo juega la persona poseedora del saber. En la vida diaria un alumno puede pasar a ser profesor en la medida que conozca o resuelva el problema y un profesor puede ser alumno si requiere aprender a resolverlo.

Por otra parte, Brousseau (1993) supone que para todo conocimiento existe al menos una situación fundamental[4] que lo caracteriza y lo diferencia de los otros y que permite la emergencia de dicho conocimiento. A estas situaciones fundamentales Brousseau las denomina situaciones adidácticas y postula que son ellas las que preservan el sentido de un conocimiento específico. En esta línea, podemos entender que el conocimiento en cuestión emerge como una estrategia de resolución de innegable relevancia para resolver el problema que se ha planteado.

Brousseau (1993) define la noción de situación adidáctica (o fase adidáctica dentro de una situación didáctica) como aquellos momentos del proceso de aprendizaje en los cuales el trabajo del alumno se independiza del control directo del profesor. Es decir, cuando el alumno esta en capacidad de producir y utilizar por sus propios medios el saber que se espera que construya, en una situación no prevista y que no involucra acciones concretas de enseñanza por parte del profesor, entonces a este suceso se le conoce como situación adidáctica.

Asimismo, Brousseau (citado por Trujillo, Castro, Guerrero & Delgado, 2007) delimita la situación didáctica como un conjunto de relaciones establecidas implícita y explícitamente entre los alumnos, cierto medio (que incorpora instrumentos y objetos) y el profesor, con el objetivo de que los alumnos aprendan un conocimiento matemático especifico.

Conforme a lo expuesto por Margolinas (2009), podemos concluir que la situación didáctica es la forma más general de una situación adidáctica en virtud de la

[4] Brousseau (1993) define la situación fundamental como un conjunto de situaciones específicas de un conocimiento que permiten engendrar un conjunto de problemas que proporcionan una buena representación de dicho conocimiento.

mediación del docente en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Mientras que en la situación didáctica el profesor interviene sobre el alumno y el medio con la intención de regular las situaciones adidácticas que emergen y los aprendizajes que ellas suscitan, en la fase adidáctica el profesor restringe su participación y es el alumno quien gestionará la construcción del conocimiento con la ayuda de sus conocimientos previos y las retroacciones generadas en su interacción con el medio.

En las situaciones adidácticas el profesor regula sus intervenciones buscando que sus alumnos se apropien continuamente del problema pero sin explicitar ninguna estrategia de solución. El profesor puede intervenir con preguntas generadas a partir de la observación de las acciones de los alumnos y las retroacciones del medio. Por ejemplo, algunos de los cuestionamientos que el profesor puede plantear a sus alumnos son ¿por qué crees que se da ese resultado?, ¿existen otras formas de explicarlo?

Cada situación didáctica se encuentra regulada por un contrato didáctico que no es más que un conjunto de obligaciones implícitas y explícitas relativas a un saber interpuesto entre el profesor y el alumno. Detalladamente, Trujillo et al. (2007) subrayan que:

> Es el conjunto de normas o cláusulas de un “contrato” que tácitamente, sin acuerdo previo, rigen las obligaciones recíprocas entre profesor y alumnos con relación al proyecto de estudio que comparten. El objeto del contrato es el conocimiento C a ser enseñado y aprendido; es un contrato dinámico, evoluciona en el desarrollo de las situaciones, por ejemplo, inicialmente el alumno no está obligado a responder por cierto tipo de problema pero al final del curso es su obligación hacerlo en términos de los saberes institucionalizados por el profesor. (p. 68).

Brousseau (1993) plantea que en el desarrollo de una situación adidáctica específica de un conocimiento determinado, son apreciables las siguientes fases o situaciones:

- Las situaciones de *acción*, en las que se genera una *interacción* entre los alumnos y el medio. Los alumnos deben tomar las decisiones necesarias para organizar sus estrategias de resolución del problema planteado.
- Las situaciones de *formulación*, cuyo objetivo es la *comunicación* de informaciones entre alumnos. Para esto deben modificar el lenguaje que utilizan habitualmente, precisándolo y adecuándolo a las informaciones que deben comunicar.
- Las situaciones de *validación*, en las que se trata de *convencer* a uno o varios interlocutores de la validez de las afirmaciones que se hacen. En este caso, los alumnos deben elaborar pruebas para demostrar sus afirmaciones. No basta la comprobación empírica de que lo que dicen es cierto; hay que explicar que necesariamente debe ser así.
- Las situaciones de *institucionalización*, destinadas a *establecer convenciones sociales*. En estas situaciones se intenta que el conjunto de alumnos de una clase asuma la significación socialmente establecida de un saber que ha sido elaborado por ellos en situaciones de acción, de formulación y de validación.

Las situaciones que procuramos implementar en este trabajo de investigación son del tipo de una situación adidáctica las cuales permitirán caracterizar la relevancia de las transformaciones de isometría en un problema abierto de construcción geométrica en el espacio y rastrear cada una de las etapas correspondientes a este tipo de situación.

Por otra parte, la *variable didáctica* constituye otro de los conceptos importantes en la teoría de las situaciones didácticas. Desde el punto de vista Brousseau (1993), la variable didáctica es un elemento de toda situación adidáctica que es susceptible a modificaciones por parte del docente y que altera el estatus de las estrategias de solución del alumno. Es decir, las variables didácticas son aquellas que el profesor modifica en procura de un cambio en las estrategias de solución del alumno que lo encaminen a la apropiación del saber matemático esperado.

Por lo tanto, en el marco de la teoría de las situaciones didácticas, podemos concluir que aprender un conocimiento matemático significa adaptarse a una situación adidáctica específica de dicho conocimiento tal que, ante las posibles variables de la situación adidáctica en cuestión, el alumno pueda encontrar una estrategia óptima de solución que persevere.

2.2.3.2. Las construcciones geométricas en el marco de la teoría de situaciones

En este apartado, incluimos el concepto de *problema abierto* (open problem en inglés), problemas en los cuales se inscriben las construcciones geométricas propuestas en las situaciones presentes en la metodología.

Los problemas abiertos se caracterizan por ser propuestos en un contexto que el alumno puede reconocer como familiar y el cual le posibilita explorar, hacer pruebas y lanzar conjeturas. Así mismo, otra característica importante de este tipo de problemas es que su enunciado no sugiere una única vía de solución y las posibles soluciones a dicho problema dependen estrechamente del marco geométrico en el cual se plantea. Por el contrario, se sigue que un problema no abierto es aquel que apunta a una única vía de solución. Además, en los problemas abiertos es de suma relevancia el proceso adoptado por el alumno en su búsqueda de posibles soluciones y el contraste o relación que encuentre entre ellas (Artigue & Houdement, 2007).

En particular, en el desarrollo de este trabajo se implementaran problemas abiertos de construcción geométrica pensados y propuestos como situaciones adidácticas. En este punto, cabe preguntarse ¿bajo qué fundamento podemos afirmar que los problemas abiertos se pueden concebir como situaciones adidácticas? La respuesta a esta cuestión remite a las fases de una situación adidáctica.

De acuerdo a la conceptualización de problema abierto, encontramos que esta corresponde a la fase de acción propia de una situación adidáctica. Es decir, un problema abierto o situación de acción permite al alumno tomar las decisiones necesarias para organizar sus estrategias de resolución del problema planteado, a partir de su confrontación con el medio. En nuestro caso, los alumnos toman decisiones sobre el uso de uno u otro artefacto del AGD, se cuestionan, visualizan, prueban, conjeturan y construyen objetos con propiedades geométricas los cuales son considerados por ellos como una solución del problema de construcción geométrica. Pero, ¿cómo validan la construcción? Desde una perspectiva instrumental podemos establecer que dicha validación se realiza mediante el uso del *arrastre* y conceptualmente en función de las propiedades geométricas presentes en la construcción geométrica.

Lo anterior motiva el diseño e implementación de los problemas abiertos de construcción geométrica en el medio Cabri 3D, el cual favorece el desarrollo de este tipo de problemas. La retroacción de Cabri 3D es una característica fundamental del AGD la cual permite esa exploración, visualización y pruebas generadas por los alumnos. Así, Cabri 3D es un medio pertinente para el desarrollo de situaciones adidácticas como las propuestas en la metodología.

Por consiguiente, decimos que el carácter de abierto de los problemas planteados en la metodología de este trabajo, radica en que estos admiten diversos procedimientos de solución, en nuestro caso, dichos problemas pueden ser solucionados ya sea utilizándolos artefactos de Cabri 3D que permiten realizar transformaciones de isometría u otros artefactos del AGD tales como perpendicularidad, paralelismo, entre otros. Más aún, es posible para el alumno generar múltiples soluciones aplicando diversas estrategias que surgen a medida que plantea conjeturas, realiza pruebas y adapta sus conjeturas a las respuestas o retroacciones del medio. Cabri 3D posibilita explorar, conjeturar y realizar pruebas, y de ahí la pertinencia de trabajar en él los problemas abiertos de construcción geométrica.

Por otra parte, recordemos que uno de los sentidos que Martin (1998) atribuye a la construcción geométrica es el de algoritmo ya que presenta una serie de pasos. En la medida que el alumno utiliza los artefactos del AGD y propiedades geométricas de que dispone, todo ello en procura de una solución a la situación propuesta, este genera su propio algoritmo. Además, dicha solución está acompañada a su vez de la figura o representación geométrica en Cabri 3D.

En este trabajo de investigación, cabe concebir la construcción geométrica como un algoritmo ya que los artefactos *revisar la construcción* y *descripción* de Cabri 3D nos permiten rastrear el uso de las transformaciones de isometría en las estrategias de solución de los alumnos, esto porque permite visualizar paso a paso la gestión del alumno en su construcción geométrica.

Es de aclarar que no concebimos el algoritmo como un procedimiento concluido que debe seguir puntualmente el alumno, más bien, es un procedimiento dinámico que se va enriqueciendo con las continuas retroacciones que proporciona el medio cuando el alumno procura encontrar nuevas soluciones.

Cuando se revisa el algoritmo de una construcción en Cabri 3D se pueden determinar los elementos visuales que el alumno pone en juego durante el desarrollo de la solución. Entonces, es pertinente determinar el tipo de problemas que se pueden realizar en un AGD para identificar posibles variables visuales que se ponen en juego en los diversos problemas de construcción geométrica.

Consecuentemente, solo queda por precisar los tipos de problemas o tareas que se pueden plantear y solucionar utilizando un AGD, en particular haciendo uso de Cabri 3D. Esto a fin de determinar cuál es el tipo de problemas al que pertenecen los problemas abiertos de construcción geométrica planteados en la metodología.

Al respecto, Laborde (2009) se refiere a que existen tres tipos: a) problemas que potencian su ejemplificación cuando se usa Cabri, son problemas que tienen solución en otros medios como por ejemplo papel y lápiz pero que con Cabri se multiplican las posibles soluciones a ser exploradas por los alumnos, b) problemas que se plantean de igual forma tanto en papel y lápiz como en Cabri pero se cambian las estrategias, que siguen los alumnos, para solucionar el problema por el solo hecho de ser planteados en Cabri, c) tareas o problemas no existentes en papel y lápiz que solo adquieren sentido cuando se plantean con Cabri.

A partir de esta tipología se busca determinar en los problemas abiertos de construcción geométrica y sus soluciones, ambos presentes en la metodología, algunas variables que permitan determinar si en las estrategias de solución de los alumnos se hace uso de los conocimientos de las transformaciones de isometría en el plano o si sus estrategias remiten solo a conocimientos del espacio.

Con base en lo planteado hasta aquí, definimos los problemas abiertos de construcción geométrica, los cuales son transversales en el análisis de nuestro trabajo de investigación. Estos problemas cumplen con determinadas características: son problemas de construcción geométrica, son abiertos, son susceptibles a ser solucionados por medio de transformaciones de isometría, y remiten al *tipo a* de la tipología de problemas en AGD planteada anteriormente. Cada una de estas características atiende a los conceptos desarrollados en el marco teórico de este trabajo, y es de este modo en que las tres dimensiones que estructuran dicho marco se articulan y actúan como un todo.

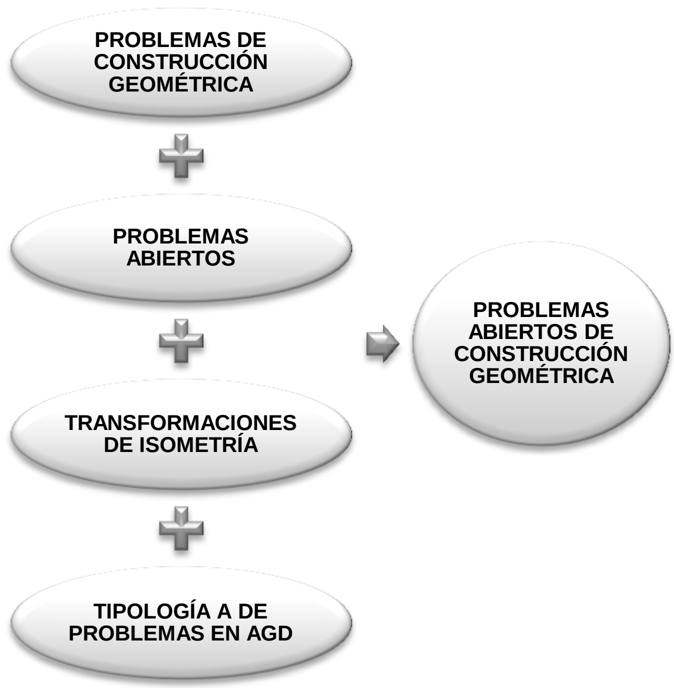

Ilustración 13: Los problemas abiertos de construcción geométrica.

Para terminar, podríamos agregar que los problemas de construcción geométrica pensados y planteados como problemas abiertos son un campo de trabajo en el que el alumno puede comportarse, en cierta forma, como lo hacen los matemáticos pasando por la indagación, la prueba, la conjetura, hasta posiblemente alcanzar el camino hacia la demostración (Artigue & Houdement, 2007).

CAPITULO 3

METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN, DISEÑO Y EVALUACIÓN DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

3.1. LINEAMIENTOS METODOLÓGICOS

Este trabajo de investigación toma en consideración como referente metodológico la *microingeniería didáctica*. No obstante, se omite el análisis epistemológico que corresponde a la fase de los análisis *a priori* propios de este enfoque metodológico. Así mismo, esta investigación se estructura mediante un estudio de caso que nos permitirá analizar y caracterizar las estrategias de solución de los profesores en formación[5] a la secuencia de problemas abiertos de construcción geométrica.

La microingeniería didáctica se inscribe en el marco teórico de la *ingeniería didáctica*, y ésta última se constituye en una analogía con la labor de un ingeniero en la cual éste:

> Para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los depurados por la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de

[5] Posteriormente, utilizaremos el término *alumnos* para referirnos a los profesores en formación.

> los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo. (Artigue, 1998, p.33).

Específicamente, en el campo de la Didáctica de las Matemáticas, la ingeniería didáctica puede entenderse como metodología de investigación y como producción de situaciones de enseñanza y aprendizaje:

> El término ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de forma coherente por un profesor-ingeniero para efectuar un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático dado para un grupo concreto de alumnos. A lo largo de los intercambios entre el profesor y los alumnos, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los alumnos en función de las decisiones y elecciones del profesor. Así, la ingeniería didáctica es, al mismo tiempo, un producto, resultante de un análisis a priori, y un proceso, resultante de una adaptación de la puesta en funcionamiento de un producto acorde con las condiciones dinámicas de una clase. (Douady, 1996, p. 241).

Douady (1996) establece que la ingeniería didáctica en tanto metodología de investigación presenta las siguientes características:

- Un diseño experimental basado en las producciones didácticas en el aula: concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. En este caso se pueden distinguir dos niveles: uno de *microingeniería* y otro de *macroingeniería*. La microingeniería, considerada de carácter local, centra el estudio en un tema en particular y toma en consideración los fenómenos de complejidad en el aula de clase. Por su parte, la macroingeniería permite combinar las investigaciones de microingeniería con los fenómenos de complejidad en función de la duración de los procesos de enseñanza y aprendizaje.
- Un registro de estudios de caso y un sistema de validación interna que

contrasta los análisis *a priori* y *a posteriori*.

