Accoppiamento motore-utilizzatore

1. Macchine motrici e operatrici

Si consideri un generico impianto composto da una macchina motrice (detta anche motore), che eroga energia meccanica, accoppiata a una macchina operatrice (detta anche utilizzatore o carico) che invece assorbe energia meccanica per svolgere un determinato compito; vedi *Figura 1*.

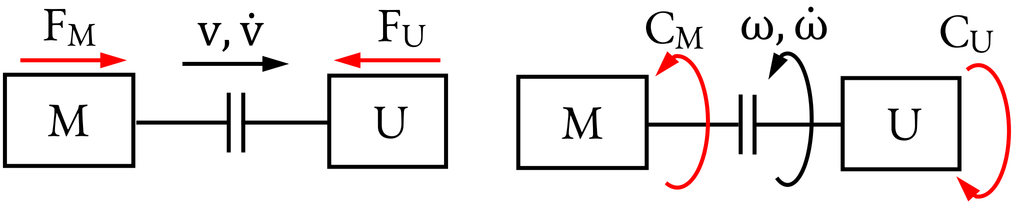

Figura 1: esempi di accoppiamento motore (M) – utilizzatore (U). Si può avere un moto traslatorio (a sinistra), dove M e U si scambiano delle forze, oppure rotatorio (a destra), dove si ha uno scambio di coppie. Forze e coppie del motore sono dette motrici; quelle dell'utilizzatore sono resistenti.

Un paio di esempi di impianti del tipo appena descritto sono:

- Un motore elettrico che muove le pale di un ventilatore domestico (utilizzatore). Qui sia il motore che l'utilizzatore sono rotativi;
- Un pistone idraulico (motore) che spinge la cabina di un montacarichi (utilizzatore). Qui invece motore e utilizzatore si muovono di moto traslatorio.

Solitamente, tra motore e utilizzatore si inseriscono altri elementi che hanno la funzione di trasmettere il moto tra i due, eventualmente modificandone le caratteristiche, come ad esempio la velocità, il tipo di movimento o le sollecitazioni (forze e coppie) che vengono scambiate.

Si pensi ad esempio a una funivia, dove il motore è collegato a una puleggia che muove una fune, a cui sono collegate le cabine. In questo caso le cabine sono l'utilizzatore da muovere; il sistema fune-puleggia trasforma la rotazione del motore nella traslazione delle cabine, trasmettendo il moto a queste ultime.

Nei casi finora descritti, l'energia va dal motore all'utilizzatore; questo è il funzionamento standard ed è detto moto diretto. Può capitare a volte, però, che il flusso di energia si inverta: avviene cioè che il motore viene trascinato dall'utilizzatore, che in questo caso introduce energia nell'impianto, anziché assorbirne.

Consideriamo ad esempio un ascensore, in un momento in cui la cabina sta salendo di piano, e supponiamo che il motore si spenga all'improvviso, ad esempio per un black-out. La coppia erogata dal motore allora si azzera e la forza peso della cabina incomincia a muovere la cabina in senso inverso a quello voluto, ossia verso il basso [1]: quello che prima era l'utilizzatore agisce adesso da motore.

In questi casi, il moto è detto retrogrado: un moto che si innesca spontaneamente quando l'azione motrice (sull'utilizzatore) diventa minore di quella resistente.

[1] Nella realtà, naturalmente, entrerebbero subito in funzione i freni di emergenza, che qui stiamo volutamente ignorando.

2. La caratteristica meccanica: il motore

Si consideri ora un semplice impianto come quello mostrato in *Figura 1*, a destra [2]. La coppia C_M erogata dal motore dipenderà, in generale, dalla velocità di rotazione ω del motore e così pure la coppia resistente C_U. L'andamento della coppia (richiesta o fornita) da una macchina (motrice o operatrice), in funzione della velocità, prende il nome di caratteristica meccanica.

Tale andamento di coppia cambia a seconda del tipo di macchina in esame, come mostrato di seguito.

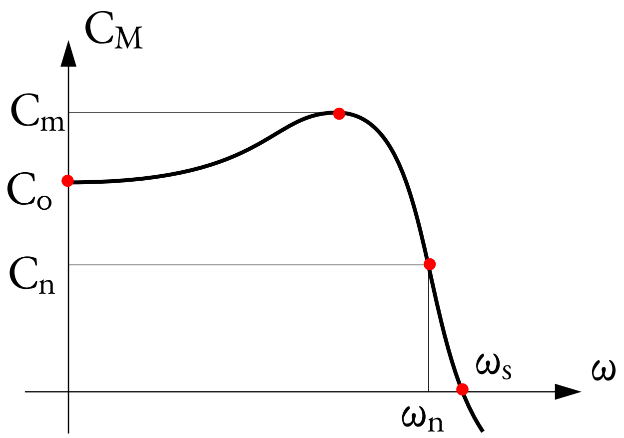

Figura 2: curva di coppia tipica per un motore elettrico asincrono trifase.

