

**PROCESOS DE GENERALIZACIÓN EN LA INICIACIÓN AL ÁLGEBRA
ESCOLAR: REPORTE DE UNA EXPERIENCIA CON ESTUDIANTES DE
GRADO OCTAVO**

ÁNGELA MARÍA GONZÁLEZ PASCAGAZA

ANGELO DAVID VELANDIA LOZANO

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

BOGOTÁ, D.C.

2017

**PROCESOS DE GENERALIZACIÓN EN LA INICIACIÓN AL ÁLGEBRA
ESCOLAR: REPORTE DE UNA EXPERIENCIA CON ESTUDIANTES DE
GRADO OCTAVO**

ÁNGELA MARÍA GONZÁLEZ PASCAGAZA

ANGELO DAVID VELANDIA LOZANO

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de Magíster en
Educación, énfasis en Educación Matemática, modalidad de Profundización.

Director

PEDRO JAVIER ROJAS GARZÓN

Doctor en Educación

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN

BOGOTÁ, D.C.

2017

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	10
1. CONTEXTUALIZACIÓN Y DESCRIPCIÓN DE LA PROBLEMÁTICA	13
2. MARCO DE REFERENCIA	22
3. DISEÑO METODOLÓGICO	26
3.1 METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN	26
3.2 CATEGORIAS DE ANÁLISIS	28
3.3 PROPUESTA METODOLÓGICA PARA EL TRABAJO DE AULA	29
3.4 ACTIVIDAD DE INDAGACIÓN.	31
3.5 CONJUNTO DE TAREAS	42
4. DESARROLLO DE LA PROPUESTA.....	51
4.1. ACTIVIDAD 1: SECUENCIA DE CUADROS.	51
4.2. ACTIVIDAD 2: SECUENCIA DE NÚMEROS.	57
4.3. ACTIVIDAD 3: ACTIVIDAD DEL MERCADO 1.	62
4.4. ACTIVIDAD 4: DOBLECES.	69
4.5. ACTIVIDAD 5: BORDES.....	74
4.6 ACTIVIDAD 6: (BALDOSAS I).	80
4.7 ACTIVIDAD 7. EL INVENTARIO.	86
4.8 ACTIVIDAD 8. A EMBALDOSAR SEGUNDA PARTE.....	91
4.9 ACTIVIDAD DE CIERRE.	97
5. PROCESOS DE GENERALIZACIÓN Y DE SIMBOLIZACIÓN:	101
ANÁLISIS DE CASOS PARTICULARES	101
6. RESULTADOS Y COMENTARIOS FINALES.....	111
Bibliografía	115

TABLA DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1 Formas de iniciación al álgebra.....	23
Ilustración 2 . Kemmis & McTaggart, 1998 (p. 16).....	27
Ilustración 3 Actividad de indagación primera parte.....	32
Ilustración 4 Parte de tabulación de actividad de indagación.....	33
Ilustración 5. Producción de Karen en respuesta el ítem 1(e)	34
Ilustración 6. Producción de Leidy en respuesta al ítem 1(e).....	34
Ilustración 7. Producción de Nelson en respuesta al ítem 1(e).....	35
Ilustración 8. Producción de Lyan en respuesta al ítem 1(e).....	35
Ilustración 9. Producción de Ingrid en respuesta al ítem 1(e)	35
Ilustración 10. . Producción de Marisol en respuesta al ítem 1(f)	37
Ilustración 11. . Producción de Karem en respuesta al ítem 1(f).....	37
Ilustración 12 Parte dos de la Actividad de indagación.....	38
Ilustración 13. Producción de Johann en respuesta al ítem 2(a).....	39
Ilustración 14. Producción de Leidy en respuesta al ítem 2(a).....	39
Ilustración 15. Producción de Jenniffer en respuesta al ítem 2(c).....	40
Ilustración 16. Producción de Leidy en respuesta al ítem 2(c).....	40
Ilustración 17. Producción de Jenniffer en respuesta al ítem 3(d).....	41
Ilustración 18 Propuesta general de la Tarea 1	52
Ilustración 19. Producción de Jhonatan y Yeferson en respuesta al ítem 5 de la Tarea 1	53
Ilustración 20. Producción de Leidy en respuesta al ítem 5 de la Tarea 1	53
Ilustración 21. . Producción de Esneider en respuesta al ítem 5 de la Tarea 1.....	54
Ilustración 22. . Producción de Cristofer en respuesta al ítem 5 de la Tarea 1	54
Ilustración 23. . Producción de Karen en respuesta al ítem 5 de la Tarea 1	54
Ilustración 24. Producción de Cristofer en respuesta al ítem 6 de la Tarea 1	55
Ilustración 25. Producción de Karen en respuesta al ítem 6 de la Tarea 1	55
Ilustración 26. Propuesta de tarea de la actividad 2	58
Ilustración 27. Producción de Leidy en respuesta al ítem 5 de la Tarea 2	58
Ilustración 28. Propuesta de tarea de la Actividad 3	63

Ilustración 29. Producción de Laura en respuesta al ítem 2 de la Tarea 3	64
Ilustración 30. Producción de Miguel Angel en respuesta al ítem 2 de la Tarea 3	64
Ilustración 31. Producción de Nelson en respuesta al ítem 2 de la Tarea 3	65
Ilustración 32. Producción de Ana Sofía en respuesta al ítem 4 de la Tarea 3.....	66
Ilustración 33. Producción de Laura en respuesta al ítem 4 de la Tarea 3	66
Ilustración 34. Producción de los grupos en la Tarea 3.....	67
Ilustración 35. Producción de los grupos en la Tarea 3.....	68
Ilustración 36. Propuesta de Tarea para la actividad 4	70
Ilustración 37. Producción de Jenniffer en respuesta al ítem 8 de la Tarea 4	70
Ilustración 38. Producción de Karem en respuesta al ítem 8 de la Tarea 4.....	71
Ilustración 39. Producción de Jenniffer teniendo en cuenta la intervención del profesor	73
Ilustración 40. Tabla de Resultados para la Tarea 5.....	75
Ilustración 41. Producción de Ana en la Tarea 5.....	75
Ilustración 42. Producción de Daniel en respuesta al ítem 4 de la Tarea 5	76
Ilustración 43. Producción de Valentina en respuesta al ítems 4 y 5 de la Tarea 5.....	77
Ilustración 44. Producción de los grupos en respuesta al ítems 4 y 5 de la Tarea 5.....	79
Ilustración 45. Producción de los grupos en respuesta al ítems 4 y 5 de la Tarea 5.....	79
Ilustración 46. Producción de los grupos en respuesta al ítems 4 y 5 de la Tarea 5.....	79
Ilustración 47. Producción de Daniel, Jeferson y Cristofer en respuesta al ítem 5 de la Tarea 6	82
Ilustración 48. Producción de los grupos en respuesta al ítem 5 de la Tarea 6	83
Ilustración 49. Producción de los grupos en respuesta al ítem 5 de la Tarea 6	83
Ilustración 50. Producción de los grupos en respuesta al ítem 5 de la Tarea 6	84
Ilustración 51. Producción de los grupos en respuesta al ítem 5 de la Tarea 6	84
Ilustración 52. Producción de los grupos en respuesta al ítem 5 de la Tarea 6	85
Ilustración 53. Producción de los grupos en respuesta al ítem 5 de la Tarea 6	85
Ilustración 54. Producción de Miguel en respuesta a las preguntas 1 y 2 de la Tarea 7	89
Ilustración 55. Producción de Erly en respuesta al ítem 1 de la Tarea 7	89
Ilustración 56. Producción de Nelson y Marisol en respuesta al ítem 1 de la Tarea 7	89

Ilustración 57. Producción de Cristofer y Sofia en respuesta al ítem 1 de la Tarea 7	90
Ilustración 58. Propuesta de Tarea para actividad 8	92
Ilustración 59. Propuesta ítem 2 Tarea 8	94
Ilustración 60. . Producción de Nelson en respuesta al ítem 2 de la Tarea 8	96
Ilustración 61. . Producción de los grupos en respuesta al ítem 2 de la Tarea 8	96
Ilustración 62. Propuesta de Tarea para la actividad 9	98
Ilustración 63. . Producción de Miguel en respuesta de la Tarea 9	98
Ilustración 64. Producción de Jenniffer en respuesta de la Tarea 9	99
Ilustración 65. Producción de Miguel en respuesta de la Tarea 9	100
Ilustración 66. Producción de Jenniffer en la Actividad de Indagación.....	101
Ilustración 67. Producción de Cristofer en la Actividad de Indagación.....	101
Ilustración 68. Ilustración 66. Producción de Jenniffer en la Tarea 1	102
Ilustración 69. Ilustración 66. Producción de Cristofer en la Tarea 1	102
Ilustración 70. Ilustración 66. Producción de Jenniffer en la Tarea 2	103
Ilustración 71. Ilustración 66. Producción de Cristofer en la Tarea 2	103
Ilustración 72. Producción de Jenniffer en respuesta al ítem 2 de la Tarea 3	104
Ilustración 73. Producción de Cristofer en respuesta al ítem 2 de la Tarea 3	104
Ilustración 74. Producción de Jenniffer y Cristofer en la Tarea 4.....	105
Ilustración 75. Producción de Jenniffer en la Tarea 5	106
Ilustración 76. Producción de Cristofer en la Tarea 5	106
Ilustración 77. Producción de Jenniffer en la Tarea 6	107
Ilustración 78. Producción de Cristofer en la Tarea 6	107
Ilustración 79. Producción de Jenniffer en la Tarea 7	108
Ilustración 80. Producción de Cristofer en la Tarea 7	108
Ilustración 81. Producción de Jenniffer y Cristofer en la Tarea 8.....	109
Ilustración 82. Producción de Cristofer y Jenniffer en la Actividad de Cierre	110

PROCESOS DE GENERALIZACIÓN EN LA INICIACIÓN AL ÁLGEBRA ESCOLAR: REPORTE DE UNA EXPERIENCIA CON ESTUDIANTES DE GRADO OCTAVO

ÁNGELA MARÍA GONZÁLEZ PASCAGAZA

ÁNGELO DAVID VELANDIA LOZANO

RESUMEN

Diversas investigaciones, tanto nacionales como internacionales, en el campo de la Didáctica de la Matemática, en particular relacionadas con el álgebra escolar, reportan dificultades que encuentran los estudiantes para dotar de significado los símbolos y reconocer su carácter operatorio. En esta investigación se aplicó un instrumento de indagación con estudiantes de 8° y 9° grado (13-14 y 14-15 años) cuyos resultados coinciden con algunas de las dificultades reportadas en dichas investigaciones. Estos resultados distan de lo esperado institucionalmente que está fundamentado por los estándares curriculares de matemáticas. Al parecer tales dificultades se generan, entre otras razones, por la manera en que los contenidos curriculares son abordados en el aula; en muchas ocasiones desde un tratamiento que parte de lo simbólico, con fuentes limitadas de significado. Se desarrolló una experiencia de aula con estudiantes de octavo grado a partir de la adecuación de un conjunto de actividades, favorables para el trabajo del pensamiento algebraico, utilizando secuencias de figuras, secuencias numéricas y situaciones en contextos reales, priorizando la construcción de significado para los símbolos por medio de generalización de patrones, desde diferentes interpretaciones de “la letra” y posibilitando el reconociendo del carácter operatorio de los símbolos. Se reportan los resultados obtenidos al aplicar este conjunto de actividades y su influencia en el proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar.

Palabras clave: iniciación al álgebra, patrones de formación, significado de símbolos, lenguaje algebraico, carácter operatorio.

ABSTRACT

Various investigations, both national and international, in the field of Mathematics didactics, in particular related to school algebra, report difficulties for students to give meaning to the symbols and to recognize their operative nature. In this research, an instrument of inquiry was applied with 8th and 9th grade students (13-14 and 14-15 years old) whose results coincide with some of the difficulties reported in these investigations. These results are far from institutionally expected, that is grounded in curriculum math standards. Apparently, the difficulties are generated, among other reasons, by the way in which the curricular contents are approached in the classroom; in many occasions from a treatment that starts from the symbolic, with limited sources of meaning. A classroom experience with eighth grade students was developed based on the adaptation of a set of activities, favorable to the work of algebraic thinking, using sequences of figures, numerical sequences and situations in real contexts, prioritizing the construction of meaning for the symbols by means of the generalization of patterns, from different interpretations of "the letter" and making possible the identification of the operative character of the symbols. We report the results obtained by applying this set of activities and their influence on the teaching and learning process of school algebra.

Keywords: initiation to algebra, formation patterns, meaning of symbols, algebraic language, operative character.

INTRODUCCIÓN

En este trabajo se describe y analiza la implementación de una experiencia de aula relacionada con la iniciación al álgebra escolar, desarrollada con estudiantes de grado octavo (entre 13 y 14 años) de una institución escolar del municipio de Mosquera (Colombia).

Para desarrollar esta experiencia fue necesario adecuar y organizar un conjunto de tareas que posibilitara la iniciación del trabajo algebraico a partir del significado y la operatividad de los símbolos algebraicos, desde las propuestas planteadas por Mason, Graham, Pimm & Gowar (1999), complementadas por las de Agudelo (2000).

El desarrollo de este trabajo fue motivado por la necesidad de plantear una alternativa de formación en el aula de matemáticas, en una institución educativa de carácter oficial, que difiera de la considerada como tradicional en nuestro medio para abordar el álgebra escolar, esto es, desarrollada a partir de temas organizados de una manera lineal, donde se inicia por la definición de expresiones algebraicas, abordando procedimientos para reducir o expresar en factores dichas expresiones y luego realizar ejercicios de mecanización para finalizar mostrando situaciones problema en las cuales se reconozca la utilidad de los temas previamente tratados; ya que desde la experiencia de aula los autores de este trabajo han evidenciado que esta manera de abordar el álgebra suele conducir a los estudiantes a centrar sus esfuerzos en la manipulación de símbolos, usualmente desprovistos de significado, que además conlleva a errores en el desarrollo de procedimientos, en tanto no le reconocen un carácter operatorio a los símbolos. (Rojas, Rodríguez, Romero, Castillo & Mora, 1999).

Como apoyo al planteamiento anterior se consultaron diversas investigaciones sobre iniciación al álgebra escolar y se evidenció que varias de ellas reportan las

dificultades que encuentran los estudiantes para dotar de significado los símbolos literales y reconocer el carácter operatorio de los mismos (Küchemann, 1978; Kieran & Filloy, 1989). En el contexto colombiano, Rojas et al. (1999) reportan dificultades similares (a partir de pruebas realizadas en diversos colegios de Bogotá) las cuales según Kieran & Filloy (1989) pueden clasificarse en tanto estén relacionadas con el cambio de convenciones respecto del referente aritmético, la interpretación de las letras, el dilema proceso-producto, el reconocimiento y uso de estructuras.

Para confirmar si lo reportado en las investigaciones coincide con las interpretaciones realizadas por los estudiantes de la institución educativa en la que desarrollaría esta propuesta (Municipio de Mosquera) se aplicó un instrumento de indagación a los estudiantes de grado 8° en el que se encontró que la mayoría de los estudiantes evalúan la letra o la interpretan como objeto y no tienen claridad acerca de los procesos para realizar operaciones con símbolos. Adicionalmente, si bien se reconoce que el trabajo con patrones permite un acercamiento para dar significado a los símbolos y reconocerles un carácter operatorio, en dicha prueba se encontró que los estudiantes no logran utilizar símbolos para dar cuenta de las generalizaciones hechas a partir de esos patrones.

Lo anterior apoyó la necesidad de realizar un trabajo basado en procesos de generalización, orientado a reconocer la importancia del uso de símbolos para representar la generalidad, a la vez que se dotan de significado en diferentes contextos, se reconoce su carácter operatorio y se posibilita un manejo comprensivo de aspectos sintácticos relacionados con las expresiones formadas por dichos símbolos. Las actividades desarrolladas se apoyaron en un trabajo a partir de diversas tareas, diseñadas desde los referentes atrás mencionados, las cuales han sido reconocidas como favorables para potenciar el pensamiento algebraico de los estudiantes, especialmente dentro del contexto nacional. Este

trabajo fue abordado desde la metodología investigación-acción, mediante las siguientes fases: (1) Contextualización y diseño, (2) Acción y observación, y (3) Reflexión y evaluación.

En el primer capítulo de este informe se presenta una contextualización y una descripción de la problemática abordada; en el segundo se realiza una síntesis de los referentes teóricos asumidos en relación con el álgebra escolar, destacando aspectos claves para el diseño de la propuesta; en el tercer capítulo se presenta la adecuación y rediseño de las tareas propuestas para el trabajo en el aula, se plantean instrumentos de evaluación y proponen categorías de análisis a partir de los referentes teóricos asumidos. En el cuarto capítulo se realiza una descripción de las actividades desarrolladas y se presentan los resultados parciales obtenidos en la implementación de la propuesta a partir del análisis realizado, así como las decisiones tomadas; en el quinto se presenta una síntesis de los resultados obtenidos, las conclusiones del proceso realizado y algunas recomendaciones.

1. CONTEXTUALIZACIÓN Y DESCRIPCIÓN DE LA PROBLEMÁTICA

A continuación se presenta una mirada de las investigaciones que proponen dificultades, posibles soluciones y propuestas de actividades de aula relacionadas con la iniciación del álgebra escolar.

De las investigaciones tomadas como referentes en la presente propuesta se tienen en cuenta dos aspectos:

- Los que permitan identificar las dificultades y posibles caminos para superarlas.
- Los que plantean ideas y actividades para el diseño o adecuación de una secuencia de actividades que han resultado exitosas a la hora de abordar el problema y/o que brinden los contextos necesarios para ello.

En cuanto al primer aspecto, los trabajos de Kieran & Filloy (1989) recogen los reportes y resultados de investigaciones importantes como las de Collis (1975), Küchemann (1978), Matz y Davis (1982), y describen algunas de las contribuciones de la investigación a conocimientos sobre los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje del álgebra de secundaria. Kieran y Filloy centran su mirada en algunos temas principales, entre ellos: el marco de referencia aritmético; variables, expresiones y ecuaciones; resolución de ecuaciones; funciones y sus gráficas y enfoques que usan computadoras. Para el presente trabajo se retoman: el marco aritmético de referencia, las variables y las expresiones y ecuaciones.

Dichos autores afirman que “el álgebra requiere un cambio en el pensamiento del estudiante de las situaciones numéricas concretas a proposiciones más generales sobre números y operaciones” (p. 229). Para el marco aritmético de referencia especifican como dificultades las formas de ver el signo igual, la concatenación de símbolos y el uso de convenciones de notación algebraica entre otras. Mientras que para el tema de variables reportan que la experiencia de los estudiantes se reduce al uso de fórmulas y relaciones entre unidades de medida. Por último, para el tema de expresiones y ecuaciones se muestran dificultades con la aceptación de falta de cierre e interpretar las ecuaciones como una operación en un solo sentido, con un resultado al lado derecho del igual.

En el contexto colombiano se tiene en cuenta la investigación desarrollada por Barajas, González & Mejía (2000) quienes realizan una réplica del estudio de Küchemann (1978) en donde se proponen ítems en los que se aborda la interpretación de la letra, las operaciones involucradas y la naturaleza de los elementos con los que trabaja para identificar manifestaciones sobre dificultades que encuentran los estudiantes en el trabajo algebraico. Dicho estudio se basó en la aplicación de instrumentos en 18 instituciones educativas de Bogotá (en 18 de las 20 localidades de la ciudad), a un total de 1237 estudiantes que habían cursado la asignatura de álgebra (grados 9° y 10°) sobre los cuales hicieron una reclasificación de los ítems en cada uno de los niveles de comprensión, dado que en el contexto aplicado hubo variaciones en los resultados con respecto a los que reportó Küchemann (1978), generados al parecer por la manera en que son abordados los temas de álgebra en Colombia. En indagaciones hechas a los resultados de los estudiantes se identificó que en muchas de las respuestas dadas, aunque podrían ser consideradas incorrectas desde la escritura usual formal de las matemáticas, se evidenciaba una adecuada interpretación de los signos usados. Los resultados analizados por este grupo también tuvieron en cuenta las dificultades descritas en el trabajo de Kieran y Filloy (1989) que a su vez fueron

de suma importancia a la hora de detectarlas en la experiencia en el aula y así mismo tomar las acciones necesarias para superarlas.

En cuanto al segundo aspecto, Rojas et al. (1999) reportan dificultades en los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra, como resultado de un estudio realizado con estudiantes de octavo grado en contextos algebraicos; en este trabajo se relacionan los ítems utilizados con los resultados arrojados sobre interpretaciones de la letra, reconocimiento de patrones de formación y exploración de conjuntos numéricos. Es importante aclarar que de este trabajo se toman en cuenta no sólo los elementos teóricos allí aportados sino también algunos elementos que ellos sugieren para el diseño de las actividades en el aula que *“posibilitarían tanto procesos de generalización y simbolización, como aproximaciones a la interpretación de la letra como número generalizado y como variable”* (p. 10).

Godino & Font (2001) plantean algunas características del razonamiento algebraico que describen como fáciles de adquirir por los niños, y resaltan la importancia de que los maestros de matemáticas los conozcan y apliquen:

- 1. Los patrones o regularidades existen y aparecen de manera natural en las matemáticas. Pueden ser reconocidos, ampliados, o generalizados. El mismo patrón se puede encontrar en muchas formas diferentes. Los patrones se encuentran en situaciones físicas, geométricas y numéricas.*
- 2. Podemos ser más eficaces al expresar las generalizaciones de patrones y relaciones usando símbolos.*
- 3. Las variables son símbolos que se ponen en lugar de los números o de un cierto rango de números.*
- 4. Las funciones son relaciones o reglas que asocian los elementos de un conjunto con los de otro, de manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo uno del segundo conjunto. Se pueden expresar en contextos reales mediante gráficas, fórmulas, tablas o enunciados (p. 777).*

No obstante, dichos autores advierten sobre la necesidad de que los profesores amplíen la visión del álgebra escolar que resulta de las generalizaciones

aritméticas y el manejo de expresiones literales, que aunque bien son características del álgebra, se debe suscitar a la aplicación de todo tipo de situaciones en las que intervenga el lenguaje algebraico: *“Lo que convertiría al álgebra en un instrumento de modelización matemática”* (p. 778). Incluyen una colección de situaciones para el desarrollo del razonamiento pre-algebraico establecidas en cuatro categorías: (1) Comprensión de patrones, relaciones y funciones, (2) Representación y análisis de situaciones matemáticas y estructuras usando símbolos algebraicos, (3) Uso de modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas y (4) Análisis del cambio en contextos diversos, además de algunos recursos tecnológicos que también podrían introducirse en el aula. Los cuales nos permiten reafirmar que el trabajo con patrones de generalización se puede considerar como un elemento a tener en cuenta en los procesos de iniciación del álgebra escolar.

Por otra parte, Agudelo (2000) reporta los resultados de una investigación con profesores de matemáticas de educación básica, cuyo propósito era promover una enseñanza para la comprensión en álgebra elemental, en la cual se identificaron las dificultades más importantes en la transición entre el trabajo aritmético y el algebraico; además de plantear actividades que posibilitaron superar dichas dificultades, las cuales se diseñaron para atender a necesidades en el aula al igual que textos guía y orientaciones metodológicas, como lo plantea:

Desde los conceptos aritméticos que se apoyan en su experiencia de lo concreto hacia la construcción de generalizaciones haciendo uso del lenguaje natural - o del que los alumnos quisieran utilizar – para llegar a la expresión formal. Luego de establecer la necesidad de operar con las expresiones, en situaciones que lo requieran, se procedió al establecimiento de procedimientos para manipular las expresiones (p. 23 y 24)

Lo planteado por esta autora concuerda con las ideas generales de la presente propuesta de trabajo y sobre las cuales se retomaron algunas tareas para llevar a la experiencia de aula.

En diversas investigaciones sobre iniciación al álgebra escolar se exponen varias dificultades que encuentran los estudiantes para dotar de significado los símbolos y reconocer el carácter operatorio de los mismos (Küchemann, 1978; Kieran & Filloy, 1989). En el contexto colombiano, Rojas et al. (1999) reportan dificultades similares a partir de pruebas realizadas en diversos colegios de Bogotá, algunas de las cuales también han sido reconocidas en trabajos de grado realizados en la década anterior.

Con base en los resultados de un instrumento de indagación aplicado a estudiantes de grado 8° en un colegio de carácter privado (2014) y en un colegio de carácter público (2015), se pudo evidenciar, a partir de los resultados encontrados, que algunas dificultades coinciden con las reportadas en las investigaciones mencionadas, y que distan de lo esperado institucionalmente y de lo planteado desde los Estándares Curriculares para el área de Matemáticas propuestos por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN, 2006). Por lo que surgen cuestionamientos referentes a qué podría deberse esa diferencia entre lo encontrado a partir del instrumento de indagación y lo esperado en los estándares.

Al respecto, Butto & Rojano (2004, p. 3) refieren que los conceptos algebraicos se abordan en el aula de forma tradicional empezando por enseñar la sintaxis algebraica y se termina con la resolución de problemas para la aplicación de las reglas sintácticas. Aspecto que coincide con la experiencia de aula de los autores de la presente investigación. Razones por las que cobra importancia, desde el punto de vista didáctico reflexionar sobre los siguientes aspectos, en pro de aportar elementos que permitan disminuir esta distancia entre lo esperado por las instituciones y lo encontrado en el aula:

- Abordar esta problemática en grado octavo, grado en el cual institucionalmente se tiene dispuesto el trabajo del álgebra escolar.

- Trabajar a partir de actividades, en una variedad de contextos significativos, que potencien tematizar aspectos semánticos de los símbolos y se reconozca su carácter operatorio.
- Desarrollar una experiencia en el aula con estudiantes de grado octavo con el fin de aportar a la superación de algunas de esas dificultades a partir de la adecuación de una secuencia de actividades que han mostrado ser favorables para el trabajo del pensamiento algebraico y que se abordan en el aula a través de una metodología de investigación-acción.
- Dar prioridad a la construcción de significado para el lenguaje algebraico como objeto matemático (y que es motivo de estudio), por lo que es pertinente plantear situaciones que requieran diferentes interpretaciones de la letra, y el trabajo con diferentes universos numéricos desde los procesos de generalización.

Desde nuestra experiencia como profesores en instituciones educativas, tanto de carácter oficial como privado, hemos evidenciado manifestaciones de dificultades y de posibles obstáculos que encuentran los estudiantes al abordar temas algebraicos y que no solo son los relacionados con su uso sino con su comprensión, y cuya recurrencia, a corto o mediano plazo, se constituyen en serios problemas para el desempeño académico de los estudiantes, llevándolos en ocasiones a reprobación el año escolar o, incluso, la deserción del sistema educativo.

