REVISTA VIRTUAL
Universidad Católica del Norte
CATÓLICA DEL NORTE Fundación Universitaria Pioneros en educación virtual
http://revistavirtual.ucn.edu.co
No. 50 | Febrero - Mayo, 2017
ISSN-0124-5821 (en línea)

Cómo citar el artículo

Samper, C. & Toro, J. (2017). Un experimento de enseñanza en grado octavo sobre la argumentación en un ambiente de geometría dinámica. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte, 50,* 367-382. Recuperado de http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/828/1346

Un experimento de enseñanza en grado octavo sobre la argumentación en un ambiente de geometría dinámica

Carmen Samper
Matemática
Magíster en matemáticas
Profesora emérita, Universidad Pedagógica Nacional
Coinvestigadora del grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (Æ•G)
csamper@pedagogica.edu.co

Jorge Andrés Toro Uribe
Licenciado en matemáticas
Magíster en educación matemática
Docente de matemáticas, municipio de Medellín
Coinvestigador del grupo Matemática, Educación y Sociedad
andrextoro@gmail.com

Recibido: 19 de octubre de 2015.
Evaluado: 22 de julio de 2016.
Aprobado: 4 de agosto de 2016.

Tipo de artículo: reflexión resultado de investigación.

Resumen

El presente artículo reporta resultados de una investigación realizada en el marco de un trabajo de grado que se presentó como requisito para optar al título de magíster en educación matemática de la Universidad de Medellín. Se analizó la argumentación de nueve estudiantes de grado octavo de un colegio en Medellín (Colombia) cuando resolvían problemas con el apoyo del programa de geometría dinámica Cabri. Los argumentos de los estudiantes se caracterizaron usando el modelo Toulmin. Además, también se analizaron las acciones que realizó o dejó de hacer el profesor, cuya intención es favorecer la producción de argumentos. Para caracterizar los argumentos se utilizó un conjunto de categorías; unas tomadas de los referentes teóricos y otras emergentes. Como resultado de la investigación, se presentan ideas respecto al uso de geometría dinámica, la propuesta de enseñanza, los argumentos de los estudiantes y las acciones del profesor.

Palabras clave
Acciones del profesor, Actividad demostrativa, Argumentación, Experimento de enseñanza, Geometría dinámica.

A teaching experiment in eighth grade on the argumentation in a dynamic geometry environment

Abstract

This article reports results of a research developed for the thesis required by the University of Medellin (Colombia) for the Master in Mathematics Education degree (Toro, 2014). The arguments of nine eighth graders, from a school in the city of Medellin, when they solved problems using the dynamic geometry program Cabri, were analyzed. The arguments were characterized using the Toulmin model. The actions to promote the production of arguments that the teacher did or did not do were also analyzed. To characterize the arguments, some of the categories were taken from the theoretical framework and others emerged during the analysis. As a result of the research, ideas regarding the use of dynamic geometry, the teaching proposal, the students' arguments and the teacher's actions are presented.

Keywords
Argumentation, Dynamic Geometry, Proving Activity, Teacher Actions, Teaching Experiment.

Une expérience d'enseignement à la huitième année sur l'argumentation dans un environnement de géométrie dynamique

Résumé

Cet article présente les résultats de la recherche menée dans le cadre d'une thèse présentée comme une exigence de se qualifier pour la maîtrise en enseignement des mathématiques à l'Université de Medellin. On a analysé l'argumentation faite par neuf élèves de huitième année d'une école à Medellin (Colombie) lorsqu'ils résolvaient des problèmes avec l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique Cabri. Les arguments des étudiants ont été caractérisés par le modèle Toulmin. En plus, les actions que l'enseignant a fait ou n'a pas fait pour encourager la production d'arguments ont également été analysées.
Pour caractériser les arguments un ensemble de catégories a été utilisée dont certains ont été des références théoriques et d'autres émergents. En conséquence de la recherche, des idées concernant l'utilisation de la géométrie dynamique, la proposition de l'enseignement, les arguments des étudiants et des actions de l'enseignant sont présentés.

Mots-clés
Les Actions des enseignants, Les Activités de démonstration, L'Argumentation, L'expérience d'enseignement, La géométrie dynamique.

Introducción

En la comunidad de educadores matemáticos, el interés por la demostración ha ido creciendo. Diversos autores, tanto de esta disciplina como de las propias matemáticas, coinciden en señalar a la demostración como uno de los procedimientos matemáticos importantes; lo consideran como el motor que ha permitido el desarrollo de esta ciencia (Ibañes y Ortega, 2005). Por ello, abogan por incluir la demostración en el currículo de la escuela secundaria. Dado el reconocimiento de que demostrar es uno de los procedimientos de la matemática difícil de enseñar y aprender (Camargo, 2010), se espera, con lo que se expone en este artículo, poder ofrecer alternativas didácticas para su enseñanza en la educación secundaria.

