ESTRUCTURAS Y GENERALIZACIÓN DE ESTUDIANTES DE TERCERO Y QUINTO DE PRIMARIA: UN ESTUDIO COMPARATIVO

Structures and generalisation in third and fifth year of primary school: a comparative study

Pinto, E. y Cañadas, M.C.

Universidad de Granada, España

Resumen

Desde un enfoque funcional del álgebra escolar, presentamos un estudio comparativo entre estudiantes de tercero y quinto de Educación Primaria, centrado en las estructuras del patrón, la generalización y la relación estructuras-generalización. Analizamos las respuestas de los estudiantes a varias cuestiones sobre un problema contextualizado que involucra una función lineal. Los resultados muestran diferencias en la cantidad y variedad de estructuras identificadas por estudiantes de ambos cursos, siendo mayor en tercero. Los estudiantes de tercero tienden a trabajar con casos particulares y un estudiante generaliza. La mayoría de los estudiantes de quinto generaliza la estructura y emplean esa misma estructura en sus respuestas. En este curso, tres estudiantes generalizan en cuestiones sobre casos particulares.

Palabras clave: *estructura, generalización, pensamiento algebraico, pensamiento funcional.*

Abstract

From a functional approach of school algebra, we present a comparative study between third and fifth students of primary education, focussed on the pattern structures, generalization and the relationship structures-generalization. We analyse the written students' written to some questions in a contextualized problem involving a linear function. The results show differences in the variety of structures identified by students of both courses, being higher in third. Third-grade students tend to work with particular cases and one student generalizes. Most fifth graders generalize the structure and use the same structure in their responses. In this year, the generalization, three students generalize in questions about particular cases.

Keywords: *structure, generalisation, algebraic thinking, functional thinking.*

Actualmente existe un creciente interés por las diversas actuaciones de estudiantes de edades tempranas al trabajar con actividades que tienen un carácter algebraico. En este contexto, investigadores destacan la importancia de promover el pensamiento algebraico en los estudiantes más pequeños, puesto que desarrolla habilidades para analizar relaciones entre cantidades, deducir la regla general de un patrón, entre otros (Kaput, 2008). Como un elemento central del pensamiento algebraico está la generalización, la cual es reconocida como un proceso de pensamiento matemático fundamental, la cual requiere ver detrás de las particularidades de una situación matemáticas y sacar una conclusión (Driscoll, 1999). Considerar la generalización en el contexto de los cursos más elementales permite, por ejemplo, que los estudiantes se alejen de las particularidades que trae consigo el cálculo aritmético, identificando la estructura y las relaciones matemáticas involucradas en la actividad que realizan (Blanton, Levi, Crites y Dougherty, 2011).

Pinto, E. y Cañadas, M.C. (2017). Estructuras y generalización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: un estudio comparativo. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 407-416). Zaragoza: SEIEM.

El pensamiento funcional es un tipo de pensamiento algebraico, en el cual la función es contenido matemático fundamental y una de sus ventajas es que es considerado propicio para introducir el álgebra (Blanton y Kaput, 2011). El pensamiento funcional está centrado en la relación entre variables, donde el énfasis puede estar en casos particulares o en el caso general (generalización) (Smith, 2008). Cañadas y Molina (2016) mencionan algunos elementos claves que permiten desarrollar el pensamiento funcional en los primeros cursos de la Educación Primaria, entre los que se encuentran "las cantidades variables, sus relaciones, la recursividad, la correspondencia entre valores de las variables o la utilización de diferentes sistemas de representación en un contexto de resolución de problemas" (p. 212).