In *Figura 2* si mostra indicativamente la caratteristica meccanica tipica per un motore elettrico asincrono trifase, che è uno dei più usati in ambito industriale. Quando il motore è fermo ($\omega = 0$) la coppia erogata è C_o, detta coppia di spunto; alla velocità nominale ω_n, il motore eroga la coppia nominale C_n. Quando infine la velocità diventa maggiore di ω_s, detta velocità di sincronismo, la coppia diventa negativa; per un motore a 4 poli, la velocità di sincronismo è 1500 rpm. La coppia massima è C_m; un motore però deve lavorare principalmente con coppia $C<C_n$, quindi la velocità di rotazione è nel tratto $\omega_n<\omega<\omega_s$.

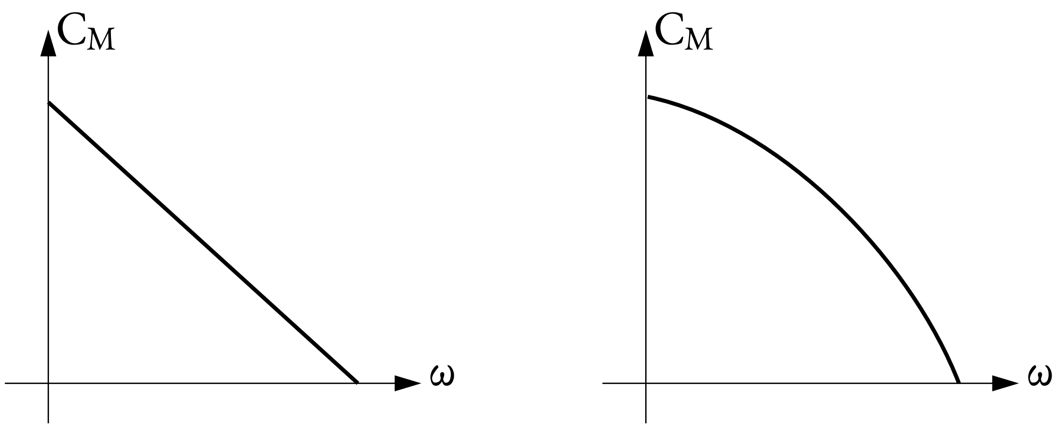

Figura 3: curve di coppia tipiche per un motore elettrico a corrente continua a eccitazione separata (a sinistra) e per una turbina a gas (a destra).

[2] Qui e nel seguito, considereremo quasi solo motori e utilizzatori rotativi (e non traslanti), in quanto più comuni.

In *Figura 3* sono mostrate, a titolo di esempio, le curve di coppia di un altro tipo di motore elettrico (in questo caso a corrente continua, mentre un motore trifase è alimentato da corrente alternata) e di un motore non elettrico (in questo caso, una turbina a gas).

Per una macchina motrice, solitamente si può anche variare la caratteristica meccanica, agendo su un parametro che viene chiamato alimentazione, come illustrato nella figura successiva.

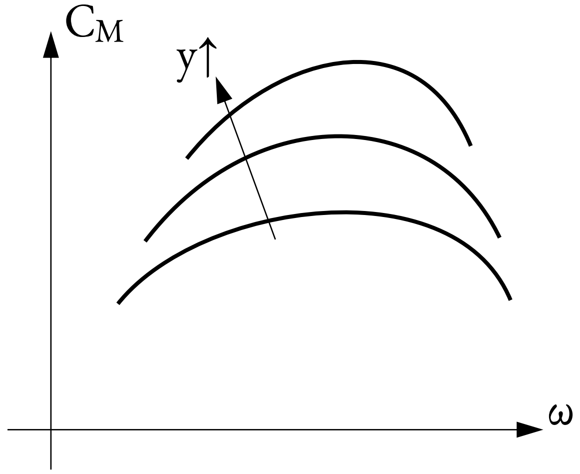

Figura 4: curve di coppia di un motore a combustione interna al variare del parametro di alimentazione **y**. Aumentando **y** la curva di coppia si sposta verso l'alto.

Il caso di *Figura 4* è relativo a un motore a scoppio come quello di un'automobile: in questo caso il parametro **y** rappresenta la posizione dell'acceleratore, che regola la composizione della miscela aria-benzina che arriva nella camera di combustione.

Cambiando il parametro (o i parametri) di alimentazione di un motore possiamo dunque cambiare la coppia che quel motore eroga a una data velocità, a seconda delle nostre esigenze. Se torniamo ad esempio a un motore asincrono come quello di *Figura 2*, la regolazione viene fatta di solito variando contemporaneamente due parametri di alimentazione: si variano cioè la tensione **V** e la frequenza **f** della corrente elettrica che alimenta il motore, in modo che il rapporto **V/f** rimanga costante. In tal caso allora la curva di coppia cambia come mostrato in *Figura 5*.