A continuación, y como ya se había mencionado, utilizaremos algunos aspectos de las cuatro fases que comprende la microingeniería didáctica.

- **Primera fase: Análisis preliminares.**

  En concordancia con lo expuesto por Artigue (1998), seleccionaremos el siguiente análisis preliminar:

  - ✓ El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica. (p. 38).

  Además, Artigue (1998) sostiene que el análisis de las restricciones toma en consideración tres dimensiones: la *dimensión epistemológica*, la *dimensión cognitiva* y la *dimensión didáctica*. Particularmente, con base tanto en los objetivos planteados como en las dimensiones teóricas propuestas para este trabajo de investigación, haremos uso de las dimensiones cognitiva y didáctica, y reemplazáremos la dimensión epistemológica por una dimensión matemática:

  - ✓ **Dimensión matemática:** Esta dimensión da cuenta del papel de las transformaciones de isometría en los procedimientos de solución de los problemas abiertos de construcción geométrica de los alumnos.
  - ✓ **Dimensión cognitiva:** Aquí se reflexiona acerca de cómo los procesos de visualización y de génesis instrumental intervienen en los procedimientos de solución de los alumnos a los problemas planteados.
  - ✓ **Dimensión didáctica:** Toma en consideración conceptos referidos a las variables de tipo didáctico inherentes a los problemas propuestos. Así también, contempla la teoría asociada a los problemas abiertos y su

relación con la teoría de situaciones didácticas.

- **Segunda fase: Concepción y análisis *a priori* de las situaciones didácticas.**

El análisis *a priori* se puede concebir como un *análisis de significado* en tanto que:

> Si la teoría constructivista sienta el principio de la participación del alumno en la construcción de sus conocimientos a través de la interacción de un medio determinado, la teoría de las situaciones didácticas que sirve de referencia a la metodología de la ingeniería ha pretendido, desde su origen, constituirse en una teoría de control de las relaciones entre el significado y las situaciones. (Artigue, 1998, p. 44).

Consecuentemente, el análisis *a priori* en esta fase tendrá por objetivo determinar cuales son aquellas variables didácticas en las situaciones de profundización, que al modificarse, ocasionaran un cambio en las estrategias de solución de los sujetos. Por lo tanto, este análisis se fundamentara en los supuestos considerados por los investigadores.

Por otra parte, dado que el proceso de validación se basa en confrontar los análisis *a priori* y *a posteriori*, entonces es correcto afirmar que desde esta fase comienza dicho proceso.

- **Tercera fase: Experimentación.**

En esta fase se presenta la secuencia didáctica diseñada a los sujetos seleccionados para desarrollarla. Simultáneamente los investigadores toman el registro correspondiente de los procedimientos de solución.

- **Cuarta fase: Análisis *a posteriori* y evaluación.**

  El análisis *a posteriori* se basa en los registros recogidos en la fase de experimentación, es decir, en las observaciones y en las producciones de los sujetos mientras estos desarrollan las situaciones de profundización.

  Finalmente, las conclusiones serán presentadas a la luz de las tres hipótesis de investigación planteadas y la confrontación entre los análisis *a priori*, *a posteriori* y las posteriores unidades de análisis.

3.2. INSTRUMENTO DE ANÁLISIS

A partir de la intervención en el aula mediante la aplicación de la secuencia diseñada se configurará un escenario experimental del cual serán tomados tres registros distintos de la actividad matemática de los profesores en formación: un documento electrónico que se constituye a partir de las respuestas de los alumnos a las preguntas planteadas en cada una de las situaciones o problemas abiertos de construcción geométrica, archivos electrónicos que dan cuenta de las construcciones realizadas en el ambiente Cabri 3D y un archivo fílmico que expone ciertos aspectos de la interacción del alumno con el medio.

Para realizar el análisis de la información generada a partir de los registros obtenidos, surge la necesidad de un instrumento que permita procesar dicha información con el fin de analizar y caracterizar las estrategias de solución de los profesores en formación a dicha secuencia. La siguiente rejilla de análisis (Tabla 1) contiene las unidades de análisis seleccionadas a partir del marco teórico y los criterios que evidencian la emergencia de los diferentes esquemas.

DIMENSIÓN TEÓRICA	UNIDAD DE ANÁLISIS	CRITERIO QUE EVIDENCIA LA EMERGENCIA DE ESQUEMAS
Dimensión Didáctica	Problemas abiertos	Diversas estrategias de solución a los problemas propuestos.
Dimensión Cognitiva	Visualización	Modificación de las características visuales de los objetos geométricos.
		Tipos de vistas.
		Concatenación entre objetos geométricos.
		Manejo del artefacto *bola de cristal* de Cabri 3D.
	Esquemas de uso y de acción instrumentada	Artefactos de Cabri 3D utilizados por los alumnos.
		Esquemas de acción instrumentada de Cabri II Plus.
		Uso de transferencia de medida.
		Instrumentos generados.
		Tipo de arrastre privilegiado
Dimensión Matemática	Transformaciones de isometría	Caracterización del uso de los artefactos de Cabri 3D que permiten realizar transformaciones de isometría.

Tabla 1: Unidades de análisis y criterios que evidencian la emergencia de esquemas.

En el siguiente apartado se describen con mayor detalle cada una de las unidades de análisis y los criterios previamente establecidos.

3.3. UNIDADES DE ANÁLISIS

Como se mencionó en el apartado anterior, para llevar a cabo el análisis de la secuencia propuesta en el presente trabajo de investigación seleccionamos las siguientes unidades de análisis que corresponden a las dimensiones teóricas propuestas: a) problemas abiertos, que se refiere a la Dimensión Didáctica, b) visualización y esquemas de uso y de acción instrumentada, los cuales atienden a la Dimensión Cognitiva, y c) transformaciones de isometría presentes en las estrategias de solución de los problemas abiertos de construcción geométrica, que se refiere a la Dimensión Matemática.

Los problemas abiertos, en tanto unidad de análisis, permiten contrastar la posible emergencia de diversas estrategias de solución a las situaciones propuestas.

La unidad de análisis de orden visual que suponemos estará presente, en las dos etapas de la experimentación, en las soluciones o construcciones a realizar por los alumnos, consiste en reconocer objetos geométricos tridimensionales identificando propiedades y características tales como: I) forma, tamaño, color, estilo de curva, zoom de la ventana de trabajo, II) concatenación entre objetos geométricos por medio de propiedades geométricas a fin de generar una dependencia respecto al movimiento o animación, y III) el manejo del artefacto *bola de cristal* de Cabri 3D para visualizar desde distintos ángulos los objetos geométricos de la construcción. *Bola de cristal* permite por ejemplo apreciar la forma de un objeto, determinar la intersección entre objetos, y/o construir otros objetos en cualquier posición en el espacio a partir de uno dado, e incluso apreciar la posición relativa de un objeto respecto a otros en la construcción. Estos son los elementos visuales que rastrearemos, especialmente si los alumnos los dominan previamente o si son conocimientos nuevos para ellos.

Respecto a la unidad de análisis de orden instrumental pretende identificar, en la primera etapa de la prueba, cuales son los artefactos del AGD Cabri 3D utilizados por los alumnos durante la solución dada a los problemas abiertos de exploración. Así como rastrear posibles esquemas de acción instrumentada de Cabri II Plus que les permita crear la interdependencia del movimiento de objetos geométricos en Cabri 3D. Al respecto, suponemos que el esquema de acción instrumentada de transferencia de medida en Cabri II Plus será empleado por el alumno. De ser así, debe reconocer la existencia de este artefacto en la versión Cabri 3D usada en este trabajo, y determinar los valores numéricos susceptibles de variaciones en las transformaciones de isometría. Por ejemplo, para dichas variables numéricas se puede hacer uso de distancia entre objetos, áreas, etc. Esto en caso de usar las transformaciones de isometría.

En la segunda etapa, denominada situaciones de profundización, se determinaran los instrumentos que se desarrollaron a partir de los artefactos presentes en las soluciones de las situaciones exploratorias. Es decir, observaremos los esquemas de uso desarrollados por los alumnos y posibles esquemas de acción instrumentada.

También, es relevante la interacción entre alumno y el medio Cabri 3D. Esta interacción de observa en términos de las acciones hechas por el alumno y las retroacciones que el medio genera. En particular, en la metodología de este trabajo consideramos el *arrastre* como elemento central que genera retroacciones, y el cual es transversal a todas los problemas abiertos de construcción geométrica de la metodología. Por lo cual nos proponemos observar como los alumnos hacen uso del artefacto *arrastre* y el cómo este evoluciona, en caso de darse, hacia un instrumento a medida que los alumnos dan solución a las situaciones ulteriores. Entonces es necesario determinar los tipos de *arrastre* presentes en el AGD de acuerdo a la situación y finalidad buscada por el sujeto.

Según Arzarello et al. y Hölzl (como se cita en Gutiérrez, 2009) existen los siguientes cuatro tipos de *arrastre* en Cabri II Plus, los cuales consideramos también presentes en Cabri 3D:

- **Arrastre de test:** Se presenta cuando el alumno necesita determinar si su figura construida conserva las propiedades geométricas planteadas en el problema. Así, una figura que no se deforme bajo *arrastre* se acepta como solución del problema.
- **Arrastre errático:** Este se caracteriza porque, una vez analizada la figura por medio de test, el alumno realiza movimientos aleatorios de ciertos objetos de la construcción (puntos, rectas, etc.) con la intención de identificar objetos invariantes en la figura. En principio el alumno desconoce las invariantes de la figura y por tal razón explora con movimientos arbitrarios.

- **Arrastre guiado:** Se da cuando se busca obtener una figura a partir de otra o una familia de figuras que cumplen con ciertas propiedades geométricas. Es el caso, de un paralelepípedo que puede generar un cubo.
- **Arrastre sobre un lugar geométrico oculto:** Este tipo de arrastre, combinado con el artefacto *trayectoria*, permite determinar el recorrido generado por un punto o figura.

Estos tipos de *arrastre* se pueden presentar en cualquier orden durante una construcción geométrica realizada por los alumnos.

Por último, las transformaciones de isometría presentes en la solución de los problemas de construcción geométrica constituyen la unidad de análisis restante. Esta unidad de análisis se relaciona directamente con una de las hipótesis de este trabajo, la cual plantea que los conocimientos que tienen los alumnos de las transformaciones de isometría en el plano pueden ser utilizados para abordar y realizar construcciones geométricas en el espacio haciendo uso delos artefactos de Cabri 3D que permiten realizar dichas transformaciones.

Cabe señalar que, en concordancia con los objetivos específicos de la investigación, la unidad de análisis que se refiere a las transformaciones de isometría tendrá un papel sobresaliente entre las tres unidades de análisis propuestas.

3.4. SITUACIONES DE EXPLORACIÓN Y PROFUNDIZACIÓN

Mediante una prueba piloto realizada con los alumnos de un curso dirigido por el Director de esta investigación, la cual tenia por objetivo indagar sobre los conocimientos previos, se encontró que los alumnos aunque reconocen algunos artefactos de Cabri 3D, no poseen un amplio dominio de los mismos ni de las transformaciones de isometría. Por esta razón, consideramos prudente generar los conocimientos previos necesarios que le permitan a los alumnos solucionar los problemas abiertos de construcción geométrica propuestos en este trabajo, para ello son planteadas las situaciones de exploración. Sin embargo, cabe resaltar que todas las situaciones propuestas (de exploración y profundización) son problemas abiertos de construcción geométrica, excepto la situación E-01.

Además, es conveniente señalar que la información producida a partir del análisis de los registros obtenidos, tanto en las situaciones de exploración como en las situaciones de profundización, será sometida al análisis *a posteriori*.

3.4.1. Situaciones de exploración

Estas situaciones corresponden a una primera fase en la experimentación que tiene por objetivo obsevar el proceso seguido por los alumnos en la generación de esquemas de uso durante las construcciones geométricas realizadas. Identificamos dos tipos de esquemas de uso: los esquemas de uso previamente conocidos por el alumno o a priori (EAU), y los esquemas de uso a desarrollar durante la secuencia (EUD). También, tienen por objetivo relacionar a los alumnos con los artefactos y propiedades geométricas que consideramos necesarios para abordar, en Cabri 3D, los problemas abiertos de construccióngeométrica en el espacio propuestos en la segunda fase de la metodología. Especificamente, se espera que los alumnos identifiquen y utilicen los artefactos del AGD como por ejemplo puntos, esferas, circunferencias, cubos, planos perpendiculares, paralelos y oblicuos, rectas, vectores, segmentos, distancia, calculadora, rotaciones, traslaciones, reflexiones, ayuda. Y también, propiedades geométricas como dependencia de un objeto respecto a un parámetro determinado por un punto sobre un segmento, perpendicularidad, paralelismo, intersección entre objetos.

La adquisición del dominio de los artefactos y propiedades se logra debido a que Cabri 3D se configura como el medio en el cual se desarrollan estas situaciones de exploración. Este medio permite al alumno llevar un control, en tiempo real, de las construcciones que realiza. Ello se debe a que muestra o se pueden establecer, relacionar e incluso verificar los conocimientos geométricos implicados en la construcción, como son las definiciones y propiedades geométricas de la construcción que se realiza, por medio de alguno de los tipos de arraste.

Y es durante la elaboración y solución de la secuencia de problemas abiertos de construcción geométrica, hecha por el alumno, que se genera una relación entre este y el AGD denominada acciones del alumno y retroacciones del medio. Consideramos relevante en este trabajo considerar los distintos tipos de *arrastre* como una retroacción general del medio y que estará presente en todas las construcciones. Sin descartar otros tipos de retroacciones del medio relacionadas con la especificidad de los problemas abiertos de construcción geométrica, y que esbozaremos en la descripción de cada situación.

A continuación, planteamos las acciones del alumno y las retroacciones del AGD que probablemente emerjan en los procedimientos de solución a los problemas propuestos:

- En E-02 hasta E-09 la acción es construir objetos geométricos y la retroacción del AGD consiste mostrarle al alumno por medio del artefacto ayuda, las primitivas requeridas para realizar la construcción. La pertinencia de este punto se debe al nivel de conocimientos previos de los alumnos y la génesis instrumental que se gesta en esta etapa de las situaciones.
- Un *Arrastre errático* de los controladores P_1, P_2 ó P_3, en la macro E-01, sobre los segmentos por parte del alumno y la retroacción consiste en generar el movimiento circular, radial y paralelo de la esfera.
- *Arrastre* de test de la figura o partes de la figura en E-02 hasta E-09 y la

retroacción corresponde a la verificación de la conservación o no de las propiedades geométricas como paralelismo, trayectoria circular, dependencia de movimientos. Esta verificación va de la mano con las definiciones geométricas presentes en la construcción.

- *Arrastre* sobre lugar geométrico oculto y *trayectoria* sobre esferas de E-02 hasta E-09 y la retroacción muestra si la curva de movimiento de los objetos corresponde con el buscado.
- Uso de bola de cristal sobre la construcción en todas las situaciones y la retroacción corresponde a mostrar visualmente intersección o no de objetos. Como la esfera con el muro o la caja en E-01, o las tapas en E-08 con la caja.

a) **Macroconstrucción E-01:** Pasando el Muro.

Abrir el archivo "pasando el muro". Pase la esfera de un lado al otro lado del muro llevándola hasta el interior de la caja. La esfera no debe tocar el muro, ni el plano ni las paredes de la caja (ver Ilustración 14).

