Frenatura di un impianto montacarichi

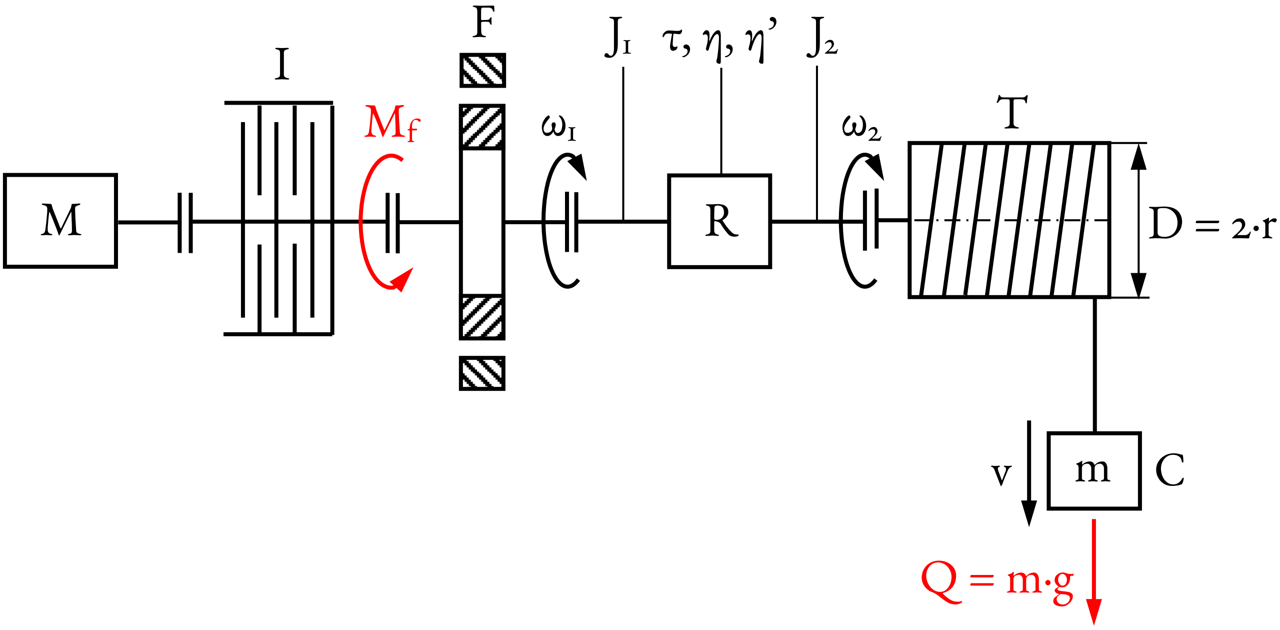

Figura 1: schema funzionale dell'impianto montacarichi.

Legenda: **M** = motore, **I** = innesto, **F** = freno, **R** = riduttore, **T** = tamburo, **C** = carico.

1. Elenco simboli

Q	[kN]	Forza peso del carico da sollevare
D	[m]	Diametro del tamburo
$\mathbf{v_0}$	[m/s]	Velocità di discesa del carico (positiva se verso il basso), all'inizio della frenatura
$\mathbf{\Delta t}$	[s]	Tempo di frenatura richiesto
$\mathbf{J_1}$	[kg·m²]	Momento di inerzia complessivo dei componenti a monte del riduttore
$\mathbf{J_2}$	[kg·m²]	Momento di inerzia complessivo dei componenti a valle del riduttore
$\boldsymbol{\omega_1}$	[rad/s]	Velocità angolare dei componenti a monte del riduttore
$\boldsymbol{\omega_2}$	[rad/s]	Velocità angolare dei componenti a valle del riduttore
$\boldsymbol{\tau}$		Rapporto di trasmissione del riduttore [1]

[1] Rapporti di trasmissione e rendimenti sono quantità adimensionali e quindi hanno le dimensioni di un numero puro.

η	Rendimento del riduttore nel moto diretto
η'	Rendimento del riduttore nel moto retrogrado

2. Consegna

Determinare la coppia frenante **M_f** che il freno **F** deve esercitare per arrestare l'impianto montacarichi schematizzato in *Figura 1* in un tempo **Δt**. Si ipotizzi che durante la manovra di arresto la coppia frenante sia costante e la coppia fornita dal motore sia nulla; si supponga inoltre che all'inizio della manovra stessa il carico stia scendendo con velocità **v_0**.