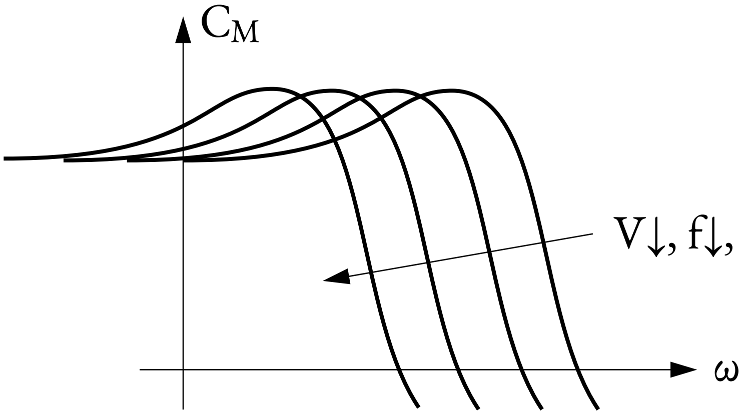

Figura 5: curve di coppia di un motore asincrono come quello di *Figura 2*, al variare di **V** ed **f** (mantenendo **V/f** costante). Se **V** ed **f** calano, le curve si spostano verso sinistra (e a parità di velocità la coppia cala).

Così come si definisce l'andamento della coppia in funzione della velocità ω, si può anche definire la curva che dà la potenza P_M erogata dal motore in funzione di ω, posto che, come noto, $P_M = C_M \times \omega$. Usiamo una convenzione in base alla quale, se P_M è positiva, il motore eroga energia meccanica; se invece P_M è < 0 vuol dire che il motore sta assorbendo energia meccanica e dunque non lavora in effetti come motore. Questa condizione può capitare durante il funzionamento, pur essendo generalmente indesiderata.

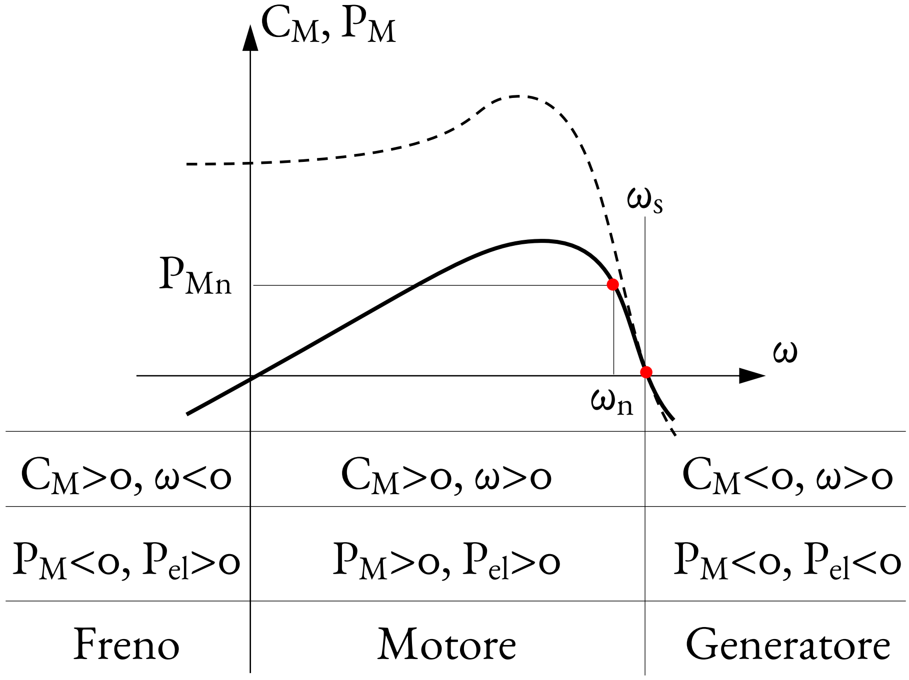

Figura 6: andamento della coppia **C** (in linea tratteggiata) e della potenza P_M (in linea continua) per un motore come quello di *Figura 2*, al variare di ω.

Si veda la *Figura 6* (sempre con riferimento a un motore asincrono), che mostra come variano la coppia e la potenza meccanica erogate in funzione della velocità di rotazione. Come si vede, $P_M = 0$ quando $\omega = 0$ (all'avviamento) o quando $C_M = 0$ (alla velocità ω_s di sincronismo); alla velocità nominale ω_n invece la potenza meccanica erogata è la potenza motrice nominale $P_{Mn} = C_n \times \omega_n$.

Nella *Figura 6* è indicato il segno, oltre che di P_M, C_M e ω, anche della potenza elettrica assorbita dal motore P_{el}, che assumiamo positiva quando è assorbita dal motore e negativa quando viene erogata dallo stesso. Nel tratto centrale, che corrisponde al funzionamento usuale, $P_M > 0$ e $P_{el} > 0$, ossia il motore assorbe energia elettrica ed eroga energia meccanica.

Nel tratto più a destra si ha invece $P_M < 0$ e $P_{el} < 0$, ossia il motore si comporta come generatore, assorbendo energia meccanica (che viene fornita in questo caso dal carico) e erogando energia elettrica, che viene mandata al circuito a cui è collegato il motore. Questo accade nel moto retrogrado (vedi par. 1).