Camargo (2010) destaca que interpretar, hacer o usar demostraciones es un asunto complejo. En efecto, es frecuente escuchar a los profesores de matemáticas de diversos niveles educativos quejarse sobre las dificultades que tienen sus estudiantes para comprender qué es una demostración y cómo realizarla. Llega a tanto su confusión e incertidumbre sobre cómo abordar la problemática, que deciden reducir la enseñanza de la demostración en el aula escolar lo más posible (Camargo, Samper y Perry, 2006).

Aunque las causas de esta dificultad son diversas, tiene sentido pensar que algunas se deben a dificultades para argumentar. De acuerdo con este supuesto, se planteó una investigación enfocada en analizar los argumentos de nueve estudiantes de octavo grado, quienes previamente, en su clase de geometría, habían vivido un experimento de enseñanza que pretendía favorecer la argumentación. Debido a la metodología y a las tareas propuestas por el profesor, se logró que los estudiantes participaran en acciones matemáticas asociadas a la actividad demostrativa.

Además de querer contribuir con la enseñanza y aprendizaje de la demostración en la educación básica, con este artículo se pretende impulsar la inclusión del uso de geometría dinámica para el desarrollo de las actividades de clase. A través de ejemplos de algunos de los argumentos formulados por los estudiantes, se muestra evidencia de cómo el uso de geometría dinámica se convierte en una herramienta eficaz para el aprendizaje, así como las acciones que el profesor hace para propiciar la argumentación.

El marco que sustenta el estudio realizado tiene cuatro pilares. Estos son: actividad demostrativa, argumentación, acciones del profesor, y uso de geometría dinámica. A continuación se presenta cada uno de ellos.

Actividad demostrativa

El interés de la investigación realizada era determinar cómo fueron los argumentos de los estudiantes de un curso de geometría de grado octavo en el que se trató de generar un ambiente que propiciara la argumentación. Se diseñó una propuesta de enseñanza que favoreciera la actividad demostrativa, la cual engloba dos procesos: conjeturación y justificación (Perry, Samper, Camargo & Molina, 2013).

El proceso de conjeturación tiene como finalidad la formulación de conjeturas, es decir, enunciados producto de la observación, que expresan resultados considerados como generales y posiblemente ciertos. Dentro de este proceso se encuentran acciones como: detectar propiedades y verificarlas, formular la conjetura y corroborarla, examinar si lo que se reporta en el antecedente es suficiente para obtener como consecuencia las propiedades que se mencionan en el consecuente de la conjetura, y si el consecuente incluye todas las conclusiones posibles. De otro lado, el proceso de justificación tiene como propósito la construcción de argumentos de carácter deductivo que enlazados validen la conjetura formulada, es decir, la sustenten como verdadera dentro de un sistema teórico conocido. Las acciones propias de este proceso son: seleccionar entre diferentes elementos conocidos, sean teóricos o empíricos, los que podrían sustentar la afirmación; organizarlos de manera deductiva; y formular la justificación.

La visualización, exploración y otras acciones heurísticas apoyan los procesos de conjeturación y justificación. No puede haber actividad demostrativa sin razonamiento que movilice las ideas y acciones, y sin la argumentación asociada con la que se comunican esas ideas.

Argumentación

En la literatura de educación matemática se ha utilizado el modelo de Toulmin tanto en el análisis y la documentación de argumentos como para estudiar el progreso del aprendizaje de la demostración (Fiallo, 2010). Este investigador reporta cómo utilizó este modelo para comparar y analizar la estructura de los argumentos de los integrantes de tres equipos de estudiantes cuando realizaban actividad demostrativa.

Según Fiallo (2010), el modelo de Toulmin incluye tres elementos: la aserción o conclusión que el interlocutor pretende justificar; los datos que él usa para justificar la aserción, los cuales pueden ser evidencias o hechos; y la garantía de que es una regla o un principio general que conecta los datos con la aserción. No obstante, en un esquema ampliado de este modelo se incluyen calificadores modales que matizan la aserción (quizá, probablemente, algunas veces, la mayoría, etc.). También se incluye el soporte, es decir, respaldos que permiten asegurar la justificación y los refutadores, los cuales señalan las circunstancias en que las aserciones no son ciertas.