En el contexto funcional del álgebra escolar, la presencia de patrones está relacionada con la regularidad que relaciona las variables (dependiente e independiente) involucradas en una situación. La estructura del patrón, foco de interés de esta comunicación, corresponde a la forma en la cual se organizan los elementos del patrón y la relación que existe entre esos elementos (Kieran, 1989). De esta forma, reconocemos la importancia de la noción de estructura pues permite conectar los patrones y la generalización, y a su vez: a) adquiere relevancia en el contexto del álgebra en los primeros cursos, puesto que la estructura matemática y las relaciones son centrales en el desarrollo del conocimiento matemático de estos estudiantes; (b) permite establecer conexiones y relaciones entre diferentes conceptos y procesos matemáticos involucrados; y (c) permite analizar la manera en la cual los estudiantes son capaces de interpretar una regularidad y, potencialmente, generalizar dicha regularidad (Strother, 2011; Warren, Miller y Cooper, 2013).

Como mostraremos más adelante, existen estudios en tercero y en quinto de Educación Primaria sobre la generalización, en el contexto funcional del álgebra escolar. Nuestro interés por estos dos cursos, así como la comparación entre ellos, responde a dos razones: (a) las respuestas escritas que manifiestan estos estudiantes pueden contener una mayor cantidad de evidencias para describir la generalización que son capaces de expresar, a diferencia de considerar los primeros cursos, y (b) tercero y quinto de primaria son cursos que están insertos en diferentes momentos de la educación primaria (momento intermedio y final, respectivamente) y esta comparación permitirá identificar elementos del pensamiento funcional que surgen de las respuestas espontaneas de los estudiantes y que ayudarán en la obtención de conclusiones útiles para la docencia, pues los contextos funcionales están presentes en el currículo español de Educación Primaria (Ministerio de Educación y Ciencia, 2014). En este trabajo presentamos un estudio centrado en las nociones de generalización y estructura de estudiantes de tercero y quinto de primaria, estableciendo una comparación entre ambos cursos.

MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

En esta sección presentamos una aproximación teórica de la noción de estructura y de generalización, desde el contexto funcional del álgebra escolar.

Noción de estructura

Un patrón puede ser entendido como una regularidad numérica o espacial y la relación entre varios componentes del patrón constituye su estructura (Mulligan, Mitchelmore y Prescott, 2006). De esta forma, la noción de estructura en el contexto funcional del álgebra escolar está compuesta por un conjunto de elementos numéricos (expresado mediante diferentes representaciones), algunas operaciones y las propiedades de dichas operaciones. Así, en la noción de estructura es posible identificar dos elementos: (a) la organización superficial de dichos elementos (estructura externa), y (b) la relación interna entre estos elementos (estructura interna).

En una secuencia numérica, podemos determinar el número que va en una determinada posición de la secuencia llegando a diferentes modos de expresar esa generalización, donde la estructura estará dada por la relación entre variables (dependiente e independiente). Por ejemplo, para la secuencia de los números pares, algunas respuestas que pueden describir el número que debe ir en una posición son:

"el doble de la posición en la que se encuentra" (representación verbal), "$x + x$" o "$2x$" (representación simbólica), entre otras. Este tipo de estructuras son consideradas como expresiones equivalentes (English y Warren, 1998), las cuales comparten la misma estructura interna y representan la misma situación. Por tanto, las expresiones equivalentes son dos formas de expresar la misma estructura interna.

Generalización

El proceso de generalización tiene un rol central en el contexto del álgebra escolar y se inicia cuando un estudiante intuye un cierto esquema subyacente, aunque todavía no lo pueda expresar claramente (Mason, Burton y Stacey, 1988). De manera amplia, la generalización implica actos de razonamiento conscientes que emergen desde casos particulares específicos hacia la identificación de modelos o relaciones más amplias y abstractas, que requiere la adaptación, ajuste, conexión y reorganización de ideas matemáticas (Kaput, 1999, Mitchelmore y White, 2007). Con base en estas ideas, asumimos que la generalización, desde el enfoque funcional, hace referencia a las diferentes maneras que tienen los estudiantes de expresar la relación funcional general que involucra dos variables. En el contexto de los primeros cursos, algunos investigadores reconocen que la generalización puede ser expresada de diferentes formas, transitando desde el uso del lenguaje verbal hasta llegar a emplear elementos más simbólicos (Blanton, 2008).