Uno de los efectos más relevantes de dicha situación lo constituye la actitud de rechazo que asumen algunos estudiantes hacia el álgebra, el cual puede obedecer al hecho que “lo que se le pide a los alumnos que realicen en las clases de álgebra no tiene un significado subyacente o no están preparados para hacerlo” (Cardona, 2007, pp. 4-5). Al respecto el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000, citado por Cardona, 2007), considera que “los estudiantes necesitan comprender (del álgebra) sus conceptos, las estructuras y principios que

rigen la manipulación de símbolos y cómo pueden usarse éstos para registrar ideas y ampliar su comprensión de las situaciones” (p. 11).

Los diversos problemas relacionados con el aprendizaje del álgebra escolar, en particular lo que refiere a su iniciación, han motivado varias investigaciones. Kieran & Filloy (1989) analizaron y caracterizaron los resultados de diversas investigaciones y reportan, entre otras, dificultades relacionadas con el marco aritmético de referencia que trae el estudiante, por ejemplo con respecto a la concatenación de símbolos, al uso de paréntesis y a las interpretaciones del signo igual; adicionalmente reportan dificultades relacionadas con la interpretación de la letra en contextos algebraicos y con el reconocimiento y uso de estructuras.

En relación con las interpretaciones de la letra, retoman los resultados reportados por Küchemann (1978), a partir de un test aplicado a cerca de 3000 estudiantes (13-15 años) con tareas clasificadas según tres criterios:

- La interpretación de “letra” requerida para abordar con éxito la actividad.
- La naturaleza de los elementos (tipos de números y símbolos) y la estructura de las expresiones (relaciones, operaciones involucradas, etc.).
- Grado de facilidad (basado en porcentaje de éxito de los estudiantes).

Con base en estos criterios, estableció 4 niveles de comprensión del álgebra escolar. Para el presente trabajo se diseñó un instrumento con el objetivo de indagar sobre las interpretaciones que los estudiantes realizan de los símbolos literales usados en contextos matemáticos, así como las posibilidades de estos para reconocer y expresar la generalidad; instrumento construido a partir de una muestra de los ítems propuestos por Küchemann (1978) para cada nivel, además de algunas tareas planteadas por Mason et al. (1999).

Los resultados encontrados mostraron mayores grados de facilidad¹ en los ítems que exigen la interpretación de la letra como evaluada o como objeto (71,3% y 46,4% respectivamente), mientras que para los ítems que exigen interpretaciones de la letra como incógnita o como número generalizado los grados de facilidad son menores (17,7% y 14,2% respectivamente). Incluso se observan otras dificultades asociadas a la “aceptación de falta de cierre” o a relacionar propiedades como la distributiva y otros errores de tipo sintáctico. En cuanto al trabajo con patrones la mayoría de estudiantes (53,5%) llega al nivel 3 y 4, mientras que tan solo un 7,14% logra llegar a niveles máximos 6 y 7².

Por otro lado, como se señaló inicialmente, desde los planteamientos del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006), se espera que los estudiantes desarrollen *“la capacidad para identificar en qué consiste la repetición de un mismo patrón y la capacidad para reproducirlo por medio de un cierto procedimiento, algoritmo o fórmula”* (p. 67), y que a través de este trabajo se potencie la necesidad de usar expresiones algebraicas. Además, que cuando se enfrenten con objetos algebraicos, por ejemplo expresiones algebraicas, tengan claridad acerca de los aspectos operatorios que les posibilitan realizar transformaciones y reconocer equivalencias, como es lo esperado desde la propuesta institucional. En tal sentido, lo esperado desde lo institucional y desde los estándares curriculares propuestos por el MEN difiere de las evidencias encontradas, las cuales coinciden a su vez con algunas de las dificultades reportadas desde las investigaciones referidas. La diferencia entre lo esperado y lo encontrado en la práctica genera cuestionamientos referentes a qué podría deberse y si las dificultades que encuentran los estudiantes están relacionadas con los procesos de enseñanza o con los de aprendizaje.

¹ Los grados de facilidad se basan en el porcentaje total de estudiantes que resuelven adecuadamente los ítems.

² Niveles de avance en los procesos de generalización, que se presentarán más adelante en este documento y hacen parte de las categorías de análisis de la investigación.

Al parecer, estas dificultades podrían estar más relacionadas con la manera en que los contenidos curriculares son abordados en el aula. Según lo reportan Butto & Rojano (2004), con frecuencia estos contenidos son desarrollados a partir de fuentes limitadas de significado. De hecho, el acercamiento más tradicional empieza por enseñar la sintaxis algebraica, haciendo énfasis en aspectos manipulativos, ya que por lo general se empieza por enseñar las expresiones, las ecuaciones y las manipulaciones en ellas para terminar con la resolución de problemas, vistos más como posibilidad de aplicación de las reglas sintácticas.

En conclusión se reconoce una urgente necesidad de iniciar el trabajo algebraico a partir de actividades, en una variedad de contextos significativos, que potencien tematizar aspectos semánticos de los símbolos, reconociendo su carácter operatorio. Trabajo que puede aplicarse en grado octavo, grado en el cual institucionalmente se tiene dispuesto el trabajo del álgebra escolar en el contexto nacional e institucional.

2. MARCO DE REFERENCIA

En este apartado se expone de manera sintética los presupuestos teóricos que soportan la presente investigación.

Sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar se han desarrollado diversas investigaciones a nivel nacional e internacional, en especial sobre los distintos problemas relacionados con el aprendizaje del álgebra escolar y lo que refiere a su iniciación. Kieran & Filloy (1989) analizaron y caracterizaron los resultados de algunas de ellas para reportar dificultades. En relación con el marco aritmético de referencia se reportan dificultades asociadas con la interpretación del signo igual, la concatenación de símbolos, la falta de agilidad para expresar formalmente los métodos para resolver problemas, y aquellas relacionadas con la interpretación de la letra en contextos algebraicos.

A partir de esas dificultades se han llevado a cabo diversos estudios para dilucidar formas en las que se pueden hacer acercamientos al pensamiento algebraico diferentes al tradicional y que a su vez permitan superar las dificultades que ya se han mencionado, Como los realizados por Butto (2005) y Durán (1999), quienes proponen cuatro formas de iniciación al álgebra:

1. La generalización de patrones numéricos y geométricos;
2. La modelación de situaciones concretas y de las matemáticas;
3. El estudio de situaciones funcionales,
4. La solución de problemas.

Mason & otros (1999) coinciden en la primera y segunda forma como uno de los caminos para la iniciación del álgebra escolar: “La expresión de la generalidad forma la raíz básica del álgebra porque ésta les da significado a los símbolos que después hay que manipular. Expresar la generalidad que uno percibe es tanto un placer como un esfuerzo” (p.106). Estos autores proponen cuatro raíces o cuatro

rutas que al seguirlas conducen al álgebra: (1) Generalidad, (2) Reordenamiento y manipulación, (3) Posibilidades y restricciones y (4) Aritmética generalizada; las raíces se consideran como una percepción en la enseñanza del álgebra hacia las cuales se pueden tener en cuenta un enfoque general. La idea es que en cualquier clase se puede identificar que una de las raíces está allí presente, y se puede decidir si la trabaja con los alumnos por un momento antes de concluir la actividad planeada. Las raíces propuestas se presentan en el siguiente gráfico:

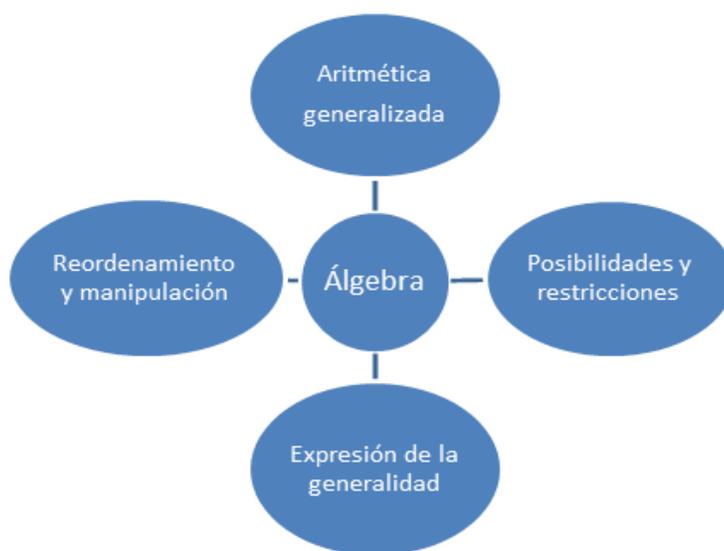


Ilustración 1 Formas de iniciación al álgebra

Cada una de las raíces se presenta de forma separada y el interludio como un intermedio vital en donde se consideran aspectos relevantes a tratar en cada una, que en total constituyen una ruta hacia el álgebra, como se muestra a continuación:

- Raíz 1A: Expresión de la generalidad.
Patrones y bordes.
Ver y decir.
- Raíz 1B: Expresión de la generalidad en situaciones cotidianas.
Reiteración de las ideas de la Raíz 1A, usando ejemplos de contextos de la vida diaria.
- Interludio: Registro de la generalidad.

- Un interludio que se centra en los movimientos hacia la notación sucinta, movimientos que son delicados y extremadamente importantes.
- Raíz 2: Reordenamientos y manipulación.
Construir expresiones y deshacerlas.
Piense un número.
- Raíz 3: Posibilidades y restricciones.
Aritmética creativa.
Hacia una comprensión del uso de x como variable.
- Raíz 4: Aritmética generalizada.
Explicitación de las reglas que se cumplen en las operaciones con números.
Números conocidos por sus propiedades. (p. 13 y 14)

No proponen una ruta para la enseñanza del álgebra como una planeación donde se encuentra una jerarquía de actividades que encaminan hacia la comprensión del álgebra, sino diferentes líneas de desarrollo del trabajo aritmético y las ideas generales que sustentan el pensamiento algebraico.

La propuesta muestra la iniciación al álgebra por medio de situaciones donde el estudiante debe Ver, Describir y Expresar sus hipótesis dada una situación y las representaciones se convierten en la manera de comunicar estos tres pasos.

El **Ver y decir** se presentan como etapas iniciales en las que se realiza la identificación mental de un patrón o una relación (algo común). **El decir** (a alguien o a uno mismo) es un intento por articular en palabras lo que se ha reconocido. **Registrar** es hacer visible el lenguaje, lo que requiere un movimiento hacia los símbolos y la comunicación escrita (incluyendo los dibujos).

Por otro lado, y al tener en cuenta investigaciones a nivel nacional se encuentra la propuesta de Agudelo (2000) quien retoma y es apoyada por la propuesta de Mason & otros (1999). El trabajo que tuvo como objetivo promover una enseñanza para la comprensión en álgebra elemental está centrado en identificar las dificultades más importantes en la transición entre el trabajo aritmético y el algebraico y así mismo plantea las actividades que permitieran superarlas. Las

actividades propuestas por esta autora parten de los conceptos aritméticos que se apoyan en la experiencia del estudiante desde lo concreto, hacia la construcción de generalizaciones haciendo uso del lenguaje natural (o del que los estudiantes quisieran utilizar) para llegar a la expresión formal. Luego de establecer la necesidad de operar con las expresiones, en situaciones que lo requieran, procedió al establecimiento de procedimientos para manipularlas.

Dicha autora resalta además la importancia del uso de situaciones propias del contexto del estudiante lo cual coincide con lo propuesto por Mason et al. (1999). Al declarar sobre los múltiples beneficios que se derivan de las articulaciones de las generalidades matemáticas con situaciones de la vida diaria.

Lo anterior sustenta la decisión en la presente investigación de tomar los procesos de generalización como elemento central para el conjunto de actividades a desarrollar en el aula, apoyado en la propuesta de Mason et al. (1999) además de retomar las etapas **ver, decir y registrar**, como aspectos estructurales de la misma. Y, al tener en cuenta que esto se articula con lo que el MEN (2006) propone para el desarrollo del pensamiento variacional: *“el estudio de regularidades y la detección de los criterios que rigen esas regularidades o reglas de formación para identificar el patrón que se repite periódicamente”* (p. 67). Resaltamos que las actividades y tareas a trabajar en el aula, desde las propuestas de los dos últimos autores mencionados, deben incluir patrones geométricos, numéricos y gráficos, o situaciones cotidianas para que el estudiante visualice, explore y manipule los patrones hasta llegar a representaciones algebraicas (fórmulas o algoritmos).

3. DISEÑO METODOLÓGICO

En este capítulo se describe, por una parte, la metodología que orientó la presente investigación, las categorías de análisis definidas y la propuesta metodológica implementada en el trabajo de aula, y, por otra parte, los resultados del instrumento de indagación aplicado, así como el conjunto de tareas diseñadas para el desarrollo de la propuesta.

3.1 METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

Esta investigación se encuentra inmersa dentro del paradigma cualitativo, en tanto se basa en la comprensión de una realidad social, con el objetivo de transformarla. Se enmarca en lo propuesto por Eisner (1998) como investigación cualitativa, debido a que, en primer lugar, aborda un tema de gran importancia en el ámbito educativo como lo es el proceso de iniciación al álgebra escolar. En segundo lugar, es relevante la experticia del investigador (en términos del marco de referencia y de su propia experiencia) ya que depende de él determinar cómo los estudiantes dan sentido a expresiones que resultan de procesos de abstracción en situaciones de generalización, así como tener en cuenta el contexto concreto del salón de clase.

Desde el enfoque propuesto, se optó por la investigación acción. De acuerdo con Quintana (2006) en ésta se tienen en cuenta las acciones *“más frecuentemente realizadas por los investigadores durante la formulación, el diseño, la ejecución y el cierre de los proyectos de investigación cualitativos”* (p.48). En tanto se pretende reconstruir las prácticas a través de la integración de la acción, para lograr modificar la experiencia en el aula con los estudiantes, de esta manera se trabaja desde la investigación acción, a partir del modelo propuesto por Kemmis & McTaggart (1998):

...una forma de indagación autorreflexiva realizado por quienes participan (profesorado, alumnado, o dirección por ejemplo) en las situaciones sociales (incluyendo las educativas) para mejorar la racionalidad y la justicia de: a) sus propias prácticas sociales o educativas; b) su comprensión sobre las mismos; y c) las situaciones e instituciones en que estas prácticas se realizan (aulas o escuelas, por ejemplo). (p. 14)

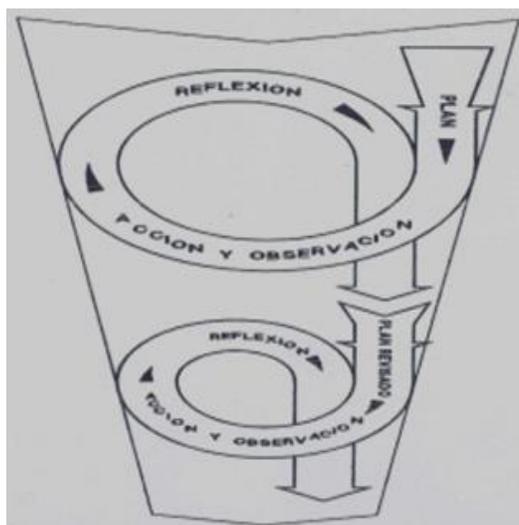


Ilustración 2. Kemmis & McTaggart, 1998 (p. 16)

Las principales características que se retoman son:

- Empieza con pequeños ciclos de planificación, acción, observación y reflexión, avanzando hacia problemas de mayor extensión.
- Se debe hacer un registro, una recopilación y un análisis de los juicios propios del profesor, de las reacciones e impresiones en torno a lo que ocurre en la experiencia.

Ahora, los ciclos mencionados permean la presente investigación en tanto que involucra momentos de planificación (con el desarrollo del estado del arte, el marco de referencia, la aplicación y análisis de las pruebas piloto y rediseño de las tareas a desarrollar), momentos de acción (que involucra el trabajo de aula de las mencionadas tareas), momentos de observación (en lo cual se analizó el cuaderno de observaciones del profesor, los registros y/o cuadernos de los estudiantes y

entrevistas no estructuradas con algunos estudiantes) y la fase de reflexión (que incluye el análisis que se realiza en cada una de las actividades y las conclusiones del presente trabajo).

Por otro lado, en relación con las actividades desarrolladas en la experiencia de aula, se generó un plan de acción flexible con base en las actividades rediseñadas, de modo que permitió su adaptación cuando fue necesario. Se implementaron las tareas y de forma paralela se observó la acción (teniendo en cuenta que en la observación también se planificó y se registró lo desarrollado por los estudiantes de forma individual o colectiva y los registros hechos en la misma acción del profesor-investigador) para recoger evidencias que permitieran evaluarla. Una vez registrada la observación durante la acción, alimentada por las socializaciones de los estudiantes, se convierte en insumo base para la toma de decisiones en relación con las próximas tareas en términos de su modificación o, incluso, el diseño de nuevas.

Para el análisis reflexivo con los instrumentos de registro antes nombrados, se tuvo en cuenta la naturaleza de las actividades y si éstas fueron desarrolladas por los estudiantes de manera individual o grupal, por ejemplo en algunos casos se realizará un análisis poblacional y en otros casos un análisis muestral.

3.2 CATEGORIAS DE ANÁLISIS

El trabajo desarrollado por los estudiantes en relación con las tareas propuestas fueron analizadas tomando en cuenta dos aspectos, por una parte, los usos e interpretaciones de la letra en contextos matemáticos y, por otra, los avances logrados con respecto a los procesos de generalización. Las categorías de análisis fueron asumidas de la propuesta de Rojas et al. (1999):

1. Usos e interpretaciones de la letra (p. 31):

- *Letra evaluada*: A la letra se le da un valor numérico en lugar de tratarla como un valor desconocido. Por ejemplo, al preguntársele: “si $e+f=8$, ¿cuánto es $e+f+g$?”, el muchacho responde 12, en lugar de $8+g$.
- *Letra ignorada* (o no usada): Aquí la letra se ignora, o a lo más es reconocida (pero sin dársele un significado). Por ejemplo, al solicitarle “súmele 2 a $3n$ ”, el muchacho escribe 5 o $5n$ en vez de $3n+2$.
- *Letra como objeto*: La letra es vista como un nombre para un objeto, o como el objeto propiamente dicho. Por ejemplo, ante expresiones como “ $2n+3n$ ” se piensa en “2 naranjas y 3 naranjas”, o simplemente como “2 enes y 3 enes, lo cual significa 5 enes juntas”. Si bien esta manera de operar puede servir para resolver fácilmente algunos ejercicios (por ejemplo en la suma de términos semejantes), puede ser errónea o carecer de significado en otros; como cuando se plantea que una libra es igual a cuatro marcas, en un cierto instrumento para pesar, y se traduce como $l=4m$ (lo cual no se tiene, en este caso, si l y m son números).
- *Letra como incógnita*. Aquí la letra se piensa como un número particular pero desconocido y el muchacho se lanza a operar con la letra vista de esta manera, a pesar de la falta de cerradura del resultado (como en las respuestas $8+g$ y $3n+2$).
- *Letra como número generalizado*: La letra se ve como representante de valores o capaz de tomar varios valores más que como un valor específico, como en “qué puede usted decir de C si $C+D=10$ y C es menor que D ”.

2. Avance en los procesos de generalización (p. 63):

- **NO CLASIFICABLE.**
- **NIVEL 1:** No alcanza a encontrar el patrón de formación en lo perceptual.
- **NIVEL 2:** Encuentra el patrón de formación únicamente en lo perceptual.
- **NIVEL 3:** Encuentra el patrón de formación únicamente sobre lo concreto finito, es decir, para una posición dada (número pequeño).
- **NIVEL 4:** Encuentra el patrón de formación hasta lo concreto generalizado, es decir, para una posición dada (número grande). Contesta adecuadamente
- **NIVEL 5:** Encuentra el patrón de formación general y llega sólo a verbalizarlo.
- **NIVEL 6:** Encuentra el patrón de formación general, lo verbaliza y simboliza en lenguaje intermedio, es decir, con una simbología “propia”, pero no con el lenguaje algebraico formal.
- **NIVEL 7:** Encuentra el patrón de formación general, lo verbaliza y simboliza en lenguaje algebraico formal.

3.3 PROPUESTA METODOLÓGICA PARA EL TRABAJO DE AULA

A continuación se presenta lo que se denominó metodología de clase, en donde se encuentran los pasos que se siguieron en el trabajo de aula, la secuencia de tareas que fueron rediseñadas, los instrumentos de evaluación y cómo se utilizaron las categorías de análisis.

Para la organización del trabajo en el aula de clase se tuvo en cuenta el tiempo de acuerdo con la estructura del horario de clase de la institución en donde se llevó a cabo este estudio, teniendo un total de 25 sesiones, que se desarrollaron aproximadamente en 4 sesiones por semana, cada una de 50 minutos.

En cuanto al trabajo con los estudiantes las tareas se propusieron en tres momentos diferentes:

- Un primer momento en el que los estudiantes desarrollan la tarea de forma individual. En esta metodología de aula el estudiante debe interpretar las tareas bajo su propia mirada sin la influencia de otro u otros compañeros.
- En el segundo momento los estudiantes abordan la tarea en pequeños grupos de 3 o 4 estudiantes, para que en primera medida, expongan la solución a sus compañeros, luego comparen formas de solucionar la tarea, debatan y comprueben las respuestas y así preparen una conclusión para exponer ante el grupo general.
- Y un tercer momento de socialización del trabajo realizado en grupos, en donde el docente escoge un representante (cada vez diferente) que muestre los acuerdos y desacuerdos a los que llega el grupo al desarrollar la tarea propuesta, se hace énfasis en que cada estudiante que exponga está representando a su grupo, por lo tanto presenta las ideas del grupo y no se limita solo a las propias. Finalmente es en este momento en donde, por medio de las intervenciones de los estudiantes y el profesor, se realiza el proceso de institucionalización y validación de los aspectos desarrollados en la actividad.

Esta metodología de clase se estructuró de esta forma teniendo en cuenta que es importante analizar el trabajo individual de los estudiantes y su desarrollo personal en el proceso de aprendizaje, luego sigue un trabajo grupal, que teniendo

en cuenta apartes de la teoría del aprendizaje colaborativo, plantea, que a partir de la discusión entre estudiantes al momento de resolver una tarea, se generan espacios que propenden significativamente el desarrollo cognitivo individual, así como lo afirma Collazos, Guerrero y Vergara (2001), los estudiantes trabajan juntos para aprender, y este tipo de aprendizaje es complementario y fortalece los conceptos trabajados de manera individual.

Una vez se realizó la socialización de cada una de las actividades se tomaron los registros escritos de los estudiantes y el cuaderno de observaciones del profesor para realizar el respectivo análisis haciendo uso de las categorías para el mismo a la luz del objetivo planteado en cada actividad, el cual permitía reflexionar y decidir si se daba continuidad a la siguiente actividad o se proponía una actividad intermedia que permitiera reforzar los objetivos propuestos.

3.4 ACTIVIDAD DE INDAGACIÓN.

La actividad de indagación estuvo orientada a identificar cómo los estudiantes (con los que se llevaría a cabo la investigación) reconocían los patrones a partir de una secuencia figural y qué tipos de generalizaciones verbales-escritas y/o simbólicas lograban hacer. Además, identificar las interpretaciones que realizaban los estudiantes de la letra en contextos matemáticos y cómo se manifestaba la operatividad que hacían con algunos símbolos algebraicos. En este sentido, el instrumento de indagación diseñado se dividió en dos partes, el cual fue aplicado en febrero de 2015, a 38 estudiantes de grado 8° de una institución educativa de carácter oficial en el municipio de Mosquera (Cundinamarca), cercano a Bogotá y ubicado al occidente de la capital. La edad de la población estudiantil oscila entre 12 y 15 años, pertenecientes a la zona urbana de Mosquera con estratos socioeconómicos entre 1 y 2.

La primera parte de la actividad propuesta se presenta así:

1.	Tenga en cuenta la siguiente secuencia de figuras
	<p style="text-align: center;"> Figure 1 Figure 2 Figure 3 Figure 4 </p>
	a. Dibuje la Figura 5 de la secuencia
	b. ¿Cuántos círculos tendría la Figura 9?
	c. ¿Cuántos círculos tendría la Figura 100 de la secuencia?
	d. ¿Cuál figura de la secuencia tendría un total de 49 círculos?
e. Suponga que uno de sus compañeros no asistió hoy, escriba brevemente cómo le explicaría el procedimiento que le sirve para calcular el número total de círculos en una figura cualquiera de la secuencia.	
f. Encuentre una expresión (o fórmula) para calcular el número de círculos de la Figura n en la secuencia dada inicialmente.	

Ilustración 3 Actividad de indagación primera parte

Para el análisis de la primera parte de la actividad se usaron las categorías correspondientes a procesos de generalización, como se describe a continuación: Para los ítem 1a y 1b los estudiantes con un porcentaje del 86,8% y un 68,4% respectivamente, encuentran el patrón de formación en lo perceptual de forma acertada y se pueden clasificar dentro del nivel 3, ya que el patrón encontrado para una posición dada es un número pequeño.

En el ítem 1c y 1d el porcentaje para clasificar a los estudiantes en el nivel 4 disminuye a un 50% y 39,5% respectivamente ya que el patrón de formación que se debe encontrar es para una posición cuyo número es más grande. Inicialmente se pensó que para el ítem 1d, que exige cierto pensamiento reversible por parte de los estudiantes, fuera la causa de la dificultad para abordarlo ya que se pide encontrar el número de la posición de acuerdo a una cantidad de círculos dados, pero de acuerdo a las respuestas encontradas (en su mayoría cantidades pequeñas y cercanas a la correcta) no sugiere que se haya presentado la confusión de encontrar la cantidad de círculos dada la posición 49.

ITEM	RESPUESTAS A LOS ÍTEMS	PORCENTAJES
1d. ¿cuál figura de la secuencia tendría un total de 49 círculos?	<ul style="list-style-type: none"> • 25 • 24 • No responde • 25 y 24 • 21 • 15 • 18 • 30 • 10 • 20 • 40 • 29 • 23 • 48 • 28 • 27 	<ul style="list-style-type: none"> • 39,47% • 10,52% • 7,8% • 2,6% • 2,6% • 2,6% • 2,6% • 5,2% • 2,6% • 5,2% • 2,6% • 2,6% • 2,6% • 2,6% • 2,6%

Ilustración 4 Parte de tabulación de actividad de indagación

Para el ítem 1(e) y 1(f) se realiza una agrupación de las respuestas de forma más descriptiva teniendo en cuenta la similitud y algunas características encontradas en los niveles propuestos, para lo que se acude a algunos ejemplos concretos (en imagen o escritos de forma textual) de las respuestas de los estudiantes (de los cuales se describe el nombre).