En la figura 1 se presentan los elementos del modelo Toulmin que pueden estar presentes en un argumento, aplicados a un argumento relacionado con una situación presentada en la propuesta de enseñanza. Se pregunta por las posibles posiciones de un punto Q que no pertenece al $\overline{CD}$, pero para el cual su distancia a cada extremo del segmento sea igual.

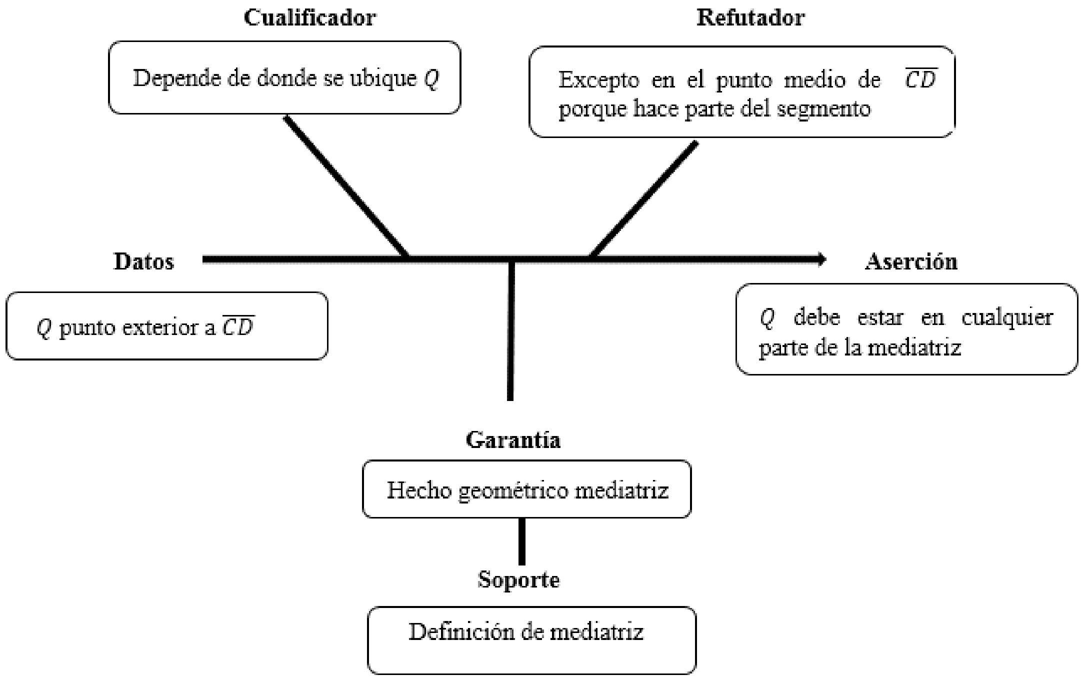

Figura 1. Ejemplo de un argumento con elementos del modelo argumentativo de Toulmin

Pedemonte (citada por Fiallo, 2010) menciona tres tipos de argumentos:

- Argumento deductivo: es el caso en el que la aserción se deduce a partir de los datos dados y de una garantía, elementos determinados de antemano.

- Argumento inductivo: a diferencia del argumento deductivo, que parte de lo general para concluir casos específicos, el proceso inductivo parte de la observación de ciertos hechos o datos, a partir de los cuales se concluye una regla. La inducción lleva a la construcción de nuevos conocimientos; se establece una generalización a partir de la observación de casos particulares de relaciones de dependencia. Los datos recogidos o los hechos observados se comparan con el fin de determinar relaciones mutuas, a fin de abstraer de ellas una regla general.

- Argumento abductivo: en la abducción, se empieza por una aserción y se procede a derivar las condiciones que podrían hacerla válida. En otras palabras, se trata de encontrar explicaciones plausibles para que lo observado o concluido realmente se dé; se buscan datos que causen el resultado. En términos del modelo Toulmin, un argumento es abductivo si teniendo la aserción, se buscan posibles garantías y se formulan posibles datos de acuerdo a ello.

Según Pedemonte (2007), hay diferencias entre una argumentación y una demostración. La demostración deductiva utiliza los elementos teóricos de manera formal, recurriendo a una teoría matemática y usando esquemas lógicamente válidos; en cambio, en la argumentación se usa el lenguaje natural y las garantías no necesariamente están apoyadas en una teoría matemática. Por ende, las aserciones puedan ser falsas. Además de lo anterior, Pedemonte aduce que la conexión lógica entre los enunciados proferidos en una argumentación deductiva difiere de aquella entre los que conforman la demostración. Cada paso de esta última puede ser descrito como un argumento deductivo, pero la estructura de la argumentación no siempre es deductiva: puede incluir argumentos otros de diferente naturaleza, tales como abductivos o inductivos.