Infine, nel tratto più a sinistra di *Figura 6*, si ha $P_M < 0$ e $P_{el} > 0$, cioè il motore sta assorbendo contemporaneamente energia meccanica ed elettrica. In questo caso il motore si comporta come un freno, assorbendo energia dalla rete elettrica per rallentare il sistema. Tutta l'energia assorbita in questo caso viene allora trasformata in energia termica, ossia in calore: il motore pertanto si scalda molto velocemente. Questa è una condizione di funzionamento estremamente dannosa per un motore e andrebbe evitata a tutti i costi.

3. La caratteristica meccanica: l'utilizzatore

Come già accennato, anche per una macchina operatrice è possibile definire una curva che fornisce la coppia resistente C_U in funzione della velocità **ω**. Nelle figure di seguito sono mostrati alcuni esempi.

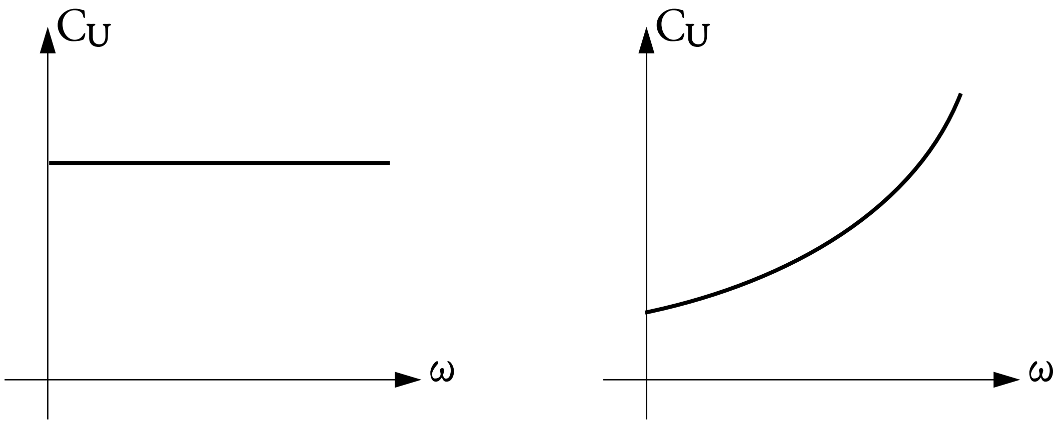

Figura 7: curve di coppia di un ascensore (a sinistra) e di un ventilatore (a destra).

Con riferimento a *Figura 7*, si vede come la caratteristica meccanica di un ascensore tipicamente non dipende dalla velocità, ma resta invece costante (a meno che non cambi il peso della cabina che viene sollevata). Un ventilatore invece ha una coppia che cambia molto al variare di **ω**; tale variazione solitamente si può esprimere con un'espressione non lineare, del tipo $C_U = A_0 + A_1 \times \omega + A_2 \times \omega^2$. Un andamento di questo tipo è tipico di macchine che lavorano con dei fluidi, come agitatori e mescolatori, mentre una macchina utensile (come un tornio) avrà una curva di coppia come quella a sinistra in *Figura 7*.

Anche la caratteristica meccanica di un utilizzatore può variare in dipendenza di un fattore accessorio, che chiameremo fattore di carico.

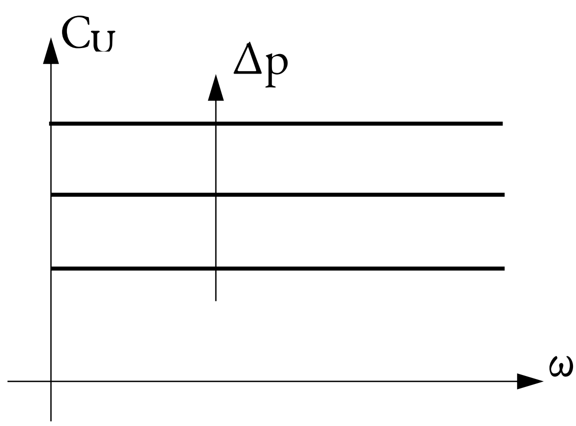

Figura 8: curve di coppia di una pompa volumetrica al variare del fattore **Δp**.
Aumentando **Δp** la curva di coppia si sposta verso l'alto.

Nell'esempio di *Figura 8*, relativo a una pompa volumetrica, il fattore di carico è dato da **Δp**, ossia dalla differenza tra la pressione in uscita e la pressione in entrata del fluido che viene pompato. **C_U** è costante al variare di **ω** e varia linearmente al variare di **Δp**.

4. La caratteristica meccanica: come si trova

Esistono alcune trattazioni teoriche che permettono di stabilire indicativamente l'andamento della coppia di una macchina (motrice od operatrice) in funzione della velocità. È noto ad esempio dalla teoria delle macchine elettriche che un motore a corrente continua ha una coppia che cala linearmente all'aumentare della velocità (vedi *Figura 3*, a sinistra). Queste trattazioni introducono però delle notevoli approssimazioni rispetto al funzionamento reale delle macchine, per semplificare l'analisi. A seconda di come viene realizzata la macchina in oggetto, dunque, la caratteristica meccanica effettiva potrà discostarsi non di poco da quella teorica (vedi *Figura 9*).