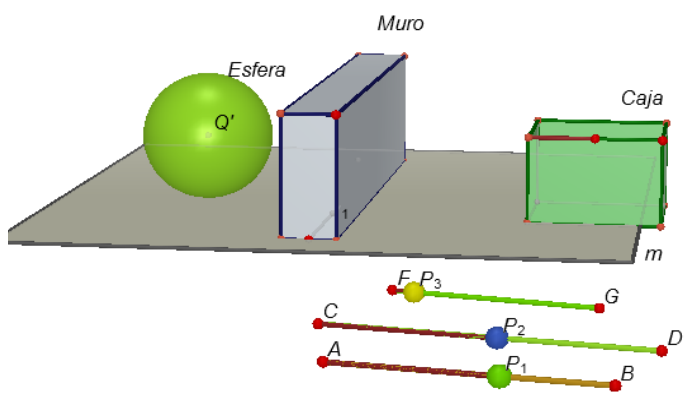

Ilustración 14: Pasando el muro.

Identifica:

1. ¿Cuáles son las propiedades geométricas que permiten que la esfera pase el muro? Explica.

2. ¿Cuáles son las propiedades geométricas que relacionan el movimiento delos controladores P_1, P_2 y P_3 sobre su respectivo segmento, con el movimiento de la esfera?

Descripción de la macroconstrucción E-01

Esta es una macroconstrucción[6] que consiste de una esfera, un muro y una caja, por lo tanto, a diferencia de las posteriores situaciones, esta no es considerada un problema abierto de construcción geométrica ya que no cumple con la condición de tener múltiples soluciones. Es decir, el alumno no debe realizar ninguna construcción, solo debe arrastrar los controladores y describir las propiedades geométricas observadas. El objetivo es pasar la esfera por encima del muro sin que lo toque e introducirla completamente en la caja. Se espera que el alumno explore e identifique los distintos movimientos de la esfera y explicite cuales son las propiedades geométricas implicadas en estos movimientos. En esta exploración las propiedades geométricas como paralelismo, perpendicularidad, distancia entre puntos, intersección de figuras, trayectoria de una rotación y una traslación, entre otras; presentes en la solución de los problemas planteados dan cuenta de las variables de orden visual empleadas por el alumno.

Al respecto de las variables de orden instrumental, se pretende que el uso del *arrastre* por parte del alumno sea de carácter intencional. Esto con el fin que el alumno reconozca por medio de la utilización de artefactos como el *arrastre*, la dependencia de objetos, vista por medio de bola de cristal, que en la macro

[6] Esta situación se plantea como macroconstrucción dado que el objetivo es que los alumnos inicien el tutorial explorando y reconociendo propiedades geométricas, como el paralelismo, la perpendicularidad, y transformaciones de isometría de objetos en el espacio relacionados por medio de un parámetro llamado controlador el cual no es más que un punto Pi sobre un segmento AB del cual se utiliza la distancia de A a P. Es la única situación presentada como macroconstrucción y además se plantea como problema abierto de construcción geométrica en la segunda etapa.

existen objetos geométricos que están relacionados por medio de propiedades geométricas. Además, esperamos que la identificación y empleo de dichos artefactos constituya en conocimiento previo para afrontar los posteriores problemas abiertos de construcción geométrica.

La macroconstrucción devela una dependencia de los movimientos de traslación y rotación de la esfera respecto a los controladores P_1, P_2 y P_3, los cuales han sido definidos a partir de ciertos segmentos AP_1, CP_2 y FP_3 y donde P_1, P_2 y P_3, se pueden animar.

El controlador P_1 traslada la esfera de forma paralela al muro, P_2 permite ampliar el radio de rotación de la esfera y así pasarla al otro lado sin tocar el muro, y P_3 define un ángulo de rotación variable permitiendo rotar la esfera en una trayectoria circular y llevarla hasta la caja.

Es posible que en el momento de pasar el muro e introducir la esfera en la caja, el alumno utilice el artefacto *bola de cristal* de Cabri 3D para determinar visualmente la posición relativa de la esfera respecto al muro y la caja a fin de no tocar el muro o las paredes de la caja.

Algunas de las propiedades geométricas presentes en esta macroconstrucción son perpendicularidad, paralelismo, rotación, traslación, movimiento dependiente de un parámetro, compas. Y los objetos geométricos presentes son esfera, caja XYZ, segmento, vector, circunferencia, recta, punto.

Esquemas de uso en E-01

Esquemas de uso a priori (EUA):

- *Arrastrar objetos*, permite determinar si la construcción cumple con las propiedades geométricas planteadas para el problema de construcción geométrica.

- *Ayuda*, que sirve para identificar los elementos y propiedades que cumplen los objetos geométricos.

Esquemas de uso a desarrollar (EUD):

- *Bola de cristal* para visualizar posiciones relativas de un objeto respecto a otros. En este caso de la esfera respecto al muro o la caja.
- Reconocimiento de invariantes, propiedades geométricas y las trayectorias generadas por objetos en movimiento o arrastrados.
- Reconocimiento de objetos relacionados o encadenados con otros objetos por medio de propiedades geométricas por medio del *arrastre*.
- Y posiblemente, el esquema de uso de reconocimiento de transformaciones geométricas de isometría, para lo cual debe arrastrar objetos y determinar las trayectorias de los objetos así como los elementos geométricos que determinan una traslación, una rotación o una reflexión en el espacio.

b) Situación E-02: Segmento – Punto.

Dado el segmento AB, construir un punto P sobre AB y determinar la distancia entre A y P. El color de P debe ser diferente al de A o B (ver Ilustración 15).

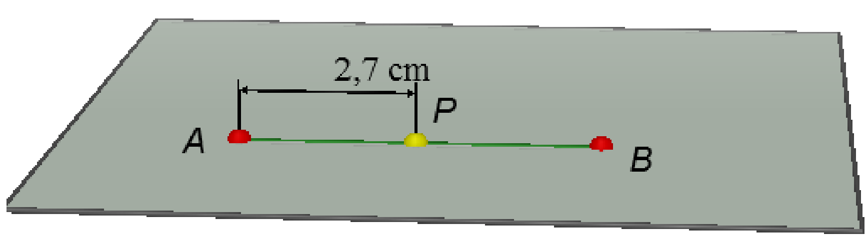

Ilustración 15: Segmento – Punto.

1. ¿Es posible modificar las características visuales de P?
2. ¿Qué propiedades geométricas varían en la construcción cuando se anima P?
3. Describa brevemente los pasos de su construcción.
4. ¿Qué parte de la construcción geométrica le causo mayores dificultades?

Descripción de la situación E-02

Siendo esta la primera construcción geométrica que realizaran los alumnos tiene por objetivo el que exploren los artefactos del AGD. Cuando se solicita construir, nombrar y modificar las características visuales de puntos se espera que se remitan a la pregunta ¿Cómo se hace o que artefacto utilizo?.

El artefacto *ayuda*, y el recuadro de texto que aparece cerca del puntero una vez elegido el artefacto son los orientadores que pensamos emergerán en esta etapa durante la actividad exploradora del alumno.

El alumno debe usar el artefacto punto para construir P en AB. Pero también se puede construir P como intersección de otros objetos. Por otro lado, encontramos dos posibles formas de determinar la distancia; una es usando el artefacto distancia, y la otra por longitud de segmento esto si el alumno primero construye el segmento AP. El hecho de que existan múltiples modos para construir P nos permite hablar de la situación E-02 como un problema abierto de construcción geométrica.

Esquemas de uso en E-02

Esquemas de uso a priori (EUA):

- Arrastrar puntos permitiendo generar la animación de un punto P sobre el segmento AB.

- Ayuda a fin de identificar los elementos geométricos necesarios para construir un objeto geométrico.
- Clic derecho para visualizar o modificar propiedades de un objeto, en este caso los puntos P y B.

Esquemas de uso a desarrollar (EUD):

- Crear un valor numérico variable mediante el uso del artefacto *distancia* entre dos puntos, de los cuales uno o los dos se pueden arrastrar.

c) Situación E-03: Esfera de radio variable.

Dado un segmento AB en un plano m, un punto P en AB, el cual se puede arrastrar o animar, y dada la distancia entre A y P construir una esfera cuyo radio sea la distancia entre A y P y el segmento AB este por fuera del interior de la esfera (ver Ilustración 16).

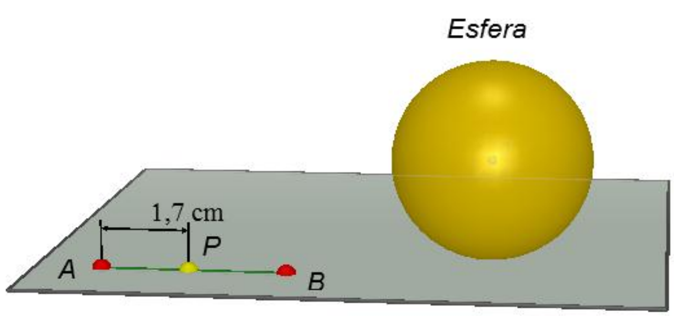

Ilustración 16: Esfera de radio variable.

1. ¿Qué artefacto o artefactos utilizó para relacionar la distancia entre A y P con el radio de la esfera?
2. Describir brevemente los pasos de su construcción
3. ¿Es posible construir una esfera con radio igual a dos veces la distancia entre A y P? ¿cómo?

Descripción de la situación E-03

Se espera que el alumno busque y utilice el artefacto esfera. También, que haga uso de ayuda para identificar cuáles son los elementos u objetos geométricos que se requieren para lograr la construcción de una esfera.

El artefacto esfera indica que existen tres formas de construirla:

- Por centro y punto.
- Por un punto centro y un segmento.
- Por un centro y un número (radio)

Debido a que AB es externo a la esfera el alumno no puede usarlo como radio de c de forma directa. Suponemos que hará uso de la distancia dada entre A y P para definir el radio. Pero como no se dio el centro de la esfera el alumno debe primero construirlo y luego utilizar esfera por centro y un número (radio).

Si por otro lado, el alumno no hace uso del artefacto *ayuda*, sucede que, una vez el alumno elige el artefacto *esfera* y mueve el puntero hacia la ventana de trabajo, Cabri 3D presenta un cuadro de texto en el cual se indican posibles formas de hacer la construcción. Inicia mostrando "esfera centrada en un punto" y seguido cuando el alumno mueve el puntero sobre el segmento AB aparecen las tres opciones, indicadas arriba, con lo cual la decisión de usar distancia entre A y P es la estrategia ganadora que soluciona el problema. Esto no necesariamente excluye usar AP como segmento que defina el radio de la esfera pero requiere que el alumno construya el segmento AP. Aunque esta es una solución, no hace uso de distancia entre A y P de forma directa.

Una vez identificada la forma pertinente para construir la esfera el alumno debe pensar en qué lugar del espacio puede construirla. Es probable que el alumno intente construir una esfera, como la mostrada en la figura la cual está por encima del plano m. Suponemos que para lograrlo primero intentará construyendo el centro en m y la esfera usando AB, AP o distancia entre A y P lo cual arroja una esfera interceptada con m. Entonces, buscará borrar la esfera construida y emerge así el artefacto borrar figura. Y con ayuda buscará como construir un punto en el espacio externo a m.

Esquemas de uso en E-03

Esquemas de uso a priori (EUA):

- Arrastrar objetos para verificar la validez de la construcción, permitiendo determinar si el radio de la esfera varía a medida que se anima P y varia la distancia entre A y P.
- *Ayuda* la cual sirve para identificar los elementos y propiedades que cumplen los objetos geométricos
- *Transferencia de medida* aplicado cuando se tiene un valor numérico y de requiere establecer dependencia entre este valor una variable numérica de otro objeto. Este esquema viene de Cabri II Plus.

Esquemas de uso a desarrollar (EUD):

- Crear dependencia entre objetos como usando un número variable, en este caso el radio variable de la esfera, a partir distancia entre dos puntos, de los cuales uno de ellos se pueden arrastrar.
- *Ayuda*, la cual sirve para identificar los elementos y propiedades que cumplen los objetos geométricos. Esto en caso que no haya emergido aun como esquema de uso en las situaciones anteriores.

d) Situación E-04: Ángulo variable.

Dado un segmento AB, un punto P sobre AB, y dos puntos O y D no colineales con AB. Construir una circunferencia c centrada en O de radio arbitrario que pase por D. Construir un punto E sobre c de tal forma que el ángulo DOE varíe cuando lo haga la distancia AP. El segmento AB y O pertenecen al plano m, y el segmento AB es externo a la circunferencia (ver Ilustración 17).

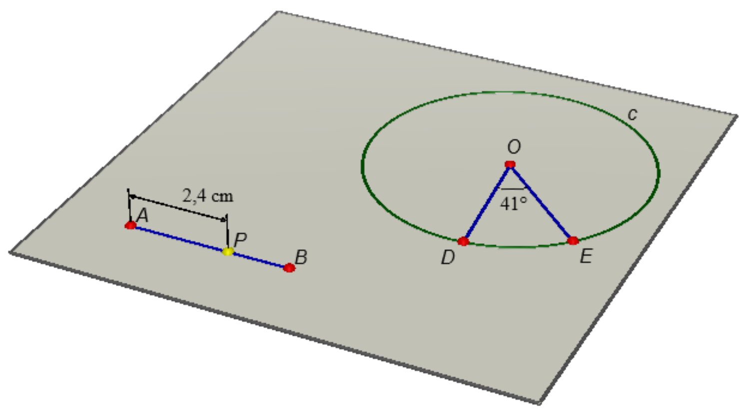

Ilustración 17: Ángulo variable.

1. Describir brevemente los pasos de su construcción
2. ¿Cómo compruebas que el ángulo entre DOE es igual a la distancia entre A y P?
3. ¿Qué artefacto o artefactos utilizó para relacionar la distancia entre A y P con el radio de la circunferencia?

Descripción de la situación E-04

De forma similar a la situación E-03 se espera que el alumno busque y utilice el artefacto circunferencia. También que haga uso del artefacto ayuda para identificar los elementos u objetos geométricos que se requieren para lograr la construcción de la circunferencia.

Un alumno que hace uso de ayuda puede visualizar una amplia gama de métodos de construcción para construir la circunferencia. Incluso aparece construir circunferencias generadas por intercepciones entre esferas.

Al seleccionar el artefacto *ayuda* y también el artefacto *circunferencia* se observará un listado de estrategias de construcción para la circunferencia en un recuadro a la derecha de la pantalla de trabajo. Aparecen siete opciones o formas de construir una circunferencia.

Debido a las condiciones de AB externo a la circunferencia el alumno no podrá usarlo como radio o diámetro de forma directa. Suponemos que el alumno utilizara la opción *circunferencia definida por un plano por su centro y un número (radio)* ya que la distancia entre A y P es dada.

Por otro lado, si el alumno no hace uso del artefacto ayuda sucede que, una vez el alumno elige el artefacto circunferencia, y mueve el puntero hacia la ventana de trabajo, Cabri 3D presenta un cuadro de texto en el cual se indican posibles formas de hacer la construcción.

El cuadro de texto presenta diversas opciones a seguir dependiendo de si el alumno mueve el puntero sobre O, sobre m o sobre AB. En especial, cuando se ubica en O el texto indica "circunferencia que pase por el punto O…" y por tanto O no sería centro de la circunferencia. Si el alumno omite esa información y selecciona ese O como si fuera el centro y mueve el puntero hacia el segmento AB, o los puntos A, B o P se encuentra que al dar clic sobre AB se genera una circunferencia perpendicular a m, centrada en AB como eje y que pasa por O. Pero si selecciona los puntos A, B o P se genera una circunferencia en m que pasa por O y el punto seleccionado. Y por último, si intenta señalar el número que indica la distancia entre A y P el AGD no genera circunferencia alguna debido a que la selección no cumple con un centro previamente seleccionado.

Es distinto si el alumno una vez seleccionado el artefacto circunferencia se ubica primero en el plano m y lo selecciona, después selecciona O y por último selecciona D, logrando así la circunferencia pedida.