3. Dati

		$0 \leq S \leq 1$	$2 \leq S \leq 3$	$4 \leq S \leq 5$	$6 \leq S \leq 7$	$8 \leq S \leq 9$
Q	[kN]	5	7.5	10	12.5	5
D	[m]	0.5	0.6	0.7	0.4	0.5
v_0	[m/s]	0.8	0.9	1	1.1	0.8
Δt	[s]	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
J_1	[kg·m²]	1	1	1	1	1
J_2	[kg·m²]	4	6	8	10	6
τ		0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
η'		0.85	0.9	0.85	0.9	0.85

I dati del problema da risolvere per il quaderno degli esercizi cambiano da studente a studente, come indicato nella tabella sopra; **S** = ultima cifra del numero di matricola.

4. Ipotesi di partenza

- **M_f** è costante durante la fase di frenatura;
- Il motore non eroga coppia e il sistema si muove di moto retrogrado, cioè la potenza motrice viene fornita dal peso **Q**;
- Si dimensiona il freno quando il carico sta scendendo, cioè con velocità **v** rivolta verso il basso (vedi *Figura 2*). Siccome durante una fase di frenatura il carico rallenta, l'accelerazione **a** è negativa e dunque ha verso opposto a **v**: in questo caso allora **a** è rivolta verso l'alto. La forza di inerzia del carico, data da **$F_i = - m \cdot a$**, è quindi verso il basso e concorde con la forza peso **Q**: pertanto, la forza di trazione nel cavo è **$F_r = Q + F_i$**. Con analogo ragionamento si trova che, durante una fase di frenatura con il carico che sta salendo, la forza nel cavo è **$F_r = Q - F_i$**; dunque la condizione studiata è quella più gravosa e il calcolo è a favore di sicurezza.

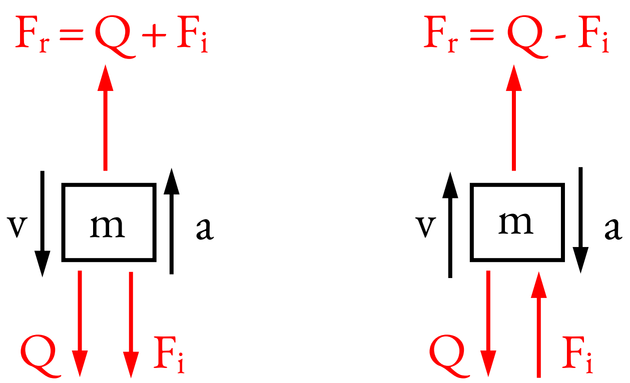

Figura 2: condizioni di carico durante una fase di frenatura,
mentre il carico sta scendendo (a sinistra) o salendo (a destra).

5. Flusso di potenza

Il sistema è composto da molti elementi, che si muovono con velocità (di rotazione o traslazione) differenti e sui quali agiscono forze e coppie dovute a vari fattori. In questo caso, anziché scrivere le equazioni di equilibrio delle forze su ciascun elemento, conviene studiare il flusso complessivo di potenza, in ingresso e in uscita, per l'intero sistema; lo schema di tale flusso è in *Figura 3*.

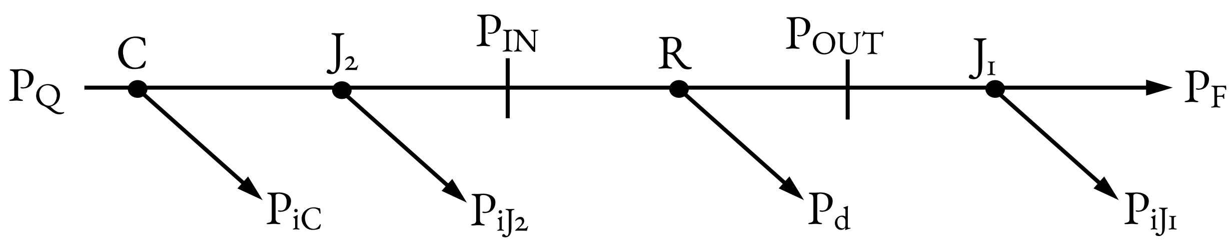

Figura 3: flusso di potenza nel sistema. Siccome il moto è retrogrado, la potenza viene immessa non dal motore, ma dal carico. L'ingresso **IN** è a valle del riduttore **R**, mentre l'uscita **OUT** è a monte.

La potenza motrice in ingresso al sistema, data dal carico, è

$$P_Q = Q \cdot v = m \cdot g \cdot v \qquad [1]$$

La potenza dovuta alla forza d'inerzia del carico traslante è

$$P_{iC} = F_i \cdot v = m \cdot a \cdot v = m \cdot \dot{v} \cdot v \qquad [2]$$

ed è una potenza assorbita dal carico **C** quando decelera [2].