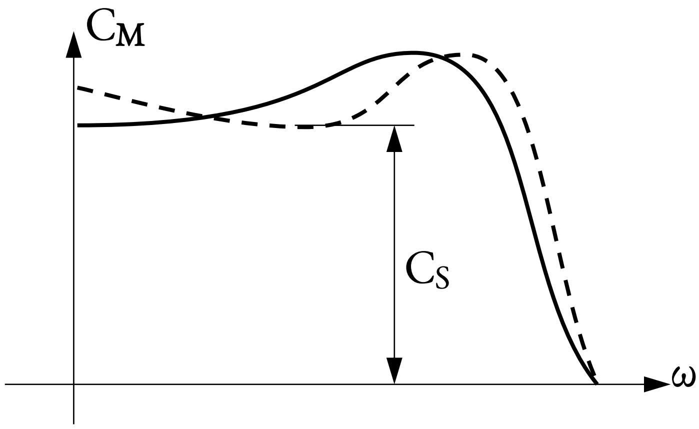

Figura 9: caratteristica meccanica di un motore asincrono a gabbia semplice (linea continua) e a doppia gabbia (linea tratteggiata). Il motore a doppia gabbia ha un andamento di coppia diverso, con una coppia di insellamento **C_S**, grazie alla diversa forma costruttiva del rotore, ma il principio di funzionamento è lo stesso per entrambi.

Per questi motivi, la caratteristica meccanica viene di solito trovata per via sperimentale. Se ad esempio si vuole trovare la caratteristica di un motore, questo viene fatto girare a diverse velocità e a ciascuna di esse si misura la coppia erogata corrispondente con una macchina di prova, eventualmente variando il parametro di alimentazione. La coppia erogata dal motore va in qualche modo assorbita: per questo si usano freni idraulici o dinamo-freni, che in questo caso sono il carico resistente (noto e misurabile) collegato al motore.

Se invece si tratta di trovare la caratteristica meccanica di una macchina operatrice, questa viene messa in movimento da un motore (solitamente elettrico) che viene fatto girare a velocità variabile. Come per i motori si possono rilevare, per ciascuna macchina, diverse curve di coppia al variare del parametro di funzionamento (fattore di carico).

Infine i dati vengono raccolti in grafici o tabelle. Si ricorda che l'unità di misura di una coppia è del tipo forza×lunghezza (ad esempio N×m, N×mm, lbf×in) e l'unità di misura di una velocità di rotazione è del tipo 1/tempo (ad esempio giri/min o rad/s).

5. Funzionamento a regime

Se realizziamo un impianto collegando una macchina motrice e una macchina operatrice queste potranno raggiungere una condizione detta di regime, a meno che perturbazioni esterne non lo impediscano.

Si dice che un impianto ha raggiunto un funzionamento a regime quando il motore e l'utilizzatore si muovono alla stessa velocità di regime ω_R che rimane costante durante un certo periodo di funzionamento. Solitamente un impianto è pensato per funzionare per la maggior parte del tempo in condizioni di regime, eccetto per le fasi di accensione e spegnimento in cui la velocità è variabile.

Se conosciamo le caratteristiche meccaniche di motore e utilizzatore, possiamo trovare la velocità ω_R. Infatti a regime il sistema è in equilibrio, quindi la coppia erogata dal motore deve essere uguale a quella assorbita dall'utilizzatore. In formule: sia $C_M(\omega, y)$ la coppia del motore, in funzione della velocità di rotazione ω e del parametro di alimentazione y. Similmente sia $C_U(\omega, z)$ la coppia dell'utilizzatore, in funzione della velocità di rotazione ω e del fattore di carico z. La velocità ω_R è data da

$$C_M(\omega_R, y)=C_U(\omega_R,z)=C_R \qquad [1]$$

dove C_R è la coppia scambiata a regime tra motore e utilizzatore, avendo fissato i parametri y e z. La velocità ω_R si può anche trovare graficamente sovrapponendo le caratteristiche meccaniche di motore e utilizzatore; vedi *Figura 10*.

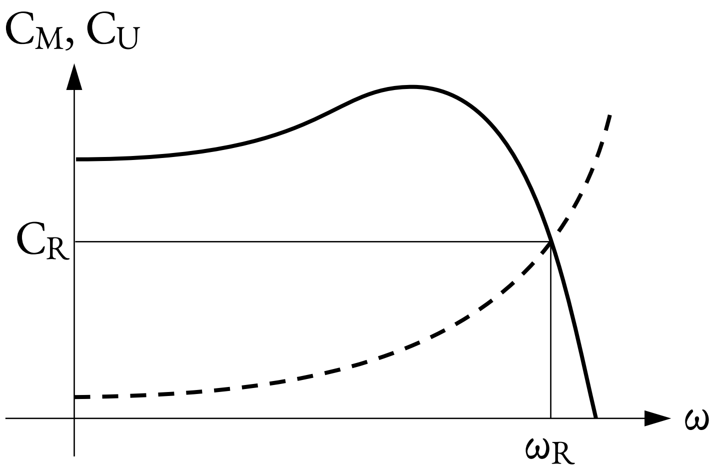

Figura 10: collegando un motore asincrono (caratteristica meccanica in linea continua) con un ventilatore (caratteristica meccanica in linea a tratto) il sistema si porta automaticamente in una configurazione di regime, nella quale ruota a velocità costante ω_R.