El paso siguiente es utilizar distancia entre A y P y construir el punto E sobre la circunferencia. Para ello es probable que emplee transferencia de medida sobre un arco de circunferencia o aplique una rotación con ángulo distancia entre A y P. Si hace uso de transferencia de medida debe considerar que este artefacto utiliza un número, en este caso la distancia entre A y P, y lo aplica a un arco con origen en D y por tanto el ángulo DOE no sería igual a la distancia entre A y P. Pero si usa rotación observará que esta transformación si permite utilizar de forma directa la distancia entre A y P como medida del ángulo DOE.

Esquemas uso en E-04

Esquemas de uso a priori (EUA):

- Arrastrar objetos, permitiendo determinar las propiedades geométricas de una construcción geométrica
- *Ayuda* la cual sirve para identificar los elementos y propiedades que permiten construir un objeto geométrico
- *Transferencia de medida* aplicado cuando se tiene un valor numérico y de requiere establecer dependencia entre este valor una variable numérica de otro objeto. Este esquema viene de Cabri II Plus.

Esquemas de uso a desarrollar (EUD):

- Crear dependencia entre objetos usando un número variable, como la distancia entre dos puntos de los cuales uno o los dos se pueden arrastrar, para definir un ángulo variable.

- Crear movimientos circulares a partir de la construcción de circunferencias y el uso de rotaciones identificando que el punto que rota es la imagen por rotación de un punto inicial.

e) Situación E-05: Caja sin tapa.

Dado un segmento AB construir una caja cúbica con arista AB y sin tapa superior (ver Ilustración 18).

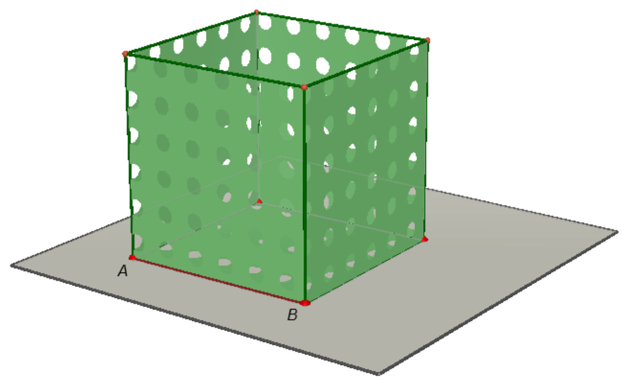

Ilustración 18: Caja sin tapa.

1. Describir brevemente los pasos de su construcción.
2. ¿Cuáles son las propiedades geométricas de la caja?

Descripción de la situación E-05

Inicialmente, es probable que el alumno intente buscar, seleccionar y usar el artefacto cubo. Pero el artefacto *ayuda* indica que se requiere de punto centro y un vértice, o de un cuadrado para realizar la construcción del cubo.

Así que el alumno debe buscar otra estrategia debido a que solo se da el segmento AB como punto de partida. Entonces, es pertinente construir un cuadrado base o determinar el punto centro de la base. Pero de nuevo un cuadrado solo se construye con punto centro y un vértice o un eje central y vértice los cuales no tiene.

Dos posibles formas de dar solución a este problema consisten en construir un cuadrado rotando AB sucesivamente de $90°$ y luego usar polígono, o aplicar rectas paralelas y perpendiculares. Luego usar polígono para generar el cuadrado. Una vez se tiene el cuadrado base se puede aplicar transformaciones de isometría para generar el cubo, o el artefacto cubo o paralelismo y perpendicularidad o cualquier otra estrategia.

En caso de usar cubo debe retirar la tapa con el artefacto superficie vacía y luego construir las otras caras.

Esquemas de uso en E-05

Esquemas de uso a priori (EUA):

- *Ayuda* la cual sirve para identificar los elementos y propiedades que permiten construir un objeto geométrico, como el cubo o cuadrado.
- Transformaciones de isometría en Cabri II Plus.

Esquemas de uso a desarrollar (EUD):

- Uso de *bola de cristal* a fin de observar las distintas caras de la caja
- Crear un cubo a partir de la aplicación sucesiva de transformaciones de isometría a determinados objetos geométricos.

f) Situación E-06: Mover una esfera paralelamente a un muro.

Dada una recta l en un plano m, un segmento AB, un punto P que pertenece a AB, y un muro, construir una esfera E que se desplace paralelamente al muro cuando se anime el punto P (ver Ilustración 19).

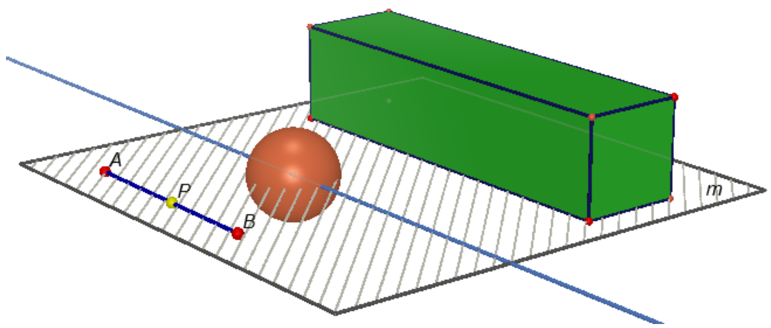

Ilustración 19: Mover esfera paralelamente al plano.

1. ¿Qué propiedades geométricas utilizó para relacionar el movimiento del punto P con el movimiento de la esfera E?
2. ¿Qué propiedades geométricas garantizan el paralelismo entre el muro y el desplazamiento de la esfera?
3. De la construcción realizada: ¿qué figura geométrica le causo mayores dificultades? Explica.

Descripción de la situación E-06

En este problema abierto surge la cuestión de cómo hacer para que el desplazamiento de la esfera dependa de un punto P que pertenece a un segmento AB. En otras palabras, ¿Cómo relacionar el movimiento de una esfera, u otra figura geométrica, con un punto P? una forma de resolver la cuestión de interdependencia en Cabri II Plus es por medio del artefacto transferencia de medida y/o haciendo uso de compás y vectores.

Como la versión Cabri 3D que utilizamos posee el artefacto transferencia de medida, y los alumnos poseen conocimientos previos de Cabri II Plus, es posible que aborden la cuestión por este medio o lo solucionen con otros artefactos. El alumno debe visualizar los objetos geométricos intermedios entre el punto P y la esfera así como las propiedades geométricas que los vinculan. Una de ellas corresponde al paralelismo de la trayectoria de la esfera en relación al muro. La esfera no debe describir una trayectoria cualquiera. Otra cuestión implícita en el enunciado y relacionada con la visualización del alumno consiste en percatarse que la esfera no se intercepta con m o no necesariamente debe pertenecer al plano dado m.

Una forma de establecer la dependencia de movimientos es usar compás, paralelismo y perpendicularidad, como ya se mencionó. O extender a Cabri 3D el esquema de uso transferencia de medida de Cabri II Plus. Pero otra es visualizar una solución que involucre traslaciones, esto debido al movimiento paralelo que debe cumplir la esfera. De ser este el caso la traslación es un esquema de acción instrumentada de Cabri II Plus que se aplica y convierte en un esquema de uso en Cabri 3D.

El alumno que sigue esta vía debe responder la cuestión de ¿cómo hacer para que el vector de la traslación cambie de magnitud cuando se desplace el punto P? Un primer abordaje que nosotros realizamos, y pensamos que los alumnos también pueden intentar, es usar el artefacto distancia con la cual hallamos la distancia entre A y P, seguido, probar a construir un vector sobre una recta k paralela a l con origen en un punto arbitrario sobre k y con magnitud definida por la distancia de A a P. Este intento no fructificó porque el artefacto ayuda indica que solo se construye un vector si se tienen dos puntos. La solución se obtiene usando compás, donde se construye una circunferencia sobre un plano que contiene a k, con centro arbitrario en k y radio igual a la distancia entre A y P. Los extremos del vector son el centro de la circunferencia y el punto de intersección entre k y la circunferencia. Finalmente, se realiza la traslación de la esfera respecto al vector y cuando se anime P se observa que la esfera imagen de la construcción cumple con las propiedades pedidas en el problema planteado. Se oculta la esfera inicial.

Esquemas de uso en E-06

Esquemas de uso a priori (EUA):

- Arrastrar objetos, permitiendo determinar las propiedades geométricas de una construcción geométrica
- *Ayuda* la cual sirve para identificar los elementos y propiedades que permiten construir un objeto geométrico
- *Transferencia de medida* aplicado cuando se tiene un valor numérico y de requiere establecer dependencia entre este valor una variable numérica de otro objeto. Este esquema viene de Cabri II Plus.
- *Traslación* en Cabri II Plus cuando se requiere el cumplimiento de paralelismo

Esquemas de uso a desarrollar (EUD):

- Crear dependencia entre objetos usando un número variable, como la distancia entre dos puntos de los cuales uno o los dos se pueden arrastrar, para definir un vector variable.
- Crear movimiento de la esfera, que cumplan paralelismo, por medio de traslaciones.
- Generación de traslaciones como forma de construir objetos que se mueven paralelamente a otros, y regular ese desplazamiento por medio del control que se puede ejercer sobre un vector cuyo módulo depende de un parámetro P. Identificando que el objeto geométrico imagen es el que se mueve.

g) Situación E-07: Esfera con movimiento circular.

Dado un segmento AB y un punto P que pertenece a AB, una recta l que pertenece a un plano m, construir una esfera$E$que se desplace en una trayectoria circular centrada en l, cuando se anime el punto P.

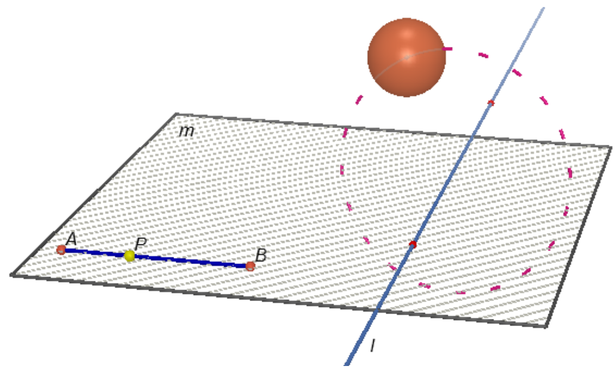

Ilustración 20: Esfera con movimiento circular.

1. ¿Qué propiedades geométricas utilizar para relacionar el movimiento del punto P con el movimiento de la esfera E?
2. ¿Qué propiedades geométricas garantizan la trayectoria circular de la esfera?
3. De las figuras geométricas construidas: ¿Qué figura geométrica le causo mayores dificultades? Explica.

Descripción de la situación E-07

Es posible realizar esta construcción haciendo uso de las propiedades de paralelismo, perpendicularidad e intersección entre objetos geométricos. Pero también se puede emplear rotaciones o reflexiones como se puede apreciar en las soluciones propuestas más adelante.

En la solución por medio de rotaciones el parámetro que determina el movimiento de la esfera, como dependiente de un punto móvil P sobre un segmento AB, es el ángulo definido por medio de la distancia entre A y P o un múltiplo escalar de esta distancia. Esta rotación se puede realizar alrededor de una recta l y sobre una circunferencia construida en el plano m y alrededor de l, donde se hace claro la propiedad de perpendicularidad presente en la rotación. Aunque la circunferencia se puede omitir si el alumno tiene claro la naturaleza de radio constante de esta transformación y dado que el AGD permite rotar con solo el ángulo definido por un escalar y una recta. Análogamente a la situación E-04 es en el establecimiento de la relación de dependencia del ángulo de rotación y la distancia entre A y P, donde los alumnos deben aplicar su capacidad de visualización.

Obsérvese que, en general, es posible solicitar que en el problema la esfera realice una trayectoria cónica, donde la trayectoria circular constituiría un caso particular. Como otra información implícita esta el que la esfera no intercepte el plano.

Esquemas de uso en E-07

Esquemas de uso a priori (EUA):

- Arrastrar objetos, permitiendo determinar las propiedades geométricas de una construcción geométrica
- *Ayuda* la cual sirve para identificar los elementos y propiedades que permiten construir un objeto geométrico
- *Transferencia de medida* aplicado cuando se tiene un valor numérico y de requiere establecer dependencia entre este valor una variable numérica de otro objeto. Este esquema viene de Cabri II Plus.
- *Rotación* en Cabri II Plus.

Esquemas de uso a desarrollar (EUD):

- Crear dependencia entre objetos usando un número variable, como la distancia entre dos puntos de los cuales uno o los dos se pueden arrastrar, para definir un ángulo variable.
- Crear movimientos circulares a partir de la construcción de circunferencias y el uso de rotaciones.

h) Situación E-08: Caja con tapa seccionada y desplegable.

Dado un segmento AB en un plano m y un punto P sobre AB, construir una caja con tapa formada por triángulos congruentes que abran o cierren simultáneamente cuando se anime el punto P.

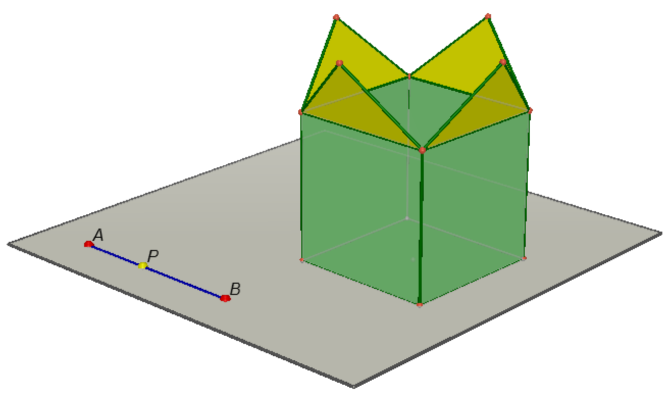

Ilustración 21: Caja con tapa seccionada y desplegable.

1. ¿Qué propiedades geométricas tiene la caja?
2. ¿Qué propiedades geométricas cumple cada uno de los triángulos que forman la tapa?
3. ¿Cómo relacionar las propiedades que varían en AP con el movimiento que deben realizar las tapas? ¿Es posible?

Descripción de E-08

Este problema abierto pretende que el alumno visualice la forma de establecer una relación de dependencia entre el movimiento rotacional de las tapas con la el movimiento del punto P en AB. También, observaremos el dominio de los artefactos que utiliza para construir la caja.

El alumno inicialmente puede construir la caja con el artefacto cubo, pero debe visualizar la forma de retirar la cara superior a fin de construir la tapa. Para lo cual puede usar superficie vacía y luego construir el fondo y caras laterales usando los artefactos cuadrado o polígono repetidas veces, o a partir de una cara construida usar transformaciones de isometría para generar las otras caras.

O tal vez, construya la caja sin la macro cubo, el cual es un artefacto tridimensional, usando los artefactos punto, segmento, paralelismo, perpendicularidad y cuadrado o polígono. Lo cual indicará un posible desconocimiento de superficie vacía de un objeto geométrico, debido a que una construcción de este tipo requiere de más artefactos unidimensionales y bidimensionales que la anterior.

Acto seguido, construir las tapas. Inicialmente el alumno puede guiarse por la *Ilustración 18* y visualizar cuando las tapas triangulares están cerradas, o rotan un cierto ángulo, tienen un vértice común en el centro de la cara superior de la caja. De no ser así, las tapas probablemente se intercepten lo cual es una restricción implícita de una caja física. Pero ¿cómo construir la tapa rotatoria?

Una posible solución es construir un primer triángulo E. Después, generar la imagen E' por medio de rotación de Eusando como eje de rotación una de las aristas superiores del cubo y tomando como ángulo β el cual es un múltiplo de la distancia entre A y P. Esta construcción se repite tres veces hasta tener toda la tapa. Una retroacción del medio, y que está ligada a una restricción implícita del problema, consiste en visualizar que las tapas no pueden interceptar los lados de la caja. La respuesta del alumno puede verse reflejado en una acotación del ángulo máximo de rotación por medio de modificar su segmento AB.