En el ítem 1(e) se pide a los estudiantes describir el procedimiento que les serviría para calcular el número total de círculos en cualquier posición de la figura, aquí se encontró que:

- 3 estudiantes (7,9%) encuentran el patrón de formación y lo generalizan verbalmente, y se ubican en el nivel 5:

Cristofer: *Cada secuencia tiene en la parte de abajo el número de la secuencia en bolitas y en la parte vertical tiene menos 1 pelota.*

Jennifer: *Al subir el número de la figura se agregan dos círculos o también se le podría sumar el número de la figura con el mismo y restarle 1 círculo y ahí se saben cuántos círculos hay.*

- 10 estudiantes (26,3%) identifican el patrón de formación general y lo escriben para un número de figura específico utilizando ejemplos concretos, estableciendo una relación entre el número de la figura y el número de círculos de la figura ubicados tanto horizontal como verticalmente:

horizontalmente hay el número de círculos depende la figura digamos si es la figura 8 horizontalmente hay 8 círculos y verticalmente hay 7 o sea un círculo más al número de la figura y esos números se suman y esa es la cantidad de círculos que hay.

Ilustración 5. Producción de Karen en respuesta el ítem 1(e)

- 3 estudiantes muestran un ejemplo concreto dibujando los círculos de una figura específica y realizan la generalización sumando el número de la figura pedida con el número de la figura anterior. Por ejemplo:

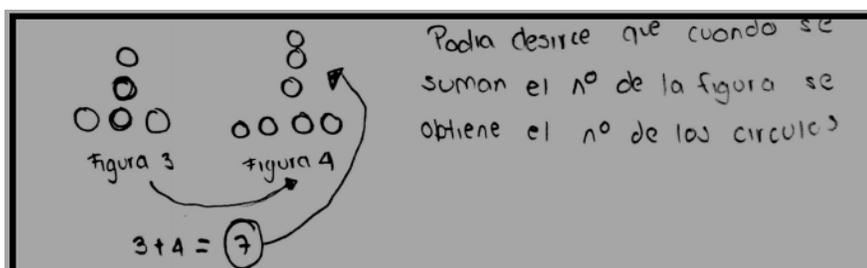


Ilustración 6. Producción de Leidy en respuesta al ítem 1(e)

- Aproximadamente 9 estudiantes (23,6%) encuentran regularidades entre el total de círculos de una posición a otra describiendo que aumenta de dos en dos o que el total de círculos de una figura a otra forma una secuencia de números impares.

Pues es fácil en cada figura aumentan 2 círculos a la vez, contando sea más sencillo. para resolver las preguntas

Ilustración 7. Producción de Nelson en respuesta al ítem 1(e)

El número de figura es igual a la base ej: figura 4; su base sea de 4. En la altura es restar el número de base 1 ej: figura 4 su altura es de 4

Ilustración 8. Producción de Lyan en respuesta al ítem 1(e)

- Dado que la indicación dada para este ítem se hace con el pretexto de describir el procedimiento para un compañero que se supone no asistió, se encuentra que 5 estudiantes no declaran un patrón de formación sino que dan razones y ejemplos relacionados con la inasistencia del compañero más no dan cuenta de la descripción del patrón entre la secuencia de figuras, por ejemplo:

Pues calculamos cuantos alumnos estan y cuantos faltaron y pues de hay se saca cual que figura.

Ilustración 9. Producción de Ingrid en respuesta al ítem 1(e)

- 10 estudiantes indican que se debe hacer el conteo de los círculos según la figura dada, no responden o declaran no entender lo preguntado.

Para el ítem 1(f) se les pide a los estudiantes escribir una expresión o fórmula para calcular el total de círculos para cualquier figura de la secuencia y encontramos que:

- 12 estudiantes (31,5%) utilizan diferentes expresiones acudiendo al uso de letras o palabras como:

$$b = 3 + 5 + 7 = 22$$

$$b + A = \text{cantidad de círculos de la figura}$$

$$n = 5 + n = 9$$

$$9 - 5 = 4 = n = 4$$

$$n + n = x - 1 = y$$

$$\text{figura } n = \text{base} - 1 = \text{altura}$$

$$a + b = c$$

Entre otras, pero en ellas no escriben de forma explícita qué significado se le da a las letras aunque algunos parecen intentar describir que se suman la cantidad de círculos que hay horizontalmente (base) con los que hay verticalmente (que ellos llaman altura). Y aunque nombran la figura n , no logran una expresión y la evalúan en un ejemplo concreto.

- Otros 14 estudiantes describen que la “secuencia crece de 3 en 3”, o utilizan ejemplos concretos dibujando figuras con los círculos o indican que se puede obtener el total de círculos de una figura sumando el número de la figura pedida con el número de la figura anterior, es decir acuden a procesos de recursividad.
- 12 estudiantes no responden o escriben que no entienden.
- 1 estudiante encuentra el patrón de formación y lo generaliza utilizando “lenguaje intermedio” aunque presenta un error sintáctico en la notación y en la operatividad, pero podría clasificarse dentro del nivel 6.

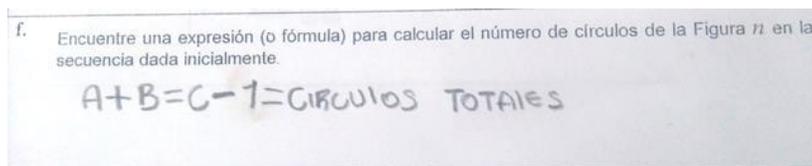


Ilustración 10. . Producción de Marisol en respuesta al ítem 1(f)

- 1 estudiante encuentra el patrón de formación, lo generaliza y lo expresa utilizando lenguaje algebraico formal, aunque presenta una interpretación del signo igual como el resultado de una operación

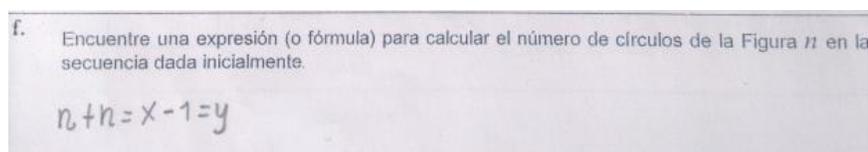


Ilustración 11. . Producción de Kareem en respuesta al ítem 1(f)

La segunda parte del instrumento aplicado se basó en el trabajo realizado por Barajas, González & Mejía (2000) y el grupo PRETEXTO (Rojas et al., 1999) quienes realizan una réplica del estudio de Küchemann (1978) en donde se proponen ítems en los que se aborda la interpretación de la letra, las operaciones involucradas y la naturaleza de los elementos con los que trabaja para identificar manifestaciones sobre dificultades que encuentran los estudiantes en el trabajo algebraico.

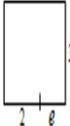
<p>2. a. Si 3 multiplicado por el número p se escribe $3p$. Entonces si $p=3$, ¿a qué es igual la expresión $3p$?</p>	<p>3. El área de un rectángulo se calcula multiplicando la medida del largo por la medida del ancho. Halle el área de cada uno de los siguientes rectángulos</p>
<p>b. Si $n=2$, ¿a qué es igual $3n+1$?</p>	<p>a.  Área=</p>
<p>c. Si una pera cuesta \$800 y p representa el número de peras compradas, ¿qué representa la expresión $800p$?</p>	<p>b.  Área=</p>
<p>d. Si n es un número entero positivo, ¿cómo se representa el doble de este número?</p>	<p>c.  Área=</p>
	<p>d.  Área=</p>

Ilustración 12 Parte dos de la Actividad de indagación

Para el diseño y análisis de la actividad de indagación, también se tomaron como referencia los cuatro *niveles de comprensión del álgebra* descritos a continuación, propuestos por Küchemann (1978, citado Rojas et al., 1999, pp. 36-40) a partir de ítems en los que se analiza no sólo las interpretaciones de letra requeridas para resolverlo adecuadamente, sino también la estructura implicada (operaciones involucradas) y la naturaleza de los elementos con los que trabaja. Además de incorporar grados de facilidad (con base en el porcentaje total de estudiantes que resuelven adecuadamente cada uno de los ítems):

NIVEL 1: Bajo de las operaciones concretas. Los elementos de los ítems son fundamentalmente numéricos (números pequeños) o tienen estructura simple (involucran una operación) y pueden ser solucionados interpretando la letra como objeto, evaluándola o incluso no usándola.

NIVEL 2: Superior de las operaciones concretas. La diferencia básica de los ítems con los del nivel anterior es que su estructura es más compleja (involucran dos o más operaciones) o

requieren el manejo de cantidades más grandes. En cuanto a interpretaciones de letra, se mantienen las del nivel anterior.

NIVEL 3: Bajo de las operaciones formales. La interpretación de letra “mínima” requerida para solucionar los ítems es la de incógnita específica (respecto a la jerarquización propuesta por Küchemann). La estructura en estos ítems es relativamente simple y se manejan cantidades pequeñas

NIVEL 4: Superior de las operaciones formales. Con respecto a los ítems del nivel anterior, éstos tienen una estructura más compleja. Se incluyen más operaciones y números más grandes.

Los estudiantes que no respondieron adecuadamente a alguno de los ítems para estar en alguno de los cuatro niveles descritos, se ubicaron en la categoría no clasificable.

En relación con estos niveles, en el instrumento de indagación se proponen los ítem 2a, 3a, 3c (Nivel 1) cuyo grado de facilidad fue de 15.7%; 71% y 18.4%, respectivamente. En estos ítems se observa que los estudiantes acuden constantemente a evaluar la letra para poder operar con valores numéricos, o incluso reconocer a la letra como un valor desconocido, por ejemplo:

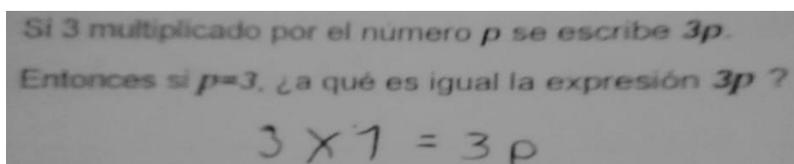


Ilustración 13. Producción de Johann en respuesta al ítem 2(a)

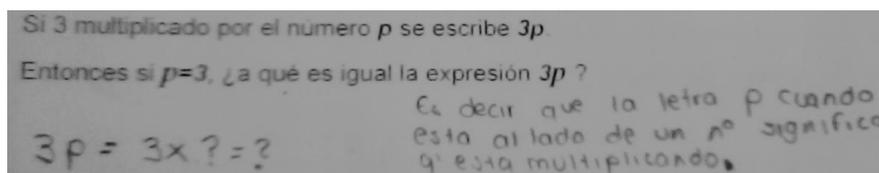


Ilustración 14. Producción de Leidy en respuesta al ítem 2(a)

En relación con los ítem 2b, 3b y 3c (nivel 2), el grado de facilidad encontrado fue del 21%, 18.4% y 28.9%, respectivamente.

En relación con el nivel 3, ítem 2c, el grado de facilidad encontrado fue del (10.5%). Estos estudiantes hacen la relación entre la cantidad de peras y su valor, sin embargo utilizan expresiones que evidencian la necesidad de cierre para operar y representan el resultado con variables que representan, por ejemplo el total a pagar:

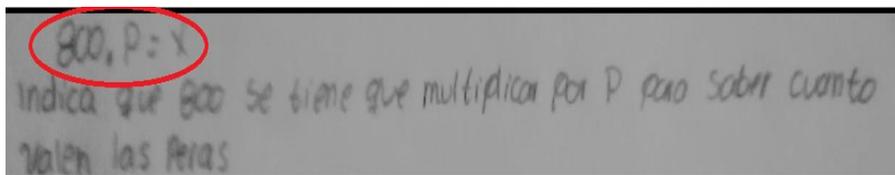


Ilustración 15. Producción de Jennifer en respuesta al ítem 2(c)

En relación con las interpretaciones de la letra, un 70% de los estudiantes la asume como objeto. A manera de ejemplo:

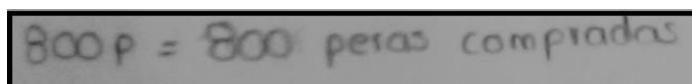


Ilustración 16. Producción de Leidy en respuesta al ítem 2(c)

Para el nivel 4 se propuso el ítem 2d y 3d, con grados de facilidad de 13.1% y 2,6%, respectivamente. Sin embargo se encuentran estudiantes que, aunque utilizan expresiones simbólicas y verbales menos formales o sintácticamente incorrectas, se evidencia el reconocimiento de una relación que podría considerarse correcta. Por ejemplo en el ítem 2d al indagar sobre cómo se representaría el doble de n , si éste es un número entero positivo, se encuentra que los estudiantes usan expresiones como:

- “ nn ” (estudiante Cristófer), en donde se reconoce que serían dos ones, pero al parecer no le reconoce a la letra un carácter operador.
- “ n^2 ” (estudiante Laura), utiliza esta notación no como una expresión de la potencia sino para referirse a que n aparece dos veces

Otro ejemplo de lo anteriormente expuesto se encuentra en el ítem 3d:

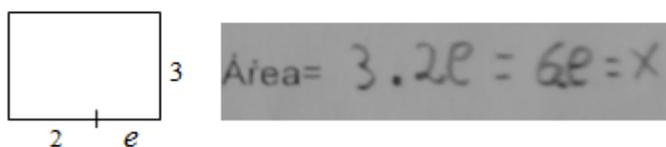


Ilustración 17. Producción de Jennifer en respuesta al ítem 3(d)

En lo que pareciera expresar la multiplicación de la medida del largo por la medida del ancho, entiende a “ $2e$ ” como $2+e$, dicho de otra manera como la medida del ancho del rectángulo. Cabe anotar además, que si bien la expresión sintácticamente no representa el área de forma correcta, la forma en como resuelve el producto “ $6e$ ” si lo es.

A manera de síntesis. En relación con el reconocimiento de patrones de formación (proceso de generalización), se puede afirmar que la mayoría de los estudiantes no logra encontrar un patrón general en una secuencia de figuras, aunque pueden dar cuenta de la cantidad de círculos de figuras para posiciones específicas, asociadas a números “pequeños”; en términos de Küchemann (1978), encuentran el patrón en lo “concreto finito” y, en algunos casos, en lo “concreto generalizado”. Un número reducido de estudiantes (aproximadamente el 30%) hace uso de símbolos para intentar dar cuenta de cierta generalidad, pero ninguno de ellos lo hace de forma adecuada.

Por otra parte, en relación con las interpretaciones que de la letra realizan los estudiantes, se encontró que la mayoría de ellos la reconoce como “objeto”, y si bien dicha interpretación puede resultar adecuada para abordar algunos de los ítems, particularmente lo correspondiente a los dos primeros niveles, no es adecuada para los relacionados con los dos últimos, además de resultar insuficiente para desarrollar el trabajo algebraico requerido. Estos resultados dan cuenta de algunas de las dificultades reportadas desde las investigaciones referenciadas en el marco teórico.

Con base en los resultados de la actividad de indagación y teniendo en cuenta que el conjunto de tareas se rediseñó como una propuesta para iniciar al álgebra, cobró importancia la implementación del conjunto de actividades (que ya habían sido propuestas por autores como Mason et al., 1999 ; Agudelo, 2000 y Rojas et al., 1999) que posibilitaran a este grupo de estudiantes interpretaciones más adecuadas de la letra en contextos matemáticos, así como la de que lograrán avances significativos en los procesos de generalización y simbolización propios del pensamiento algebraico.

3.5 CONJUNTO DE TAREAS

Teniendo en cuenta las dificultades que encontraron los estudiantes para dar cuenta de un patrón de generalización en una secuencia de figuras dada, así como el hecho que la mayoría de ellos manifestó no haber trabajado tareas similares en el aula de matemáticas, se decidió incluir en el conjunto de actividades algunas tareas “sencillas” orientadas a reconocer patrones de formación (Ver) y posibilitar formas de expresar oralmente las relaciones encontradas (Decir), así como también expresarlas en forma escrita, partiendo del lenguaje natural y potenciando el uso de un lenguaje algebraico (Registrar). Por otra parte, a partir de la propuesta de Mason et al. (1999) se reconoce la necesidad de incorporar tareas relacionadas con contextos reales de las cuales se retoman las que plantea Agudelo (2000) que fueron desarrolladas en el contexto nacional.

El conjunto de actividades de la presente investigación, se divide en dos partes: las actividades diseñadas inicialmente a partir de la reflexión sobre los autores presentados en el marco teórico y las actividades emergentes, producto de la reflexión durante el desarrollo de la propuesta. La primera parte se compone de seis tareas, las primeras orientadas al trabajo sobre generalización de patrones y procesos de simbolización, y las últimas orientada al trabajo sobre el carácter operatorio de los símbolos. La segunda parte de actividades surgen durante el

desarrollo de la propuesta, donde fue necesario incorporar tres tareas intermedias que surgieron al detectar en el análisis, ciertas particularidades observadas durante el trabajo de los estudiantes y las intervenciones del profesor que son descritas y analizadas en el desarrollo de la propuesta.

A continuación se presenta el primer grupo de tareas, diseñadas a partir de las reflexiones sobre los referentes teóricos ya presentados. La intencionalidad y desarrollo de las mismas se presenta en el capítulo cuatro junto con las actividades que emergieron.

Tarea 1: Secuencia de cuadrados

CUADROS Y MÁS CUADROS

Tenga en cuenta la siguiente secuencia de figuras

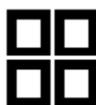


Figura 1

Figura 2

Figura 3

Figura 4

1. Dibuja la siguiente figura.
2. ¿Cuántos cuadros tendrá la figura 9?.
3. ¿Cuál será la figura que tendrá 52 cuadros?.
4. ¿Cuántos cuadros tendrá la figura 100?.
5. Explique el procedimiento que le permitiría hallar el total de cuadros en cualquier número de figura.
6. Escriba una expresión que represente la cantidad de cuadritos para la figura n.

Tarea 2. En el mercado de mi barrio...



EN EL MERCADO DE MI BARRIO

Doña Rosa, la dueña del mercado, ha elaborado unas tablas que le dicen cuánto cobrar por determinados números de frutas vendidas. Por ejemplo para la venta de manzanas tiene:

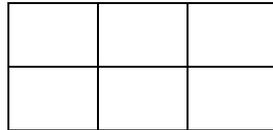
Número de Manzanas	Valor a cobrar (\$)
1	300
2	600
3	900
4	1200
·	
·	
·	
9	
10	
·	
·	
·	
20	

1. Escriba en la anterior tabla los valores a pagar por 9, 10 y 20 manzanas
2. ¿Qué hacemos para calcular el valor a cobrar por un número cualquiera de manzanas? Escriba en el espacio siguiente:
3. ¿Qué números se tendría en la tabla anterior si el precio de una manzana fuera de \$350?

4. ¿Qué cálculo debe hacer doña rosa, para determinar el valor a cobrar a las personas que compren cierto número de manzanas y determinado número de bananos?

Tarea 3: Bordes.

Este es un rectángulo que tiene 2 cuadrados de ancho y tres cuadrados de largo



Quiero poner alrededor del rectángulo un borde que sea de un cuadrado de ancho.
¿Cuántos cuadros necesitaré?

Instrucción:

1. Cambie el tamaño del rectángulo, encuentre una forma de saber cuántos cuadrados hay en el borde de rectángulos de diferentes tamaños
2. ¿Será que se puede encontrar alguna regla? Si yo les doy cualquier rectángulo, por ejemplo 4x6. ¿Pueden decirme cuántos cuadrados se necesitan para el borde sin hacer el dibujo? ¿Cómo paso del tamaño del rectángulo al número de cuadrados que se necesitan para el borde?

Tarea 4: Dobleces

LA TIRA DE PAPEL



INSTRUCCIONES

- Toma la tira de papel y dóblala por la mitad, uniendo los dos extremos de la tira, realizando la marca respectiva. Al desdoblar la tira de papel observarás que ésta queda dividida en dos partes de igual forma y tamaño.

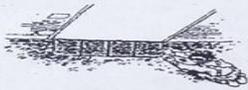
- Ahora realiza dos veces consecutivas la acción anterior, es decir, dóblala por la mitad uniendo los extremos y a continuación dobla otra vez por la mitad. Sin desdoblar la tira de papel, haz una predicción del número de partes en las cuales quedó dividida la tira de papel.
- Desdobla la tira de papel completamente y comprueba si la predicción que realizaste fue acertada.
- ¿En cuántas partes quedará dividida la tira de papel si realizas la acción inicial siete veces consecutivas?
- ¿En cuántas partes quedará dividida la tira de papel si realizas la acción inicial 100 veces consecutivas?
- Explica cómo encontraste la respuesta de la pregunta anterior.
- Encuentre una expresión o fórmula que le permita hallar el número de partes en que se divide la tira de papel después de realizar, de manera consecutiva, n veces la acción inicial
- Realiza el mismo ejercicio doblando 3, 4 y 5 veces la tira de papel y anota lo que vayas observando cada vez que hagas un nuevo doblado.
- Explica cómo podemos predecir el número total de marcas para 7, 8,..., n pliegues.

Tarea 5: A Embaldosar...

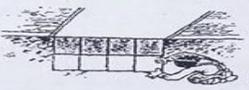
A embaldosar

Pedro es constructor. Embaldosa las entradas de las casas de la urbanización *La Colina*, utilizando baldosas negras y blancas

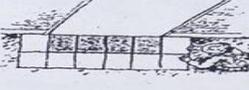




Pedro siempre empieza con una fila de baldosas negras.



Luego pone una fila de baldosas blancas a continuación de las baldosas negras.



Y luego pone 2 baldosas blancas en cada extremo para finalizar el embaldosado de la entrada.

1 ¿Cuántas baldosas blancas usa Pedro si empieza con una fila de 8 baldosas negras? [Diagram: 8 black tiles in a row]

2 ¿Cuántas baldosas blancas usa si empieza con:

a) ¿5 baldosas negras?

b) ¿9 baldosas negras?

Puede escribir sus respuestas a las preguntas 1 y 2 en una tabla como la siguiente:

Número de baldosas negras	Número de baldosas blancas
3	→ ...
4	→
5	→
⋮	
9	→
⋮	

Deje espacio en la tabla para anotar más números.

3

Pedro empieza con 40 baldosas negras.

Luego pone una fila de baldosas blancas a continuación de las negras.

Luego adiciona las baldosas blancas a cada lado. ¿Cuántas baldosas blancas usa Pedro, en total?

Escriba en la tabla
40 → ...

4 Pedro empieza con 100 baldosas negras. ¿Cuántas baldosas blancas necesita? Escriba estos datos en la tabla.

5 ¿Puede encontrar el número de baldosas blancas cuando conoce el número de baldosas negras?
¿Existe alguna regla que usa para encontrar el número de baldosas blancas? Escribala.

Tarea 6: Inventario

El inventario



El administrador de un supermercado tiene que hacer el inventario de mercancías al final de cada semana.

Pregunta 1. Al principio de una semana había 740 latas de Coca Cola en el supermercado. Durante la semana se recibieron 230 nuevas latas de la distribuidora de Coca Cola, y 410 latas fueron vendidas.
¿Cuántas latas de Coca Cola había en el supermercado al final de la semana?

Pregunta 2. Al principio de otra semana, durante una época de calor, había 3800 latas en el supermercado. 1200 nuevas latas fueron recibidas durante la semana, y 2700 fueron vendidas.
¿Cuántas latas de Coca Cola había al final de la semana?

Cada semana el administrador tiene que hacer el mismo tipo de cálculo:

Empieza con el número de latas que hay al principio de la semana.

Le adiciona el número de latas recibidas.

y le sustrae el número de latas vendidas.

740 + 230 - 410

Los números cambian de semana a semana, pero el administrador hace la misma clase de cálculos con esos números cada vez.

¿Qué expresión sencilla escribiría, que permita identificar los cálculos que el administrador realiza al final de cada semana?

Los números cambian de semana a semana. ¿Podemos usar un nombre para representar números que cambian?

Tarea 7: A embaldosar (Segunda parte)

A embaldosar (Segunda parte²⁶)

¿Recuerda la actividad de Pedro el constructor, quien embaldosaba las entradas de las casas?

¿Se acuerda? Podemos calcular el número de baldosas blancas si conocemos el número de baldosas negras.

Número de baldosas blancas = Número de baldosas negras + 4

Vamos a observar la tabla que muestra el número de baldosa negras y el número de baldosas blancas usadas en las entradas.

Número de baldosas negras	Número de baldosas blancas
3	7
4	8
5	9
⋮	⋮
10	14
⋮	⋮
n	$n + 4$

Llamamos: n al número de baldosas negras y b al número de baldosas blancas.

Pedro quiere saber cuántas baldosas se usan, en total, para la entrada de cualquier casa.

Número de baldosas negras	Número de baldosas blancas	Número de baldosas negras más número de baldosas blancas
3	3 + 4	3 + 3 + 4
4	4 + 4	4 + 4 + 4
5	5 + 4	5 + 5 + 4
⋮	⋮	⋮
10	10 + 4	10 + 10 + 4
⋮	⋮	⋮
n	$n + 4$	$n + n + 4$

Veamos que es lo mismo que decir: 2 veces 3, más 4.

Decida si representa adecuadamente la expresión 2 veces 3, más 4.

¿En $2 \times 3 + 4$, para este caso, qué operación hay que hacer primero?

¿Qué tenemos que usar para indicar qué operación se hace primero? Explique*.

Una vez que haya establecido la necesidad de usar paréntesis, termine de llenar la siguiente tabla:

Número de baldosas negras más número de baldosas blancas usadas en una entrada	
$3 + 3 + 4$ $4 + 4 + 4$ \vdots	$\rightarrow (2 \times 3) + 4$ \vdots

Ahora trate de establecer lo que sucede en los siguientes casos:

$$1 + 1 = 2 \times 1$$

$$2 + 2 =$$

$$3 + 3 =$$

$$4 + 4 =$$

\vdots

$$1 + 1 + 1 =$$

$$2 + 2 + 2 =$$

$$3 + 3 + 3 =$$

$$4 +$$

Escriba ejemplos de otros casos, como los anteriores, en donde se pueda establecer una expresión general (para cualquier número).