Desde el contexto funcional del álgebra escolar, Carraher, Martinez y Schliemann (2008) describen diferentes formas de expresar la generalización de los estudiantes de Educación Primaria, las cuales pueden ser analizadas considerando: (a) la forma de la función matemática identificada por los estudiantes; (b) los tipos de operaciones utilizadas; (c) el uso de notación algebraica; (d) los significados de los diferentes componentes de la expresión escrita, por ejemplo. Por otro lado, Warren, Miller y Cooper (2013) estudian la capacidad de estudiantes de 5 a 9 años al generalizar estructuras matemáticas en el contexto funcional del álgebra escolar. Los resultados muestran que estos estudiantes emplean inicialmente gestos y actos manipulativos, los que se eliminan cuando los estudiantes reconocen la estructura matemática que subyace a la tarea. En relación a la idea anterior, algunos autores señalan que los niños, mediante un proceso de instrucción, pueden tener oportunidad de generalizar y desarrollar habilidades matemáticas abstractas que reflejan su estructura matemática (Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest, 2006).

OBJETIVOS

El objetivo general de este trabajo es comparar las estructuras y generalización que evidencian estudiantes de tercero y quinto de primaria en la resolución de un problema contextualizado que involucra una función lineal. Desglosamos este objetivo general en los siguientes objetivos específicos.

- Identificar las estructuras que evidencian los estudiantes de tercero y los de quinto.
- Comparar las estructuras que identifican los estudiantes de tercero y los de quinto.
- Identificar los estudiantes de tercero y quinto que generalizan.
- Comparar la generalización de los estudiantes de tercero y quinto.

MÉTODO

Este estudio forma parte de una investigación más amplia con estudiantes de diferentes cursos de Educación Primaria. En esta comunicación nos centramos en las respuestas de estudiantes de tercero y quinto de primaria, al responder un mismo problema que involucra una función lineal.

Sujetos

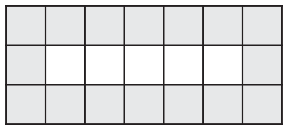
Trabajamos con dos grupos de estudiantes de un colegio de Granada, durante el curso 2014-2015. El primer grupo estaba compuesto por 24 estudiantes de tercero de Educación Primaria (8-9 años). Los conocimientos previos incluían diferentes estrategias de conteo y las cuatro operaciones básicas con números naturales, con énfasis en la suma y resta. El segundo grupo estaba compuesto por 24 estudiantes de quinto de Educación Primaria (10-11 años), quienes habían trabajado las cuatro operaciones aritméticas básicas de diferentes conjuntos numéricos (naturales, enteros y racionales).

Desarrollamos tres sesiones previas, en cada curso, antes de la sesión en la cual nos centramos. Estas sesiones son la única experiencia de los estudiantes con el tipo de problemas planteado. En el caso de tercero, los estudiantes habían trabajado problemas que involucran las funciones con estructura aditiva $f(x) = x + 5$ y $f(x) = x + 3$; mientras que en quinto habían trabajado con problemas que involucran la estructura multiplicativa y aditiva/multiplicativa ($f(x) = x + 3$, $f(x) = 3 + x$ y $2x$, $f(x) = 3x – 7$).

Instrumento de recogida de información

En la primera parte de la sesión se introdujo el problema a los estudiantes y se les entregó un cuestionario. Mientras trabajaban, podían plantear dudas a dos miembros del equipo de investigación presentes en el aula. En este trabajo analizamos la información que proviene de las respuestas escritas de los estudiantes al problema y a las cuestiones. La Figura 1 muestra el problema contextualizado que fue entregado a los estudiantes.

Un colegio quiere reformar el suelo de todos sus pasillos porque está ya muy estropeado. El equipo directivo decide enlosar los pasillos con baldosas blancas y con baldosas grises. Todas las baldosas son cuadradas y tienen el mismo tamaño. Las baldosas se van a colocar en cada pasillo de la manera que ves en la siguiente imagen:



El colegio contrata a una empresa para que reforme los pasillos de las tres plantas del colegio. Te pedimos que ayudes a los albañiles a contestar algunas preguntas que necesitan responder para hacer este trabajo.