Otra forma construir las tres últimas tapas, es utilizar E' construido como ya se indicó y realizar tres rotaciones sucesivas. Para ello es preciso visualizar un eje de rotación adecuado o se presentan dificultades. Por ejemplo, en nuestro caso no fructificó el intento de realizar la rotación de E' usando las aristas verticales del cubo como ejes de rotación porque las rotaciones generaron tapas con distintos ángulos de despliegue. La solución se obtuvo cuando rotamos respecto a una recta perpendicular a la cara superior y que pase por su centro. Un alumno que maneje el esquema de generar movimiento por medio de paralelismo e intercepciones deberá construir más objetos geométricos (círculos, segmentos, rectas, etc.) respecto a aquel que usa rotaciones.

Esquemas de uso en E-08

Esquemas de uso a priori (EUA):

- Arrastrar objetos, permitiendo determinar las propiedades geométricas de una construcción geométrica.
- *Ayuda* la cual sirve para identificar los elementos y propiedades que permiten construir un objeto geométrico.
- *Transferencia de medida* aplicado cuando se tiene un valor numérico y de requiere establecer dependencia entre este valor una variable numérica de otro objeto. Este esquema viene de Cabri II Plus.
- *Rotación* en Cabri II Plus.

Esquemas de uso a desarrollar (EUD):

- Crear dependencia entre objetos usando un número variable, como la distancia entre dos puntos de los cuales uno o los dos se pueden arrastrar, para definir un ángulo variable.
- Generar movimientos circulares con el uso de rotaciones identificando que el triángulo que rota es la imagen de uno previamente construido.
- Generar objetos geométricos congruentes aplicando transformaciones de isometría

i) **Situación E-09**: Sistema Planeta – Satélite.

Dado un segmento AB y un punto P que pertenece a AB, construir un sistema planeta satélite que cumpla lo siguiente: el satélite se mueve en órbita circular respecto al planeta ubicado en el centro y tomando como punto de partida cualquier punto sobre la circunferencia de la órbita; el satélite se desplaza en su órbita cuando se anima o arrastra el punto P; la velocidad angular del satélite se puede cambiar a un múltiplo; y el segmento AB esta por fuera de la circunferencia de la órbita satelital.

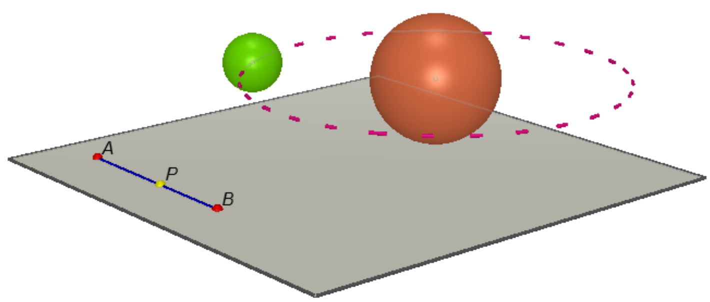

Ilustración 22: Sistema Planeta – Satélite.

1. ¿Cómo relacionar las propiedades que varían en AP con la variación del ángulo de rotación?
2. ¿Cómo se denomina el movimiento realizado por el satélite?, ¿qué

propiedades geométricas permanecen invariantes durante en el movimiento que realiza el satélite?, ¿cuáles varían?

3. Construido el planeta ¿cómo hacer para observar directamente el polo norte o cualquier otra parte del sistema planeta satélite?

Descripción de E-09

Este problema pretende generar en los alumnos la identificación de la relación que se puede establecer entre escalares, como la distancia entre puntos en este caso entre A y P, y otros valores que varían de forma continua dentro de una construcción. Es el caso del modulo de un vector, la variación de un ángulo, el radio de una esfera, etc. En particular variando el ángulo de rotación, el cual es un escalar, y usando una transformación de isometría se puede generar el movimiento circular del satélite. Pero, ¿cómo podrá el alumno garantizar la relación de dependencia que asocie la distancia variable por animación entre A y Pcon la rotación del satélite?, o específicamente ¿con el ángulo de rotación?

En este punto planteamos, a manera de hipótesis, que el alumno hará uso del esquema de acción instrumentada transferencia de medida de Cabri II Plus y extenderá este conocimiento a Cabri 3D. Consideramos que el uso como instrumento del artefacto transferencia de medida en Cabri II Plus ya hace parte de los saberes previos del alumno. Además, se espera que el alumno, en la medida que realiza acciones en Cabri 3D para dar solución a los problemas propuestos, logre identificar que el ángulo es un número y uno de los objetos geométricos que permiten definir y construir una rotación.

La condición de obtener distintas velocidades angulares con solo modificar un escalar se relaciona con la pregunta ¿Cómo obtener el múltiplo de un escalar en Cabri 3D? ó ¿Qué artefacto permite realizar operaciones con un escalar como la multiplicación? La calculadora cumple esta función, al igual que en Cabri II Plus.

Aunque se puede presentar el caso de alumnos que para variar la velocidad de la rotación utilicen una animación más rápida y no se remitan a multiplicar el ángulo.

Adicionalmente, esperamos que los artefactos *ayuda* y *bola de cristal* emerjan, durante la evolución de las soluciones, como posibles indicadores de la pertinencia de la construcción de los objetos geométricos. Esto debido al carácter introductorio que tienen estos problemas abiertos.

Por otro lado, es pertinente decir que también es posible una solución con paralelismo y perpendicularidad. La cuestión es que si se intenta construir una recta que intercepte tanto a AB como a la circunferencia existen dos posibles puntos de intercepción, independientemente de la posición de AB respecto al círculo, esto si tanto AB como el circulo son coplanares. Con ello el movimiento del satélite construido en un punto de intercepción solo describirá media órbita cuando se anime P.

Esquemas de uso en E-09

Esquemas de uso a priori (EUA):

- Arrastrar objeto: Permite determinar las propiedades geométricas de una construcción geométrica
- *Ayuda*: Sirve para identificar los elementos y propiedades que permiten construir un objeto geométrico
- *Transferencia de medida*: Se aplica cuando se tiene un valor numérico y se requiere establecer dependencia entre este valor una variable numérica de otro objeto. Este esquema viene de Cabri II Plus.
- *Rotación* en Cabri II Plus.

Esquemas de uso a desarrollar (EUD):

- Crear dependencia entre objetos usando un número variable, como la distancia entre dos puntos de los cuales uno o los dos se pueden arrastrar, para definir un ángulo variable.
- Generar movimientos circulares a partir de la construcción de circunferencias y el uso de rotaciones identificando que la esfera que rota es la imagen de una esfera previamente construida.

3.4.2. Situaciones de profundización

Las situaciones que denominamos como de profundización son aquellas situaciones que atienden a la segunda fase en la experimentación contemplada en los lineamientos metodológicos.

Cada una de las situaciones de profundización apunta hacia los siguientes objetivos:

- Rastrear la forma como los alumnos identifican y aplican los elementos visuales presentes o necesarios en las soluciones a los problemas abiertos de construcción geométrica.
- Determinar cuáles son los artefactos e instrumentos con que cuentan los alumnos en el momento de dar solución a las situaciones.
- Determinar si los alumnos utilizan las transformaciones de isometría en 3D, si reconocen los elementos que permiten realizarlas y cómo las aplican a las posibles soluciones de estas situaciones de profundización.

Además, aclaramos que todos los problemas abiertos de construcción geométrica propuestos tienen relación con alguna situación conocida por los alumnos en el contexto real y el nombre asignado a cada una de ellas así lo sugiere. Las situaciones de profundización son: colisión de esferas, pasando el muro, el columpio y la cancha de básquet.

A continuacion, y de forma general, se plantean algunas las acciones del alumno y las retroacciones del medio que pueden presentarse en los procedimientos de solución a los problemas propuestos. Se observará que éstas acciones y retroacciones no difieren mucho de las presentes en las situaciones de exploración.

- En P-01 a P-04 la acción es construir objetos geométricos y la retroacción del AGD consiste mostrarle al alumno, por medio del artefacto ayuda o cuadro de texto, las primitivas que puede usar. Esta retroacción ayuda la consideramos debido a que los alumnos han tenido poco tiempo de trabajo en la primera fase y por tanto continúan adquiriendo esquemas de uso.
- *Arrastre* de test de la figura o partes de la figura en P-01 a P-04 y la retroacción corresponde a la verificación de la conservación o no de las propiedades geométricas paralelismo, perpendicularidad, conservación de la distancia, forma.
- *Arrastre* sobre lugar geométrico oculto sobre los diversos objetos de P-01 a P-04y la retroacción muestra si la curva de movimiento de los objetos corresponde con el buscado.
- Uso de bola de cristal sobre la construcción en todas las situaciones y la retroacción corresponde a mostrar visualmente intersección o no de objetos.

Seguidamente, presentamos las situaciones de profundización, su descripción y análisis a priori de cada una de ellas. Es pertinente decir que los esquemas de uso a desarrollar (EUA), descritos en la fase anterior, se plantean en esta etapa como posibles esquemas de uso a priori (EUA) los cuales pueden llegar a evolucionar a esquemas de acción instrumentada (EAI) o ya haberse desarrollado como un EAI. Se debe considerar que el tiempo de trabajo del alumno con el medio por medio de las situaciones de exploración ha sido relativamente corto y por lo tanto los esquemas de acción instrumentada tal vez estén empezando a emerger. También, para efectos de simplificar denotamos la primer situacion de profundización como P-01, y así sucesivamente con las demás.

a) Situación P-01: Colisión de esferas.

Dado un segmento ABen un plano m, un punto P en AB, construir dos esferas $E1$ y $E2$ de tal forma que al animar P las dos esferas se muevan sobre una circunferencia, de tal forma que se acerquen entre sí o se alejen entre sí (ver Ilustración 23).

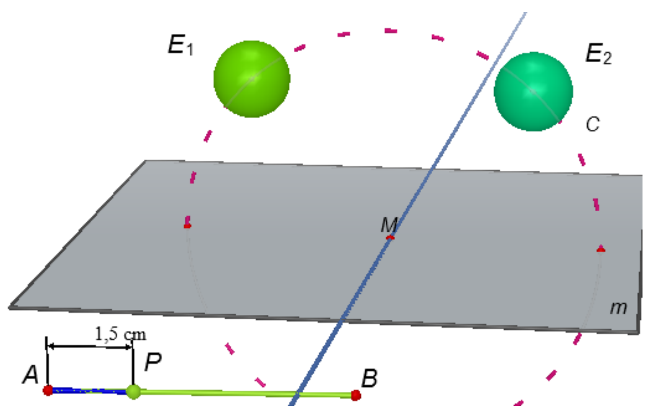

Ilustración 23: Colisión de esferas.

1. ¿Qué propiedades geométricas en la construcción garantizan el movimiento dependiente de $E1$ y $E2$ respecto al punto P?
2. ¿Qué propiedades geométricas en la construcción garantizan el movimiento simultáneo o dependiente de la esfera $E2$ respecto a otra esfera $E1$?
3. ¿Qué propiedades geométricas permiten que las esferas choquen pero no se superpongan?
4. Describe brevemente los pasos de la construcción.

Descripción de la situación P-01

Los objetos geométricos dados en esta situación son un segmento AB en un plano m y un punto Pque pertenece a dicho segmento, sin embrago, en la *figura 19*se observa que AB no pertenece al plano que contiene a la trayectoria circular de las esferas.

Uno de los objetivos de esta situación es que el alumno visualice las propiedades geométricas y/o las transformaciones de isometría presentes en la relación geométrica entre las dos esferas $E1$ y $E2$, y sus movimientos sobre una circunferencia como dependientes del movimiento del punto P. Una primer solución que haga uso de la perpendicularidad entre otro segmento ED y una recta l que pase por un punto Q de ED, el cual depende del movimiento de P, mas la intersección de dicha recta con una circunferencia permite una posible solución sin usar transformaciones de isometría. Una solución de este tipo indicará que el alumno utiliza Cabri 3D, propiedades geométricas como paralelismo, perpendicularidad y dependencia de movimiento, este último más como un instrumento que como un artefacto. Es decir, indica que el alumno es capaz de visualizar y establecer relaciones entre el conocimiento, los objetos geométricos, las propiedades geométricas que los relacionan y los artefactos de Cabri 3D que permiten generar soluciones al problema planteado.

Si por otro lado, el alumno propone una solución usando rotaciones y/o reflexiones esto indicará dos cosas: primero, por medio de la visualización logra determinar las relaciones entre las transformaciones de isometría, y los objetos geométricos que permiten definirlas, con los objetos que definen la solución al problema de colisión de esferas; y segundo, genera el movimiento de las esferas u objetos, relacionando un parámetro móvil P, ligando los objetos geométricos que definen la transformación de isometría con el parámetro P. Todo esto indicará que aplica las transformaciones de isometría como un instrumento, y el esquema de acción instrumentada transferencia de medida de Cabri II Plus evolucionó durante las situaciones introductorias.

Dado que la situación constituye un problema abierto de construcción geométrica, es posible que el alumno proponga una solución distinta a las antes enunciadas. En cualquier caso nuestro trabajo consiste en identificar las transformaciones de isometría que utilice en la solución, los procesos de visualización que ha llevado a cabo así como los artefactos, que a partir de las situaciones exploratorias, son ahora instrumentos.

Finalmente, el que las esferas no se superpongan es una condición implícita que puede aparecer dentro de una posible solución al problema. Esta tendría sentido físico en las colisiones elásticas.

Esquemas de uso en P-01

Esquemas de uso a priori (EUA):

- Crear dependencia entre objetos usando un número variable, como la distancia entre dos puntos de los cuales uno o los dos se pueden arrastrar, para definir un ángulo variable.
- Crear movimientos circulares a partir de la construcción de circunferencias y posiblemente el uso de rotaciones identificando que la esfera que rota es la imagen de una esfera previamente construida.

Esquemas de acción instrumentada (EAI):

- Crear una dependencia funcional entre un número variable y el movimiento de objetos geométricos.
- Establecer una relación de dependencia entre el movimiento de diversos

objetos geométricos mediante la aplicación de transformaciones de isometría.

b) Situación P-02: Pasando el Muro.

Dados dos segmentos y dos puntos P_1 y P_2 que pertenecen, respectivamente a cada segmento, una caja M (que se constituye en muro) en un plano m, una recta l en m y l perpendicular a una de las caras del muro, construir una esfera E y un caja J de forma que desplazando P_1 la esfera se mueva paralela a M, y al mover P_2 se pase la esfera E por encima de M y se introduzca en la caja J.

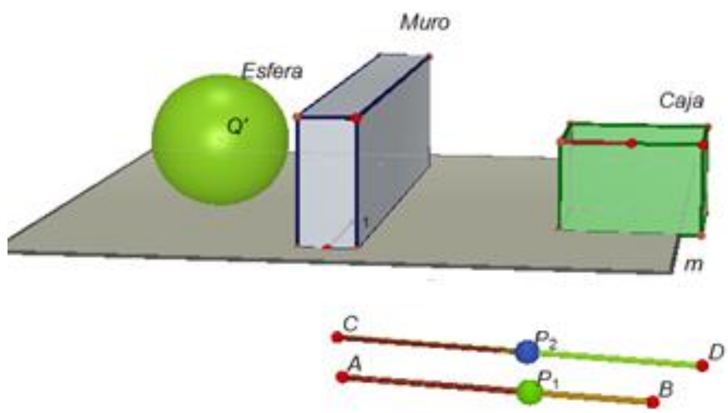

Ilustración 24: Pasando el muro.

1. ¿Cuáles son las propiedades geométricas que permiten que la esfera pase el muro y entre perfectamente en la caja J? Explica.
2. ¿Cuáles son las propiedades geométricas que relacionan el movimiento de P_1 o P_2 sobre un segmento con el movimiento de la esfera?
3. De la construcción realizada: ¿qué figura geométrica le causo mayores dificultades? Explica.
4. Describe brevemente los pasos de la construcción.

Descripción de la situación P-02

Pasando el muro es un problema que recoge elementos explorados tanto en la macroconstrucción con el mismo nombre, como en los otros problemas abiertos propuestos en las situaciones de exploración.