4. DESARROLLO DE LA PROPUESTA

En este apartado se describen las actividades desarrolladas con los estudiantes, a partir de las tareas propuestas, y se presentan los respectivos análisis. En primer lugar se presenta el propósito de la tarea, con una pequeña descripción de la misma, luego se describe lo acontecido durante su aplicación, con base en lo cual se realiza el análisis del trabajo de los estudiantes y del profesor investigador, para finalmente, tomar las decisiones que permitirán ratificar, modificar o cambiar la siguiente tarea.

4.1. ACTIVIDAD 1: SECUENCIA DE CUADROS.

Esta primera actividad se diseñó teniendo en cuenta lo propuesto por Mason y otros (1999) con respecto al trabajo con secuencias de figuras como una forma de acercar a los estudiantes a la generalización, con diferentes ejemplos, para propiciar el reconocimiento desde la percepción visual. El propósito es posibilitar un trabajo de generalización para hacer énfasis en un proceso que lleve a la expresión escrita desde las etapas iniciales de *Ver* y *Decir*.

En la etapa del “*Ver*” se espera que los estudiantes identifiquen un patrón o una relación entre los cuadros de la secuencia figural o reconozcan una relación numérica entre la cantidad de cuadros en cada figura (en forma oral o escrita), por ejemplo, cuando el estudiante es capaz de representar gráficamente la siguiente figura de la secuencia, aunque no verbalice el patrón o relación que reconoce. Mientras que en el “*decir*” la observación se centra en la posibilidad de articular con palabras lo que se ha reconocido en la etapa del “*Ver*”.

Desarrollo de la actividad. Para el desarrollo de esta actividad se utilizó una sesión completa para hacer el trabajo de manera individual. Primero se propuso como tarea la secuencia de figuras en la hoja y a continuación se hace una serie de preguntas para desarrollarlas de manera individual según el orden dado:

Nombre: _____

Fecha: _____ Curso: _____ Edad _____ años y _____ meses

Tenga en cuenta la siguiente secuencia de figuras



Figura 1



Figura 2



Figura 3



Figura 4

1. Dibuja la siguiente figura
2. ¿Cuántos cuadros tendrá la figura 9?
3. ¿Cuál será la figura que tendrá 52 cuadros?
4. ¿Cuántos cuadros tendrá la figura 100?
5. Explique el procedimiento que le permitiría hallar el total de cuadros en cualquier número de figura
6. Escriba una expresión que represente la cantidad de cuadritos para la figura n

Ilustración 18 Propuesta general de la Tarea 1.

Un aspecto que se considera relevante para la investigación en términos de la descripción porcentual y el análisis de la información, es que la población de estudiantes no presenta una asistencia constante, lo que genera que entre una actividad y otra el número de estudiantes pueda variar de manera significativa.

La información recolectada en relación con los procesos de generalización, desde a las respuestas dadas por los estudiantes al instrumento de indagación, permite afirmar que la totalidad de los estudiantes (40) encontraron un patrón de formación en lo concreto, respondiendo adecuadamente los ítem 1 y 2 (nivel 3 en relación con la comprensión del álgebra), La mayoría de los estudiantes (37 de ellos, 92,5%) encuentra el patrón de formación hasta lo concreto generalizado para una posición dada, contesta adecuadamente los ítem (1), (2) y (4), es decir, se encuentra en el Nivel 4 con respecto a procesos de generalización (PRETEXTO, 1999).

Igualmente se observa que 38 estudiantes (95%) logran establecer el número de la figura para la cual se tendrían 52 cuadros, lo que permite concluir que lograron

hacer un proceso de reversibilidad en una posición no tan pequeña. Dos estudiantes no lo hicieron, uno porque no respondió y el otro que contestó 31, al parecer por una falla en el cálculo al confundir 52 (como total de cuadros) con 62, pero logró establecer que el número total de cuadros corresponde al doble de la posición.³

Para el ítem 5, en la que se pide explicitar la observación de la generalidad se encuentra que las respuestas de los estudiantes varían más pero se pueden agrupar por características similares como las siguientes:

- Reconocen que el aumento en el número de cuadros de una figura a otra es de 2 o especifican que se suma la cantidad de cuadros de las 2 filas, es decir, para cualquier número se suma ésta dos veces, porque es la misma cantidad de cuadros de “arriba” con los de “abajo”. En ninguno de los dos casos se hace alguna relación entre el número de la figura y el total de cuadros (14 estudiantes). Por ejemplo:

Ilustración 19. Producción de Jhonatan y Yeferson en respuesta al ítem 5 de la Tarea 1

Ilustración 20. Producción de Leidy en respuesta al ítem 5 de la Tarea 1

³ Suposición que fue confirmada al realizar una entrevista no estructurada con el estudiante.

- Acuden a ejemplos concretos para calcular el total de cuadros de acuerdo al número de la figura, mediante representaciones gráficas o expresiones numéricas y lo hacen adecuadamente (7 estudiantes, 17,5%):

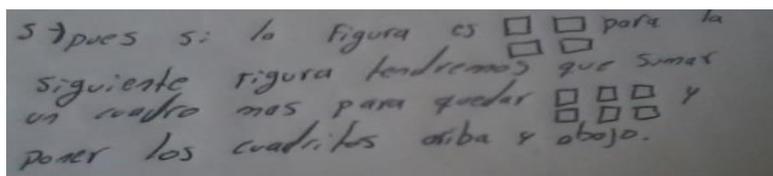


Ilustración 21. . Producción de Esneider en respuesta al ítem 5 de la Tarea 1

- Un grupo de 13 estudiantes (32,5%) encuentran el patrón de formación y lo verbalizan (Nivel 5) y escriben con sus propias palabras cómo hallarían el total de cuadros de cualquier número de figura:

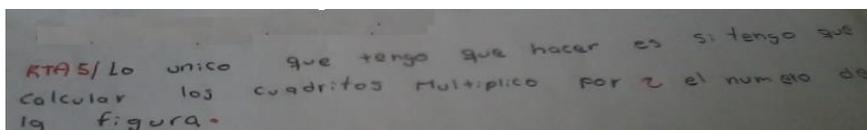


Ilustración 22. . Producción de Cristófer en respuesta al ítem 5 de la Tarea 1

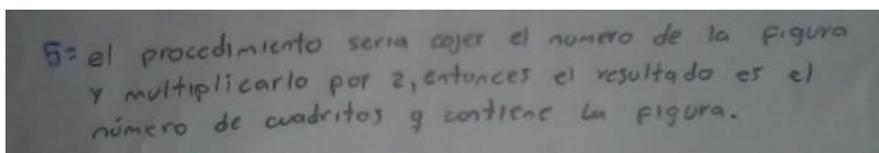


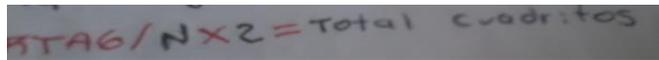
Ilustración 23. . Producción de Karen en respuesta al ítem 5 de la Tarea 1

- No contesta (4 estudiantes, 10%) o su respuesta no pudo ser clasificada (2 estudiantes, 5%).

Finalmente en el ítem 6, que solicita el número de cuadros para cualquier figura n , se encuentra que:

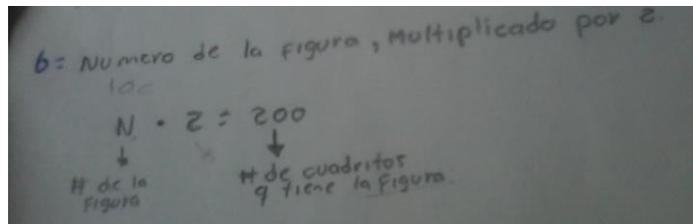
- Sólo 5 estudiantes (12.5%) logran establecer una expresión en lenguaje simbólico formal para determinar el número de cuadros en cualquier figura (Nivel 7). Mientras que otros 4 estudiantes utilizan un lenguaje intermedio, ya que utilizan algunas letras y operaciones con números para lograr

describir cómo se halla el total de cuadros, por lo que están en el Nivel 6, por ejemplo:



$$8TAG/N \times 2 = \text{Total Cuadritos}$$

Ilustración 24. Producción de Cristofer en respuesta al ítem 6 de la Tarea 1



$b = \text{Numero de la figura, Multiplicado por } 2$
 $N = 2 = 200$
 # de la figura # de cuadrillos que tiene la figura

Ilustración 25. Producción de Karen en respuesta al ítem 6 de la Tarea 1

- 4 estudiantes desarrollan ejemplos concretos de forma adecuada, pero no realizan una representación haciendo uso de un lenguaje “intermedio” (parte en lenguaje natural y parte usando otros símbolos) ni un lenguaje algebraico formal y 27 estudiantes (67,5%) no responden.

En las siguiente clase (segunda sesión) se organizaron grupos de tres estudiantes para que desarrollaran la misma tarea, haciendo énfasis (por parte del profesor) en que primero se socialice lo que se hizo individualmente y luego se defina una respuesta por todo el grupo haciendo uso de verificaciones y pruebas de ser necesario en cada grupo. En este trabajo se encontró que 9 de 13 grupos además de hallar un patrón de formación utilizan “lenguaje intermedio” para expresar la forma de encontrar el total de cuadros en determinada figura (Nivel 6). Otros 4 grupos verbalizan el patrón de formación de forma escrita pero no utilizan otros símbolos (Nivel 5). Se observa que en los instrumentos recogidos por cada grupo en la indicación 6, ninguno de ellos utiliza una expresión en lenguaje formal aún en aquellos en donde se encontraban los estudiantes que de forma individual sí lo habían hecho.

En la siguiente sesión se hizo la socialización por parte de un representante de cada grupo, quienes mostraron en el tablero las diferentes respuestas del grupo o a la que llegaron en común acuerdo. Allí se observó que los grupos encontraron diferentes expresiones de los patrones de generalización, situación que provocó la intervención del maestro con preguntas, con el propósito de que los estudiantes analizaran la validez de dichas expresiones.

Con base en lo registrado en el cuaderno de observaciones del profesor se evidenció que el docente intervino buscando que los estudiantes expresen las relaciones encontradas mediante símbolos matemáticos, con el fin de ir orientando el trabajo hacia la obtención de la “fórmula” que representara la generalidad.

Toma de decisiones. En el trabajo individual se evidenció que una minoría de estudiantes (aproximadamente 25%) logra reconocer un patrón de formación y lo puede expresar usando lenguaje natural, intermedio o simbólico (niveles 5, 6 ó 7); mientras que la mayoría lo hace para cualquier caso concreto, a veces acudiendo sólo a lo gráfico (niveles 3 ó 4).

Por otro lado, desde el trabajo en pequeños grupos (3 ó 4 estudiantes), la mayoría de estos se ubicó en los niveles 3 ó 4, a pesar que algunos de sus integrantes habían sido clasificados individualmente en niveles superiores. Consideramos que esto podría deberse a que no estaban acostumbrados a este estilo de trabajo y no defendieron su propuesta ante el grupo, pese a que el profesor insistió para que los grupos expresaran el patrón usando fórmulas o lenguaje formal; vale decir, que este último aspecto es importante ya que el docente-investigador quiso hacer un mayor énfasis en la simbolización perdiendo de vista el objetivo de la actividad, que era hacer énfasis en el Ver y Describir el patrón.

Por tanto, al tener en cuenta estos dos aspectos: por un lado la dificultad de los estudiantes para expresar la generalidad verbalmente en la socialización y por el

otro, el esfuerzo por parte del docente investigador de llevarlos a la expresión formal se decidió no llevar a cabo la tarea número dos y proponer una actividad emergente que hiciera un mayor énfasis en la expresión verbal de la generalidad durante la socialización, para lo que se propuso un patrón de formación similar al anterior, pero en un contexto numérico, que consideramos más familiar para los estudiantes ya que han tenido trabajos previos en el aspecto aritmético.

4.2. ACTIVIDAD 2: SECUENCIA DE NÚMEROS.

En la primera actividad se encontraron descripciones que dejaron ver cómo los estudiantes lograron identificar un patrón entre los cuadros de la secuencia y algunas relaciones numéricas como el “multiplicar por dos” o “el doble de”, pero en la parte de descripción general del patrón con lenguaje intermedio o algebraico no hubo acercamientos, como consecuencia de lo anterior fue necesario proponer una actividad emergente que reforzara la verbalización del patrón de formación, es decir, en palabras de Mason & otros (1999), el “decir” de los estudiantes. Por lo que se diseñó una actividad con secuencias numéricas más familiares para los estudiantes.

El propósito de esta actividad es retomar (etapa del “ver”) la identificación de un patrón o una relación entre los números de una secuencia, para potenciar en el aspecto de la etapa de “decir” con palabras lo que se ha reconocido en la etapa del “ver”.

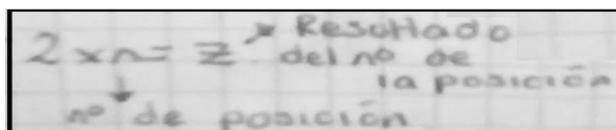
Desarrollo de la Actividad. La siguiente actividad se presenta una tarea, en la que se utilizan números pares y múltiplos de 3, como se presenta en el siguiente cuadro:

Secuencia del 2	Secuencia del 3
<p>Observa la siguiente secuencia: 2, 4, 6, 8, ...</p> <p>Responde las siguientes preguntas:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. ¿cuál es el siguiente número? 2. ¿cuál es el número de la posición 7? 3. ¿cuál es el número de la posición 15? 4. ¿cuál es el número de la posición 100? 5. Escribe una expresión o fórmula para encontrar el número de cualquier posición. 	<p>Observa la siguiente secuencia: 3, 6, 9, 12, ...</p> <p>Responde las siguientes preguntas:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. ¿cuál es el siguiente número? 2. ¿cuál es el número de la posición 7? 3. ¿cuál es el número de la posición 15? 4. ¿cuál es el número de la posición 100? 5. Escribe una expresión o fórmula para encontrar el número de cualquier posición.

Ilustración 26. Propuesta de tarea de la actividad 2

Esta actividad se desarrolló en dos sesiones diferentes continuando con la idea de iniciar el trabajo de forma individual (con 37 estudiantes) y luego de forma grupal. En el trabajo individual (primera sesión) tanto para las secuencia del 2 como para la secuencia del 3 se observa un avance con respecto a la actividad anterior ya que el número de estudiantes que se encuentra en el nivel 4 es del 81% (para las preguntas 1, 2, 3 y 4). Los otros 7 estudiantes logran contestar correctamente para encontrar la posición 15, pero para la posición 100 ya no logran establecer el número correcto o no responden a la pregunta.

Para la pregunta 5 de la secuencia del 2, un 43,2% (16 estudiantes) logran establecer una expresión que permite hallar el número de cualquier posición, mientras que para la secuencia del 3 lo hacen 17 estudiantes (45,9%), por lo que estos dos grupos de estudiantes se encuentran en el Nivel 6. En dichas expresiones de los estudiantes aunque se usa una expresión en lenguaje intermedio se acude a establecer una igualdad para aceptar el cierre de la operación, como se muestra a continuación:



Handwritten mathematical expression: $2 \times n = z$. Annotations include: "Resultado" pointing to z , "del no de la posición" pointing to n , and "no de posición" pointing to n .

Ilustración 27. Producción de Leidy en respuesta al ítem 5 de la Tarea 2

El anterior ejemplo muestra una de las dificultades reportadas por Kieran & Filloy (1989) y Rojas et al. (1999) ya que se interpreta el signo igual como una orden de operar y no se acepta que el proceso y el resultado puedan ser lo mismo, por lo que cierran la operación para darle sentido a su interpretación. De manera paralela se encuentra en esos mismos registros, que los estudiantes hacen interpretaciones de la letra como una forma de representar cualquier número y que aunque esto es considerado por Rojas et al. (1999): “*como una de las mayores posibilidades de contextualizar conceptualmente el uso de la letra*” (p. 24) (y que además proviene del sistema aritmético de referencia), ya aparece en la aplicación de esta segunda actividad. Por ejemplo, la estudiante Camila al escribir: “ *$X \times Y = Z$ que quiere decir que X es cualquier número multiplicado por otro número Y, da el resultado de la expresión*” atribuye a la letra X el ser cualquier número.

También se encontró que 20 estudiantes para la actividad de los números pares y 21 estudiantes para la actividad de los números impares, no desarrollan el punto 5 o acuden a ejemplos concretos creando secuencias con otros patrones como:

- “5, 10, 15, 20” (Estudiante Brayan).
- “ $3+3=6+3=9+3=12+3=15\dots$ porque va aumentando de 3 en 3” (Estudiante Jhonatan)
- “ $20 \times 2 = 40$ porque el número de la posición se multiplica por 2” (Estudiante Gabriela).

Como la actividad se resolvió en un tiempo menor al que se tenía pensado, en esta misma sesión se dio inicio al trabajo en los grupos y se continúa este mismo trabajo para la sesión 2, en la que el profesor resalta en su cuaderno de observaciones que en los pequeños grupos hubo mayor discusión y participación por parte de los integrantes además de que se observó más organización y preparación para llevar sus acuerdos a la socialización.

En la socialización, el profesor organiza la intervención de los estudiantes de tal forma que al exponer uno de los representantes de un grupo preguntaba quienes tenían la misma solución o procedimiento y en caso contrario el representante del grupo daba a conocer el acuerdo diferente. Esto con el fin de mejorar los tiempos

en las intervenciones al evitar repeticiones de las mismas respuestas o acuerdos, como había sucedido en la primera actividad. En las primeras 4 preguntas para las dos actividades se observa que 12 de los 13 grupos lograron expresar el patrón de formación hasta la posición 100 de manera sencilla y el docente resalta en el cuaderno de observaciones que se utilizan frecuentemente expresiones verbales como: “doble del número de la posición”, “número de la posición multiplicado por tres”, “secuencia de números pares”, “la tabla del tres”, entre otras, que muestran cómo se expresa con palabras (lo visto en las secuencias de los números) con relaciones y operaciones más generales.

Para el grupo que no utilizó las expresiones anteriormente mencionadas, sino que acudió a la recursividad explicando que cada término se hallaba “sumando al anterior término 2” o “sumando al anterior término 3”, el profesor intervino preguntando cómo funcionaría esa idea si por ejemplo se quería hallar el número de la posición 1000 ya que no se conoce de forma inmediata el número de la posición anterior, a lo que el estudiante representante del grupo expone que “era muy largo sumar de dos en dos o de tres en tres hasta llegar a la posición 1000” y por ello preferiría hacer como los demás grupos “multiplicando por dos o por tres el número de la posición”. Esta situación deja ver cómo el aporte que hacen los representantes de los grupos (y no solo la del profesor) modifica o aporta a las construcciones de los otros.

Al abordar el ítem 5, en donde se pide utilizar una expresión o fórmula, los mismos 12 grupos (que lograron expresar el patrón de formación hasta la posición 100) utilizaron expresiones como:

- $2xn = Z$
- $n + n = R$
- $2 * n = \text{número de cualquier posición}$
- $nx3 = R$

$$- 3xn = Z$$

Por lo que el docente indicó que “probaran” su expresión con diferentes números de posición, siendo insistente en que explicaran qué significaba cada letra utilizada, pero siempre los grupos aludieron a que la letra utilizada después del igual era el resultado de la multiplicación y que “daba el número que iría en la posición que se buscaba”. Lo que muestra que todos utilizan el “igual” como una necesidad de cerrar las operaciones que proponen, como ya había sucedido en el trabajo que realizaron los estudiantes individualmente.

Toma de decisiones. De esta actividad se lograron avances significativos en los siguientes aspectos:

- En el trabajo realizado individualmente, cerca de un 80% de los estudiantes (en la actividad anterior fue del 25%) dan cuenta de las relaciones entre el número de la posición y el número que corresponde (para posiciones grandes) usando lenguaje natural (oral y escrito), cerca del 50% usó expresiones en un “lenguaje intermedio” para establecer dicha relación en general; mientras que en los pequeños grupos, alrededor del 92% logró expresar dicha generalidad, es decir, se evidencia un avance en la etapa de “registrar”. Al parecer, el incluir actividades con secuencias numéricas permitió que los estudiantes potenciaran y afianzaran procesos en la etapa de “decir” y “registrar”.
- En el trabajo con pequeños grupos se observó que hubo mayor dinámica en términos de la organización y trabajo de los estudiantes para la socialización, en donde además el profesor logró optimizar el tiempo de las intervenciones para que se presentara mayor interacción entre los acuerdos a los que llegaron.

Dado que se cumplió con el propósito inicial de la actividad y se lograron avances significativos en la expresión de la generalidad “**registrar**” se decidió continuar con la actividad planeada, en la que se hace uso de un contexto de la vida real. Sin embargo, como aproximadamente un 20% de los estudiantes no lograron establecer el patrón para una posición grande o no lo hicieron de forma correcta en el trabajo individual, se centrará la mirada en el trabajo de ellos en la siguiente actividad.

4.3. ACTIVIDAD 3: ACTIVIDAD DEL MERCADO 1.

La actividad original “En el mercado de mi Barrio” fue propuesta por Agudelo (2000) quien retoma lo propuesto por Mason & otros (1999) a la hora de trabajar la expresión de la generalidad en situaciones de la vida cotidiana. Sobre la cual se modificaron algunos valores para que se acoplaran al contexto actual.

El propósito de esta actividad es continuar en el proceso de Registrar guiando a los estudiantes hacia el uso del lenguaje escrito (natural, icónico, simbólico o formal algebraico). A través de la búsqueda de generalidades en situaciones de la vida cotidiana para lograr que los estudiantes expresen las relaciones que encuentren y, además, reforzar los procesos de Ver y Decir (ya que como se mencionó en la actividad anterior, existen 7 estudiantes que no lograron encontrar el patrón de formación para posiciones grandes). Es preciso continuar dedicando tiempo al Ver y al Decir de manera que el Registrar se produzca de una forma más natural.

Desarrollo de la Actividad. En la primera sesión se les presenta a los estudiantes una hoja con las tareas que debían realizar:

EN EL MERCADO DE MI BARRIO



Doña Rosa, la dueña del mercado, ha elaborado unas tablas que le dicen cuánto cobrar por determinados números de frutas vendidas. Por ejemplo para la venta de manzanas tiene:

Número de Manzanas	Valor a cobrar (\$)
1	300
2	600
3	900
4	1200
.	
.	
9	
10	
.	
.	
.	
20	

1. Escriba en la anterior tabla los valores a pagar por 9, 10 y 20 manzanas.
2. ¿Qué hacemos para calcular el valor a cobrar por un número cualquiera de manzanas? Escriba en el espacio siguiente: _____
3. ¿Qué números se tendría en la tabla anterior si el precio de una manzana fuera de \$350?
4. ¿Qué cálculo debe hacer doña rosa, para determinar el valor a cobrar a las personas que compren cierto número de manzanas y determinado número de bananos?

Ilustración 28. Propuesta de tarea de la Actividad 3

De acuerdo a los resultados observados, el total de estudiantes que asistieron a esta sesión (36 estudiantes) logran completar de manera correcta la tabla hasta la cantidad de 20 manzanas tanto para el valor de \$300 como para el valor de \$350 (aunque en este valor se observaron errores al realizar las operaciones más no en comprensión del proceso a realizar), es decir que, encuentran el patrón de formación para una posición dada en un número grande, (Nivel 4).

Por otro lado, 14 estudiantes (38,89%) logran encontrar el patrón de formación general y lo verbalizan (Nivel 5), es decir, escriben el procedimiento a seguir para calcular el valor a cobrar por un número cualquiera de manzanas siendo frecuente el uso de expresiones como: “Se toma el valor del producto y se multiplica por la cantidad que se va a comprar”.

2. ¿Qué hacemos para calcular el valor a cobrar por un número cualquiera de manzanas? Escriba en el espacio siguiente:

se debe multiplicar el precio de manzanas por el número de manzanas que vamos a comprar,

Ilustración 29. Producción de Laura en respuesta al ítem 2 de la Tarea 3

En el desarrollo esta tarea emergieron estrategias para realizar cálculos aritméticos como multiplicar por 3 (en lugar de multiplicar por 300), y luego agregar los dos ceros para saber el valor a cobrar por un número cualquiera de manzanas, de la siguiente manera: “*tocaría multiplicar 3 por el número de manzanas y al resultado se le agregan dos ceros así: $3 \cdot 8 = 24 = 2400$* ”

2. ¿Qué hacemos para calcular el valor a cobrar por un número cualquiera de manzanas? Escriba en el espacio siguiente:

Tocaría multiplicar 3 por el número de manzanas y al resultado se le agregan dos ceros. Así:

$$3 \cdot 8 = 24 = 2400$$

Ilustración 30. Producción de Miguel Angel en respuesta al ítem 2 de la Tarea 3

También se observó que 12 estudiantes (que equivalen al 33%) logran encontrar el patrón de formación general y lo simbolizan en lenguaje algebraico formal (Nivel 7), pese a que en la tarea no se solicitaba de manera específica registrar la generalidad por medio de una expresión algebraica o fórmula, lo que muestra cómo relacionan los estudiantes el trabajo realizado en las anteriores actividades al solicitar un procedimiento general para calcular el total a cobrar por un número cualquiera de manzanas.

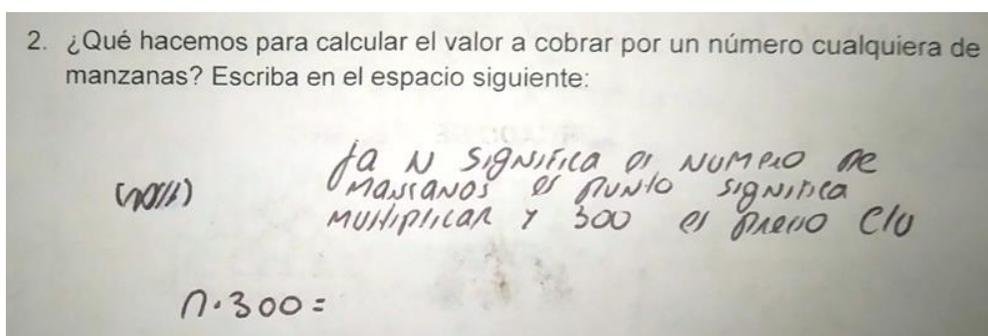


Ilustración 31. Producción de Nelson en respuesta al ítem 2 de la Tarea 3

En el momento de abordar la pregunta sobre el cálculo que debe hacer doña Rosa para determinar el valor a cobrar a las personas que compren cierto número de manzanas y determinado número de bananos, se observó que 31 estudiantes (86,12%) logran responder la pregunta, utilizando lenguaje verbal escrito con afirmaciones como: “*Tiene que multiplicar el número de manzanas por el precio de una manzana después tiene que multiplicar el número de bananos por el precio de un banano, y luego suma los resultados*”; es decir, que estos estudiantes que logran encontrar el patrón de formación y lo verbalizan están en el Nivel 5. De este mismo grupo de estudiantes, 10 de ellos escriben expresiones en lenguaje intermedio y formal para responder la pregunta, logrando clasificarse en el Nivel 6 y 7, como se observa a continuación:

4. ¿Qué cálculo debe hacer doña rosa, para determinar el valor a cobrar a las personas que compren cierto número de manzanas y determinado número de bananos?