C1. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 5 baldosas blancas?

C2. Unos pasillos son más largos que otros. Por eso, los albañiles necesitan diferente número de baldosas para cada pasillo. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 8 baldosas blancas?

C3. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 10 baldosas blancas?

C4. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 100 baldosas blancas?

C5. Los albañiles de una empresa siempre colocan primero las baldosas blancas y después las baldosas grises. ¿Cómo puedes saber cuántas baldosas grises si ya han colocado las baldosas blancas?

Figura 1. Problema de las baldosas

En cada curso se usó el mismo problema y las mismas cuestiones. Diseñamos las cuestiones considerando: (a) casos particulares cercanos (C1, C2 y C3); (b) caso particular lejano (C4) y (c) caso general (C5).

Codificación de datos y análisis

En cada curso, los estudiantes son referidos con la letra T (si corresponden a tercero) o Q (si corresponden a quinto) seguido de un número, desde 1 a 24. Analizamos las respuestas de los estudiantes en dos fases. En la primera, identificamos respuestas donde es posible encontrar estructuras que relacionan las variables involucradas en el problema. El propde esps o, realiza una adición eo de estudiantes diferentes y ser planteamos en la Figura 3. o algebraico. ósito de este análisis es identificar la variedad de estructuras observables en las respuestas de los alumnos, considerando como unidad de análisis a los estudiantes. En la Figura 2 mostramos un ejemplo de las respuestas de un alumno, T5, al identificar la estructura en las cuatro primeras cuestiones, las cuales buscan determinar la cantidad de baldosas grises dadas 5, 8, 10 y 100 baldosas blancas, respectivamente.

C1 3+3+5+5=16

C2 3+3+8+8=22

C3 3+3+10+10=26

C4 3+3+100+100

Figura 2. Ejemplo de análisis de la estructura identificada (T5)

En la Figura 4 observamos cómo el estudiante ha determinado una expresión simbólico-numérica para determinar la cantidad de baldosas grises dado un número de baldosas blancas. Por ejemplo, dadas 5 baldosas blancas, el estudiante ha considerado las cinco baldosas superiores, las cinco baldosas inferiores, las tres baldosas del lateral derecho y las tres baldosas del lateral izquierdo. Luego, realiza una adición de esos elementos (3 + 3 + 5 + 5). Esta misma estructura la emplea para C2, C3 y C4, donde cambia la cantidad de baldosas blancas. A partir de esta respuesta, identificamos la estructura $x + x + 3 + 3$. Empleamos notación algebraica para codificar las estructuras identificadas en las respuestas de los estudiantes, ya que es una forma que permite agrupar las diferentes respuestas obtenidas de manera general.

En la segunda fase de análisis consideramos aquellos estudiantes que evidencian estructura en, al menos, dos cuestiones. Este criterio lo usamos, principalmente, para analizar el uso de una misma o diferentes estructuras en la resolución del problema. De este grupo de estudiantes, identificaremos cuáles son las cuestiones que generalizan y posteriormente, describiremos las maneras en las cuales los estudiantes llegan a establecer la relación general entre una cantidad de baldosas blancas y grises y la relación con las estructuras identificadas.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En primer lugar, presentamos resultados sobre las estructuras identificadas en cada curso, para luego establecer una comparación por curso. Posteriormente, presentaremos evidencias de generalización en las respuestas de los estudiantes de tercero y quinto, para después establecer la comparación.

Estructuras

En la Tabla 1 presentamos las estructuras organizadas por curso según el tipo de operación involucrada: (a) aditiva; (b) multiplicativa; y (c) aditiva y multiplicativa. Esta forma de organizar las estructuras, según los tipos de operaciones utilizada, lo hemos considerado de la investigación de Carraher, Martinez y Schliemann (2008), presentada en el marco teórico.