De Gamboa (2009) indica la forma como el esquema propuesto por Toulmin proporciona una herramienta valiosa para analizar la argumentación de los estudiantes desde una perspectiva formal; incluso Pedemonte (2007) muestra cómo este modelo permite comparar la estructura de un argumento y la estructura del correspondiente paso en la demostración.

Acciones del profesor

El rol del profesor, específicamente en torno al favorecimiento o no de la argumentación de los estudiantes, es de suma importancia. Samper, Camargo y Perry (2006) señalan que la actividad demostrativa en el aula no surge de manera autónoma; y que es el profesor el encargado de propiciar la conformación de una comunidad en el aula, donde él y los estudiantes (comunidad de práctica) trabajan conjuntamente para construir conocimiento, y en la cual la argumentación juega un papel importante.

Los profesores tienen una doble responsabilidad: apoyar a los estudiantes en el desarrollo de la actividad demostrativa y generar experiencias de aprendizaje que los lleven a argumentar. Las investigadoras agrupan las acciones del profesor en cuatro. Un grupo A contiene las acciones que apuntan a la creación o consolidación de condiciones para constituir una comunidad de práctica; un grupo B se conforma de las acciones que contribuyen a iniciar, desarrollar y/o consolidar una práctica discursiva; en un grupo C se incluyen las acciones que se ocupan directamente de la formación de miembros activos de la comunidad de práctica; y en un grupo D se caracterizan acciones con las que el profesor, en calidad de experto local, aporta directamente elementos de la matemática misma a la construcción del saber de la comunidad.

Dentro de las diversas acciones que el grupo de investigación propone para el estudio que aquí se reporta, solo se escogieron aquellas que tienen que ver, según nuestro criterio, con la actividad de argumentar. En la tabla 1 se presentan cada una de las acciones congregadas en los grupos A, B y C.

Tabla 1.

Grupo A	• Proporciona espacio de reflexión. • Sugiere exploración con geometría dinámica. • Acepta el uso de geometría dinámica como medio de validación.
Grupo B	• Reacciona con aclaración o precisión. • Aprovecha intervención del estudiante. • Concreta el resultado logrado hasta el momento. • Institucionaliza el saber. • Reacciona de manera lacónica. • Declara, indica, explica o corrige el error. • Aprueba aporte del estudiante. • Repregunta.
Grupo C	• Incentiva discusión entre estudiantes. • Busca o rescata aporte del estudiante. • Exige aclaración o precisión. • Exige justificación. • Indaga.

El uso de la geometría dinámica

El uso de la tecnología, y específicamente de un programa de geometría dinámica, permite visualizar, explorar, analizar y plantear conjeturas acerca de las relaciones y propiedades observadas, así como construir demostraciones (Fiallo, 2010). Según los principios del NCTM (2003), cuando los estudiantes disponen de estas herramientas tecnológicas, pueden centrar su atención en tomar decisiones, reflexionar, razonar y resolver problemas, y no en otras cosas. Es decir, el uso de geometría dinámica amplía la serie de problemas asequibles a los estudiantes y les permite ejecutar procedimientos rutinarios con rapidez y seguridad, permitiéndoles disponer de más tiempo para construir conceptos.

La geometría dinámica ofrece la oportunidad de trabajar con construcciones geométricas en un entorno que tiene correspondencia directa con el contexto de la geometría euclidiana. Según Larios (2006), dentro de las características que diferencian una aproximación a la geometría utilizando un *software* de geometría dinámica con respecto al uso de papel y lápiz, se pueden destacar la posibilidad de definir rutinas o cadenas de construcciones bajo el nombre de macros; la de construir lugares geométricos; y, más que nada, la transformación continua de figuras en tiempo real con la herramienta arrastre. El arrastre permite la modificación directa de la forma o posición de los objetos geométricos construidos, preservando las relaciones geométricas con las que fueron construidos. Perry, Samper, Camargo y Molina (2013) exponen que, mediante esta opción, una imagen en la pantalla se puede transformar en innumerables imágenes asociadas a la figura inicial que, a la vez, permiten estudiar las propiedades invariantes y las que sufren modificaciones.

Metodología

La metodología de la investigación es de corte cualitativo porque el investigador observa la realidad en el contexto mismo en que sucede: la clase de geometría. Asimismo, el trabajo se cataloga como un experimento de enseñanza que tiene tres etapas: el diseño, la implementación y el análisis. En cuanto al diseño se elaboró una propuesta, orientada desde la actividad demostrativa, que favoreciera la argumentación. Dicha propuesta de enseñanza incluye siete actividades, así como tres tareas extraclase. La intención fue trabajar bajo el enfoque de actividad demostrativa y enseñar los contenidos de geometría propios del curso, a la vez que los estudiantes aprendían a manejar el software Cabri.