The image shows a handwritten equation: $300 \cdot N + 100 \cdot N$. Above the first 'N' is the label '# de Manzanas' with an upward arrow. Above the second 'N' is the label '# de Bananos' with an upward arrow. Below the '300' is the label 'PRECIO MANZANA c/u' with a downward arrow. Below the '100' is the label 'PRECIO BANANOS c/u' with a downward arrow.

Ilustración 32. Producción de Ana Sofía en respuesta al ítem 4 de la Tarea 3

Lo cual deja ver el avance logrado por los estudiantes en relación con la actividad de indagación⁴ ya que, en ella la mayoría de los estudiantes interpretaban la letra como objeto, mientras que en las expresiones anteriores la interpretación requerida es por lo menos la de incógnita. Además, cabe resaltar la segunda expresión ya que pareciera ser lenguaje algebraico formal al tener expresiones sintácticamente correctas.

Sin embargo hubo la necesidad de intervenir por parte del profesor al hacer énfasis en que si se utilizaba la misma letra, significaba que era el mismo número de manzanas y de bananos, entonces tenían que buscar una estrategia para corregir dicha situación. De esta manera se consideró que los estudiantes podrían avanzar, no solamente en el proceso de generalización, sino que además adquirieran herramientas en el proceso de simbolización.

The image shows handwritten work on a whiteboard. On the left, it says 'n = 300' with 'precio' above the 300 and 'Resultado de multiplicacion' below the n. Below 'n' is 'numero de manzanas'. In the middle, it says 'Z = 100' with 'precio' above the 100 and 'Resultado de multiplicacion' below the Z. Below 'Z' is 'numero de Bananos'. On the right, there is a vertical addition: 'A - Resultado - Bananos' plus 'C - Resultado - manzanas' equals 'B - Precio a cobrar a las Personas'.

Ilustración 33. Producción de Laura en respuesta al ítem 4 de la Tarea 3

⁴ En esta actividad se propuso como ítem 2c: Si una pera cuesta \$800 y p representa el número de peras compradas, ¿qué representa la expresión $800p$?, en donde se obtuvo que un 70% de los estudiantes interpreta la letra como objeto y solo el 10% contestó correctamente este ítem.

Para la sesión que se desarrolla en forma grupal, el profesor indica que los estudiantes deben elaborar una cartelera con los acuerdos a los que llegan para presentarlos en la correspondiente socialización. En esta parte de la actividad se pudo observar que 10 de los 13 grupos formados encuentran el patrón de formación y lo simbolizan con lenguaje algebraico formal, es decir, el máximo nivel presentado, como se observa a continuación:

The image shows two pieces of student work. The top piece is a handwritten note with the following content:

Respuesta:
 $300 \cdot n =$
 el número de veces que cuesta las manzanas \times cualquier número de manzanas

Este sería la Fórmula por la que cuesta las manzanas con cualquier número

The bottom piece shows a table and a formula:

MANZANAS	VALOR A CORDAR
1	300
2	600
3	900
4	1200
...	...
9	2.700
10	3.000
...	...
20	6.000

Next to the table, there is a list of values and a formula:

1 $9 = 2.700$ $300 \cdot 9 = 2.700$
 $10 = 3.000$ $300 \cdot 10 = 3.000$
 $20 = 6.000$ $300 \cdot 20 = 6.000$

2. $300 \cdot N$

Cada persona tiene un valor de 300 por cada manzana que se compra. Por lo tanto, el costo por n manzanas es $300 \cdot n$.

Ilustración 34. Producción de los grupos en la Tarea 3

Los tres grupos restantes, aunque no simbolizan con lenguaje algebraico formal, encuentran el patrón de formación general y lo describen de forma oral y escrita, por lo que se considera que estos grupos se encuentran en el Nivel 5:

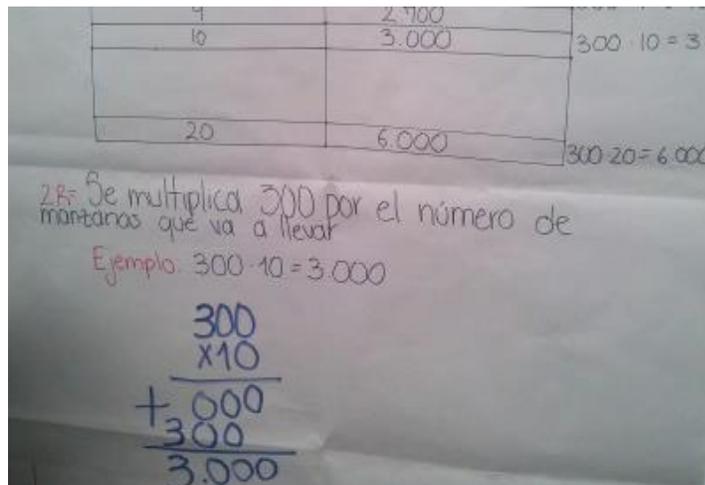


Ilustración 35. Producción de los grupos en la Tarea 3

Toma de decisiones. Después de realizar esta actividad se observó que la mayoría de estudiantes avanzaron en el proceso de verbalización (escrita y oral) al describir el patrón de formación, pues a nivel individual un 38,89% de los estudiantes se pudo clasificar en el nivel 5, pero a nivel grupal ya fue del 100% lo que consideramos como un indicio que la discusión grupal permitió avanzar a los que no habían logrado hacer la descripción, o por lo menos concordar con los que sí lo hacían, sin embargo se siguió observando el trabajo y lo que pasa en los grupos.

Es importante rescatar que el uso de situaciones cotidianas permitió que los estudiantes trabajaran de forma más dinámica y se lograrán avances significativos en los niveles alcanzados a la hora de verbalizar y simbolizar sobre patrones de generalización. Por otro lado, al observar que algunos estudiantes utilizaron expresiones simbólicas formales para expresar el precio total de un producto (como el de las manzanas) e incluso el precio total de dos productos (como es el caso de los bananos y las manzanas) y que en estas expresiones se utilizaban la misma letra para referirse el número de bananos y al número de manzanas, se considera proponer una actividad diferente a la planteada en la secuencia inicial,

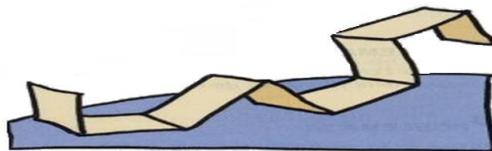
en la que se exploren procesos de simbolización con la utilización de material manipulativo.

4.4. ACTIVIDAD 4: DOBLECES.

Esta actividad tiene como propósito continuar en el desarrollo de habilidades relacionadas con avanzar en el proceso de Ver, Decir y Registrar por medio de situaciones de generalización, en este caso utilizando un recurso tangible manipulativo (tira de papel) y realizando un proceso de plegado, con el fin de que los estudiantes logran establecer relaciones entre la cantidad de dobleces y los espacios generados por estos dobleces haciendo énfasis en los procesos de simbolización de los estudiantes.

Desarrollo de la actividad. Para esta actividad se sigue con la misma metodología de trabajo de clase: primero el trabajo individual, en el cual se le dio a cada estudiante una tira de papel blanco y una hoja con las siguientes instrucciones:

INSTRUCCIONES



- ❖ Toma la tira de papel y dóblala por la mitad, uniéndolo los dos extremos de la tira realizando la marca respectiva. Al desdoblar la tira de papel observarás que ésta queda dividida en dos partes de igual forma y tamaño.
- ❖ Ahora realiza dos veces consecutivas la acción anterior, es decir, dóblala por la mitad uniéndolo los extremos y a continuación dobla otra vez por la mitad. Sin desdoblar la tira de papel, haz una predicción del número de partes en las cuales quedó dividida la tira de papel.
- ❖ Desdobla la tira de papel completamente y comprueba si la predicción que realizaste fue acertada.
- ❖ Realiza el mismo ejercicio doblando 3, 4 y 5 veces la tira de papel y anota lo que vayas observando cada vez que hagas un nuevo doblez.
- ❖ ¿En cuántas partes quedará dividida la tira de papel si realizas la acción inicial siete veces consecutivas?
- ❖ Explica cómo podemos predecir el número total de espacios para 7, 8, ..., n pliegues.
- ❖ ¿En cuántas partes quedará dividida la tira de papel si realizas la acción inicial 100 veces consecutivas?

- ❖ Explica cómo encontraste la respuesta de la pregunta anterior
- ❖ Encuentra una expresión o fórmula que te permita hallar el número de partes en que se divide la tira de papel después de realizar, de manera consecutiva, n veces la acción inicial

Ilustración 36. Propuesta de Tarea para la actividad 4

Al desarrollar la primera parte de la actividad se observó que el 100% de los estudiantes tanto de forma individual como en el grupal (38 estudiantes y 12 grupos respectivamente) realizaron la parte concreta hasta el doblez número 5 pero al anotar los respectivos resultados lograron reconocer que el número de espacios siguiente es el doble del número de espacios anterior y así lograron dar cuenta del número de espacios que quedarían hasta hacer el doblez número 10, lo que indica que los estudiantes se clasificaron en el Nivel 3 al reconocer al patrón de formación, como se puede ver a continuación:

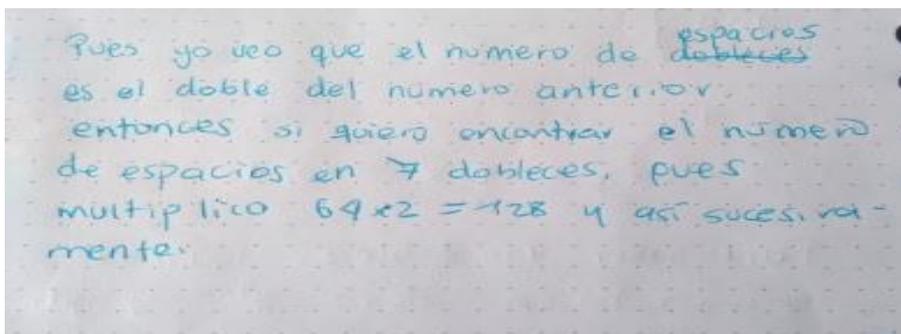


Ilustración 37. Producción de Jennifer en respuesta al ítem 8 de la Tarea 4

Para la pregunta sobre el número de partes en que quedará dividida la tira de papel al realizar la acción inicial 100 veces consecutivas, varios estudiantes manifestaron que era necesario saber el número de espacios anterior (del doblez número 99) y para esta también el anterior (el 98) y así sucesivamente hacia atrás. Por lo que el profesor intervino preguntando si habría una forma alternativa de hacerlo en la cual no tuvieran que utilizar la cantidad de espacios del doblez

anterior y les pidió que lo intentaran o analizaran bien los resultados que ya tenían registrados, pero al observar que no habían avances de forma individual se organizó e inició el trabajo grupal para que logaran plantear un método o estrategia para esta pregunta y las posteriores.

Como un aporte del profesor se les pidió organizar en una tabla la cantidad de dobleces que se hacían en el papel con la cantidad de espacios que quedaban para ver si los estudiantes lograban hacer alguna relación directa entre la cantidad de dobleces y el número total de espacios, pero los resultados obtenidos fueron que ningún grupo encontró la cantidad de espacios para 100 dobleces pese a que hicieron por recursividad hasta algunas posiciones; se observó que 6 de los 12 grupos (50%), en los que hubo interacción entre ellos, presentaron que la respuesta era 10.240 espacios ya que: *“al saber que con 10 dobleces los espacios son 1024 entonces al hacer 100 dobleces la cantidad de espacios es diez veces más grande también, y se multiplicaría 1024 por 10”*. Otro ejemplo de este mismo planteamiento es el siguiente:

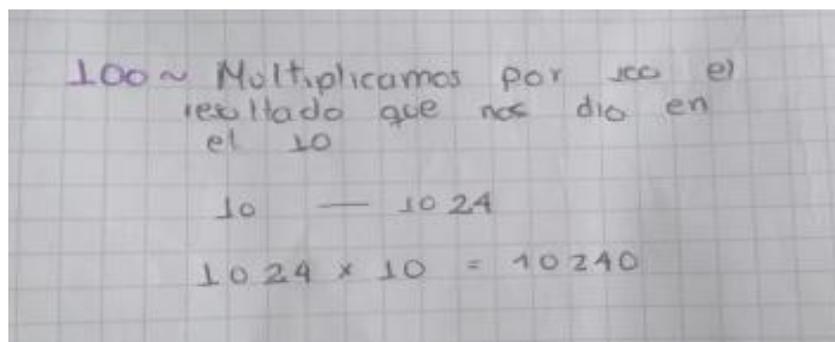


Ilustración 38. Producción de Karem en respuesta al ítem 8 de la Tarea 4

Como el profesor quiso que los estudiantes comprobaran que la estrategia planteada por esos 6 grupos era incorrecta y que la relación entre la cantidad de dobleces y los espacios no se comportaba como ellos lo planteaban, les solicito que retomaran la tabla de organización en donde estaba la cantidad de dobleces y

la cantidad de espacios, y planteó lo siguiente: “*si el número de espacios para 2 dobleces es 4, entonces para 4 dobleces ¿habría 8 espacios, ya que este el doble de 4?*”, a lo que los estudiantes comprobaron que no serían ocho espacios sino 16, incluso volviendo a hacer el ejercicio con la tira de papel. Nuevamente el profesor planteó la misma situación indagando si al hacer 6 dobleces como el triple de 2 dobleces se tendría el triple de espacios, pero los estudiantes verificaron que en 2 dobleces había 4 espacios y en 6 dobleces habría 64 espacios y no 12 como se planteaban ellos inicialmente.

Al socializar el ítem en donde se pide a los estudiantes proponer una expresión o fórmula que permita saber el número de espacios que resultan después de doblar n veces la tira de papel, ningún grupo propuso una expresión que representara correctamente la situación, y algunos grupos propusieron la expresión: “ $n+n=n$ número de espacios”, pero al socializarla los estudiantes explicaron que se hacía referencia a que se sumaba el número anterior consigo mismo para encontrar el siguiente, es decir “ n ” no representaba el número del doblar correspondiente sino el número del doblar anterior. El profesor reporta en su cuaderno de apuntes que “*fue complicado para los estudiantes establecer la relación exponencial entre la cantidad de dobleces y los espacios generados por estos*”, pues no establecieron que el número n de dobleces era el exponente de la potencia de 2, y fue hasta después de un tiempo prudencial que los estudiantes avanzaron hacia que el número de dobleces eran las veces que se debía multiplicar el dos para que resultara el número de espacios, pero se reconoce que esto se dio más por la imposición del profesor que por el desarrollo de ellos mismos.

	Dobles	Espacios	
1	2	2 ¹	
2	4	2 ²	
3	8	2 ³	
4	16	2 ⁴	
5	32	2 ⁵	
6	64	2 ⁶	
7	128	2 ⁷	
8	256	2 ⁸	
9	512	2 ⁹	
10	1024	2 ¹⁰	
100		2 ¹⁰⁰	

Ilustración 39. Producción de Jenniffer teniendo en cuenta la intervención del profesor

El profesor reconoce que aunque se impuso la escritura en forma de potenciación (como se observa en la foto anterior), la mayoría de estudiantes manifestaron que la desconocían o que ya la habían olvidado.

Toma de decisiones. De acuerdo a lo realizado en ésta actividad, se pudo observar que los estudiantes siguen encontrando y verbalizando el patrón de formación, esta vez de forma recursiva, a pesar que en este caso particular solo hayan alcanzado el Nivel 3. Se reconoce que en la actividad propuesta, los estudiantes presentaron dificultades para hacer simbolizaciones con relaciones de tipo exponencial como se requería en esta actividad y ello impidió avanzar como se había propuesto inicialmente; sin embargo, se propuso y fue importante el trabajo con los procesos de verificación y comprobación como alternativas para validar o no un proceso o una hipótesis.

Además, pese a que se tenía la idea desde la actividad anterior de que los grupos mejoraban los resultados o se lograban mejores niveles de comprensión por parte de los estudiantes, en esta actividad no sucedió ya que no existieron estudiantes que habían logrado mejores niveles de forma individual.

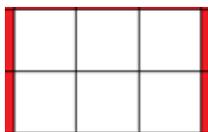
Finalmente, se decide continuar con la secuencia planteada, no sin antes llevar al aula tareas en las cuales se retome la temática de la potenciación, dado que para los estudiantes fue poco familiar la notación simbólica utilizada para representarla. Estas tareas no serán objeto de análisis en la presente investigación ya que se consideró como un trabajo paralelo que no se tenía planeado inicialmente

4.5. ACTIVIDAD 5: BORDES.

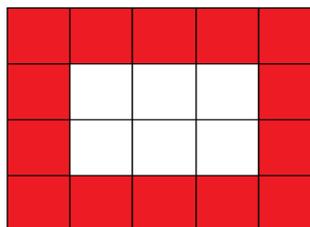
Dado que la actividad anterior (tira de papel) se propuso como una actividad alternativa al planteamiento inicial del conjunto de actividades y en ésta no se lograron los avances esperados en términos de la simbolización de la generalidad, se decidió continuar con la presente actividad ya que desde lo propuesto de Mason & otros (1999), ésta podría facilitar al estudiante: la expresión de la generalidad en lenguaje formal, intermedio o natural y reconocer que hay muchas formas válidas de expresar un patrón, es decir, que pueden aparecer diferentes expresiones que representan correctamente dicha generalidad y de esta manera surja la necesidad de someterlas a comprobación para verificar su veracidad (como ya hubo un trabajo inicial en la actividad anterior “tira de papel”)

Desarrollo de la actividad. Se indica a los estudiantes que en una hoja, y de manera individual, dibujar un rectángulo de 2 “cuadros” de largo y 3 “cuadros” de ancho, y a partir de éste rodear el rectángulo con cuadros del mismo tamaño pero con un color diferente, y se plantea la siguiente pregunta ¿Cuántos cuadros se necesitan para rodear el rectángulo?

Al plantear la situación los estudiantes manifestaron dudas sobre cuál era el ancho y el largo y sobre cómo se rodeaba, así que el docente utiliza el siguiente ejemplo:



Rectángulo inicial



Rectángulo final

Luego se pidió que dibujaran tres rectángulos de diferente medida para contestar la misma pregunta y se les sugirió utilizar la siguiente tabla para organizar los resultados que obtuvieran:

Número de cuadros del largo	Número de cuadros del ancho	Número de cuadros alrededor
2	3	14
.	.	.
.	.	.

Ilustración 40. Tabla de Resultados para la Tarea 5

Todos los estudiantes dibujan los tres rectángulos diferentes y organizan sus resultados en la tabla como se muestra en la imagen:

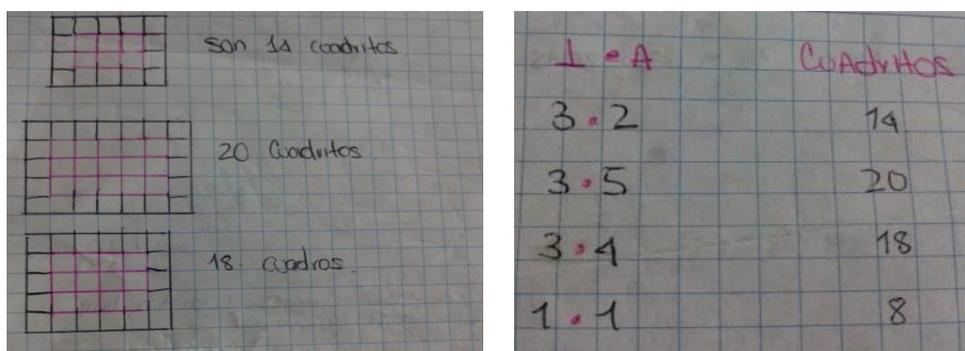


Ilustración 41. Producción de Ana en la Tarea 5

A finalizar la actividad el profesor pregunta si es posible encontrar la cantidad de cuadros alrededor de un rectángulo sin necesidad de hacer el dibujo, pero al observar que los estudiantes no hacían relaciones todavía se consideró que los estudiantes completaran la tabla con rectángulos formados con cantidades de cuadros que ellos quisieran. Dado que la primera sesión terminó y no se avanzó sobre la verbalización de la generalidad, entonces el profesor propuso como tarea (recomendando que en lo posible no se realizar el dibujo y tener en cuenta los datos de la tabla):

1. Hallar la cantidad de cuadros necesarios para rodear un rectángulo formado por 23 cuadros de largo y 30 de ancho
2. Hallar la cantidad de cuadros necesarios para rodear un rectángulo de 150 cuadros de largo y 15 de ancho
3. Completar la tabla realizada en clase con los rectángulos propuestos en el punto 1 y 2.
4. Escribir el proceso para encontrar el número de cuadros alrededor de cualquier rectángulo.
5. Escribir una expresión o fórmula que permita hallar el total de cuadros que se necesitan alrededor del rectángulo. Con cualquier ancho y cualquier largo.

En esta tarea 29 estudiantes de 36 que estuvieron presentes para esta sesión (80,56%) encuentran la cantidad correcta de cuadros para los dos rectángulos de los cuales 22 de ellos utilizan lenguaje natural para explicar cómo encontrar el número de cuadros y por ello se clasificarían en el Nivel 5, como lo hizo el siguiente estudiante quien pertenecía al grupo de estudiantes que no había logrado describir el patrón de formación en cantidades grandes:

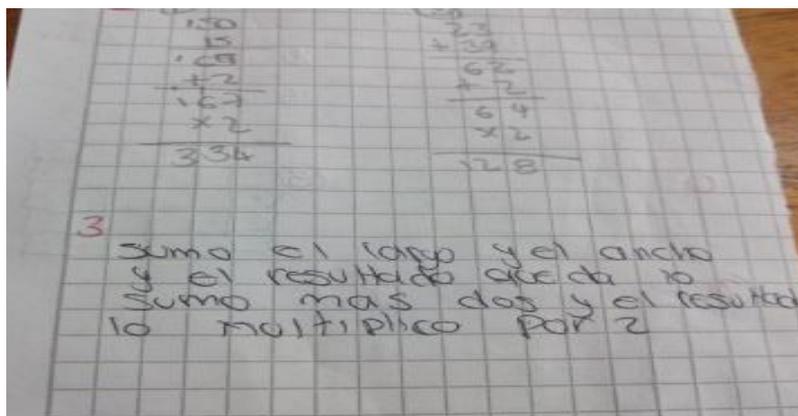


Ilustración 42. Producción de Daniel en respuesta al ítem 4 de la Tarea 5

Los otros siete estudiantes (7) explican el proceso general para cualquier número de cuadros en el ancho y en el largo utilizando lenguaje natural y expresiones simbólicas formales, logrando clasificarse en el Nivel 7, por ejemplo:

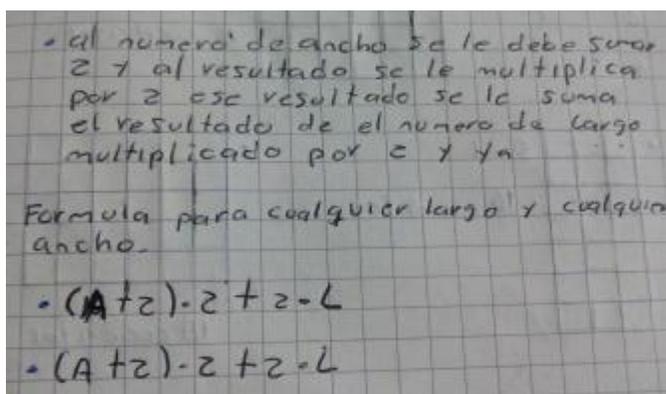
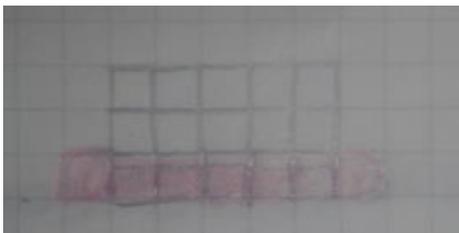


Ilustración 43. Producción de Valentina en respuesta al ítems 4 y 5 de la Tarea 5

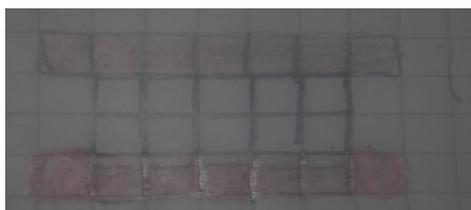
Cabe resaltar que de los 7 estudiantes que no se clasificaron en el grupo anteriormente descrito; 3 de ellos realizaron cálculos erróneos y planteamientos en los que no tenían en cuenta alguna dimensión del rectángulo u omitían los cuadros de las esquinas y los otros 4 estudiantes no presentaron su tarea.

Para la siguiente sesión se realizó el trabajo en los mismos pequeños grupos de 3 o 4 estudiantes para un total de 13 grupos. Al igual que en el trabajo individual primero se trabajaron dos ejemplos dibujando; teniendo en cuenta que para los rectángulos propuestos por ellos mismos todos los grupos completaron la tabla sin hacer dibujos sino utilizando la generalidad que habían encontrado de forma individual. Cuando los estudiantes se encontraban trabajando en cada grupo para preparar la socialización, el profesor resaltó en su cuaderno de observaciones que observó cómo en algunos grupos uno de los integrantes explicaba a otro cómo hallar la cantidad total de cuadros que se necesitaban alrededor diciendo por ejemplo lo siguiente y del cual se toma un registro fotográfico:

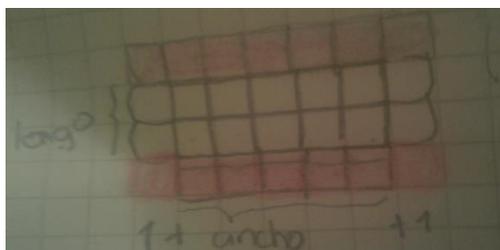
El estudiante Nelson le dice a su compañera Erly: “¿si ve que la cantidad de cuadros alrededor del ancho son los mismos pero se le añaden 2 más por ser cuadros de las esquinas?”



...entonces esa cantidad es la misma que se necesitan arriba por eso luego de sumarle dos se multiplica por dos..