I componenti rotanti a valle del riduttore sono l'albero lento 2 del riduttore stesso, il tamburo e il giunto tra essi montato; dette $\boldsymbol{\omega_2}$ e $\boldsymbol{\dot{\omega}_2}$ le loro velocità e accelerazione angolari, la potenza dovuta alla loro coppia d'inerzia $\mathbf{C_{i2}}$ è allora

[2] Qui **a** è l'accelerazione del carico **C** e si scrive $\mathbf{a} = \mathbf{d(v)/dt} = \dot{\mathbf{v}}$.

$$P_{iJ2} = C_{i2} \cdot \omega_2 = J_2 \cdot \dot{\omega}_2 \cdot \omega_2 \tag{3}$$

Anche questa è una potenza assorbita, come P_{iC}, che si sottrae quindi a P_Q. La potenza complessiva in ingresso al riduttore, ossia dal lato del carico, è allora

$$P_{IN} = P_Q - P_{iC} - P_{iJ2} \tag{4}$$

Si consideri adesso quello che accade all'uscita, ossia dal lato del freno. Si ha una coppia d'inerzia dovuta ai componenti a monte del riduttore (freno, innesto, motore e giunti), che dà luogo a una potenza assorbita

$$P_{iJ1} = C_{i1} \cdot \omega_1 = J_1 \cdot \dot{\omega}_1 \cdot \omega_1 \tag{5}$$

(si confronti la [5] con la [3]). Infine si ha anche la potenza assorbita dal freno, ossia

$$P_F = M_f \cdot \omega_1 \tag{6}$$

La potenza totale in uscita dal riduttore, cioè dal lato del freno, deve essere quindi

$$P_{OUT} = P_{iJ1} + P_F \tag{7}$$

Tra P_{IN} e P_{OUT} vale inoltre la relazione

$$\eta' \cdot P_{IN} = P_{OUT} \tag{8}$$

dove η' è il rendimento di moto retrogrado, visto che il sistema si muove appunto di moto retrogrado. Si ricordi che in tutti i casi deve essere $0 \leq \eta' \leq 1$, ossia la potenza in uscita è minore di quella in entrata: la differenza $P_{IN} - P_{OUT} = P_D$ equivale alla potenza dissipata nel riduttore, a causa delle varie azioni dissipative.

Infine, mettendo insieme le eq. da [1] a [8], si può scrivere

$$\eta' \cdot (mgv - m\dot{v}v - J_2\dot{\omega}_2\omega_2) = J_1\dot{\omega}_1\omega_1 + M_f\omega_1 \tag{9}$$

6. Riduzione all'albero motore

Lo svantaggio dell'equazione [9] è che include tre velocità diverse (ω_1, ω_2, v), insieme alle rispettive accelerazioni; tuttavia queste velocità non sono in realtà indipendenti tra di loro, perché il sistema è a un grado di libertà. Conviene pertanto ridurre il sistema a uno dove tutte le potenze sono espresse in funzione di una sola di queste velocità. Decidiamo arbitrariamente di ridurre tutto a un sistema ruotante a velocità angolare ω_1. Sappiamo già che

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} \Rightarrow \omega_2 = \tau \cdot \omega_1 \tag{10}$$

e

$$v = r \cdot \omega_2 = \frac{D}{2} \cdot \omega_2 = \frac{D \cdot \tau \cdot \omega_1}{2} \tag{11}$$

Per quanto riguarda le accelerazioni, abbiamo

$$\omega_2 = \tau\omega_1 \Rightarrow \dot{\omega}_2 = \frac{d}{dt}(\tau\omega_1) = \tau\dot{\omega}_1 \tag{12}$$

(si ricordi che il rapporto τ è costante); similmente, dalla [11] ricaviamo

$$\dot{v} = \frac{D\tau\dot{\omega}_1}{2} \qquad [13]$$

Sostituendo le espressioni da [10] a [13] in [9] troviamo

$$\eta'\left(mg\cdot\frac{D\tau\omega_1}{2} - m\frac{D\tau\dot{\omega}_1}{2}\cdot\frac{D\tau\omega_1}{2} - J_2\cdot\tau\dot{\omega}_1\cdot\tau\omega_1\right) = J_1\dot{\omega}_1\omega_1 + M_f\omega_1 \qquad [14]$$

e dopo semplici passaggi algebrici (e dividendo entrambi i membri per ω_1) si trova

$$mg\eta'\frac{D\tau}{2} - M_f = \left(J_1 + \eta' J_2\tau^2 + \eta' m\frac{D^2\tau^2}{4}\right)\dot{\omega}_1 \qquad [15]$$