Luego, la propuesta didáctica fue implementada en la clase usual de geometría de un curso de 43 estudiantes de octavo grado de un colegio oficial en la ciudad de Medellín, aunque para la investigación misma no se iba a analizar la producción de todos los estudiantes. Durante un periodo académico, en nueve sesiones de clase, entre el 6 de mayo y el 16 de agosto de 2013, se trabajaron conceptos básicos de geometría euclidiana y teoremas relacionados con la congruencia de triángulos, con el apoyo del software geometría dinámica Cabri. A la vez que los estudiantes aprendían geometría se iban familiarizando con la función de las diferentes herramientas de este software. Cada sesión de clase constaba de una hora cincuenta minutos. Los estudiantes trabajaron en equipos colaborativos de tres personas; cada equipo contaba con un portátil el cual tenía instalado el programa Cabri. La tarea estaba consignada en la hoja de papel que se entregaba a cada equipo, quienes, una vez terminada, la almacenaban en un portafolio o carpeta.

Como la investigación es un estudio de caso, para el análisis se tomaron solamente datos de tres equipos de estudiantes cuando desarrollaban una tarea diseñada para tal fin. Esto se llevó a cabo en el mes de septiembre, en jornada extraclase. Los estudiantes fueron seleccionados teniendo en cuenta que habían sido participativos durante el desarrollo de la propuesta de enseñanza o que habían manifestado motivación con el trabajo realizado en el transcurso del periodo, así como, atendiendo a su disposición horaria. De igual forma, para estas sesiones de trabajo se contó con computadores portátiles equipados con el *software* Cabri.

Aunque se realizaron registros fotográficos y filmaciones, el ruido externo y las respuestas lacónicas o confusas consignadas por los estudiantes en las hojas de trabajo generaron la necesidad de citarlos de nuevo para hacerles una entrevista. El propósito era obtener mejores datos, a través de la indagación, para el análisis. El último paso del experimento de enseñanza es el análisis respectivo, cuestión que se describe en el siguiente apartado.

Categorías de análisis

Se analizaron los argumentos que los nueve estudiantes, trabajando en equipos de a tres, formularon al resolver la tarea final, a partir de unas categorías particulares que se describen a continuación; la primera es resultado del marco teórico y las otras son emergentes.

1. La forma como se estructura el argumento: deductivo, inductivo o abductivo.

2. La estructura del argumento: incompleto o completo.

 - Argumento incompleto: no se expresa explícitamente alguno de los tres elementos principales de un argumento.
 - Argumento completo: se mencionan los tres elementos básicos de un argumento: datos, garantía y aserción.

3. La naturaleza del argumento según la garantía: visual, legítimo y no legítimo.

 - Argumento visual: se usa como garantía lo que evidencian en la representación ya sea en el computador o en papel.
 - Argumento no legítimo: se usa como garantía una afirmación que no es elemento del sistema teórico conformado en clase, o la garantía no relaciona los datos con la aserción, o la aserción no es consecuencia de los datos.
 - Argumento legítimo: se usa como garantía un elemento del sistema teórico que sí relaciona datos y aserción.

Resultados

A manera de ejemplo del estudio realizado, se presenta el análisis de dos episodios. El primero cuando Marcos, un estudiante de uno de los equipos, presenta la solución a uno de los problemas propuestos durante la jornada extraclase; en él se analizan los argumentos de ese estudiante. El segundo, cuando el profesor realiza la entrevista a otro de los equipos colaborativos; en este se analizan las acciones del profesor. En las transcripciones de los episodios se usan corchetes cuadrados para incluir explicaciones que ayudan a entender lo que dicen profesor o estudiantes.

Primer episodio

El problema que debían resolver los estudiantes era el siguiente: Construya el $\angle B$ y la bisectriz $\overrightarrow{BX}$ de este. Sea P un punto fijo de la bisectriz, A y C puntos cualesquiera en lados diferentes del ángulo. ¿Cuándo es mínima la distancia de P a A? Escriba su conjetura.