En la construcción geométrica de una solución esperamos observar la visualización aplicada por el alumno en la forma como relaciona los conocimientos adquiridos o reforzados durante la realización de las situaciones exploratorias, a fin de generar los dos movimientos de la esfera. Estos movimientos corresponden a una torcedura.

Una solución se puede obtener utilizando perpendicularidad, intersecciones, etc. en especial a la hora de pasar la esfera sobre el muro sin tocarlo.

Otra solución puede construirse por medio de aplicar rotación a la esfera a fin de pasar el muro. Esta puede realizarse en una trayectoria circular con radio mayor a la altura del muro; y una vez establecida esta condición en la construcción no es necesario un tercer controlador que determine este radio como aparece en la macro. Es de notar que una condición del problema es que la esfera pase sin tocar el muro, lo cual puede hacer inclusive si describe otras trayectorias, como una parábola por ejemplo, generando otras soluciones. El movimiento a lo largo del muro se obtiene por medio de una traslación dependiente de uno de los controladores P_1 o P_2.

También, es pertinente determinar las propiedades geométricas e incluso el posible uso de bola de cristal para determinar cuando la esfera se intercepta o no con las paredes de la caja o con el muro, e incluso con el plano m. Y así, determinar las variables de la construcción geometría que el alumno acota a fin de tener en cuentas las restricciones de intercepción.

Esquemas de uso en P-02

Esquemas de uso a priori (EUA):

- Crear dependencia entre objetos usando un número variable, como la distancia entre dos puntos de los cuales uno o los dos se pueden arrastrar, para definir un ángulo variable o un vector variable.
- Crear movimientos circulares a partir de la construcción de circunferencias y el uso de rotaciones.
- Crear movimientos paralelos de objetos geométricos a partir de traslaciones.

Esquemas de acción instrumentada (EAI):

- Aplicar transformaciones de isometrías construyendo torceduras que permitan desplazar la imagen de un objeto geométrico de un punto del espacio a otro, donde las propiedades de la torcedura dependen de un parámetro numérico.

c) Situación P-03: El columpio.

Dado un segmento AB, un punto P sobre AB, construir un columpio de tal forma que cuando se anime el punto P el asiento A oscile o se mueva como péndulo describiendo un arco de circunferencia (ver Ilustración 25).

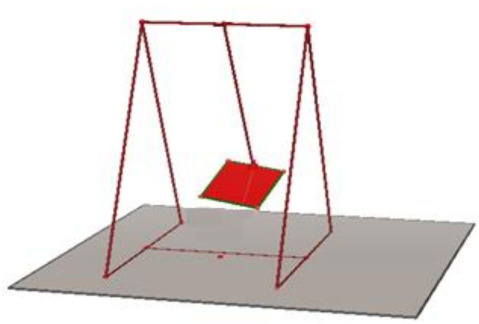

Ilustración 25: El columpio.

1. ¿Qué propiedades de toda la figura geométrica permanecen invariantes durante el movimiento del asiento?
2. ¿Cómo relacionar el movimiento de P en el segmento AB con la oscilación del asiento?
3. Describe brevemente los pasos de la construcción.

Descripción de la situación P-03

En la construcción del columpio es posible que el alumno integre movimiento, rotación y simetría o reflexión en la búsqueda de la solución. Esto se da porque en general los alumnos han tenido alguna experiencia física con columpios y han percibido las características visuales de su desplazamiento oscilatorio sobre un arco de circunferencia. Además, los artefactos de Cabri 3D le permiten poner en juego conocimientos geométricos espaciales y conocimientos movilizados por los alumnos en las situaciones de exploración.

Se espera evidenciar la aplicación de los conocimientos en la forma como se realice el problema logrando que el asiento y su soporte oscilen a medida que se anima un parámetro P. La oscilación se puede generar por medio de rotaciones o reflexiones respecto a un eje, que en este caso viene a ser el soporte horizontal. Pero también puede ser obtenida por medio de intersección simultánea entre una recta con una circunferencia, y la misma recta con el segmento dado AB en el punto P. Animando P se genera las oscilaciones del asiento el cual se construye en la intercepción de la recta con la circunferencia.

En una solución por transformaciones de isometría el alumno visualiza la relación entre el asiento, el cual debe permanecer a una distancia fija del soporte horizontal, mientras que en la otra solución se concentra en la intersección de una trayectoria circular con una recta.

En la oscilación hecha por rotación del asiento es pertinente visualizar el punto de origen de la rotación, como en un columpio físico, y además este debe oscilar si inicialmente esta fuera de la posición de equilibrio. Esto debido a que si el asiento esta inicialmente en el punto más bajo, y se aplica una rotación con un ángulo dado, se obtiene que la imagen del asiento oscila entre una posición máxima y el punto cero. Es decir, la trayectoria que recorre es solo la mitad de la recorrida por un columpio físico.

Ahora, los soportes del columpio. Una construcción geométrica de los soportes verticales y horizontales, realizada soporte por soporte indica que la visualización aplicada por el alumno solo da cuenta del paralelismo y perpendicularidad entre los soportes. Por otro lado, una construcción en la cual se construya un soporte vertical y a partir de este se construya el segundo por reflexión o traslación indica que el alumno visualiza la relación de simetría existente. Es más, la construcción del soporte horizontal se puede obtener rotando $90°$ uno de los soportes verticales.

Por último, agregamos que esta situación se puede ampliar y enriquecer si a la construcción de un columpio se adicionan otros, a la misma barra horizontal, que se desplacen en el mismo sentido o en sentido opuesto del inicial. En tal caso, se observa cierta dificultad en cuanto a generar el movimiento en sentido opuesto. Sobre todo porque se debe visualizar las propiedades que deben cumplir ambos columpios. A manera de sugerencia pensamos que la aplicación de una doble reflexión plana, donde los dos planos son perpendiculares entre sí, puede dar solución al nuevo problema.

Esquemas de uso en P-03

Esquemas de uso a priori (EUA):

- Crear dependencia entre objetos usando un número variable, como la distancia entre dos puntos de los cuales uno o los dos se pueden arrastrar, para definir un ángulo variable o un vector variable.
- Crear movimientos circulares a partir de la construcción de circunferencias y posiblemente el uso de rotaciones identificando que la esfera que rota es la imagen de una esfera previamente construida.

Esquemas de acción instrumentada (EAI):

- Aplicar rotación para generar movimientos oscilatorios y simetrías para generar imágenes congruentes de objetos geométricos.

d) Situación P-04: La cancha de básquet.

Dado un segmento AB, un punto P en AB y un plano m, construir una cancha de básquet en m, dos aros y dos esferas E_1 y E_2; de tal forma que cuando se mueva P se desplace E_1 y E_2 en direcciones opuestas, partiendo del punto M, o una hacia la otra y se puedan introducir en los aros. Y las esferas no se interceptan con los aros o tableros.

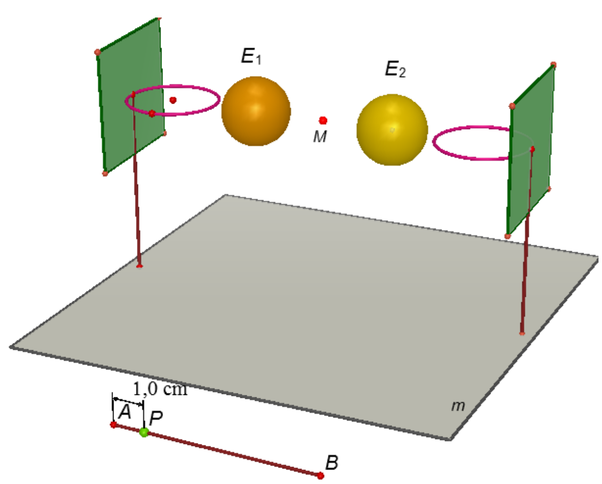

Ilustración 26: La cancha de básquet.

1. ¿Qué propiedades geométricas cumplen las canchas con sus aros?
2. ¿Qué propiedades geométricas cumplen las dos esferas?
3. ¿Qué propiedades geométricas o que variables en la construcción permiten que las esferas no se intercepten con los aros o tableros?
4. Describe brevemente los pasos de la construcción.

Descripción de la situación P-04

Este problema presenta varias simetrías entre los objetos geométricos que la componen. Las canchas son congruentes, así como los dos balones o esferas. Incluso el movimiento de las dos esferas está supeditado la una a la otra, bien acercándose o alejándose por medio de una reflexión central, axial o plana. Obsérvese, que no se dice si la trayectoria de desplazamiento de las esferas es recta, circular, elíptica, etc. Se espera que el alumno visualice y elija el tipo de trayectoria que desea imprimir a las esferas. Una trayectoria curva, en particular la circular, le permitiría ingresar las esferas a los aros sin interceptarlos.

Otra propiedad geométrica entre esferas y aros, y que en el problema es implícita, se debe a que las esferas deben entrar en los aros. Es decir, los radios correspondientes deben cumplir con una desigualdad. Decir que una esfera entran en el aro es equivalente a afirmar que el centro de la esfera y el aro están muy próximos entre sí.

Tampoco se hace alusión a la velocidad como se acercan el uno al otro. Tal vez, uno de los balones se mueve más rápido que el otro. En un juego real de básquet puede presentarse un sin número de variaciones del problema. Pero ¿Cómo generar el movimiento de las esferas?

Una solución al movimiento es generar una rotación en la esfera E_1, con centro en M y ángulo igual a la distancia entre A y P. Así, cuando se anima P genera una rotación en E_1. El alumno puede emplear las propiedades geométricas parecidas a las presentes en la solución de P-01. La esfera E_2 se obtiene por reflexión de E_1.

Consideramos que debido a las simetrías presentes en el problema abierto de construcción geométrica, tanto en las canchas como los balones, es probable que el alumno use varias reflexiones. Pero también, es posible emplear las traslaciones. Una ausencia de transformaciones de isometría indica que el alumno visualiza las propiedades geométricas que deben cumplir los objetos, pero no los relaciona con torceduras en el espacio.

Esquemas de uso en P-04

Esquemas de uso a priori (EUA):

- Crear dependencia entre objetos usando un número variable, como la distancia entre dos puntos de los cuales uno o los dos se pueden arrastrar, para definir un ángulo variable o un vector variable.
- Crear movimientos circulares a partir de la construcción de circunferencias y posiblemente el uso de rotaciones identificando que la esfera que rota es la imagen de una esfera previamente construida.
- Generar movimientos simétricos de objetos usando un punto, un eje o un plano y torceduras las cuales dependen de un controlador.

Esquemas de acción instrumentada (EAI):

- Aplicar transformaciones de isometrías para establecer una relación de dependencia entre el movimiento de diversos objetos geométricos y un valor numérico variable.

3.5. RECURSOS PARA IMPLEMENTAR LA SECUENCIA

3.5.1. Selección y descripción de los alumnos que participaron en el desarrollo de la secuencia

Los partícipes en la aplicación dela secuencia son alumnos regulares de la Licenciatura en Matemáticas y Física y la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle.

La selección de los partícipes se realizó por recomendación directa del Director de este trabajo de investigación bajo los siguientes criterios: Los alumnos deben contar con conocimientos previos del AGD Cabri II Plus y algún interés en la Línea de Tecnologías de la Información y Comunicación que ofrecen los dos programas académicos antes mencionados. Para esto se trabajó con un grupo de 8 alumnos matriculados en un seminario de investigación de dicha Línea.

3.5.2. Tiempos y contenidos de aplicación de la secuencia

La aplicación de la secuencia se llevó a cabo en tres sesiones de tres horas cada una, distribuidas de la siguiente manera: dos sesiones para las situaciones de exploración y una sesión para las situaciones de profundización.

En la primera sesión podemos identificar dos momentos. Un primer momento en el que se realizó una breve exposición de introducción al Cabri 3D por parte de uno de los investigadores a fin de proporcionar algunos esquemas de uso básicos que se consideran necesarios para empezar el desarrollo de la secuencia. En el segundo momento comienza el desarrollo de la secuencia y se establece que solo se trabajaran las situaciones E-01, E-02, E-03 y E-04.

En la segunda sesión se trabajan las situaciones E-05, E-06, E-07, E-08 y E-09, agotando en esta etapa las situaciones de exploración. Y finalmente, en la tercera sesión se desarrollan las situaciones P-01, P-02, P-03 y P-04.

Es de subrayar que en cada una de las sesiones, se realiza la socialización de algunos de los procedimientos de solución de los alumnos a las situaciones propuestas.

3.5.3. Elementos necesarios para la aplicación de la secuencia

La aplicación de la secuencia tuvo lugar en un aula del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle. El espacio cuenta con un proyector (video beam en ingles) y, adicionalmente, se utilizaron 4 computadores portátiles a los cuales se les instaló Cabri 3D, de modo que se distribuyeron dos alumnos por computador y a cada grupo se le entrego una carpeta electrónica con las situaciones a desarrollar, tanto de exploración como de profundización.

Para recopilar la información se le solicitó a cada grupo consignar sus respuestas, comentarios y/o apuntes a las preguntas planteadas, en cada una de las situaciones, en un documento electrónico. Así mismo, se les indico guardar sus construcciones geométricas en la carpeta electrónica dada. Las construcciones geométricas son archivos electrónicos de Cabri 3D con extensión cg3. Complementariamente, se utilizó una cámara de audio y video para registrar en acto los procedimientos de solución, conjeturas y la forma como los alumnos interactúan entre sí y con el medio a fin de resolver las situaciones.

3.6. ANÁLISIS *A POSTERIORI* Y EVALUACIÓN DE LA SECUENCIA

3.6.1. Análisis *a posteriori* de las situaciones de exploración

- **Situación E-01:** Pasando el Muro.

  Aunque los alumnos identificaron que la esfera describe una trayectoria circular cuando se mueve el controladorP_3 y que su trayectoria paralela al muro depende del controlador P_1, se observa que la mayoría de los alumnos no logró relacionarlos movimientos generados por los controladores P_1, P_2 y P_3 con las transformaciones traslación y rotación. Sin embargo, uno de los grupos de trabajo planteó que la esfera rota alrededor de un punto ubicado en la base del muro. Pese a que esta afirmación es correcta cuando se trabaja en el plano, es incorrecta cuando se trabaja en el espacio ya que en Cabri 3D la rotación de un objeto geométrico se realiza siempre alrededor de un eje. En consecuencia, podemos establecer que los alumnos de este grupo de trabajo se inclinan a extender los esquemas del plano al espacio.

  Por consiguiente, de los esquemas de uso a desarrollar considerados para esta situación, es correcto afirmar que los alumnos no reconocieron los objetos geométricos que definen las transformaciones de isometría presentes en la macroconstrucción.

- **Situación E-02:** Segmento – Punto.

  Se observó que el desarrollo de E-02 no presentó mayores dificultades en torno a su construcción generando así el esquema de uso a desarrollar planteado para esta situación. Pensamos que esto se debe a los esquemas de uso a priori que poseen los alumnos y que derivan de su trabajo en Cabri II

Plus. No obstante, dos de los grupos coinciden en afirmar que “se tienen ciertos obstáculos frente al manejo de las herramientas de Cabri 3D como la manera en que se nombran los puntos” (ver Anexo 1, Documentos 3 y 6). Esto se puede evidenciar al revisar una de las construcciones en las cuales aparentemente se nombró el punto A pero en realidad se dio nombre al plano que contiene el segmento construido.

- **Situación E-03:** Esfera de radio variable.

Orientados en el artefacto *ayuda*, todos los grupos excepto uno utilizaron la construcción E-02 para obtener un número variable que constituiría la longitud del radio de la esfera a construir. Luego, hicieron uso de *calculadora* para generar el doble de ese radio y finalmente construir la otra esfera solicitada en esta situación.

Por otra parte, al interrogar a uno de los grupos sobre la pertenencia o no del centro de la esfera construida al plano dado (ver Anexo 3, Video E-03 (1)), surgió la necesidad de utilizar *revisar la construcción* para garantizar efectivamente la pertenencia del centro de la esfera al plano dado, ya que a simple vista pareciera no pertenecer.