Tabla 1. Variedad de estructuras identificadas en estudiantes de tercero y quinto

Tipo de operación involucrada	Estructura identificada	3º	5º
Aditiva	x + x + 3 + 3	✓	
	x + x + 6	✓*	
	(x + 2) + (x + 2) + 2	✓	
	$(x + 3) + (x + 3) + (x + 3)$	✓	
	$x + x + 2$	✓	
	$x + 6$	✓	
Multiplicativa	$f(5)\cdot 2$	✓	
	$f(5)\cdot 3$	✓	
	$f(5)\cdot 5$	✓	
	$f(5)\cdot 100$	✓	
	$2\cdot 2x$		✓
	$2x\cdot 3\cdot 3$		✓

Tabla 1. Variedad de estructuras identificadas en estudiantes de tercero y quinto

Tipo de operación involucrada	Estructura identificada	3º	5º
Aditiva y multiplicativa	2x + 6	✓	✓*
	2(x + 2) + 2	✓	✓*
	2x + 3 + 3	✓	✓*
	3(x + 2) – x		✓
	3*x* + 1	✓	
	2*x* + 2	✓	✓
	(*x* + 3)·2	✓	
	(*x* + 6) + 2*x*	✓	

Nota. * = corresponde a aquella estructura que ha sido expresada de manera general (generalización); las estructuras en cursiva es una manera de identificar aquellas que son incorrectas; *f*(5) corresponde al resultado obtenido en la primera cuestión.

En la Tabla 1 observamos que los estudiantes de tercero emplean 17 estructuras diferentes. Seis de ellas se corresponden con la relación funcional involucrada en el problema, mientras que las 11 restantes no. De manera general, las estructuras identificadas consideran operaciones aditivas, multiplicativas o ambas. Siete estudiantes emplean diferentes estructuras conforme responden las diferentes preguntas del cuestionario. Un ejemplo representativo de esta situación, son las respuestas de T6 a C3 y C4, presentadas en la Figura 3.

C3

C4

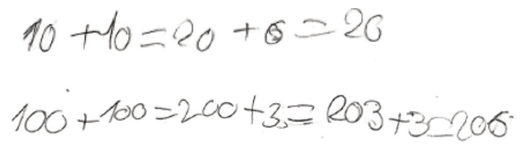


Figura 3. Ejemplo de dos estructuras diferentes identificadas por T6

En la Figura 3 observamos la manera en la cual el estudiante interpreta el problema y expresa, de manera simbólico-numérica, la relación entre las variables mediante dos estructuras diferentes: $x + x + 6$ (para 10 baldosas blancas) y $x + x + 3 + 3$ (para 100 baldosas blancas). Interpretamos que este cambio de una estructura a otra equivalente, sucede pues a medida que aumenta el tamaño del número involucrado en la tarea, el estudiante emplea una descomposición menos simplificada.

Por otra parte, en las respuestas de los estudiantes de quinto encontramos tres estructuras diferentes a las identificadas en tercero ($2 \cdot 2x$; $2x \cdot 3 \cdot 3$; $3(x + 2) - x$), las cuales consideran las operaciones aditiva-multiplicativa o multiplicativas al expresar esta relación. De las siete estructuras empleadas, cinco de ellas permiten llegar a la respuesta correcta. En la Figura 4 presentamos un ejemplo de la estructura $3(x + 2) - x$, expresada por Q15, identificada exclusivamente en este nivel.

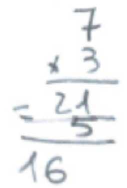


Figura 4. Ejemplo de la estructura 3(x + 2) – x por Q15 a C1

Esta estudiante considera la totalidad de baldosas que componen cada fila (7), las que multiplica por tres, ya que esta cantidad representaría la cantidad total de baldosas, sin importar la distinción entre blancas y grises. Luego, quita la cantidad de baldosas blancas dadas en el caso particular para obtener la respuesta a la pregunta.