Marcos: [Había encontrado el punto A en el lado del ángulo para el cual la distancia a P es mínima sin determinar qué propiedad especial tenía el segmento PA. El profesor le preguntó si existía un punto correspondiente en el otro lado del ángulo con la misma condición.] Sí y creo que van a ser iguales, porque esta es la bisectriz. [Construye en Cabri el $\overline{PC}$ y arrastra el punto C hasta encontrar el valor mínimo. Confirma que el valor sí es igual al obtenido para el segmento anterior]. Entonces son congruentes y debe haber alguna relación entre los ángulos; deben ser iguales [mide $\angle BAP$ y $\angle BCP$, encuentra valores cercanos pero no iguales].

Profesor: ¿Qué encontraron?

Estudiantes: [Muestran la representación en la pantalla]

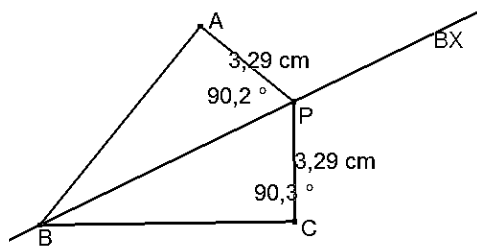

Figura 2. Representación que el equipo de Marcos hace de la situación geométrica

Profesor: ¿Tienen ángulos de 90°?

Marcos: Sí; son rectos.

Profesor: ¿Y qué propiedad tienen los ángulos de 90°?

Marcos: [Revisa la copia del sistema teórico que tiene en su carpeta, percatándose los segmentos son perpendiculares cuando hay ángulos de 90°] Ah, entonces $\overline{PC}$ es perpendicular con $\overline{BC}$ y $\overline{PA}$ con $\overline{BA}$ y esa es la mínima distancia].

Vemos cinco argumentos en el episodio anterior que detallamos a continuación. A la vez, consignamos la clasificación de cada uno, de acuerdo con las categorías presentadas anteriormente.

Argumento 1 (deductivo, incompleto, no legítimo)
Datos: P es un punto de la bisectriz.
Garantía: no la da.
Aserción: son congruentes los lados [$\overline{PA}$ y $\overline{PC}$].

Argumento 2 (abductivo, incompleto, no legítimo)
Datos: deben ser congruentes $\angle BAP$ y $\angle BCP$.
Garantía: no la da.
Aserción: son congruentes los lados.

Argumento 3 (deductivo, completo, legítimo)
Datos: ángulos de medida 90°
Garantía: no la dan.
Aserción: los ángulos son rectos.

Argumento 4 (deductivo, completo, legítimo)
Datos: los ángulos son rectos.
Garantía: definición de segmentos perpendiculares.
Aserción: $\overline{PC}$ es perpendicular al $\overline{BC}$ y $\overline{PA}$ al $\overline{BA}$.

Argumento 5 (inductivo, completo, visual)
Datos: $\overrightarrow{BX}$ bisectriz de $\angle B$, P un punto de la bisectriz, A y C puntos en lados diferentes del ángulo, $\overline{PC} \perp \overline{BC}$ y $\overline{PA} \perp \overline{BA}$.
Garantía: visual.
Aserción: BC y BA son la mínima distancia (*BA* es la notación usada para indicar la medida de la longitud del $\overline{BA}$).

Se observa un argumento abductivo en el momento en que el estudiante se percata de la igualdad de la distancia mínima, y cree que es consecuencia de la congruencia del $\angle BAP$ con el $\angle BCP$; sin embargo, es incompleto pues no se presenta la garantía. En relación a los argumentos deductivos, se observa que Marcos anticipa la relación, al percatarse de que tanto la mínima distancia de P a A como la de P a C se darán cuando estos segmentos son perpendiculares a cada lado del ángulo. De estos argumentos, uno es incompleto y los otros dos completos. Y el último es un argumento inductivo, completo y visual: parten de una construcción que incluye los datos, encuentran una aserción y se valen de lo que observan en la pantalla del computador como garantía.

Segundo episodio

La transcripción que sigue corresponde a la entrevista que le hizo el profesor al equipo conformado por Juliana, Camilo y Julio, buscando que aclararan su respuesta escrita a la pregunta: N es el punto medio del $\overline{TS}$. ¿Es $NT > NS$?

1.	Profesor:	[Ilustra la situación que corresponde al problema propuesto a los estudiantes: N es el punto medio del $\overline{TS}$].

Figura 3. Representación de la situación realizado por el equipo de Juliana, Camilo y Julio

Nos preguntan si $NT > NS$

2. Juliana: No. Eso es falso.

3. Camilo: No. Son iguales.

4. Profesor: Ustedes escribieron: "no, porque se encuentra en el punto medio de $\overline{TS}$"*.* Bueno, y ¿qué es un punto medio?