Así mismo, dos de los grupos coincidieron en su construcción de dos esferas, una con el punto centro en el plano dado y otra por fuera de este (ver Anexo 3, Videos E-03 (4) y E-03 (5)), estableciendo que la esfera construida por fuera del plano dado también es solución para esta situación. Además, la construcción de objetos geométricos por fuera del plano dado, da cuenta de un esquema de uso desarrollado no contemplado en el análisis a priori de esta situación.

Como se mencionó inicialmente, existe un grupo que no utilizó la construcción

E-02 como base para solucionar la situación E-03 (ver Anexo 3, Videos E-03 (8)). Esta construcción difiere de las demás en el uso del artefacto *recta perpendicular*, usado para para construir dos rectas perpendiculares a AB, una por A y otra por P, de las cuales depende el radio de la esfera construida. Cabe resaltar que el centro de la esfera esta sobre la recta perpendicular que pasa por A y no pertenece al plano que contiene a A y P. En este caso, el esquema de uso a desarrollar que se refiere a la dependencia entre objetos usando un número variable no emergió.

Finalmente, los alumnos validaron sus construcciones por medio del *arrastre* y *bola de cristal*, y establecieron una dependencia entre la variación de la distancia entre puntos con la variación del radio de la esfera.

- **Situación E-04:** Ángulo variable.

Para solucionar esta situación, todos los grupos utilizaron la construcción E-02 para obtener un número variable que posteriormente definiría un ángulo variable. Para esto coincidieron en utilizar *transferencia de medida* de dicho número variable sobre una circunferencia. Esto refleja la generación de los esquemas de uso a desarrollar planteados para esta situación excepto el hecho que no asociaron la variación del ángulo con la transformación de rotación.

- **Situación E-05:** Caja sin tapa.

Para resolver esta situación los grupos utilizaron tres estrategias distintas de solución.

La primera estrategia privilegia el uso de los artefactos *recta perpendicular* y *plano perpendicular* para realizar la construcción de la caja sin tapa. Para definir las caras de la caja se empleo el artefacto *polígono*, caja que no cumple con ser cúbica y por tal razón esta no es una solución para la situación.

La segunda estrategia utiliza *transferencia de medida*, *recta perpendicular* y *plano perpendicular*; de modo que transfieren la medida de un segmento inicial a rectas paralelas y perpendiculares generadas a partir de dicho segmento. De esta manera se obtienen los vértices de la caja y se garantiza que sea cúbica.

La tercera estrategia, al igual que en la estrategia anterior, hace uso de *recta perpendicular* y *plano perpendicular* para la construcción de la caja pero recurre a *circunferencia* definida en un plano por su centro y un número (radio) para garantizar la homogeneidad de las aristas del cubo.

Mientras que en la primera estrategia las caras de la caja se construyen empleando el artefacto *polígono*, en la segunda y tercera esto se realizó mediante el artefacto *cuadrado* por cuatro puntos.

En esta situación podemos observar que no emerge el esquema de uso a desarrollar que apunta a la construcción de un cubo a partir de la aplicación sucesiva de transformaciones de isometría a determinados objetos geométricos.

- **Situación E-06:** Mover una esfera paralelamente a un muro.

Todos los grupos emplearon *transferencia de medida* para establecer la relación de dependencia entre el movimiento paralelo al muro de la esfera y el valor numérico variable. Es de notar que solo uno de los grupos utilizó el artefacto *vector* pero no con la intención de realizar una traslación que permitiera dar solución a la situación, sino como mecanismo visual para resaltar la amplitud del movimiento de la esfera.

Refiriéndonos a la construcción del muro, solo uno de los grupos utilizó el artefacto *caja XYZ*, mientras que los restantes utilizaron estrategias de construcción similares a las mencionadas en el análisis *a posteriori* de la situación E-05.

- **Situación E-07:** Esfera con movimiento circular.

Para garantizar el movimiento circular de la esfera, la estrategia general de construcción favoreció el uso de *transferencia de medida*. De modo que, utilizando la construcción realizada en E-04, se trasfiere un número variable sobre una circunferencia. Los procedimientos de construcción difieren en la forma de utilizar el artefacto *circunferencia*: en dos casos se utiliza circunferencia centrada en un eje y que pasa por un punto, y en los restantes circunferencia definida en un plano por su centro y un punto.

En esta situación, es evidente que no emerge el esquema de uso a desarrollar que asocia el movimiento circular a la transformación de rotación.

- **Situación E-08:** Caja con tapa seccionada y desplegable.

Existen dos estrategias distintas de solución para esta situación.
La primera estrategia de solución empleada por tres de los cuatro grupos, consiste en construir la caja utilizando los artefactos *recta perpendicular*, *plano perpendicular* y *circunferencia*. Para la construcción de las secciones triangulares móviles de la tapa se utiliza el procedimiento usado en E-04 que privilegia *transferencia de medida*, de modo que para cada sección se realiza una transferencia de medida del número variable a cada una de las circunferencias que pasan por el centro de la cara superior de la caja y que tienen como eje las aristas de dicha cara (ver Anexo 2, Archivo Cabri E-08 (1)).

La segunda estrategia de solución es de gran relevancia en el sentido que utiliza las transformaciones de isometría para simplificar el procedimiento de construcción. En esta línea, para la construcción de las secciones triangulares móviles de la tapa el grupo en cuestión construye solo una de las secciones utilizando el procedimiento usado en E-04, con esto genera el movimiento circular de la sección construida. En este punto los alumnos emplean tres rotaciones sucesivas de 90° para obtener las secciones restantes, argumentando que dicha elección les permite hacer depender el movimiento de las cuatro secciones de una única transferencia de medida (ver Anexo 3, Video E-08 (1)).

- **Situación E-09:** Sistema Planeta – Satélite.

Las soluciones a este problema abierto de construcción geométrica se caracterizan por ser análogos a la solución de la situación E-04. Por lo tanto, nuevamente observamos que *transferencia de medida* aparece como artefacto recurrente para establecer la relación de dependencia entre un valor numérico variable y el movimiento de un objeto geométrico. Adicionalmente, los alumnos utilizaron *calculadora* para duplicar la medida del ángulo variable. Sin embargo, registros como el siguiente (ver Ilustración 27), dan cuenta de que los grupos identificaron algunos elementos que definen la transformación de rotación.

2. ¿Cómo se denomina el movimiento realizado por el satélite?, ¿qué propiedades geométricas permanecen invariantes durante en el movimiento que realiza el satélite?, ¿cuáles varían?

R/ *el movimiento que realiza el satélite es de rotación alrededor del planeta.*

Las propiedades que mantienen invariante ante la rotación es el tamaño del satélite (formalmente esta propiedad invariante es la congruencia), otro elemento que mantiene fijo es el centro de rotación y la distancia entre el planeta y el satélite.

Los elementos que varían ante el movimiento del satélite son el ángulo de giro, y la longitud de arco.

Ilustración 27: Fragmento del Documento 1 contenido en el Anexo 1.

En esta línea, podemos afirmar que aún no emerge la utilización de las transformaciones de isometría como un esquema de uso que permita dar solución a la situación.

3.6.2. Análisis *a posteriori* de las situaciones de profundización

- **Situación P-01:** Colisión de esferas.

Como lo ejemplificamos con el siguiente registro (ver Ilustración 28), *transferencia de medida* es el artefacto utilizado por todos los grupos para generar una relación de dependencia entre el movimiento de los objetos geométricos y un valor numérico variable.

1. ¿Qué propiedades geométricas en la construcción garantizan el movimiento dependiente de $E1$ y $E2$ respecto al punto P?

   R/ *las propiedades que garantizan un movimiento dependiente es la circunferencia en el cual se mueven ambas esferas, y la transferencia de medida y la inversión de esta transferencia.*

2. ¿Qué propiedades geométricas en la construcción garantizan el movimiento simultáneo o dependiente de la esfera $E2$ respecto a otra esfera $E1$?

   R/ *la propiedad que garantiza ese movimiento dependiente es la transferencia de medida de la distancia AP sobre dos puntos arbitrarios sobre la circunferencia.*

Ilustración 28: Fragmento del Documento 4 contenido en el Anexo 1

En este punto y bajo los análisis realizados anteriormente podemos establecer que el uso de *transferencia de medida* se ha constituido en un esquema de acción instrumentada. Por otra parte, es de resaltar que el uso de este instrumento varía de un grupo a otro: dos grupos de alumnos utilizaron *transferencia de medida* para transferir dos números variables diferentes sobre una circunferencia (ver anexo 3, videos P-01 (2) y P-01 (3)), otro grupo transfirió dos veces el valor de un número variable sobre la circunferencia pero invirtiendo una de ellas respecto al punto de referencia (ver anexo 3, video P-01 (1)). Finalmente, el grupo restante aplico una única transferencia y para generar la colisión utilizó simetría axial (ver anexo 3, video P-01 (5)).

- **Situación P-02:** Pasando el muro.

Las estrategias de solución desarrolladas por los grupos para esta situación, excepto uno que no logro culminarla (ver anexo 2, archivo Cabri P-02 (4)), son similares en tanto es presente en ellas el uso de los artefactos *recta paralela*, *recta perpendicular*, *plano paralelo*, *plano perpendicular* y *transferencia de medida*.

Las soluciones difieren en la construcción del muro y la caja. Uno de los grupos utilizó paralelismo y perpendicularidad de planos para la construcción del muro y, paralelismo y perpendicularidad de rectas para la construcción de la caja (ver anexo 2, archivo Cabri P-02 (2)). Los dos grupos restantes utilizaron el artefacto *caja XYZ* para la construcción del muro pero difieren en la construcción de la caja: mientras que uno de ellos utiliza *recta paralela*, *recta perpendicular* y *transferencia de medida* (ver Anexo 2, Archivo Cabri P-02 (1)), el otro hace uso de *traslación* en esta parte de la construcción (ver Anexo 2, Archivo Cabri P-02 (3)).

La relación de dependencia entre el movimiento de la esfera y el valor numérico variable se logra con base en una composición de las estrategias de solución empleadas en E-01, E-04 y E-06 (ver Anexo 3, Videos P-02 (1) y P-02 (2)). No obstante, conseguir establecer dicha relación constituye la mayor dificultad para los alumnos ya que, como lo afirma uno de los grupos en el siguiente registro (ver Ilustración 29), no es inmediato generar la torcedura de la esfera.

3. De la construcción realizada: ¿qué figura geométrica le causo mayores dificultades? Explica.

R/ no hay figura geométrica que tenga más dificultad, sino que su proceso de construcción es más largo esta figura es la caja J. En donde si se presenta dificultad es en relacionar el movimiento horizontal y el movimiento de rotación, dado que hay una interdependencia entre estos que permite ubicar perfectamente la esfera dentro de la caja J.

En la exploración esta relación de movimiento se determina por la construcción de un vector en la base de la caja y la transferencia de medida

Ilustración 29: Fragmento del Documento 4 contenido en el Anexo 1.

- **Situación P-03:** El columpio.

Apoyados en el artefacto *descripción* de Cabri 3D es posible examinar los procedimientos de solución de cada uno de los grupos, como se ha realizado hasta el momento, encontrando que para esta situación dichos procedimientos hacen uso de perpendicularidad y paralelismo para llevar a cabo la construcción de la estructura del columpio. Al respecto del movimiento rotatorio del asiento del columpio, podemos establecer que de nuevo se hace uso del EAI transferencia de medida, concluyendo que el esquema de uso que se refiere a la utilización de la transformación de rotación para generar movimientos oscilatorios y simetrías para generar imágenes congruentes de objetos geométricos no emerge. (Ver anexo 2, archivos Cabri P-03 (1), P-03 (2), P-03 (3), P-03 (4), P-03 (5), P-03 (6), P-03 (7))

- **Situación P-04:** La cancha de básquet.

Esta situación se destaca de las anteriores porque en dos de las estrategias de solución se hace uso de las transformaciones de isometría para simplificar los procedimientos de solución. Es de nuestro interés hacer especial énfasis en el análisis de estas estrategias porque ello da cuenta de la potencialidad de las transformaciones de isometría para resolver problemas de construcción geométrica.

Es posible distinguir dos estrategias de solución. En ambas se emplea *transferencia de medida* para generar el movimiento de las esferas, pero una se distingue de la otra en el uso de las transformaciones de isometría.

Basados en el uso de *transferencia de medida* es posible diferenciar cada una de las estrategias de solución. Uno de los grupos, utilizando un valor numérico variable realizo dos transferencias de medida, una de ellas invertida, sobre dos circunferencias distintas (ver anexo 2, archivos Cabri P-04 (2) y P-04 (4)). Otro hizo uso dos valores numéricos variables para realizar dos transferencias de medida sobre una única circunferencia (ver anexo 2, archivos Cabri P-04 (3)). Finalmente, un tercer grupo empleo dos valores numéricos variables para realizar dos transferencias de medida sobre dos circunferencias distintas (ver anexo 2, archivos Cabri P-04 (5)).

Por otra parte, existen dos estrategias de solución en las cuales se utilizan las transformaciones de isometría. La primera de ellas, una vez construida la cancha y logrado el movimiento de una esfera por transferencia de medida, se emplea *simetría axial* para obtener una segunda esfera que tiene un movimiento igual y opuesto a la primera (ver anexo 2, archivos Cabri P-04 (1)). Construido uno de los tableros, el soporte y aro del mismo, así como la esfera que entra en dicho aro por transferencia de medida, la segunda estrategia hace uso de *rotación* de un objeto definida por un eje y un ángulo, en este caso de 180º, para obtener la imagen de cada uno de los objetos geométricos previamente construidos (ver anexo 2, archivos Cabri P-04 (6)). En ambas, estrategias se puede observar que los alumnos intentan simplificar sus procedimientos de construcción empleando las transformaciones de isometría mencionadas.

CAPITULO 4

CONCLUSIONES

En este capítulo presentamos las conclusiones de este trabajo de investigación, las cuales esperamos sean beneficiosas para la enseñanza de la geometría en el espacio. Estas conclusiones atienden principalmente al problema e hipótesis de investigación, se derivan a partir tanto de nuestra reflexión teórica como de los resultados obtenidos conforme al referente metodológico utilizado en un contexto experimental, y podrían llegar a constituir un punto de partida para posteriores investigaciones.

4.1. SOBRE LA UNIDAD DE ANÁLISIS DE ORDEN VISUAL

Atributos visuales como forma, tamaño y color de los objetos geométricos fueron modificados en Cabri 3D con cierta facilidad y de manera recurrente por los alumnos; lo cual asociamos a una extensión del esquema de uso análogo en Cabri II Plus.

Por otra parte, el uso del artefacto *bola de cristal* permitió a los alumnos apreciar los objetos geométricos construidos desde diferentes vistas para establecer relaciones y propiedades geométricas entre dichos objetos. Cabe resaltar que la utilización de este artefacto no presentó mayores inconvenientes pese a que es exclusivo de Cabri 3D y, en términos de retroacción, es uno de los artefactos que posibilitó a los alumnos corroborar sus hipótesis a fin de avanzar en la búsqueda de una solución al problema abierto de construcción geométrica.

Para terminar, y de acuerdo con nuestra definición de visualización, podemos afirmar que *transferencia de medida* da cuenta de la manipulación en Cabri 3D de las imágenes mentales visuales elaboradas por los alumnos ya que este artefacto aparece en los procedimientos de solución como el elemento fundamental para lograr esta cuestión. En este caso dichas imágenes apuntan ala generación de la relación de dependencia entre el movimiento de diversos objetos geométricos y un valor numérico variable.