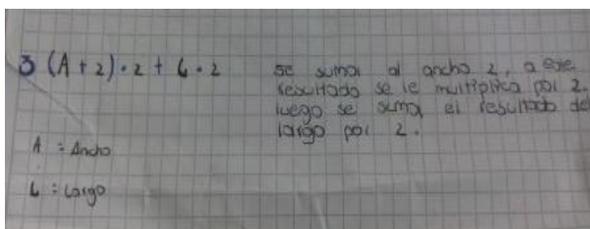


Y como la cantidad de cuadros que cubren el largo es el mismo pero se necesitan los del derecho y el izquierdo entonces el largo se multiplica por dos, y así se suman las dos cantidades.



Durante la socialización los estudiantes evidenciaron las distintas maneras de expresar la generalidad al plantear el borde del rectángulo inicial y comprobaron la validez de las mismas, con los datos que tenían en las tablas y algunos de los dibujos que habían hecho. Sin embargo cuando socializaron las expresiones o fórmulas que daban cuenta de cualquier ancho y cualquier largo, el profesor hizo

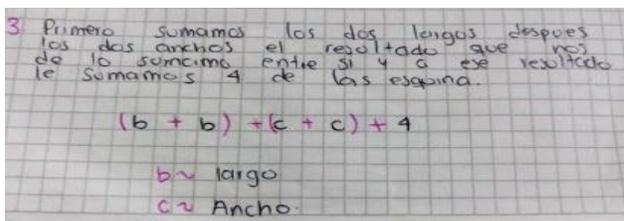
énfasis en la utilización de signos de agrupación para distinguir (de acuerdo al proceso de solución empleado por los estudiantes) el orden de las operaciones realizadas y su resultado. Al igual que para escribir lo que representaba cada símbolo en las expresiones. A continuación se presentan algunos de los resultados mostrados en los grupos:



$$(A+2)*2 + L *2$$

Se suma al ancho 2, a ese resultado se le multiplica por 2. Luego se suma el resultado del largo por 2

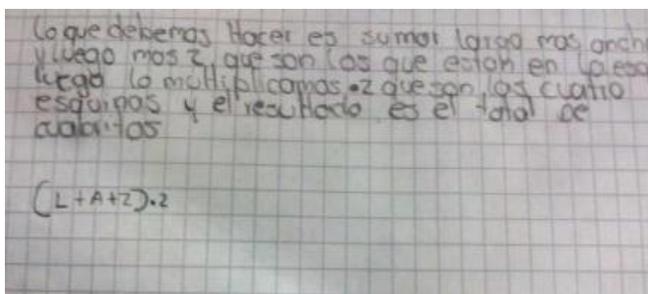
Ilustración 44. Producción de los grupos en respuesta al ítems 4 y 5 de la Tarea 5



$$(b + b) + (c + c) + 4$$

Primero sumamos los dos largos después los dos anchos el resultado que nos da lo sumamos entre sí y a ese resultado le sumamos 4 de las esquinas

Ilustración 45. Producción de los grupos en respuesta al ítems 4 y 5 de la Tarea 5



$$(L + A + 2)*2$$

Lo que debemos hacer es sumar largo más ancho y luego más 2 que son los que están en las esquinas, luego lo multiplicamos por 2 que son las cuatro esquinas y el resultado es el total de cuadritos.

Ilustración 46. Producción de los grupos en respuesta al ítems 4 y 5 de la Tarea 5

Toma de decisiones. Después de realizar la actividad de los bordes, y encontrar que la mayoría de estudiantes expresan la generalidad con lenguaje algebraico formal (Nivel 7), tanto individual como en forma grupal, y que esto se dio dentro de un contexto geométrico se procede a continuar con la siguiente actividad, la

cual está enmarcada en un contexto cotidiano nuevamente con características similares a la de los bordes.

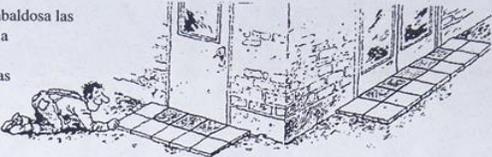
4.6 ACTIVIDAD 6: (BALDOSAS I).

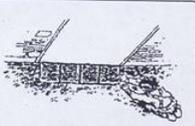
La presente actividad se retoma de la propuesta de Agudelo (2000) la cual está enmarcada en un contexto de la vida real, pero con características similares de la actividad anterior (bordes). Esta actividad se planteó con el propósito de seguir trabajando en las etapas del *Ver*, *Decir* y *Registrar* pero haciendo mayor énfasis en esta última, dado que en la actividad del mercado y la actividad de los bordes, varios estudiantes en forma individual y en la totalidad de los grupos expresan y simbolizan las generalidades encontradas.

Desarrollo de la actividad. Se propone la siguiente tarea:

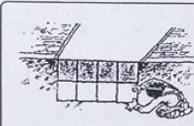
A embaldosar

Pedro es constructor. Embaldosa las entradas de las casas de la urbanización *La Colina*, utilizando baldosas negras y blancas

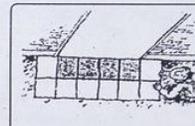




Pedro siempre empieza con una fila de baldosas negras.



Luego pone una fila de baldosas blancas a continuación de las baldosas negras.



Y luego pone 2 baldosas blancas en cada extremo para finalizar el embaldosado de la entrada.

1 ¿Cuántas baldosas blancas usa Pedro si empieza con una fila de 8 baldosas negras?

2 ¿Cuántas baldosas blancas usa si empieza con:

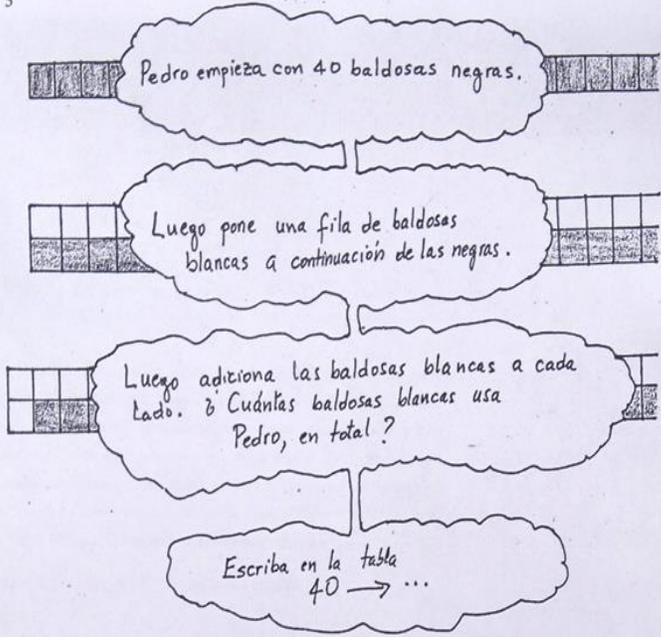
a) ¿5 baldosas negras?
b) ¿9 baldosas negras?

Puede escribir sus respuestas a las preguntas 1 y 2 en una tabla como la siguiente:

Número de baldosas negras	Número de baldosas blancas
3	→ ...
4	→
5	→
:	→
9	→
:	→

Deje espacio en la tabla para anotar más números.

3



Pedro empieza con 40 baldosas negras.

Luego pone una fila de baldosas blancas a continuación de las negras.

Luego adiciona las baldosas blancas a cada lado. ¿Cuántas baldosas blancas usa Pedro, en total?

Escribe en la tabla
40 → ...

4 Pedro empieza con 100 baldosas negras. ¿Cuántas baldosas blancas necesita? Escribe estos datos en la tabla.

5 ¿Puede encontrar el número de baldosas blancas cuando conoce el número de baldosas negras?
¿Existe alguna regla que usa para encontrar el número de baldosas blancas? Escríbala.

Para esta actividad se continúa con la estructura de las sesiones anteriores, teniendo que en la primera sesión se realiza el trabajo de forma individual, en la segunda sesión se realiza la actividad en grupos y en la tercera se socializan los acuerdos a los que llegaron en cada uno de los ítems de la tarea propuesta.

En el trabajo individual se observó que 39 estudiantes (100%) encuentran el patrón de generalización para un número pequeño de baldosas negras (nivel 3). De este grupo 37 logran verbalizar en forma escrita el patrón de formación general, y 29 estudiantes (74,36%) encuentran el patrón de formación general y lo simbolizan en lenguaje algebraico formal por lo que se clasifican en el Nivel 7, a continuación se presentan algunas de las expresiones que los estudiantes utilizaron:

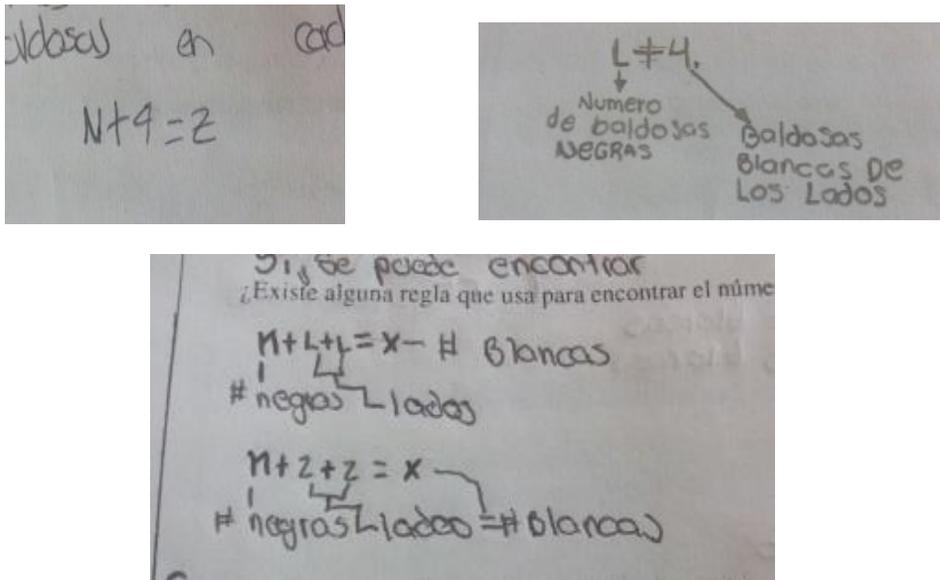


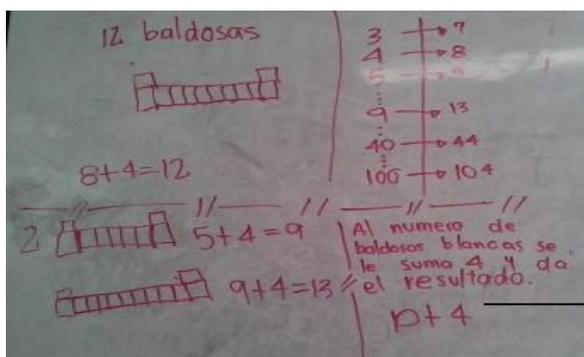
Ilustración 47. Producción de Daniel, Jeferson y Cristofer en respuesta al ítem 5 de la Tarea 6

En cuanto a los estudiantes que no lograron expresar simbólicamente el patrón de formación, sí lograron describirlo en lenguaje natural, y se encontró que dos estudiantes realizaron la descripción y la simbolización correcta pero no lo hicieron para el total de baldosas blancas sino el total de baldosas necesarias.

En la segunda sesión para el trabajo en grupos se observó que 13 (100%) encuentran el patrón de formación y lo expresan en lenguaje natural, de los cuales 11 de ellos también establecen una expresión en lenguaje algebraico formal, rescatando que los dos grupos que aunque no utilizan simbolizaciones describen la regla de formación apoyándose en ejemplos.

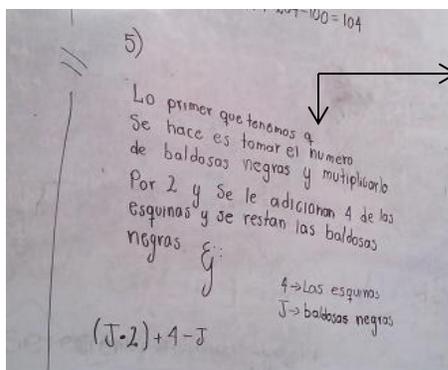
Como en las anteriores actividades se reconoció por parte del profesor que se había presionado a los grupos para que utilizaran fórmulas, el profesor destaca en su cuaderno de observaciones que en esta actividad no se hizo y aun así los estudiantes si las propusieron a lo que el profesor intervino al final de la sesión para hacer una reflexión general acerca de cómo representar una cantidad que puede cambiar o variar de acuerdo a las condiciones del problema.

En la última sesión se realizó la socialización de los acuerdos a los que llegaron los grupos, teniendo que por cuestiones de tiempo y similitud de las respuestas observadas en las actividades entregadas la sesión anterior, no pasaron todos a socializar (en el tablero), sino que se escogieron específicamente aquellos grupos que no habían utilizado expresiones simbólicas o habían presentado dificultades en este proceso. En esta actividad los estudiantes expusieron diferentes formas para expresar la generalidad de la situación y en cada una de ellas nuevamente fue importante la comprobación para que los mismos estudiantes concluyeran que diferentes expresiones pueden ser válidas para representar la solución de un problema. Algunos de los resultados presentados por los grupos se presentan a continuación, pero dado que el reflejo del tablero no dio lugar a mejores fotos, se escribe la transcripción al lado derecho de la imagen así:



“Al número de baldosas blancas se le suma 4 y da el resultado $b+4$.”

Ilustración 48. Producción de los grupos en respuesta al ítem 5 de la Tarea 6



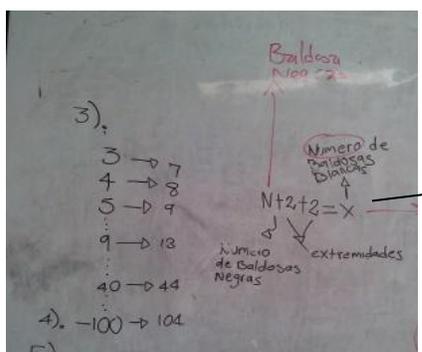
“Lo primero que tenemos que hacer es tomar el número de baldosas negras y multiplicarlo por 2 y se le adicionan 4 de las esquinas y se restan las baldosas negras. Ej:

$$(J*2)+4-J$$

4 → Las esquinas

J → baldosas negras”

Ilustración 49. Producción de los grupos en respuesta al ítem 5 de la Tarea 6

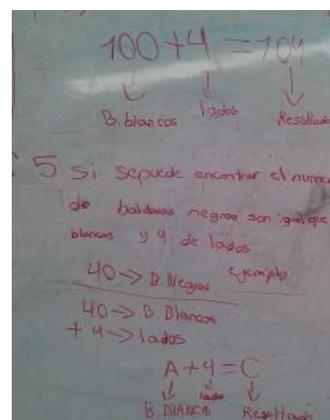


Handwritten student work showing a table of numbers and a formula. The table lists pairs like (3, 7), (4, 8), (5, 9), (9, 13), (40, 44), and (-100, 104). A formula $N + 2 + 2 = X$ is written, with 'N' labeled as 'Número de baldosas negras', '2 + 2' as 'Extremidades', and 'X' as 'Número de baldosas blancas'.

Ilustración 50. Producción de los grupos en respuesta al ítem 5 de la Tarea 6

Como lo muestra en una de las imágenes los estudiantes hacen uso de los signos de agrupación para evidenciar, de acuerdo a su proceso de evaluación qué operación hacen primero para encontrar la solución, esto teniendo en cuenta la reflexión hecha en sesiones anteriores acerca de la jerarquía de las operaciones y su organización.

En esta imagen se muestran los resultados de uno de los grupos que en el trabajo anterior no realizaba la simbolización; se observa que utiliza un ejemplo que le verifica la regla, pero después al realizarle preguntas como: ¿qué hacer para simbolizar esa cantidad?, que en este caso era el número 40, o ¿si no es 40 sino cualquier cantidad de baldosas negras?, ¿Cómo las representó? y con el ánimo del grupo lograron escribir una fórmula o expresión en lenguaje algebraico formal.



Handwritten student work showing a calculation $100 + 4 = 104$ with arrows pointing to 'B. blancos', 'Lados', and 'Resultado'. Below it, a question is written: 'Si se puede encontrar el número de baldosas negras son iguales blancas y 4 de lados'. The calculation $40 \rightarrow B. Negras$ ejemplo, $40 \rightarrow B. Blancas$, and $+ 4 \rightarrow Lados$ is shown, followed by the formula $A + 4 = C$ with arrows pointing to 'A', 'Lados', and 'Resultado'.

Ilustración 51. Producción de los grupos en respuesta al ítem 5 de la Tarea 6

En esta sesión se insistió en que los estudiantes escribieran lo que representaba cada letra o símbolo que utilizaban para la fórmula o regla, con el fin de que le dieran sentido a la utilización de estos o estas dentro de la situación; se aclaró que las letras que utilizaban estaban representando al **número** de baldosas negras o el

número de baldosas blancas, tal y como se ve en las siguientes imágenes, según el caso, y que no significaban la baldosa negra o la baldosa blanca.

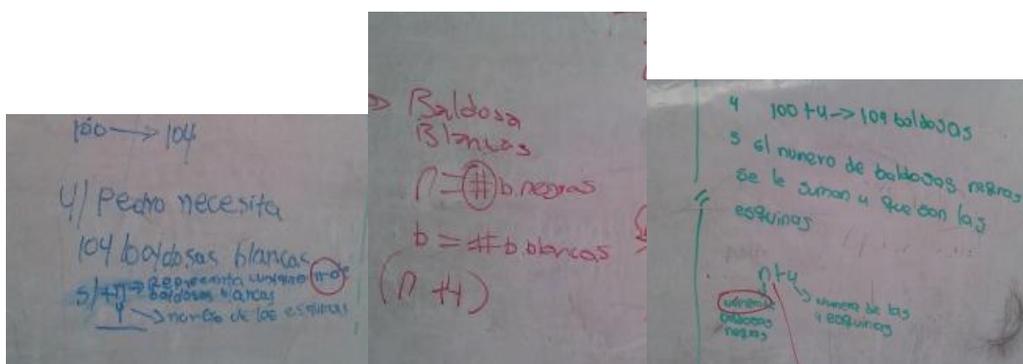


Ilustración 52. Producción de los grupos en respuesta al ítem 5 de la Tarea 6

Varios de los grupos que escribieron baldosas en vez de número de baldosas, aseguraban que ellos sabían que la letra representaba la cantidad o el número de baldosas, y aunque habían escrito solo baldosa, en la explicación de la regla de formación escribieron *número de baldosas*; esto se puede ver en la siguiente figura:

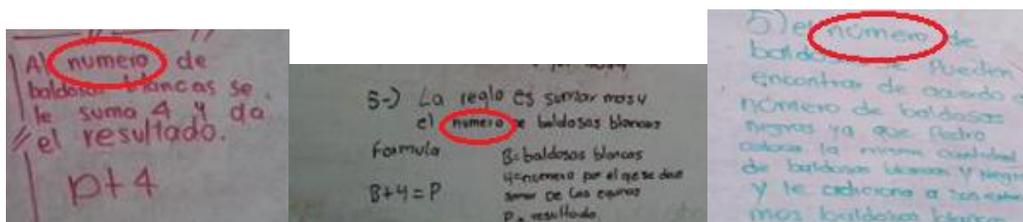


Ilustración 53. Producción de los grupos en respuesta al ítem 5 de la Tarea 6

Toma de decisiones. Se pudo observar que los estudiantes siguen avanzando en el proceso de generalización pasando por situaciones geométricas, y ahora en situaciones dentro de un contexto de la vida real, mostrando avances en la simbolización y en la interpretación de los símbolos; y esto último lo que nos compete en la secuencia de actividades. Al observar que los estudiantes muestran resultados positivos en los procesos de generalización y simbolización, y aparte

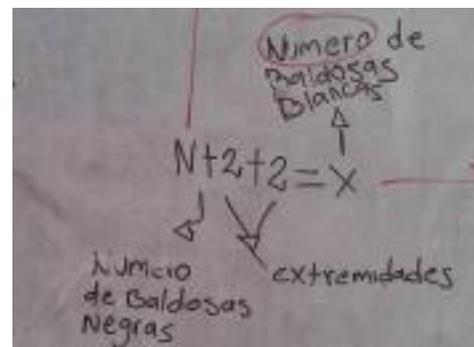
están más familiarizados con la utilización de letras para representar cantidades que desconocen o que pueden cambiar se toma la decisión de continuar con la secuencia, la cual sugiere que si los estudiantes tienen un buen desarrollo en el proceso de simbolización, es importante plantear tareas en las cuales se promueva la interpretación del símbolo (letra) como una cantidad que es conocida pero que puede variar de acuerdo a la situación que se plantea.

4.7 ACTIVIDAD 7. EL INVENTARIO.

Al analizar los resultados obtenidos anteriormente en la actividad de las baldosas, se observa que en su mayoría los estudiantes logran encontrar el patrón de formación y lo simbolizan con lenguaje algebraico formal (Nivel 7), en situaciones cotidianas.

Esta actividad busca que los estudiantes puedan trabajar con símbolos en un contexto diferente al de una cantidad desconocida, Al analizar los resultados obtenidos anteriormente en la actividad de las baldosas, se observa que en su mayoría los estudiantes logran encontrar el patrón de formación y lo simbolizan con lenguaje algebraico formal (Nivel 7), en situaciones cotidianas.

En la imagen se observa que la letra X representa para el grupo de estudiantes un valor desconocido, en este caso el número de baldosas blancas como lo indican; pero aparte utilizan otra letra para representar el número de baldosas negras (N), este número no es un valor desconocido en el problema, es más se hace énfasis que, si se conoce esta



cantidad (baldosas negras), escribir una regla para encontrar el valor desconocido (baldosas blancas), por lo tanto el estudiante ha empezado, desde la actividad anterior (Actividad de Bordes) y ahora en la de las baldosas a utilizar letras o

símbolos para representar cantidades que son conocidas pero que le indican que pueden ser cualquiera (la que cada uno quiera de acuerdo a la situación), es por esto que se debe enfatizar el trabajo con una actividad que permita evidenciar que aparte de utilizar la letra para representar cantidades desconocidas, también se está usando y se va a usar para representar cantidades conocidas pero que pueden cambiar o variar; es por esto que se decide implementar una actividad diseñada por Agudelo (2000) denominada **El Inventario**, en la cual por medio de una situación de una tienda y de la entrada y la salida de mercancía se plantean preguntas con las cuales se quiere que el estudiante haga uso de la letra para representar ciertas cantidades que aunque los procesos u operaciones se mantengan, dichas cantidades pueden cambiar dependiendo del momento de la situación.

Desarrollo de la actividad. La actividad se desarrolla de la siguiente manera: a cada estudiante y de manera individual se le entrega una hoja con la tarea que debe desarrollar.

El inventario

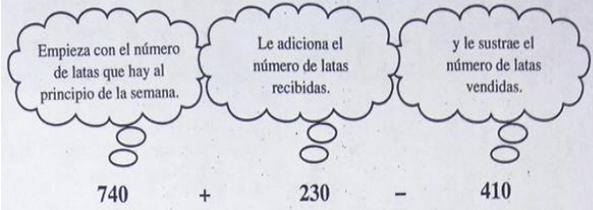


El administrador de un supermercado tiene que hacer el inventario de mercancías al final de cada semana.

Pregunta 1. Al principio de una semana había 740 latas de Coca Cola en el supermercado. Durante la semana se recibieron 230 nuevas latas de la distribuidora de Coca Cola, y 410 latas fueron vendidas.
¿Cuántas latas de Coca Cola había en el supermercado al final de la semana?

Pregunta 2. Al principio de otra semana, durante una época de calor, había 3800 latas en el supermercado. 1200 nuevas latas fueron recibidas durante la semana, y 2700 fueron vendidas.
¿Cuántas latas de Coca Cola había al final de la semana?

Cada semana el administrador tiene que hacer el mismo tipo de cálculo:



740 + 230 - 410

Los números cambian de semana a semana, pero el administrador hace la misma clase de cálculos con esos números cada vez.

¿Qué expresión sencilla escribiría, que permita identificar los cálculos que el administrador realiza al final de cada semana?

Los números cambian de semana a semana. ¿Podemos usar un nombre para representar números que cambian?

Allí se le plantean las siguientes preguntas:

Pregunta 1. Al principio de una semana había 740 latas de Coca Cola en el supermercado. Durante la semana se recibieron 230 nuevas latas de la distribuidora de Coca Cola, y 410 latas fueron vendidas. ¿Cuántas latas de Coca Cola había en el supermercado al final de la semana?

Pregunta 2. Al principio de otra semana, durante la época de calor, había 3800 latas en el supermercado. 1200 latas fueron recibidas durante la semana, y 2700 fueron vendidas. ¿Cuántas lata de Coca Cola había al final de la semana?

En la hoja se indica que el administrador tiene que hacer el mismo tipo de cálculo cada semana: Se empieza con el número de latas que hay al principio de la semana, luego le adiciona el número de latas recibidas y por último le sustrae el número de latas vendidas.

Y se proponen dos ítems:

1. ¿Qué expresión sencilla escribiría, que permita identificar los cálculos que el administrador realiza al final de cada semana?
2. Los números cambian de semana a semana. ¿Podemos usar un nombre para representar números que cambian?

En la segunda sesión se propone el mismo trabajo con las mismas tareas pero ahora de forma grupal, conformando grupos de máximo 4 estudiantes.

Para las dos preguntas se observó que en ambas sesiones la totalidad de estudiantes y grupos resuelven correctamente las preguntas 1 y 2 realizando procesos similares

Pregunta 1	Pregunta 2
740	3800
<u>+230</u>	<u>+1200</u>
970	5000
<u>-410</u>	<u>-2700</u>
560	2300

Ilustración 54. Producción de Miguel en respuesta a las preguntas 1 y 2 de la Tarea 7

Para el primer ítem: ¿Qué expresión sencilla escribiría, que permita identificar los cálculos que el administrador realiza al final de cada semana? Se encontró que en la primera sesión, 6 estudiantes describen el proceso que debe hacer el administrador sin simbolizar en lenguaje algebraico

Suma el número de latas al principio se le suman las latas recibidas y se le resta los que fueron vendidos, Así la da el resultado de final de semana

Ilustración 55. Producción de Erly en respuesta al ítem 1 de la Tarea 7

34 estudiantes utilizan lenguaje algebraico para identificar y describir los cálculos que hace el administrador. Encuentran la necesidad de utilizar símbolos que representen cantidades que varían teniendo en cuenta que las operaciones se mantienen

Ilustración 56. Producción de Nelson y Marisol en respuesta al ítem 1 de la Tarea 7

Varios de estos estudiantes también representan con símbolos los resultados que obtienen al final o después de cada operación durante el proceso.