6. Rapporto di trasmissione

Consideriamo adesso un organo di trasmissione: questa è una macchina trasformatrice, ossia che ha energia meccanica sia in ingresso che in uscita. La funzione di una trasmissione quindi non è quella di cambiare il tipo di energia: piuttosto, serve per trasmettere il moto quando non è possibile collegare direttamente il motore con l'utilizzatore. Questo può avvenire, per esempio, perché motore e utilizzatore sono montati troppo lontani tra di loro, oppure perché le rispettive velocità di rotazione non sono compatibili. Una trasmissione infatti può anche cambiare i parametri del moto, come vedremo di seguito. In *Figura 11* è mostrato lo schema di una trasmissione simile, avente un grado di libertà.

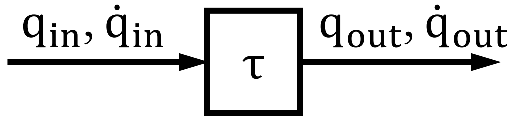

Figura 11: macchina a un grado di libertà, con rapporto di trasmissione $\boldsymbol{\tau}$.

Nella figura, q_{in} e q_{out} sono le coordinate che indicano la posizione del componente all'ingresso della trasmissione e del componente all'uscita della stessa; per esempio potrebbero essere coordinate lineari (se il componente in questione trasla) o angolari (per componenti che ruotano).

Siccome la trasmissione è a un grado di libertà, queste due coordinate non sono indipendenti tra di loro: data la coordinata in ingresso q_{in}, la coordinata in uscita q_{out} è univocamente determinata (e viceversa). Scriviamo allora che $q_{out} = q_{out}(q_{in})$ per indicare esplicitamente questa dipendenza.

Le velocità corrispondenti, in ingresso e in uscita, sono allora rispettivamente $\dot{q}_{in} = d/dt\,(q_{in})$ e così pure $\dot{q}_{out} = d/dt\,(q_{out}) = \dot{q}_{out}(q_{in}, \dot{q}_{in})$, cioè la velocità in uscita $\dot{q}_{out}$ dipende, in generale, dalla velocità in entrata $\dot{q}_{in}$ ma anche dalla posizione q_{in}.

Definiamo adesso il <u>rapporto di trasmissione</u> come

$$\tau = \frac{\dot{q}_{out}}{\dot{q}_{in}} = \frac{dq_{out}/dt}{dq_{in}/dt} = \frac{dq_{out}}{dq_{in}} = \tau(q_{in}) \qquad [2]$$

e lo indichiamo con $\boldsymbol{\tau}$. Si vede come, in generale, $\boldsymbol{\tau}$ sia funzione della posizione q_{in} e dunque variabile durante il moto.

Ad esempio, una trasmissione a puleggia o con ruote dentate avrà un rapporto di trasmissione costante; una trasmissione camma-bilanciere o con un meccanismo articolato avrà invece in generale un rapporto di trasmissione variabile, come noto.

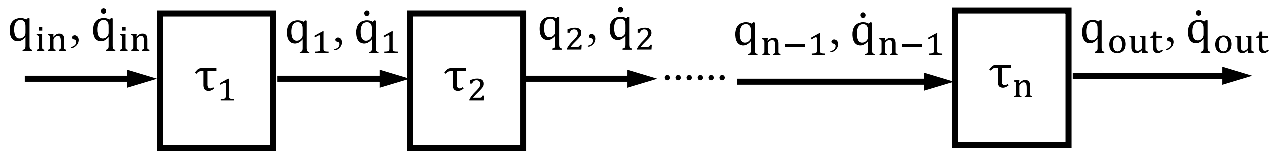

Figura 12: macchina a un g.d.l., composta di $\mathbf{n}$ trasmissioni in serie.

Si consideri ora un sistema costituito da $\mathbf{n}$ trasmissioni in serie, come quello in *Figura 12*; la coordinata in ingresso è sempre q_{in}, quella in uscita q_{out}, mentre con q_i (con $\mathbf{i}$ compreso tra 1 e $\mathbf{n}$ - 1) si indica la posizione in uscita dall'$\mathbf{i}$-esimo meccanismo intermedio. Allora si potrà scrivere $q_1 = q_1(q_{in})$, $q_2 = q_2(q_1)$ e così via fino a $q_{out} = q_{out}(q_{n-1})$. Combinando queste espressioni troviamo

$$q_{out} = q_{out}(q_{n-1}) = \cdots = q_{out}(q_{n-1}(\ldots(q_2(q_1(q_{in}))))) \quad [3]$$

e quindi l'uscita q_{out} è univocamente determinata componendo in catena **n** funzioni.

Di solito, l'elemento alla fine del sistema (quello la cui posizione è data da q_{out}) è chiamato cedente, mentre quello all'inizio (la cui posizione è q_{in}) è detto movente.