5. Juliana: El que está en la mitad.

6. Profesor: Sí. Y por definición, ¿qué es un punto medio?

7. Juliana: [Busca la definición en el portafolio.] Lee: el punto T es punto medio del $\overline{SX}$, si T está entre los puntos S y X, y la longitud del $\overline{ST}$ es igual a la longitud del $\overline{TX}$.

8. Profesor: Ah bueno. Es bueno que cuando demos una respuesta acompañarla de una justificación.

9. Juliana: Entonces es mejor escribir que no, porque es la misma distancia entre N,T y N,S.

En el análisis que sigue, para indicar la intervención del profesor se coloca en paréntesis cuadrados el número de esta. En letra cursiva se consigna la acción que hizo o dejo de hacer el profesor, y en paréntesis el grupo al que pertenece dicha acción, de acuerdo con la tabla 1.

En [1], el profesor *inicia estableciendo el foco de atención* (D) de los estudiantes pues ilustró la situación dentro del cual se enmarcaba la pregunta, abriendo el espacio para que iniciaran la discusión. A continuación, en [4] *indaga* (C) como reacción a lo que dicen Juliana y Camilo; el profesor formula la pregunta, que de manera indirecta los invita a continuar interviniendo para desarrollar más su argumento y para que revisen su respuesta. Sin embargo, el profesor no *abrió un espacio* (C) para poner en consideración las posibles posiciones diferentes de los miembros del equipo, para que manifestaran su acuerdo o desacuerdo con Juliana. En [6], el profesor *aprueba el aporte* (B) de Juliana e igualmente *indaga* (C), ya que pregunta por la consecuencia de lo que ella propone. En la intervención [8], el profesor realiza un comentario que *da pautas sobre cómo se trabaja en matemáticas* (D) dentro de un sistema axiomático, específicamente exigiéndoles a los estudiantes incluir la justificación de cada una de sus respuestas. Pero deja de hacer acciones como *incentivar la discusión* (C) de los estudiantes involucrando aún más sus aportes, con el fin de que además de tener una buena comunicación, sean capaces de defender su posición frente a sus compañeros; y tampoco *concreta el resultado* logrado (B) para asegurar que los estudiantes hayan comprendido.

Conclusiones

A continuación se mencionan conclusiones, resultado del análisis de las sesiones con los tres equipos colaborativos de estudiantes y de las entrevistas.

Respecto al uso de la geometría dinámica

El uso de la geometría dinámica promueve un cambio en el método de enseñanza y una nueva forma de aprendizaje, que puede resultar más efectiva que otras metodologías porque favorece la argumentación. Los estudiantes, por medio de la función arrastre, exploran los diferentes objetos y sus atributos; se valen de la herramienta medida para encontrar posibles regularidades. Se debe emplear la geometría dinámica en actividades bien estructuradas, que apuntan a la construcción del conocimiento y favorecen la argumentación. No se considera que haya sido un obstáculo el uso de este *software*, porque los estudiantes estaban acostumbrados a manipular esta herramienta. Esto se debe a que durante tres meses se realizó un aprendizaje paulatino del uso de Cabri al desarrollarse, en forma simultánea, la propuesta de enseñanza. Los estudiantes no solamente aprendieron a usar las diferentes herramientas y funciones de Cabri, sino que también aprendieron a interpretar la información que las figuras representadas con Cabri proveían, para así identificar las propiedades geométricas de las figuras.

Respecto a la actividad demostrativa y la propuesta de enseñanza

La propuesta de enseñanza, como parte del experimento llevado a cabo en esta investigación y enmarcada dentro de la actividad demostrativa, se convierte en un aporte para el profesor de matemáticas. Se puede aplicar en un curso cuya intencionalidad no solo sea enseñar conceptos básicos de geometría euclidiana, como la congruencia de triángulos, sino que también tenga el propósito de desarrollar habilidades argumentativas de los estudiantes y direccionar el camino para que pasen de argumentaciones deductivas a demostraciones deductivas.

Enseñar a demostrar bajo el modelo tradicional puede convertirse en un trabajo difícil para el profesor y es posible que sean pocos los estudiantes que aprenden a demostrar. Pero si, antes de abordar la demostración, hay un acercamiento a la argumentación, donde haya construcción y exploración, y si se exige descubrir propiedades, producir conjeturas, comunicarlas, y justificarlas, la posibilidad de que los estudiantes comprendan qué es demostrar y cómo justificar aserciones puede ser mayor. La demostración no debe estar incluida solo en la educación superior. Como se ha mostrado con este trabajo, los estudiantes de educación secundaria también pueden producir justificaciones, más aún cuando el profesor realiza las acciones de la tabla 1 con el fin de propiciar la justificación, teniendo a la vez en cuenta el ritmo de aprendizaje de ellos.