De manera comparativa, los estudiantes de tercero emplean una gran variedad de estructuras al establecer la relación entre las variables involucradas, a diferencia de los estudiantes de quinto. Esta información nos indica que los estudiantes de tercero emplean más caminos o formas para identificar la cantidad de baldosas grises, dadas las baldosas blancas, que satisfaga sus necesidades para llegar a las respuestas. Por otra parte, la mayoría de los estudiantes de tercero emplean estructuras que no permiten llegar a la respuesta (son erróneas), mientras que la mayoría de los estudiantes de quinto emplean estructuras que les permiten llegar a la respuesta correcta.

Tal como lo indicamos en la sección de análisis de datos, en la segunda fase consideramos aquellos estudiantes que evidencian estructuras en, al menos, dos cuestiones. De manera general, de los 24 estudiantes de tercero cuyas respuestas analizamos, en 11 de ellos hemos identificado dos o más respuestas donde es posible identificar una de las estructura descritas en la Tabla 1. Por otro lado, en quinto, 19 de los 24 estudiantes evidencian estructuras que relacionan las variables involucradas. En el siguiente apartado nos centramos en esos 11 y 19 estudiantes de tercero y quinto, respectivamente.

Generalización

En tercero encontramos un alumno, T9, quien logra generalizar la relación existente entre baldosas blancas y grises en su respuesta a la quinta cuestión (C5). En las respuestas de este estudiante a las primeras cuatro cuestiones (casos particulares), identificamos la estructura $x + x + 3 + 3$, la cual fue expresada por una representación simbólica-numérica. La Figura 5 es un ejemplo de respuesta a la tercera cuestión.

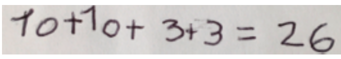


Figura 5. Ejemplo de estructura x + x + 3 + 3 a C3 por T9

En la cuestión que busca establecer la relación general (C5), el estudiante expresa que para determinar la cantidad total de baldosas grises dadas las blancas “el número de baldosas blancas se suma dos veces y se le añaden 6”. En esta respuesta identificamos la estructura $x + x + 6$. Es interesante destacar que en estas respuestas evidenciamos estructuras diferentes según el tipo de preguntas. Al llegar a establecer la relación general, A9 simplifica la estructura identificada en casos particulares — $x + x + 3 + 3$ — para determinar la estructura de la regla general como $x + x + 6$. En este cambio de estructura se mantiene tanto la estructura interna como la externa.

De los diecinueve estudiantes de quinto en los cuales identificamos dos o más estructuras en sus respuestas, diecisiete de ellos generalizan estas estructuras. En la mayoría de estos estudiantes, observamos la misma estructura a lo largo de las diferentes preguntas. Un ejemplo representativo corresponde a Q6, quien emplea la estructura $2x + 6$ para cuestiones que involucran casos particulares y el caso general. Por ejemplo, en C1 responde “por cado baldosa blanca hay 2 grises, excepto en la de los lados que hay 5. O todas las blancas x2 + 6 de los lados”. Luego, en la respuesta a C5, la estudiante responde: “multiplicando por 2 las blancas más 6 de los lados. x·2 + 6”. De esta forma, identificamos la misma estructura en las respuestas del estudiante a cuestiones que involucran casos particulares cercanos, lejanos y el caso general. Por otra parte, en los estudiantes que no identificamos generalización en sus respuestas, la totalidad de ellos emplean la misma estructura para los casos particulares cercanos y lejanos.

De manera comparativa, evidenciamos una diferencia importante entre la cantidad de estudiantes de quinto que logra generalizar las estructuras (17) y los de tercero (1). Esta información la relacionamos con las experiencias matemáticas a las cuales se enfrentan los estudiantes de quinto, los cuales pueden poseer más herramientas para establecer generalizaciones. En este sentido, y tal como lo plantean algunos autores, los niños que se enfrentan a tareas que involucran generalización requieren de tiempo y experiencias significativas para trabajar sobre estos procesos, ya que no es una tarea simple (Castro, 2012).