Ciascuno dei meccanismi intermedi ha un rapporto di trasmissione τ_i: pertanto dalla [2] si ricava

$$\tau = \frac{\dot{q}_{out}}{\dot{q}_{in}} = \frac{\dot{q}_{out}}{\dot{q}_{n-1}} \cdot \ldots \cdot \frac{\dot{q}_2}{\dot{q}_1} \cdot \frac{\dot{q}_1}{\dot{q}_{in}} = \tau_n \cdot \ldots \cdot \tau_2 \cdot \tau_1 \quad [4]$$

Con la [2] e la [4] si ricava facilmente il rapporto di trasmissione di qualsiasi catena cinematica.

7. Riduzione di sollecitazioni e inerzie

Consideriamo un sistema come quello nella figura di seguito, in cui per semplicità non è mostrato il motore.

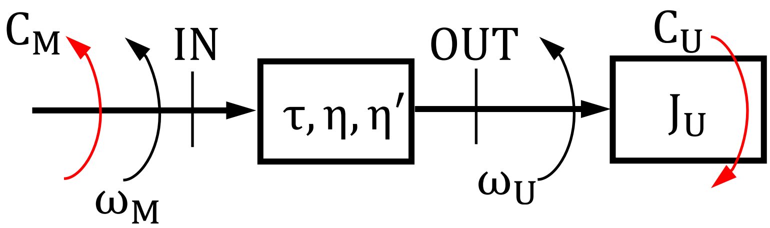

Figura 13: macchina con un carico (a destra) e trasmissione (a sinistra). Si considerano anche i rendimenti η, η'.

La potenza meccanica in ingresso P_M entra da IN e viene assorbita in parte dagli attriti interni della trasmissione (che ha rendimento η) e in parte dalla potenza P_U del carico, che esce da OUT. Il flusso di potenza è rappresentato in *Figura 14*.

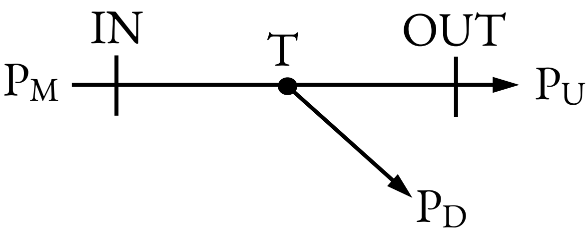

Figura 14: flusso di potenza nel sistema di *Figura 13*. P_D è la potenza dissipata per via degli attriti.

Scriviamo il bilancio di potenza in arrivo al carico **U**:

$$P_U = C_U\omega_U + \dot{E}_U = C_U\omega_U + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}J_U\omega_U^2\right) \quad [5]$$

cioè la potenza in arrivo al carico P_U viene in parte bilanciata dalla potenza resistente ($C_U \times \omega_U$) e in parte va ad accelerare l'inerzia J_U del carico, variando cioè l'energia cinetica $E_U = 1/2\, J_U \times \omega_U^2$.

Il bilancio di potenza nella trasmissione **T** è:

$$P_M = P_U + P_D = \frac{P_U}{\eta} \quad [6]$$

dove si è usata la definizione di rendimento $\eta = P_U/P_M$. Se inseriamo l'eq. [5] nella [6] troviamo

$$P_M = \frac{P_U}{\eta} = \frac{\omega_U}{\eta} C_U + \frac{1}{\eta}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} J_U \omega_U^2\right) = \frac{\omega_U}{\eta} C_U + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} J_U \cdot \frac{\omega_U^2}{\eta}\right) \qquad [7]$$

Per la definizione [2] del rapporto di trasmissione τ si ha, in questo caso,

$$\tau = \frac{\omega_U}{\omega_M} \Rightarrow \omega_U = \tau\omega_M \qquad [8]$$

e sostituendo nella [7]

$$P_M = \frac{\tau\omega_M}{\eta} C_U + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} J_U \frac{\tau^2}{\eta} \omega_M^2\right) \qquad [9]$$

Questa espressione della potenza in ingresso alla trasmissione (IN) è la stessa che si avrebbe se sostituissimo il sistema in *Figura 13* con un carico di inerzia $J_U^* = (\tau^2/\eta) \times J_U$, sul quale agisca una coppia $C_U^* = (\tau/\eta) \times C_U$, eliminando quindi la trasmissione **T**. Questo sistema equivalente è mostrato in *Figura 15*.

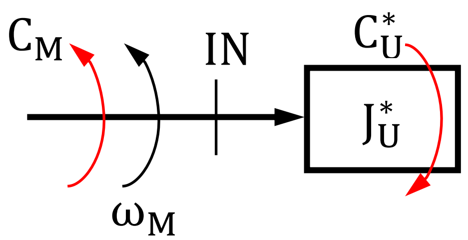

Figura 15: macchina equivalente a quella mostrata in *Figura 13*.