$n + z = B$
 $B - m$
 $B = \text{el resultado de } n + z$

$N + P - M = 0$

Número de latas que hay en el supermercado. → N
 Número de latas que recibe de la distribuidora. → P
 Número de latas vendidas. → M
 total de latas que le queda en el fin de semana. →

Ilustración 57. Producción de Cristofer y Sofia en respuesta al ítem 1 de la Tarea 7

Se observa que la mayoría de los estudiantes utiliza símbolos para representar dichas cantidades que cambian y comprenden que en este caso los símbolos que usan, representan el número de latas en cada instante del proceso.

En la segunda sesión, se pudo observar que todos los grupos utilizan lenguaje algebraico para identificar los cálculos que hace el administrador, algunos grupos al igual que en la primera sesión, usan símbolos para representar los resultados de cada operación o el resultado final del proceso.

En la segunda tarea se quiere que el estudiante encuentre un nombre para denominar a esas cantidades que cambian, la idea es llevarlo al nombre de “variable” para nombrar dichas cantidades o números que cambian.

En el trabajo individual solo dos estudiantes colocaron la palabra variable para nombrar estos números, los demás estudiantes tienen claro que los números varían o cambian y que pueden ser cualquier cantidad, pero no utilizan la palabra “variable” para distinguirlos.

Lo mismo sucede en el trabajo grupal donde solo un grupo coloca la palabra variable para identificar estos números, mientras que los demás explican que cambian y que pueden ser cualquiera pero sin utilizar la palabra de variable.

Toma de decisiones: Hemos observado que los estudiantes han avanzado en el concepto de variable, y que así la mayoría no utilicen el término específico “variable”, reconocen que la letra en esta situación particular, puede tomar el

valor que solicite las características del problema para resolverlo, y que el sentido de la operación no cambia, porque lo que varían son las cantidades. Entonces teniendo en cuenta esta observación se toma la decisión de seguir con la actividad planeada, la cual pretende seguir en el trabajo de la letra como variable y además se inicie un proceso operatorio con las mismas

4.8 ACTIVIDAD 8. A EMBALDOSAR SEGUNDA PARTE.

En la actividad anterior se hizo énfasis en el uso de la letra como variable, donde la operaciones permanecen y lo que varía son las cantidades.

Para esta actividad lo que se pretende es que los estudiantes potencien aún más el trabajo con las letras como variables y que se inicie con la operatividad de la letra, para que logren evidenciar con las letras también se pueden realizar operaciones.

Desarrollo de la actividad. A cada estudiante se le entregó una hoja con las indicaciones de las tareas que debía realizar;

A embaldosar
(Segunda parte²⁶)

¿Recuerda la actividad de Pedro el constructor, quien embaldosaba las entradas de las casas?

¿Se acuerda? Podemos calcular el número de baldosas blancas si conocemos el número de baldosas negras.

$$\text{Número de baldosas blancas} = \text{Número de baldosas negras} + 4$$

Vamos a observar la tabla que muestra el número de baldosa negras y el número de baldosas blancas usadas en las entradas.

Número de baldosas negras	Número de baldosas blancas
3	7
4	8
5	9
⋮	⋮
10	14
⋮	⋮
n	n+4

Llamamos:
n al número de baldosas negras y
b al número de baldosas blancas.

Pedro quiere saber cuántas baldosas se usan, en total, para la entrada de cualquier casa.

Número de baldosas negras	Número de baldosas blancas	Número de baldosas negras más número de baldosas blancas
3	3+4	3+3+4
4	4+4	4+4+4
5	5+4	5+5+4
⋮	⋮	⋮
10	10+4	10+10+4
⋮	⋮	⋮
n	n+4	n+n+4

Veamos que $3+3+4$ es lo mismo que decir: 2 veces 3, más 4.

Decida si $2 \times 3 + 4$ representa adecuadamente la expresión 2 veces 3, más 4.

¿En $2 \times 3 + 4$, para este caso, qué operación hay que hacer primero?

¿Qué tenemos que usar para indicar qué operación se hace primero? Explique*.

Una vez que haya establecido la necesidad de usar paréntesis, termine de llenar la siguiente tabla:

Número de baldosas negras más número de baldosas blancas usadas en una entrada

$\begin{array}{l} 3 + 3 + 4 \\ 4 + 4 + 4 \\ \vdots \end{array}$	$\longrightarrow (2 \times 3) + 4$
---	------------------------------------

Ahora trate de establecer lo que sucede en los siguientes casos:

$1 + 1 = 2 \times 1$	$1 + 1 + 1 =$
$2 + 2 =$	$2 + 2 + 2 =$
$3 + 3 =$	$3 + 3 + 3 =$
$4 + 4 =$	$4 +$
⋮	
⋮	
$10 + 10 =$	
⋮	
⋮	
Cualquier número +	
n +	

Escriba ejemplos de otros casos, como los anteriores, en donde se pueda establecer una expresión general (para cualquier número).

Ilustración 58. Propuesta de Tarea para actividad 8

Allí primero se le recordaba lo que se realizó en la primera actividad de las baldosas haciendo énfasis en lo siguiente:

$$\text{Número de baldosas blancas} = \text{Número de baldosas negras} + 4$$

Y se proponía una tabla con la cual se podía determinar la cantidad total de baldosas para la entrada de cualquier casa, haciendo énfasis en las operaciones necesarias para obtener la respuesta

Para la primera pregunta: **¿En $2 \times 3 + 4$, para este caso, que operación hay que hacer primero?**

El 100% de los estudiantes y de los grupos respondieron que la multiplicación, ya sea escribiendo la palabra o colocando la operación 2×3 .

Para la segunda pregunta: **¿Qué tenemos que usar para indicar qué operación se hace primero? Explique.** Se tiene que 28 estudiantes responden que se debe

usar paréntesis o escriben la operación entre paréntesis indicando que esto es lo que se soluciona primero $(2 \times 3) + 4$.

5 estudiantes responden que se debe seguir la jerarquía de las operaciones para saber qué operación se hace primero y 7 estudiantes explican utilizando el contexto de las baldosas para llegar a la respuesta pero no indican que deben usar paréntesis para resolver la operación. Para esta segunda pregunta se tiene que los estudiantes ya tenían cierto conocimiento de la jerarquía de las operaciones porque justamente en la primera actividad de las baldosas, se hizo énfasis en este tema en la socialización de los resultados.

El siguiente ítem era la de completar la tabla de acuerdo a un ejemplo que se les presentaba. Allí 22 estudiantes completan la tabla teniendo como base los valores presentados en la primera tabla que se les presentó para la explicación de las dos preguntas anteriores, como se presenta a continuación:

$$3 + 3 + 4 \longrightarrow (2 \times 3) + 4$$

$$4 + 4 + 4 \longrightarrow (2 \times 4) + 4$$

$$5 + 5 + 4 \longrightarrow (2 \times 5) + 4$$

$$10 + 10 + 4 \longrightarrow (2 \times 10) + 4$$

$$n + n + 4 \longrightarrow (2 \times n) + 4$$

3 estudiantes aunque siguieron esta misma secuencia cuando llegaron a la “n” no escribieron la multiplicación correspondiente sino que sólo colocaron el paréntesis en la suma:

$$n + n + 4 \longrightarrow (n + n) + 4$$

3 estudiantes al igual que en el caso anterior siguen la misma secuencia pero en el último caso aparte de colocar el paréntesis cambian la suma por un producto:

$$n + n + 4 \longrightarrow (n \times n) + 4$$

8 estudiantes llenaron la tabla siguiendo únicamente la secuencia numérica por ejemplo:

$$3 + 3 + 4 \longrightarrow (2 \times 3) + 4$$

$$4 + 4 + 4 \longrightarrow (2 \times 4) + 4$$

$$5 + 5 + 4 \longrightarrow (2 \times 5) + 4$$

$$6 + 6 + 4 \longrightarrow (2 \times 6) + 4$$

$$7 + 7 + 4 \longrightarrow (2 \times 7) + 4$$

$$8 + 8 + 4 \longrightarrow (2 \times 8) + 4$$

5 estudiantes que realizan otro tipo de expresiones que no corresponden con lo descrito en la tarea. Se observa que la mayoría de los estudiantes comprenden el sentido de la tarea y, que de acuerdo a las condiciones, y apoyados por las secuencias numéricas, establecen una operación con la letra: $(n + n)$ se escribe como dos veces n ($2 \times n$).

Para el siguiente ítem

Ahora trate de establecer lo que sucede en los siguientes casos:

$1 + 1 = 2 \times 1$ $2 + 2 =$ $3 + 3 =$ $4 + 4 =$ \cdot \cdot $10 + 10 =$ \cdot \cdot Cualquier número + $n +$	$1 + 1 + 1 =$ $2 + 2 + 2 =$ $3 + 3 + 3 =$ $4 +$
---	--

Ilustración 59. Propuesta ítem 2 Tarea 8

27 estudiantes establecen la relación para los casos numéricos:

$$1 + 1 = 2 \times 1$$

$$1 + 1 + 1 = 3 \times 1$$

$$2 + 2 = 2 \times 2$$

$$2 + 2 + 2 = 3 \times 2$$

$$3 + 3 = 2 \times 3$$

$$3 + 3 + 3 = 3 \times 3$$

$$4 + 4 = 2 \times 4$$

$$4 + 4 + 4 = 3 \times 4$$

8 estudiantes dan el resultado y multiplican por 1 para mantener la igualdad

$$1 + 1 = 2 \times 1$$

$$1 + 1 + 1 = 3 \times 1$$

$$2 + 2 = 4 \times 1$$

$$2 + 2 + 2 = 6 \times 1$$

De los 6 estudiantes restantes 3 siguen secuencias, resolviendo la primera operación que se indica directamente y luego agregando una multiplicación sin tener en cuenta la comprobación de la igualdad

$$1 + 1 = 2 \times 1$$

$$1 + 1 + 1 = 3 \times 1$$

$$2 + 2 = 4 \times 2$$

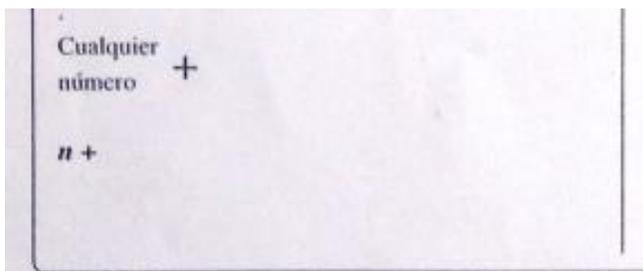
$$2 + 2 + 2 = 6 \times 2$$

$$3 + 3 = 6 \times 3$$

$$3 + 3 + 3 = 9 \times 3$$

Los 3 estudiantes restantes no respondieron y dejaron en blanco

En la continuación de este ítem hubo confusión por parte de los estudiantes sobre lo que debían realizar o completar. El profesor-investigador intentó explicar lo que había que hacer en esta parte, sin incidir directamente en las respuestas de los estudiantes.



De esta manera, 18 estudiantes logran expresar la generalidad en la tarea y simbolizan con lenguaje algebraico formal. (Nivel 7)

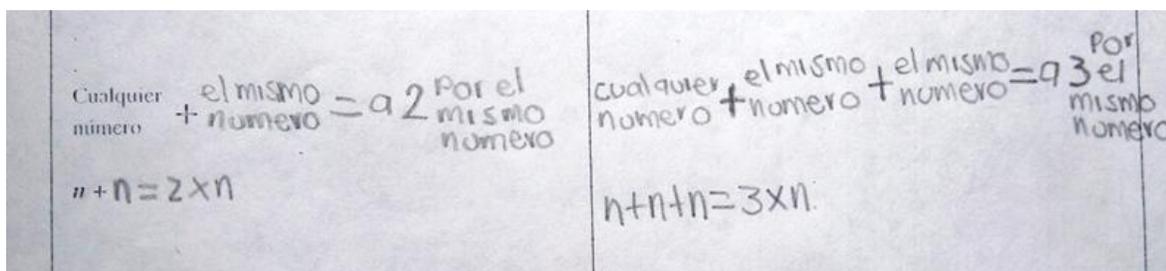


Ilustración 60. . Producción de Nelson en respuesta al ítem 2 de la Tarea 8

Los demás estudiantes, manifestaron que no entendieron muy bien lo que había que hacer y por lo tanto no respondieron nada, colocaban ejemplos particulares o explicaban el proceso de las baldosas.

En la siguiente sesión se organizaron 13 grupos, de los cuales 12 lograron expresar la generalidad y simbolizarla con lenguaje algebraico formal; inclusive hay grupos que no realizan la verbalización y pasan directamente a la simbolización, argumentando que no tenían bien claro que había que escribir allí.

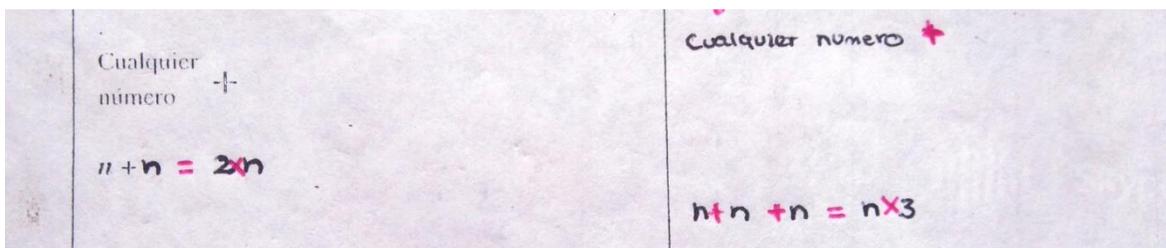
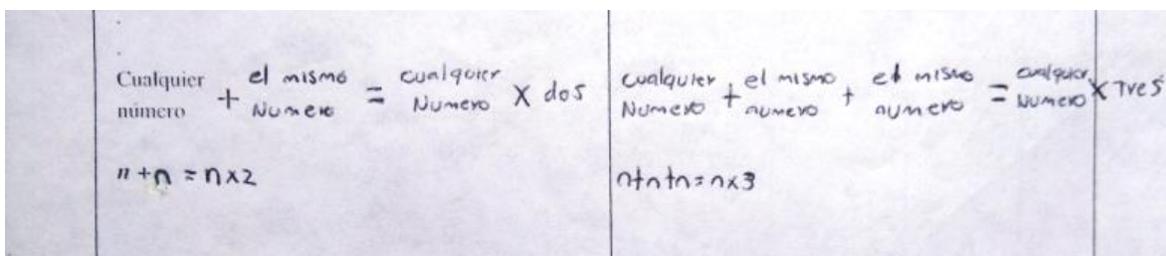


Ilustración 61. . Producción de los grupos en respuesta al ítem 2 de la Tarea 8

El grupo restante no respondió nada, y argumentaron que no entendían lo que debían realizar. En el momento de socialización se les sugirió que prestaran atención a lo que sus compañeros exponían, para que de esta manera intentaran comprender lo que había que realizar en esta parte de la tarea.

Toma de decisiones: Esta era la última actividad planeada en la secuencia, y con esta se pudo observar que, en primer lugar, los estudiantes han avanzado considerablemente en el proceso de generalización y simbolización en todo tipo de situaciones y que pueden trabajar dentro de un contexto únicamente matemático partiendo de una situación cotidiana antes trabajada (Recubrir con baldosas), aunque algunos estudiantes inicialmente intentaran resolver las tareas haciendo referencia a las baldosas. Y en segundo lugar, simultáneamente con el proceso de simbolización, se logró que los estudiantes avanzaran en el proceso de asimilación del carácter operatorio de la letra al comprender la equivalencia de las siguientes expresiones:

$$n + n = 2 x n$$

$$n + n + n = 3 x n$$

$$n + n + 4 = (2 x n) + 4$$

Ahora con la asesoría de nuestro director, se llegó a la conclusión de realizar una pequeña actividad de cierre, que permita observar específicamente los alcances que tuvo la implementación de esta secuencia en los estudiantes.

4.9 ACTIVIDAD DE CIERRE.

Esta actividad se estructuró durante las asesorías con el director, y tiene como propósito concluir la implementación de la secuencia y observar los alcances que tuvo la misma en el aprendizaje de los estudiantes.

Desarrollo de la actividad. Se les indicó a los estudiantes que se iba a realizar un cuadro en el tablero, y que debían copiarlo en una hoja para entregar, el cuadro era como el siguiente:

Lenguaje Natural	Lenguaje Algebraico	EJEMPLOS	
		Natural	Negativo
El doble de un número menos el triple del mismo número más 5			
	$p^2 + 3p + 4$		
El siguiente de un número			

Ilustración 62. Propuesta de Tarea para la actividad 9

La indicación que se dio a los estudiantes fue que había que completar el cuadro de acuerdo a la información que allí se presentaba. Los estudiantes realizaron preguntas en cuanto al ejemplo, para lo cual se realizó una corta explicación en el tablero.

Lenguaje Natural	Lenguaje Algebraico	EJEMPLOS	
		Natural	Negativo
El doble de un número menos el triple del mismo más 5	$2n + 3n + 5$	$n=8$ $2 \cdot 8 - 3 \cdot 8 + 5$ $16 - 24 + 5$ $11 + 5$ -6	$n=(-5)$ $2 \cdot (-5) - 3 \cdot (-5) + 5$ $-10 + 15 + 5$ $5 + 5$ 10
El cuadrado de un número más el triple de un número más 4	$p^2 + 3p + 4$	$p=9$ $(9^2) + 3 \cdot 9 + 4$ $81 + 27 + 4$ 112	$p=(-7)$ $-7^2 + 3 \cdot (-7) + 4$ $-49 - 21 + 4$ $-70 + 4$ -74

Ilustración 63. Producción de Miguel en respuesta de la Tarea 9

Lenguaje Natural	Lenguaje Algebraico	Ejemplos	
		Natural	Negativo
El doble de un número menos el triple del mismo número + 5	$2x - 3x + 5$	$n = 12$ $(2 \cdot 12 - 3 \cdot 12) + 5$ $(24 - 36) + 5$ $-12 + 5$ -7	$n = -3$ $(2 \cdot (-3) - 3 \cdot (-3)) + 5$ $(-6 + 9) + 5$ $3 + 5$ 8
El Cuadrado de un número más el triple del mismo número más 4	$p^2 + 3p + 4$	$n = 3$ $3^2 + 3 \cdot 3 + 4$ $9 + 3 \cdot 3 + 4$ $9 + 9 + 4$ 22	$n = -2$ $-2^2 + 3 \cdot 2 + 4$ $4 + 3 \cdot 2 + 4$ $4 + 6 + 4$ 14

Ilustración 64. Producción de Jenniffer en respuesta de la Tarea 9

De acuerdo a los resultados se observó que 36 estudiantes que equivalen al 94,7% logran expresar en lenguaje natural y en lenguaje algebraico los dos primeros ejercicios.

Aunque se pudo observar que cometen errores al momento de realizar los ejemplos, es decir, al momento de evaluar la letra con valores positivos o negativos, la mayoría de estudiantes evidencian avances en el proceso de simbolización con lenguaje algebraico formal y que pueden interpretar una expresión algebraica y escribirla en lenguaje natural. Aunque varios presentan errores aritméticos al momento de realizar los ejemplos numéricos, es decir, evaluar la letra, es claro para los estudiantes que la letra puede tomar el valor que ellos quieran dentro de un conjunto determinado.

Cabe resaltar que los dos estudiantes que no expresan correctamente alguno de los dos ejercicios, lo hacen por la confusión al momento de expresar:

El triple de un número como p^3

p^2 como el doble de un número

Lenguaje Natural	Lenguaje algebraico	Natural negativo
El doble de un numero menos el triple del mismo numero mas 5	$2n - n^3 + 5$	$n = 6$ $2 - (n^3) + 5$ $-36 + 5$ -41
El doble de un numero + 3 del mismo numero mas Cuatro	$p^2 + 3p + 4$	$p = 8$ $p^2 - (3p) + 4$ $10 - 15 + 4$

Ilustración 65. Producción de Miguel en respuesta de la Tarea 9

Confusión que se presentó con mucha frecuencia durante el trabajo con los estudiantes en otras situaciones de clase, y que se intentó corregir en varias ocasiones, pero se evidencia que aún quedan falencias que se deben trabajar en otras oportunidades.

5. PROCESOS DE GENERALIZACIÓN Y DE SIMBOLIZACIÓN: ANÁLISIS DE CASOS PARTICULARES

A continuación se presentan algunas evidencias del proceso desarrollado por dos estudiantes, que se escogieron porque de acuerdo al análisis y observación de su trabajo, se encuentran en diferentes niveles de comprensión y donde se presentan diferentes progresos y/o dificultades encontrados durante su proceso de aprendizaje.

Se presenta el caso de la estudiante Jennifer y del estudiante Cristofer quienes desde la actividad de indagación hicieron evidentes ciertas destrezas en el proceso de generalización de patrones, y en el proceso de Ver y Describir, de igual manera se observan los primeros intentos de simbolizar con lenguaje algebraico.

<p>a. Dibuje la Figura 5 de la secuencia</p> 	<p>e. Suponga que uno de sus compañeros no asistió hoy, escriba brevemente cómo le explicaría el procedimiento que le sirve para calcular el número total de círculos en una figura cualquiera de la secuencia.</p> <p>• Al subir el número de la figura se agregan dos círculos o también se le podría sumar el número de la figura con el mismo y restarle 1 círculo y ahí se sabía cuántos círculos hay.</p>
<p>b. ¿Cuántos círculos tendría la Figura 9?</p> <p style="text-align: center;">17</p>	<p>f. Encuentre una expresión (o fórmula) para calcular el número de círculos de la Figura n en la secuencia dada inicialmente.</p> <p style="text-align: center;">$n + n - 1 = y$</p>
<p>c. ¿Cuántos círculos tendría la Figura 100 de la secuencia?</p> <p style="text-align: center;">199</p>	

Ilustración 66. Producción de Jennifer en la Actividad de Indagación

<p>a. Dibuje la Figura 5 de la secuencia</p> 	<p>e. Suponga que uno de sus compañeros no asistió hoy, escriba brevemente cómo le explicaría el procedimiento que le sirve para calcular el número total de círculos en una figura cualquiera de la secuencia.</p> <p>Cada secuencia TIENE en la parte de abajo el número de la secuencia en bolitas y en la parte vertical tiene menos 1 bolita</p>
<p>b. ¿Cuántos círculos tendría la Figura 9?</p> <p style="text-align: center;">17 CIRCULOS</p>	<p>f. Encuentre una expresión (o fórmula) para calcular el número de círculos de la Figura n en la secuencia dada inicialmente.</p> <p style="text-align: center;">$A + B - C - 1 = \text{CIRCULOS TOTALES}$</p>
<p>c. ¿Cuántos círculos tendría la Figura 100 de la secuencia?</p> <p style="text-align: center;">199 CIRCULOS</p>	

Ilustración 67. Producción de Cristofer en la Actividad de Indagación

Desde esta primera actividad se observa que Jennifer logra encontrar el patrón de formación y expresar en lenguaje natural dicha generalidad (Nivel 5), así como un acercamiento bastante significativo al proceso de simbolización.

En la siguiente actividad, denominada *Secuencia cuadros*, se hace evidente que aunque Jennifer encuentra el patrón de formación para un número grande (figura 100), al momento de explicar la generalidad, utiliza un proceso recursivo, es decir, usa el término anterior hallar el siguiente y expresa una relación general haciendo uso de símbolos, aunque no logra expresar claramente el patrón de formación general. Mientras que Cristofer encuentra claramente el patrón de formación y expresa la generalización utilizando lenguaje algebraico formal.

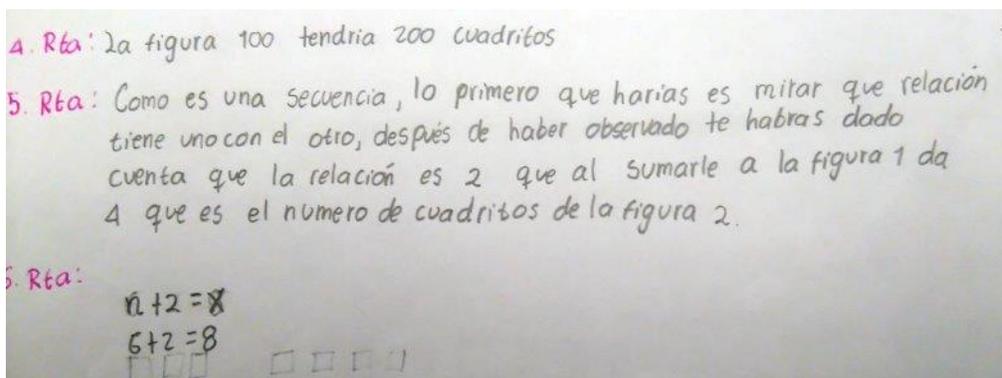


Ilustración 68. Ilustración 66. Producción de Jennifer en la Tarea 1

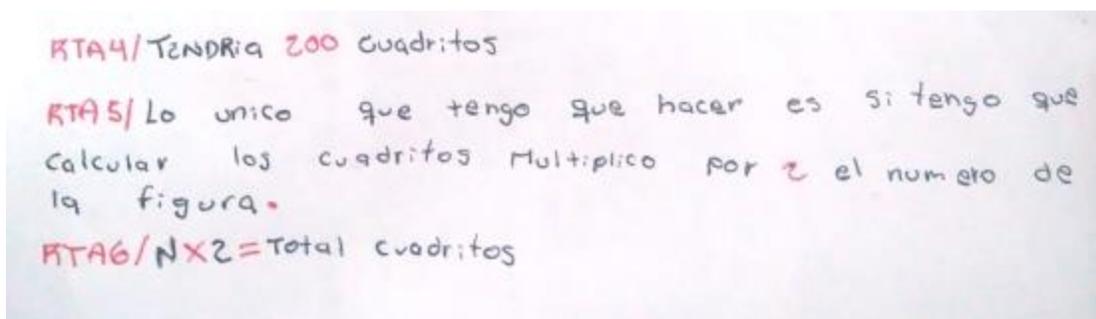


Ilustración 69. Ilustración 66. Producción de Cristofer en la Tarea 1

En la siguiente actividad, también sobre una secuencia numérica, se observa que Jennifer evidencia avance no solo en el proceso de generalización, sino también en la simbolización, haciendo uso de lenguaje algebraico formal, a tal punto de alcanzar el Nivel 7. Esto para ambas secuencias numéricas la de “2” y la de “3”.

Handwritten work of Jennifer Vargas Herazo showing two arithmetic sequences and their generalizations.