Otra diferencia entre las estructuras identificadas en cada curso tiene que ver con el uso de la notación algebraica, la cual es otra de las formas de analizar la generalización expresada por estudiantes, en el contexto funcional del álgebra escolar (Carraher, Martinez y Schliemann, 2008). Específicamente, en quinto de primaria, a diferencia de tercero, emerge el uso del simbolismo algebraico. La Figura 6 presenta un ejemplo.

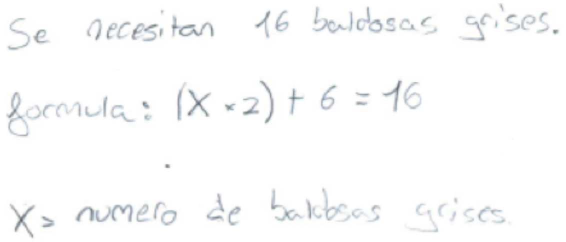


Figura 6. Respuesta de Q8 a C1

En el ejemplo de la figura 6, observamos que Q8 establece la generalización entre variables, llamando x al número de baldosas grises, emergiendo así el simbolismo algebraico de forma espontánea, pues los estudiante no habían trabajado previamente este tipo de representación. En la respuesta a esta pregunta, que involucra un caso particular, evidenciamos generalización aún cuando no se intenciona la expresión de esta, ya que el diseño del cuestionario esperaba su presencia en C5. Hablamos así de generalización espontánea (Pinto y Cañadas, en prensa). Con base en esta idea, encontramos que la única evidencia de generalización en tercero se presenta en la cuestión que busca que los estudiantes expresen esta relación (C5), mientras que del total de estudiantes de quinto que generaliza su estructuras, encontramos: (a) tres estudiantes que generalizan cuestiones que responden tanto a casos particulares (generalización espontánea) como generales (generalización inducida), y (b) 14 estudiantes que solo generalizan de manera inducida.

CONCLUSIONES

El estudio comparativo que presentamos busca aportar con la identificación de características del pensamiento algebraico, en concreto el funcional, de estudiantes de tercero y quinto de primaria al resolver un mismo problema, específicamente en la relación entre estructura y generalización. Los resultados obtenidos se pueden complementar con los hallazgos de Callejo, García-Reche y Fernández (2016), quienes identifican características del pensamiento algebraico en estudiantes de Educación Primaria, en el contexto de los patrones lineales.

En este trabajo, destacamos la noción de estructura, que nos ayuda a identificar la manera en la cual los estudiantes interpretan la relación entre variables. Nos parece relevante realizar la distinción entre esta noción y la de patrón, ya que la idea de patrón está más ligada a la recurrencia que al establecimiento de una relación entre variables. Desde el enfoque funcional del álgebra escolar, adoptamos la noción de estructura ya que es posible identificar, de manera explícita, la relación entre las variables involucradas.

Referido a los tipos de estructuras identificadas, los resultados de nuestro estudio muestran diferencias entre los estudiantes de tercero y quinto. Por ejemplo, los estudiantes de tercero emplean 17 estructuras diferentes, de las cuales cinco son correctas. Estos estudiantes, de manera general, emplean más de una estructura al responder las diferentes preguntas del cuestionario, lo que nos permite concluir una inconsistencia en el uso de las estructuras conforme responden diferentes cuestiones. Por otra parte, en los estudiantes de quinto identificamos una mayor consistencia en la empleo de estructuras; emplean la misma estructura para casos particulares y para el caso general. Si bien los estudiantes de ambos cursos no habían trabajado con problemas que involucraran funciones lineales antes de nuestras intervenciones, interpretamos que las funciones trabajadas en las primeras sesiones de tercero (de estructura aditiva) y quinto (de estructura aditiva y multiplicativa) tiene implicaciones en los resultados.