Definiamo adesso un momento di inerzia equivalente J_{eq} come

$$J_{eq} = J_1 + \eta' J_2\tau^2 + \eta' m\frac{D^2\tau^2}{4} = J_1 + \eta'\tau^2\left(J_2 + m\frac{D^2}{4}\right) \qquad [16]$$

e una coppia motrice equivalente $M_{m,eq}$

$$M_{m,eq} = mg\eta'\frac{D\tau}{2} = \eta'\tau\frac{Q\cdot D}{2} \qquad [17]$$

e riscriviamo la [15] come

$$M_{m,eq} - M_f = J_{eq}\dot{\omega}_1 \qquad [18]$$

L'eq. [18] è l'equazione di D'Alembert per un sistema a un grado di libertà che ruota a velocità ω_1 e che è equivalente al sistema completo considerato. Tale sistema equivalente è rappresentato in *Figura 4.*

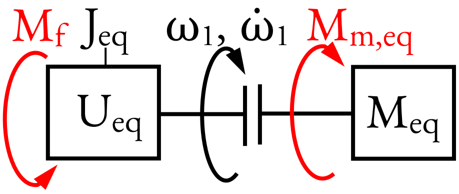

Figura 4: schema del sistema ridotto equivalente, dove U_{eq} è l'equivalente del carico e M_{eq} l'equivalente del motore (in condizioni di moto retrogrado). Si confronti con *Figura 1.*

Si noti che la coppia motrice agente sul tamburo, ossia $M_m = ½\, Q\, D$, è stata sostituita con una coppia motrice equivalente $M_{m,eq} = \eta'\tau M_m$ all'albero motore; siccome η' e τ, in generale, sono <1, vale $M_{m,eq} < M_m$. In altre parole la presenza del riduttore fa sì che la coppia ridotta all'albero motore sia minore di quella applicata al tamburo.

Si capisce ora perché si è deciso di montare il freno tra motore e riduttore: se infatti il freno venisse montato tra riduttore e carico, la coppia frenante M_f verrebbe anch'essa ridotta, dando luogo a una coppia frenante equivalente $M_{f,eq} < M_f$. Questo vorrebbe dire, a parità di altre condizioni, che dovremmo scegliere un freno capace di erogare una coppia frenante massima più alta, aumentando inutilmente il costo.

7. Equazione del moto

Torniamo ora alla [18] e notiamo che, una volta definiti i parametri del sistema (vedi Sezione 3), le tre quantità $\mathbf{J_{eq}}$, $\mathbf{M_{m,eq}}$ e $\mathbf{M_f}$ sono costanti e (tranne $\mathbf{M_f}$) già note. L'equazione [18] ci dice allora che l'accelerazione angolare $\dot{\boldsymbol{\omega}}_1$ è costante e vale

$$\dot{\omega}_1 = \frac{M_{m,eq} - M_f}{J_{eq}} \qquad [19]$$

Se l'accelerazione, che è la derivata della velocità $\boldsymbol{\omega_1}$, è costante, la velocità varia linearmente in funzione del tempo, ossia

$$\omega_1(t) = A + B \cdot t \qquad [20]$$

dove **A** e **B** sono costanti e vale

$$\frac{d}{dt}(\omega_1) = B = \dot{\omega}_1 = \frac{M_{m,eq} - M_f}{J_{eq}} \qquad [21]$$

La velocità iniziale, al tempo **t =** 0, è

$$\omega_1(0) = A = \frac{2v_0}{D\tau} \qquad [22]$$

dove si è usata l'eq. [11] per esprimere la velocità angolare iniziale all'albero motore in funzione della velocità iniziale $\mathbf{v_0}$ di discesa del carico.

Vogliamo, come detto nella definizione del problema, trovare il tempo $\mathbf{\Delta t}$ necessario al sistema per fermarsi; da [20] si trova che

$$\omega_1(\Delta t) = A + B \cdot \Delta t = 0 \Rightarrow \Delta t = -\frac{A}{B} \qquad [23]$$

e inserendo le [21] e [22] infine, dopo qualche passaggio algebrico,

$$\boxed{\Delta t = -\frac{A}{B} = \frac{2v_0}{D\tau}\frac{J_{eq}}{M_f - M_{m,eq}}} \qquad [24]$$

Poiché $\mathbf{\Delta t}$ è un dato del problema, possiamo ora trovare il valore di $\mathbf{M_f}$ che consente di frenare il sistema nel tempo richiesto, avendo inserito nella [24] i valori di $\mathbf{J_{eq}}$ e $\mathbf{M_{m,eq}}$ dati da [16] e [17].