Top Sequence (2, 4, 6, 8, ...):

- 1. 10 3 30
- 2. 14 4 200

5. # Posición
↓
 $n \cdot 2 = X$
↑
Número de la Posición

7. $2 = 14$

Nombre: Jennifer Vargas Herazo
Curso: 8o1

Para encontrar el número de cualquier posición multiplicamos el número de la posición por dos. Por ejemplo 7 es el número de posición a este lo multiplicamos por 2 lo cual nos da 14 que es el número que quedaría en esa posición.

Bottom Sequence (3, 6, 9, 12, ...):

- 1. 15 3 45
- 2. 21 4 300

5. Para encontrar el número de la posición lo primero que haremos es multiplicar el número n que es la posición por 3 que nos daría un número z que daría el número a_1 que valdría esa posición.

Nombre: Jennifer Vargas Herazo
Curso: 8o1

Posición
↓
 $n \cdot 3 = z$
↑
Número de la posición

Ilustración 70. Ilustración 66. Producción de Jennifer en la Tarea 2

En cuanto a Cristófer también logra generalizar y nuevamente simboliza haciendo uso de lenguaje algebraico formal, esto para ambas secuencias y al igual que Jennifer alcanza el Nivel 7

Handwritten work of Cristófer Nicolás Huertas Mendiveiso showing two arithmetic sequences and their generalizations.

Top Sequence (2, 4, 6, 8):

- RTA 1/10
- RTA 2/14
- RTA 3/30
- RTA 4/100

$RTA 5 / N \times 2 = C$
N = Número posición
C = Resultado

CRISTOFER NICOLAS HUERTAS MENDIVEISO

Bottom Sequence (3, 6, 9, 12):

- RTA 1/15
- RTA 2/21
- RTA 3/45

RTA 4/300

$RTA 5 / N \times 3 = R$
N = Número posición
R = Resultado

CRISTOFER NICOLAS HUERTAS MENDIVEISO

Ilustración 71. Ilustración 66. Producción de Cristófer en la Tarea 2

Ahora, en la *actividad del mercado*, se observa que Jennifer tiene claro el proceso de generalización, ahora en contexto de la vida real, y que su proceso de simbolización en este mismo contexto también es coherente con la situación.

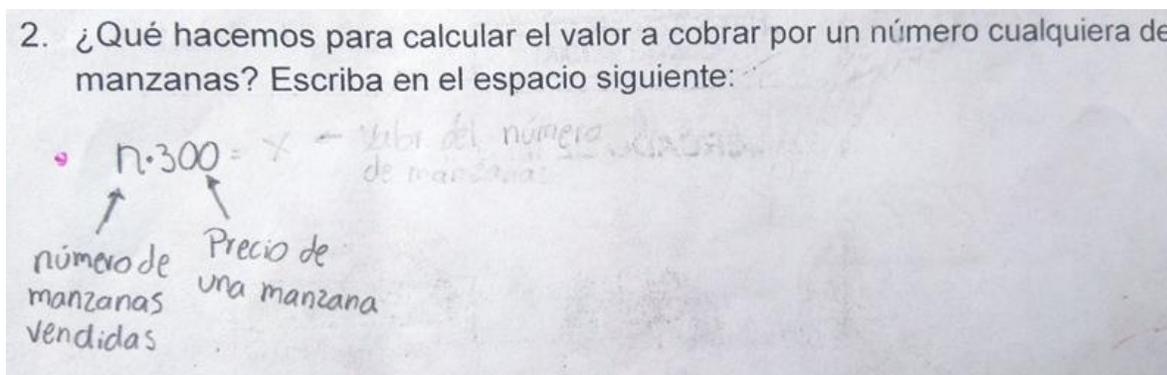


Ilustración 72. Producción de Jennifer en respuesta al ítem 2 de la Tarea 3

Se puede observar que, al igual que en la actividad de las secuencias numéricas, en la expresión algebraica la estudiante evidencia la necesidad de cierre, aunque en esta actividad del mercado aparece como si lo hubiese borrado.

Por el lado de Cristófer se observó que encuentra el patrón de formación general y lo expresa en lenguaje natural, aunque no lo hace evidente en lenguaje algebraico formal, esto lo hace porque el ítem no le pide escribir una fórmula o expresión que represente la generalización tal como en las actividades anteriores, entonces el estudiante no ve la necesidad de hacerlo.

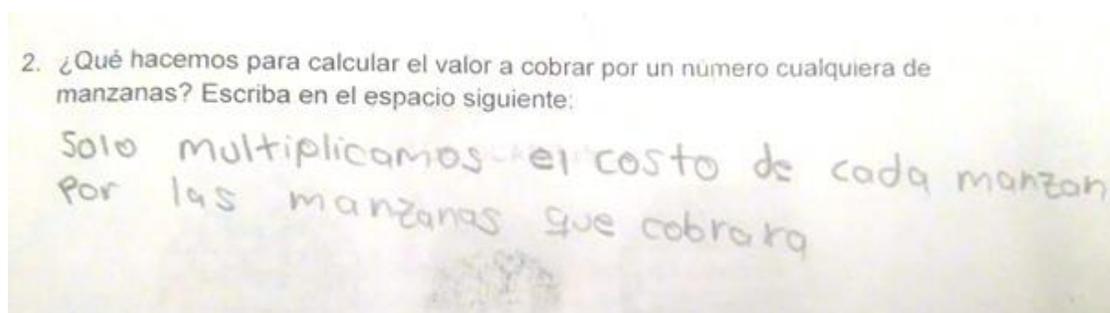


Ilustración 73. Producción de Cristófer en respuesta al ítem 2 de la Tarea 3

En la siguiente actividad, sobre *dobleces*, se puede observar que la estudiante logra expresar en lenguaje natural la recursividad utilizada para completar una parte de la tabla, aunque no logra encontrar el patrón de regularidad general y tampoco realizar una expresión algebraica para esta generalización. Y Cristófer simplemente toma nota de la explicación del docente y de la tabla que estaba en el tablero. Esto se debe a que esta tarea vincula procesos y cualidades del concepto de potenciación, que para los estudiantes presenta una mayor complejidad.

Pues yo veo que el número de ^{espacios} ~~dobleces~~ es el doble del número anterior. entonces si quiero encontrar el número de espacios en 7 dobleces, pues multiplico $64 \times 2 = 128$ y así sucesivamente.

Dobleces	Espacios
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	512
100	10240
n	2 ⁿ

Ilustración 74. Producción de Jennifer y Cristófer en la Tarea 4

En la siguiente actividad, *la de los bordes*, se observó que ambos estudiantes ya han asimilado el proceso de generalización en varios contextos, y en el proceso de simbolización siguen avanzando, siendo cada vez más formal en la escritura, aunque para el caso de Jennifer se observa que mantiene su posición de querer dar un resultado a las operaciones presentes en la simbolización, es decir, sigue presente la necesidad de cierre de las operaciones; además uno de los propósitos de esta actividad era que los estudiantes observaran que existen diferentes maneras válidas de expresar la generalidad, y la expresión de esta estudiante, aparte de ser única en el salón, es muy particular al usar conceptos de diferencia de áreas para resolver la tarea. Por su parte Cristófer no evidencia necesidad de

cierre para la expresión algebraica y presenta una manera de expresar la generalidad diferente a la presentada por Jennifer

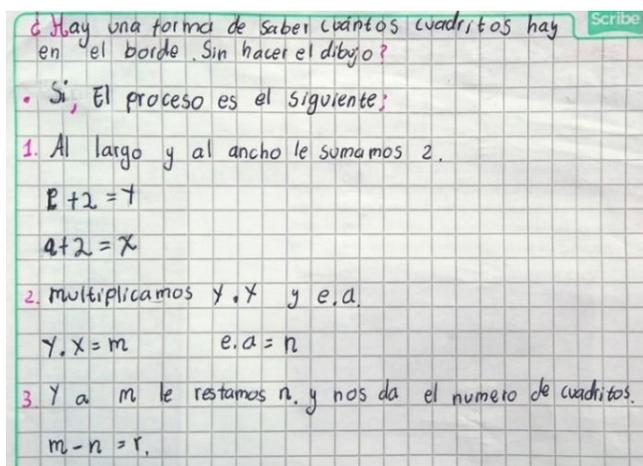


Ilustración 75. Producción de Jennifer en la Tarea 5

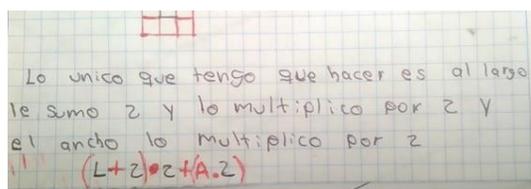


Ilustración 76. Producción de Cristofer en la Tarea 5

La siguiente, fue la actividad denominada “A embaldosar” que era una actividad similar a la de los bordes, pero esta vez enmarcada dentro de un contexto de la vida real. Allí se observó que la estudiante mantiene su condición en el proceso de generalización, y que a diferencia de las anteriores actividades, esta vez al momento de simbolizar no tiene la necesidad de cerrar la operación, si no que deja expresada en lenguaje algebraico formal la generalización observada en la situación, además de esto se observó que es precisa en describir lo que la letra representa en la simbolización de la situación. De igual manera Cristofer también mantiene su condición en el proceso de generalización y al igual que Jennifer, describe lo que representa la letra y el número en la simbolización

$n+4$

$n = n^{\circ}$ cualquiera de baldosas negras
 A las baldosas blancas que en cada esquina sumadas
 a un número de

• A un número cualquiera de baldosas negras le sumamos 4 que es el número final de baldosas que Pedro coloca en cada esquina sumadas.

Número de baldosas negras	Número de baldosas blancas
3	7
4	8
5	9
8	12
9	13
40	44
100	104

Ilustración 77. Producción de Jennifer en la Tarea 6

$L+4$

Número de baldosas NEGRAS

Baldosas Blancas DE Los Lados

Como la hilera que Pedro pone de baldosas blancas es la misma que las Negras le suma a las Negras 4 de los lados y así nos da el total de baldosas Negras

Número de baldosas negras	Número de baldosas blancas
3	7
4	8
5	9
9	13
40	44
100	104

Ilustración 78. Producción de Cristófer en la Tarea 6

En la actividad del *Inventario*, se pretendía trabajar con la identificación de la letra como una variable, por medio de una situación de la vida cotidiana con procesos de entrada y salida de mercancía de una tienda. Ambos estudiantes hicieron uso de diferentes letras para representar un número de latas que varía de acuerdo a una situación específica. Jennifer al igual que en la actividad anterior, ya no necesita cerrar la operación presente en la simbolización. Mientras que Cristófer parece recurrir al signo igual para unir cada una de las acciones de la situación evidenciando así una necesidad de cierre que no había mostrado antes. También se observa que, al igual que en la actividad anterior, son precisos en describir lo que representa cada letra en la situación.

Se observa en la imagen, que Jennifer denomina *números incógnitos* y Cristofer *números cualesquiera*, a las cantidades que varían en la situación, pero aclaran que son números que cambian o varían cada semana, evidenciando implícitamente la utilización de las letras como variables.

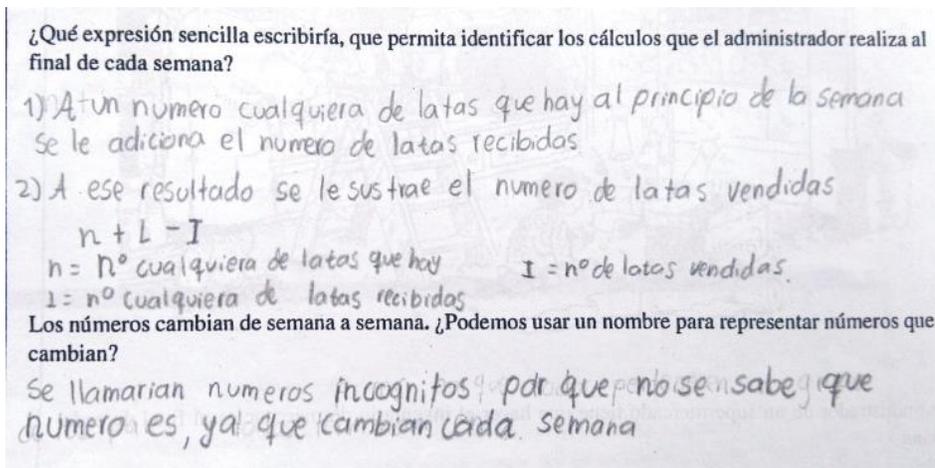


Ilustración 79. Producción de Jennifer en la Tarea 7

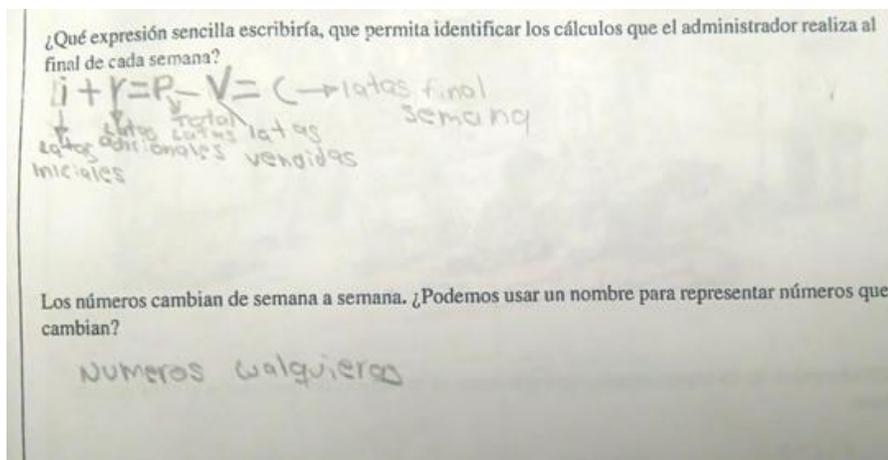


Ilustración 80. Producción de Cristofer en la Tarea 7

Con la penúltima actividad, denominada *A embaldosar* (segunda parte), se pretendía reconocer el carácter operatorio de la letra, haciendo uso de la situación de las baldosas y del trabajo realizado por los estudiantes en la primera actividad "embaldosar". Allí, al realizar una reflexión acerca de la jerarquía de las operaciones (reflexión que ya se había venido trabajando con los estudiantes), se pretendía que los estudiantes representaran de otra forma, o con otra operación, una expresión dada de acuerdo a la situación de las baldosas, aprovechando el sentido de la multiplicación como una suma reiterada.

Número de baldosas negras más número de baldosas blancas usadas en una entrada	
$3 + 3 + 4$	$\rightarrow (2 \times 3) + 4$
$4 + 4 + 4$	$\rightarrow (2 \times 4) + 4$
$5 + 5 + 4$	$\rightarrow (2 \times 5) + 4$
\vdots	\vdots
$10 + 10 + 4$	$\rightarrow (2 \times 10) + 4$
\vdots	\vdots
$n + n + 4$	$\rightarrow (2 \times n) + 4$

$10 + 10 = 2 \times 10$ Cualquier número + el mismo = $2 \times$ cualquier número $n + n = 2 \times n$	$\text{Cualquier número} + \text{Cualquier Número} = 2 \times \text{Cualquier Número}$ $n + n = 2 \times n$
--	--

Ilustración 81. Producción de Jenniffer y Cristófer en la Tarea 8

Se evidencia el reconocimiento por parte de ambos estudiantes, del carácter operatorio de la letra, así como una descripción en lenguaje natural de lo que sucede en una situación numérica, para luego simbolizarlo en lenguaje algebraico formal. Jenniffer utilizando la expresión *el mismo* y Cristófer la expresión

cualquier número pero ambos llegando a la expresión en lenguaje algebraico formal $n + n = 2x n$

En la última actividad o *actividad de cierre*, se planteó la tarea de completar un cuadro con expresiones en lenguaje natural, lenguaje algebraico y ejemplos con números naturales y números enteros negativos. Los estudiantes muestran habilidad para representar en lenguaje algebraico una expresión que se le presenta en lenguaje natural y viceversa. Y aunque tienen algunos desaciertos aritméticos al momento de evaluar la letra en los ejemplos, se observa un avance significativo en el proceso de simbolización y en el carácter operatorio de la letra, y en sí mismo al ser esta la última actividad de la secuencia, se observa un trabajo significativo en la comprensión de aspectos básicos e iniciales del álgebra escolar

Lenguaje Natural	Lenguaje Algebraico	Ejemplo Natural	Ejemplo Negativo
El doble de un número menos el triple del mismo número más 5	$2n - 3n + 5$	$n = 7$ $7 \cdot 2 - 3 \cdot 7 + 5$ $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$ $14 - 21 + 5$ $\downarrow \quad \downarrow$ $-7 + 5$ \downarrow -2	$n = -5$ $-5 \cdot 2 - (-5 \cdot 3) + 5$ $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$ $-5 \cdot 2 \quad -(-15) \quad +5$ $-10 \quad +15 \quad +5$ $\downarrow \quad \downarrow$ $-10 - 15 + 5$ \downarrow $-25 + 5 = -20$
	$p^2 + 3p + 4$	$p = 2$ $2^2 + 3 \cdot 2 + 4$ $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$ $4 + 6 + 4$ \downarrow 14	$p = 3$ $-3^2 + (3 \cdot 3) + 4$ $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$ $-9 + 9 + 4$ \downarrow 4

Nombre: Jennifer Vargas Herazo
Curso: 801
Fecha: Viernes 17 de julio

Lenguaje Natural	Lenguaje Algebraico	Ejemplos	
		Natural	Negativo
El doble de un número menos el triple del mismo número más 5	$2x - 3x + 5$	$n = 12$ $(2 \cdot 12 - 3 \cdot 12) + 5$ $(24 - 36) + 5$ $-12 + 5$ -7	$n = -3$ $(2 \cdot (-3) - 3 \cdot (-3)) + 5$ $(-6 + 9) + 5$ $3 + 5$ 8
El Cuadrado de un número más el triple del mismo número más 4	$p^2 + 3p + 4$	$n = 3$ $3^2 + 3 \cdot 3 + 4$ $9 + 9 + 4$ 22	$n = -2$ $-2^2 + 3 \cdot (-2) + 4$ $4 + (-6) + 4$ $4 - 6 + 4$ 2

Ilustración 82. Producción de Cristófer y Jennifer en la Actividad de Cierre

6. RESULTADOS Y COMENTARIOS FINALES

Durante el desarrollo de las diferentes actividades realizadas, con base en el conjunto de tareas propuestas, se evidenció un avance por parte de la mayoría de los estudiantes en relación con sus procesos de generalización de patrones, como también con sus procesos de simbolización, logrando un uso del lenguaje algebraico formal; adicionalmente, se posibilitó dotar de significado el trabajo algebraico desde diversos contextos, tanto matemáticos como relacionados con lo cotidiano. En este sentido, la propuesta implementada resultó pertinente como recurso facilitador en el proceso de iniciación al álgebra escolar y, en particular, ratifica lo planteado por Mason & otros (1999) con respecto a que la expresión de la generalidad representa una ruta hacia el álgebra.

Con la realización de esta propuesta se pudo observar que, en términos generales, los estudiantes lograron avanzar en el proceso de iniciación al álgebra, esto por medio de lo que Mason et al. (1989) denomina como una raíz del álgebra y es la generalización de patrones. Se evidenció que gradualmente lograron reconocer la generalidad en diversos contextos (numéricos, geométricos, situaciones de la vida real), así como expresarla usando símbolos literales y un lenguaje algebraico formal. Se logró que los estudiantes evidenciaran la necesidad de incluir otros símbolos, aparte de los números y los signos de las operaciones, para poder dar cuenta de lo que se le presentaba en cada situación.

Los resultados obtenidos ponen en evidencia que incrementó significativamente el porcentaje de estudiantes que logró reconocer un patrón de formación y expresarlo usando lenguaje natural, intermedio o simbólico (niveles 5, 6 ó 7), en tanto se pasó de un 25% de estudiantes que lo logró en la primera actividad (denominada *Secuencia figural*), a cerca del 75% que lo logró después de la actividad 6 (denominada *A embaldosar*); más aún, la mayoría encuentra el patrón

de formación general y lo simboliza en lenguaje algebraico formal, por lo que se clasifican en el Nivel 7, es decir, se evidenció que la aplicación de esta propuesta hasta este punto contribuyó a que la mayoría de los estudiantes pueda expresar la generalidad, en diferentes contextos, con lenguaje algebraico formal

A manera de reflexión, si bien el desarrollo de esta secuencia de actividades generó buenos resultados en cuanto al proceso de iniciación al álgebra, hay aspectos que, de acuerdo a nuestra experiencia, podrían contribuir para la obtención de mejores resultados, esto es por ejemplo, tener en cuenta que los estudiantes normalmente se les olvidan algunos conceptos, u operaciones matemáticas que es importante, buscar métodos dentro de la misma propuesta o propuestas emergentes, que propendan al fortalecimiento de estas temáticas que van a representar un mejor desarrollo de la propuesta general.

Comentarios generales. En la implementación de propuestas como la aquí reportada, como es de esperarse, resulta relevante la labor que desarrolle el docente, en tanto se requiere una clara apropiación de la propuesta a implementar, no sólo en cuanto a las tareas diseñadas sino también en cuanto a las maneras de orientar el trabajo en el aula, reconociendo los propósitos de dichas tareas, las posibilidades de los estudiantes para abordarlas, los procesos diferenciados y los tiempos requeridos. Por ejemplo, en el desarrollo de este trabajo, se evidenció un cierto direccionamiento por parte del profesor-investigador, especialmente en las dos primeras tareas, generado por un interés de lograr que los estudiantes representaran de manera simbólica el patrón de formación que pudieron reconocer (Ver), generando cierto desconcierto en varios estudiantes que aún no reconocían la necesidad o posibilidad de hacerlo; en otras palabras, se evidenció cierto “apresuramiento” por parte del profesor, en tanto insistió, desde un principio, en la obtención de una fórmula o expresión para representar la generalidad, desconociendo la importancia que desde los referentes se planteó con respecto a

los procesos previos de Ver y Decir. En tal sentido, es importante resaltar que estos procesos requieren de tiempo y resulta fundamental no sólo reconocer los diversos “ritmos” de los estudiantes sino también de espacios propicios para la interacción.

Con respecto a la forma de trabajo en el aula usada durante la aplicación de esta propuesta, es importante señalar que aunque los estudiantes no estaban acostumbrados a trabajar de esta forma (primer momento individual, segundo momento grupal y tercer momento socialización), se adaptaron rápida y asertivamente al ritmo y formas de trabajo. Aunque se pudo observar que en las primeras dos sesiones grupales y dependiendo de cómo se conformaban, algunos estudiantes no expresaban sus ideas sino que simplemente se añadían a una idea ya expuesta dejando de lado su propia respuesta; aunque al observar esta situación el profesor intervino para mediar en la situación, algunos, tal vez por su personalidad prefieren trabajar de forma individual y en el trabajo grupal, como se presentó antes, añadirse a una idea. Una de las estrategias utilizadas fue la de escoger a estos estudiantes, que se observaba que no participaban mucho en el trabajo en grupo, para que realizaran la socialización de la tercera sesión, siempre señalando que en dicha socialización estaban representando a todos los integrantes y debían hablar por todo el grupo y las conclusiones a las que todos los integrantes habían llegado; en esta situación hubo dos estudiantes que solicitaron que otro hiciera la socialización porque ellos no querían, analizando la situación se observó que no era ningún “capricho” por parte de los estudiantes, sino que en verdad no se sentían cómodos en la socialización, por lo que se decidió no insistir mucho en este sentido, pero sin dejar de observar sus avances e inquietudes. Ahora cabe aclarar que para las sesiones de socialización se trató que estas no fueran siempre iguales o con la misma actividad, unas veces se hicieron en el tablero, otras en mesa redonda, otras mediante realización de carteleras y exposiciones.

Es importante tener claro que a pesar de todas las dificultades ya sabidas, que se presentan en este contexto de la educación pública, (falta de recursos, inasistencia, deserción escolar, entre otras de índole familiar y social) este tipo de trabajo aportan de manera significativa en el proceso de aprendizaje de los estudiantes, en un contexto donde tal vez se acostumbra a hacer siempre lo mismo o enseñar de la misma manera, es relevante encontrar actividades que dinamicen el trabajo en el aula.

Para finalizar, en este escrito se desarrollan temáticas como *pensamiento algebraico*, la cual no se profundiza demasiado debido entre otros aspectos, a los objetivos de la propuesta, pero se deja la claridad que existe una extensa y actualizada bibliografía nacional e internacional acerca de esta temática, así como la caracterización de *tarea y actividad*, que contribuirían en la implementación y desarrollo de esta propuesta

Bibliografía

- Agudelo, C. (2000). *Una innovación curricular que enfoca el proceso de transición entre el trabajo aritmético y el algebraico*. Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia .
- Barajas, C., Gonzalez, J., & Mejia, L. (2000). *Interpretaciones de la letra, manifestaciones de dificultad y niveles de razonamiento en el álgebra escolar*. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Butto, C. (2005). *Introducción temprana al pensamiento algebraico: Una experiencia en la escuela primaria*. Mexico.
- Butto, C., & Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría. 113-148.
- C Collazos, L. G. (2001). Aprendizaje Colaborativo: un cambio en el rol del profesor. *Proceedings of the 3rd Workshop on Education on Computing, Punta Arenas, Chile* .
- Cardona, M. (2007). *Desarrollando el pensamiento algebraico en alumnos de octavo grado del CIIE a través de resolución de problemas*. Honduras.
- Duran, P. (1999). *Reconocimiento de patrones en secuencias numéricas y de figuras por alumnos de sexto grado* . Mexico .
- Eishner, E. (1998). *El ojo ilustrado. Indagación cualitativa y mejora de la práctica educativa*. Barcelona: Paidós .
- Godino, J., & Font, V. (2001). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Obtenido de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/7_Algebra.pdf
- Kemmis, S., & McTaggart, R. (1998). *Cómo planificar la investigación-acción*. Barcelona.
- Kieran, C., & Filloy, T. (1989). *El aprendizaje del algebra escolar desde una perspectiva psicológica*. Obtenido de Enseñanza de las ciencias: <http://die.udistrital.edu.co/node/5717>
- Küchemann, D. (Septiembre de 1978). *Algebra* (Vol. 7). Londres: Murray.

- Mason, J., Graham, A., Pimm, D., & Gower, N. (1999). *Rutas hacia el / Raíces del álgebra*. (C. Agudelo, Trad.) Tunja: Universidad pedagógica y tecnológica de Colombia.
- MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional .
- Quintana, A. M. (2006). *Metodología de la investigación científica cualitativa*. Lima.
- Rojas, P., Rodríguez, J., Romero, J., Castillo, E., & Mora, O. (1999). *La transición Aritmética - álgebra*. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.