En lo que concierne a la generalización, hallamos diferente número de estudiantes que generalizan en cada curso, así como diferentes tipos de generalización. En el caso de tercero, un estudiante establece la regla general, en la cual evidenciamos una evolución de la estructura identificada en casos particulares ($x + x + 3 + 3$) a la establecida en el caso general ($x + x + 6$). Por otro lado, en quinto existe una mayor cantidad de estudiantes que logran generalizar, empleando tres estructuras diferentes ($2x + 6$; $2(x + 2) + 2$ y $2x + 3 + 3$). Al igual que en otras investigaciones (e.g., Callejo, García-Reche y Fernández, 2016), el diseño del cuestionario busca dirigir y expresar la generalización de la relación entre variables, donde encontramos estudiantes de quinto que no generalizan siguiendo el diseño del instrumento, ya que generalizan para casos particulares (generalización espontánea). Esta situación se relaciona con los hallazgos reportados por Blanton y Kaput (2004), quienes indican que, a diferencia de los estudiantes de tercero, los de quinto necesitan una menor cantidad de trabajo en casos particulares para llegar a generalizar. Esta situación deja abierta una interesante línea de investigación, la que tiene relación con las estrategias que emplean estudiantes de Educación Primaria al establecer una regla general que relacione variables, en el contexto funcional del álgebra escolar.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado dentro de los proyectos de investigación del Plan Nacional I+D con referencias EDU2013-41632-P y EDU2016-75771-P, financiados por el Ministerio de Economía y Competitividad de España; y gracias a la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica del Gobierno de Chile (CONICYT), mediante su Programa de Formación de Capital Humano Avanzado a través de la Beca de Doctorado folio 72160307.

Referencias

Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2004). Elementary grades student's capacity for functional thinking. En M. Hoines y A. Fugslestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen, Noruega: PME.

Blanton, M. L. y Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization* (pp. 5–23). Berlín, Alemania: Springer.

Blanton, M. L., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. (Eds.). (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. Reston, VA: NCTM.

Callejo, M. J., García-Reche, A. y Fernández, C. (2016). Pensamiento algebraico de estudiantes de educación primaria (6-12 años) en problemas de generalización de patrones lineales. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 10*, 5–25.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico*. (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

Carpenter, T. y Levi, L. (2000). *Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades* (Research report No. 00–2) (pp. 1-18). Madison, WI: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Carraher, D., Martinez, M. y Schliemann, A. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM*, 40(1), 3-22. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7

Carraher, D., Schliemann, A., Brizuela, B. M. y Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(2), 87-115.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 75-94). Jaén, España: SEIEM.

Driscoll, M. J. (1999). *Fostering algebraic thinking: a guide for teachers, grades 6-10.* Portsmouth, N.H: Heinemann.

English, L. y Warren, E. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *The Mathematics Teacher, 91*(2), 166-170.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.), M*athematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, N.J: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning?. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Nueva York, NY: LEA.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: a structural perspective. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (Vol. 4, pp. 33-56). Reston, VA: NCTM.

Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (1988). *Pensar matemáticamente*. Barcelona, España: Labor.

Ministerio de Educación y Ciencia (2014). *Real Decreto 126/2014 de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria*. BOE, 52, 19349-19420. Madrid, España: Autor.

Mitchelmore, M. y White, P. (2007). Abstraction in mathematics learning. *Mathematics Education Research Journal, 19*(2), 1-9.

Mullingan, J., Mitchelmore, M. y Prescott, A. (2006). Integrating concepts and processes in early mathematics: the australian pattern and structure mathematics awareness Project (PASMAP). En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 209-216). Praga, República Checa: PME.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (en prensa). Generalization in fifth graders within a functional approach. En Editors (Eds.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Singapur: PME.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133-163). Nueva York, NY: LEA.

Strother, S. (2011). *Algebra knowledge in early elementary school supporting later mathematics ability* (Tesis doctoral). Louisville, KY: Universidad de Louisville.

Warren, E., Miller, J. y Cooper, T. J. (2013). *Exploring young students' functional thinking. PNA, 7*(2), 75-84.