Respecto a los argumentos de los estudiantes

Otro de los aportes de este estudio radica precisamente en las categorías con las que fueron analizados los argumentos. Aquellas relacionadas con la forma como se estructura el argumento —deductivo, inductivo y abductivo— son tomadas de los referentes teóricos. Pero las categorías relacionadas con la estructura del argumento, completo e incompleto, y aquellas relacionadas con la naturaleza de la garantía: argumento visual, argumento legítimo y argumento no legítimo, son emergentes; surgieron durante el análisis de la producción de los estudiantes.

Se pudo observar que, en diversas ocasiones, los estudiantes se valen de garantías visuales; las utilizan particularmente en las tareas con Cabri y cuando deben hacer la conjetura. Empero, no podría catalogarse este hecho como negativo: en la medida en que los estudiantes logren valerse del contenido matemático involucrado, más que de la parte visual, que suele resultar engañosa en algunos casos, se logrará que formulen argumentos aceptados dentro de la comunidad matemática. Es decir, hay que llevar a que el estudiante trascienda de los argumentos con garantía visual a argumentos deductivos completos legítimos; la visualización es una competencia muy importante en geometría y aún más para iniciar la argumentación, pero es necesario que los estudiantes entiendan que deben ir transformando sus argumentos en argumentos teóricos porque solo así se puede asegurar que la aserción es válida en un sistema teórico y que no depende de la representación que se está usando.

Ahora bien, el análisis de los resultados mostró que se puede favorecer la argumentación tanto con el uso de la geometría dinámica y sin su uso. Ello muestra que Cabri puede convertirse en una herramienta potente para suscitar la producción de argumentos, y por ende de demostraciones. Ya sea con el uso o no de a geometría dinámica, lo importante es presentar tareas bien diseñadas a los estudiantes en donde se exija la justificación y que capte su interés, acompañadas además de una adecuada gestión del profesor. Aun cuando no se encontró una diferencia grande entre la cantidad de argumentos de un tipo u otro producidos, es posible que si no se hubiera usado Cabri su cantidad habría disminuido.

Respecto a las acciones del profesor

A pesar de la intención del profesor de promover la argumentación a través de la actividad demostrativa, le hizo falta estar más atento y sensible a las oportunidades que se presentaron para promover, precisamente, la producción de argumentos; de darles a los estudiantes la oportunidad de argumentar aún desde sus creencias. Además, en ocasiones, como el profesor espera una respuesta específica, no se detiene a pensar en el aporte del estudiante y cómo lograr que se vaya acercando a la respuesta esperada. Quizá con cierto entrenamiento del profesor o la posibilidad de observar clases en la cual se promueve la argumentación, antes de asumir el reto de usar una metodología en clase distinta a la acostumbrada, se hubieran obtenido mejores resultados. No obstante, dada la cantidad de argumentos producidos, esto es una señal de que las acciones del profesor también conllevaron a que los estudiantes argumentaran.

Referencias

Camargo, L., Samper, C. & Perry, P. (2006). Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemática con el uso de programas de geometría dinámica. *Lecturas Matemáticas, Volumen especial,* 371 – 383.

Camargo, L. (2010). *Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria* (Tesis doctoral). Universidad de Valencia, Valencia.

De Gamboa, G. (2009). *Prácticas e interpretaciones en torno a la argumentación matemática de futuros maestros de educación primaria.* (Tesis de maestría). Universitat Autonoma de Barcelona, Barcelona.

Fiallo, J. (2010). *Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica* (Tesis doctoral). Universidad de Valencia, Valencia.

Ibañes, M. & Ortega, T. (2005). Dimensiones de la demostración matemática en el bachillerato. *Revista Números, 61,* 19-40.

Larios, V. (2006). *Demostrar es un problema o el problema es demostrar*. Recuperado de http://es.scribd.com/doc/35231051/Demostrar-es-un-problema-o-el-problema-es-demostrar.

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analyzed*? Educational Studies in Mathematics, 66,* 23-41.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L. & Molina, O. (2013). Innovación en un aula de geometría de nivel universitario. En Samper, C., y Molina, O. (Ed.), *Geometría plana un espacio de aprendizaje.* Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Samper, C., Camargo, L. & Perry, P. (2006). *Geometría plana un espacio de aprendizaje*. Reporte de investigación presentado al CIUP. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Toro, J. (2014). *Acercamiento a la argumentación en un ambiente de geometría dinámica: grado octavo* (tesis de maestría). Universidad de Medellín, Medellín.