4.2. SOBRE LA UNIDAD DE ANÁLISIS DE ORDEN INSTRUMENTAL

En general, se observó que *transferencia de medida* se constituyó en un instrumento durante el desarrollo de esta secuencia, en tanto aparece naturalmente en todas las estrategias de solución para establecer la relación de dependencia entre el movimiento de diversos objetos geométricos y un valor numérico variable. De esta manera se confirma la suposición planteada en las unidades de análisis de orden instrumental, que afirma que el alumno extiende del plano al espacio el uso del instrumento *transferencia de medida*. Así mismo, afirmaciones como la anterior validan nuestra segunda hipótesis de investigación la cual presume la extensión que de los razonamientos efectuados por los alumnos en la geometría plana a la geometría espacial.

En esta línea, pensamos que es posible construir otras situaciones en la cuales se puede limitar el uso del instrumento *transferencia de medida*, como variable didáctica, para favorecer el uso de las transformaciones de isometría en las estrategias de solución.

Refiriéndonos ahora a las construcciones en la interfaz gráfica de Cabri 3D, logramos determinar que la mayoría de los alumnos asumen que deben realizarlas partiendo de objetos geométricos básicos como puntos, segmentos, rectas y planos; sin considerar la posibilidad de utilizar otros artefactos, como los tridimensionales, que les permitan simplificar sus procedimientos de construcción en el espacio. Por ejemplo, el uso del artefacto *caja XYZ* para construirlos muros de las situaciones E-06 y P-02 solo se observó en la solución de uno de los grupos. (Ver anexo 2, archivos Cabri E-06 (2) y P-02 (1)).

Por último, destacamos que el tipo de arrastre que se privilegió en términos de su uso por los alumnos fue el *arrastre de test* como artefacto para validar sus construcciones geométricas. Este hecho es transversal a todas las estrategias de solución de las situaciones propuestas en tanto que la relación de dependencia entre el movimiento de diversos objetos geométricos y un valor numérico variable, se comprueba en virtud del arrastre de un punto que pertenece a un segmento dado.

4.3. CARACTERIZACIÓN DEL USO DE LAS TRANSFORMACIONES DE ISOMETRÍA EN LAS ESTRATEGIAS DE SOLUCIÓN

Dado que los datos obtenidos no son suficientes para validar nuestra tercera hipótesis, la cual enmarca las transformaciones de isometría como un instrumento potente para el desarrollo del pensamiento espacial y para resolver problemas de construcción en el espacio, en tanto dichas transformaciones no aparecen en las estrategias de solución. Sin embargo, si es correcto subrayar que los datos confirman nuestra primera hipótesis de esta investigación, la cual sugiere que en nuestro medio poco son usadas las transformaciones de isometría en los procedimientos de construcción en el espacio. Este hecho se verifica en las estrategias de solución de los alumnos a cada una de las situaciones propuestas.

Con respecto a lo planteado anteriormente, observamos que las transformaciones de isometría solo aparecen al final de la secuencia a la situaciónP-04como una estrategia para simplificar sus procedimientos de construcción. Aunque en ambas soluciones el uso de las transformaciones es muy reducido, se puede apreciar una ligera intención de los alumnos por disminuir los pasos de su algoritmo de construcción. Pero esto no es del todo concluyente debido a la ausencia de otros registros en donde emerjan las transformaciones de isometría y sea plausible observar cómo son utilizadas por los alumnos.

Más aún, las transformaciones nunca aparecen para establecer la relación de dependencia entre un número variable y el movimiento de diversos objetos geométricos. En este caso, y como ya se mencionó, el instrumento predilecto es *transferencia de medida*.

4.4. CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS OBSERVADOS EN LAS ESTRATEGIAS DE SOLUCIÓN

En este apartado nos proponemos aludir a los conocimientos matemáticos movilizados por los alumnos durante el desarrollo de la secuencia, y en particular a la construcción de objetos geométricos, el uso de las transformaciones de isometría y relación de dependencia entre el movimiento de estos y un valor numérico variable.

Podemos observar que la mayoría de los alumnos emplean objetos geométricos bidimensionales o de menor dimensión, y las propiedades de paralelismo y perpendicularidad entre ellos, para construir objetos de tres dimensiones durante el desarrollo de la secuencia.

No obstante, un menor número de alumnos hace uso de las transformaciones de isometría en algún momento de la construcción, para construir objetos geométricos en el espacio. Al respecto podemos referirnos a los dos únicos casos en los cuales este hecho se evidencia. El más simple de ellos utiliza la transformación de reflexión para construir la imagen de una esfera inicial (ver anexo 2, archivos Cabri P-01 (1), mientras que el otro hace uso de la transformación de rotación para construir la imagen de múltiples objetos geométricos (ver anexo 2, archivos Cabri P-01 y P-04 (6)).

Además, el párrafo anterior deriva en la relación de dependencia entre el movimiento de diversos objetos geométricos y un valor numérico variable. Al respecto, podemos inferir una composición entre una función de variable real que se corresponde con el uso del instrumento *transferencia de medida*, y la trasformación de reflexión axial que se corresponde con el artefacto *simetría axial*. Esto se concluye a partir del análisis realizado a una de las estrategias de solución a la situación P-04 (1), en esta estrategia se genera un primer movimiento de una esfera por transferencia de medida y se emplea *simetría axial* para obtener la esfera imagen la cual tendrá con un movimiento igual y opuesto a la esfera inicial (ver anexo 2, archivos Cabri P-04 (1)).

4.5. CONSIDERACIONES FINALES

A partir de las conclusiones anteriores obtenidas en este trabajo de investigación podemos establecer algunas cuestiones que pueden emplearse como base para desarrollar posteriores investigaciones.

Para comenzar, esbozamos la necesidad de complementar esta investigación con un análisis epistemológico que dé cuenta del desarrollo histórico de la geometría en el espacio y en particular sobre las transformaciones de isometría en este marco geométrico.

Por otra parte, consideramos convenientes los siguientes interrogantes: ¿cuál es el papel de Cabri 3D en los procesos de modelación?, ¿es pertinente realizar primero un trabajo de construcción geométrica en ambientes bidimensionales para después pasar a trabajar en ambientes o representaciones tridimensionales?

Por último, se puede contemplar la posibilidad de realizar un estudio que privilegie la importancia de la emergencia de la transferencia de medida y las transformaciones de isometría en las estrategias de solución a problemas de construcción geométrica en el espacio. Esto con base en que dichos conceptos son funciones matemáticas que permiten modelar algunos fenómenos físicos que involucran el movimiento.

BIBLIOGRAFÍA

Álvarez, Z. & Fernández, D. (2009). *La transformación de rotación en el espacio: Una propuesta de aula que integra el ambiente de geometría dinámica Cabri 3D*. Trabajo de grado para optar al título de Licenciado en Matemáticas y Física, Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Ardila, R., Castiblanco, A., Pérez, M. & Samper, C. (2005). *Espiral 7*. Bogotá, D.C., Colombia: Norma.

Artigue, M. (1998). Ingeniería didáctica. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Eds.). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Colombia: Una empresa docente.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245-274.

Brousseau, G. (1993). *Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática*. (J. Centeno, Begoña M. & J. Murillo, Trads.). España: Seminario Matemático García de Galdeano, de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad de Zaragoza. (Trabajo original publicado en 1986).

Chevallard, (1991). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.

Colciencias. (2009). *Caracterización de los vínculos entre los recursos pedagógicos y el conocimiento matemático en la enseñanza de las matemáticas en la educación básica*. Cali, Colombia: MEN.

Colombia, Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares*. Bogotá, D.C., Colombia: Autor.

Colombia, Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares básicos de calidad*. En: Área de matemáticas*. Bogotá, D.C., Colombia: Autor. pp. 61-82-84.

Colombia, Ministerio de Educación Nacional. (2004). *Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales.* Bogotá, D.C., Colombia: Autor.

Coxeter, H. (1971). *Fundamentos de geometría* (2a. Ed.). México: Limusa-Wiley S.A.

Cruz, D. & Guerrero, A. *Taller: Construcción de los sólidos Platónicos y Arquimedianos haciendo uso del software Cabri 3D*. X encuentro de ASOCOLME. Octubre (2009).

D'Amore, B. (2008). Epistemología, didáctica de la matemática y prácticas de enseñanza. *Revista de la ASOVEMAT (Asociación Venezolana de Educación Matemática), Vol. 17* (1), 87-106.

Díaz C., Álvarez J., Torres L. & Guacaneme E. (1997). *Análisis y resultados de las pruebas de matemáticas*. Bogotá, D.C., Colombia: MEN.

Douady, R. (1996). Ingeniería didáctica y evolución de la relación con el saber en las matemáticas de collège-seconde. En Barbin, E., Douady, R. (Eds.). *Enseñanza de las matemáticas: Relación entre saberes, programas y prácticas*. Francia.

Topiques éditions. Publicación del I.R.E.M.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. (M. Vega, Trad.). Cali, Colombia: Grupo de Educación Matemática, Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle.

Garzón, D. & Valoyes, L. (2005). *Notas de Clase de Geometría I*. Cali, Colombia: Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle.

Guin, D. & Trouche, L. (2002). Mastering by the teacher of the instrumental genesis in CAS environments: necessity of instrumental orchestrations. *Revista Analyses ZDM, Vol. 34* (5), 204.

Kidder, F. (1976). *Elementary and Middle School Children's Comprehension of Euclidean Transformations*, 7, 40-52. Obtenido el 3 de septiembre de 2009, de la base de datos JSTOR.

Laborde, C. (2009). *The critical role of tasks and teacher in the use of dynamic geometry in the mathematics classroom: example with Cabri*. Conferencia dictada en Universidad del Valle, Cali, Colombia. Disponible en http://matematicas.univalle.edu.co/ccm/.

Londoño, N. Guarín, H. & Bedoya, H. (1993). *Dimensión matemática 7*. Bogotá, D.C., Colombia: Norma.

Margolinas, C. (2009). *La importancia de lo verdadero y lo falso en la clase de matemáticas*. (M. Acosta & J. Fiallo, Trads.). Colombia: Ediciones Universidad Industrial de Santander (trabajo original en francés publicado en 1993).

Martin, G. (1998). *Geometric constructions*. New York, EE.UU: Springer-Verlag.

Moreno, L. (2002). Cognición y computación: el caso de la geometría y la visualización. En: Ministerio de Educación Nacional & Dirección de Calidad de la Educación Preescolar, Básica y Media (Eds.). *Incorporación de nuevas tecnologías al currículo de matemáticas de la educación media de Colombia*. Bogotá, D.C., Colombia: MEN.

Oropeza, C. *La visualización, como estrategia de estudio en el concepto de dependencia e independencia lineal*. México: Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán, UNAM.

Panizza, M. (2004). Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas. En: M. Panizza (Comp.). *Enseñar matemática en el nivel inicial y primer ciclo de la EGB: análisis y propuestas* (pp. 59-71). Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Plasencia, I. (2000). Fundamentos teóricos. En: Universidad de la Laguna (Eds.). *Análisis del papel de las imágenes en la situación matemática: Un estudio de casos* (pp. 21-101). La Laguna, México: Universidad de la Laguna.

Presmeg, N. (1997). Generalization using imagery in mathematics. En: L. D. English (Ed.). *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors and images* (pp. 299-312). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Presmeg, N. (2006). *Research on visualization in learning and teaching mathematics*. Obtenido el 15 de diciembre de 2009, de la base de datos JSTOR.

Trujillo, M., Castro, N., Guerrero J. y Delgado, C. (2007). *Bases epistemológicas y didácticas en la enseñanza del concepto de función con la ayuda de calculadoras graficadoras*. Bogotá, D.C., Colombia: Universidad de la Salle.

Vázquez M., Marmolejo G., Torres, L., Valoyes L., Malagón M. & Garzón D. Ministerio de Educación Nacional. (2005). *Pruebas censales y formación de pensamiento matemático en la escuela*. Bogotá, D.C., Colombia: MEN.

Villani, V. (2001). *Perspectives en l'ensenyament de la geometría pel segle XXI: Documento de discusión para un estudio ICMI*. Recuperado el 02 de noviembre de 2009 en http://www.euclides.org/menu/articles/article2.htm

Villegas, M. & Melo, C. (1991) *Matemática 2000*. Bogotá, D.C., Colombia: Voluntad.

ANEXOS

Los siguientes anexos dan cuenta de los registros mencionados en el apartado de este trabajo que se refiere al instrumento de análisis. Sin embargo, aquí solo presentamos una breve descripción de ellos con sus respectivos rótulos y numeración. Los archivos originales se presentan en una carpeta electrónica adjunta denominada *Anexos*. A su vez, esta carpeta contiene tres subcarpetas: *Anexo 1 (Documentos electrónicos)*, *Anexo 2 (Archivos electrónicos de Cabri 3D)* y *Anexo 3 (Videos)*.

- **Anexo 1: Documentos electrónicos.**

Consta de 6 documentos electrónicos en los que se presentan las respuestas de los alumnos a las preguntas planteadas en cada una de las situaciones o problemas abiertos de construcción geométrica. Cada uno se presenta con el rótulo *Documento* y su numeración va desde 01 hasta el 06.

- **Anexo 2: Archivos electrónicos de Cabri 3D.**

Comprende 55 archivos electrónicos que dan cuenta de las construcciones realizadas en el ambiente Cabri 3D. Respectivamente, estos archivos se rotulan con el mismo nombre de la situación a la que refieren, pero la numeración varía de acuerdo a la cantidad de soluciones registradas (ver *tabla 4*).

Nombre de la Situación	Archivos Electrónicos de Cabri 3D
E-02	E-02 (1), E-02 (2), E-02 (3), E-02 (4), E-02 (5) y E-02 (6).
E-03	E-03 (1), E-03 (2), E-03 (3), E-03 (4), E-03 (5), E-03 (6), E-03 (7), E-03 (8) y E-03 (9).
E-04	E-04 (1) y E-04 (2).
E-05	E-05 (1), E-05 (2), E-05 (3) y E-05 (4).
E-06	E-06 (1), E-06 (2) y E-06 (3).
E-07	E-07 (1), E-07 (2) y E-07 (3).
E-08	E-08 (1), E-08 (2) y E-08 (3).
E-09	E-09 (1), E-09 (2) y E-09 (3).
P-01	P-01 (1), P-01 (2), P-01 (3), P-01 (4), P-01 (5) y P-01 (6).
P-02	P-02 (1), P-02 (2), P-02 (3),
P-03	P-03 (1), P-03 (2), P-03 (3), P-03 (4), P-03 (5), P-03 (6) y P-03 (7).
P-04	P-04 (1), P-04 (2), P-04 (3), P-04 (4), P-04 (5) y P-04 (6).

Tabla 2: Detalle de los archivos electrónicos de Cabri 3D.

- **Anexo 3: Videos.**

Contiene 52 videos que exponen ciertos aspectos de la interacción del alumno con el medio. Análogamente, estos se rotulan como los archivos electrónicos de Cabri 3D, es decir con el nombre de la situación correspondiente y con la numeración de acuerdo a la cantidad de videos compilados (ver *tabla 5*).

Nombre de la Situación	Video
E-01	E-01 (1), E-01 (2), E-01 (3), E-01 (4), E-01 (5), E-01 (6), E-01 (7), E-01 (8), E-01 (9), E-01 (10) y E-01 (11).
E-02	E-02 (1) y E-02 (2).
E-03	E-03 (1), E-03 (2), E-03 (3), E-03 (4), E-03 (5), E-03 (6), E-03 (7) y E-03 (8).
E-04	E-04 (1) y E-04 (2).
E-05	E-05 (1), E-05 (2), E-05 (3) y E-05 (4).
E-06	E-06 (1).

Nombre de la Situación	Video
E-07	E-07 (1) y E-07 (2).
E-08	E-08 (1), E-08 (2) E-08 (3), E-08 (4) E-08 (5) y E-08 (6).
E-09	E-09 (1) y E-09 (2).
P-01	P-01 (1), P-01 (2), P-01 (3), P-01 (4), P-01 (5) y P-01 (6).
P-02	P-02 (1) y P-02 (2).
P-03	P-03 (1), P-03 (2), P-03 (3) y P-03 (4).
P-04	P-04 (1) y P-04 (2).

Tabla 3: Detalle del registro fílmico.