Infatti per questo sistema possiamo scrivere (cfr. con l'eq. [5]),

$$P_M = C_U^*\omega_M + \dot{E}_U^* = C_U^*\omega_M + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} J_U^* \omega_M^2\right) = \left(\frac{\tau C_U}{\eta}\right)\omega_M + \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\tau^2 J_U}{\eta}\right)\omega_M^2\right] \qquad [10]$$

e quindi la potenza al motore P_M è la stessa data dall'equazione [9]. Dunque il sistema in *Figura 13* può essere sostituito con il sistema equivalente in *Figura 15*, che però è più semplice: qui infatti non c'è un sistema di trasmissione tra motore e carico, che quindi girano alla stessa velocità ω_M.

Un ragionamento del tutto analogo si può fare nel caso in cui la macchina funzioni in condizioni di moto retrogrado, in cui il flusso di potenza va non dal motore al carico, ma viceversa. In questo caso bisogna solo ricordare che la definizione del rendimento, nel moto retrogrado, è $\eta' = P_M/P_U$ e dunque l'eq. [6] va modificata di conseguenza come

$$P_M = P_U - P_D = \eta' \cdot P_U \qquad [11]$$

In definitiva si possono scrivere le formule della coppia equivalente C_U^* e dell'inerzia equivalente J_U^* nei due casi (moto diretto e moto retrogrado) come

$$C_U^* = \frac{\tau}{\eta} C_U, \qquad J_U^* = \frac{\tau^2}{\eta} J_U \quad \text{(moto diretto)} \qquad [12]$$

$$C_U^* = \eta' \cdot \tau \cdot C_U, \qquad J_U^* = \eta' \cdot \tau^2 \cdot J_U \quad \text{(moto retrogrado)} \qquad [13]$$

Nell'ipotetico caso di una trasmissione ideale senza dissipazione di energia, i rendimenti η e η' sono entrambi uguali a 1 e le formule in [12] e [13] si possono semplificare a

$$C_U^* = \tau C_U, \qquad J_U^* = \tau^2 J_U \quad \text{(moto diretto e retrogrado)} \tag{14}$$

Questi sono valori estremi, che si possono prendere come prima approssimazione quando non si sanno con precisione i valori dei rendimenti, ma si sa che sono vicini a 1 (cioè al massimo teorico).

Dalle eq. da [12] a [14] è chiaro l'effetto del rapporto di trasmissione τ: se questo è molto piccolo, cioè per una trasmissione con riduzione molto spinta, la coppia resistente C_U^* e il momento d'inerzia J_U^* equivalenti saranno a loro volta piccoli. Di conseguenza il motore farà poco sforzo a muovere il sistema; per contro, dalla [8], si vede che se τ è piccolo la velocità in uscita ω_U sarà anch'essa molto bassa. Inoltre, solitamente, a τ piccoli corrispondono, per ragioni costruttive, dei rendimenti η e η' piuttosto scadenti e quindi la trasmissione dissipa molta energia.

I motori elettrici usati nelle macchine di interesse industriale solitamente erogano coppie troppo basse e girano a velocità troppo alte rispetto alle esigenze dei carichi resistenti: pertanto si è soliti, a valle di un motore, mettere un sistema di trasmissione con $\tau < 1$, che quindi riduce la velocità in uscita rispetto a quella in entrata (e al tempo stesso riduce la coppia resistente equivalente al motore, rispetto alla coppia resistente effettiva). Una tale trasmissione è detta riduttore di velocità e si parla allora di riduzione di coppie e inerzie.

Il ragionamento appena mostrato si può estendere a una generica macchina a un grado di libertà dove ci siano **n** carichi U_i, ognuno dei quali ha una sua inerzia $J_{U,i}$ e una coppia resistente $C_{U,i}$ a esso applicata, che ricevono la potenza dal motore attraverso **m** sistemi di trasmissione, collegati fra di loro in serie o in parallelo. Si possono definire, per ciascun carico, la coppia equivalente $C_{U,i}^*$ e l'inerzia equivalente $J_{U,i}^*$, sempre con le eq. [12] o [13] a seconda del tipo di moto; si deve però prendere, come rapporto di trasmissione, il prodotto τ_i dei $\tau_{i,j}$ di tutte le trasmissioni che collegano in serie il carico U_i al motore, come da eq. [4]. Il rendimento (di moto diretto η_i o di moto retrogrado η'_i) da inserire nelle eq. [12] o [13], allo stesso modo, è dato dal prodotto degli $\eta_{i,j}$ (o $\eta'_{i,j}$) di tutte le trasmissioni che collegano in serie il carico U_i al motore (per la composizione dei rendimenti di macchine in serie o in parallelo, si veda (Funaioli, et al., 2005)).

Infine, per ottenere la coppia e l'inerzia complessive equivalenti al motore si sommano rispettivamente i valori $C_{U,i}^*$ e $J_{U,i}^*$ per ciascuno dei carichi applicati. In formule quanto sopra si riassume come

$$C_{U,i}^* = \frac{\tau_i}{\eta_i} C_{U,i}, \qquad J_{U,i}^* = \frac{\tau_i^2}{\eta_i} J_{U,i} \quad \text{(moto diretto)} \tag{15}$$

$$C_{U,i}^* = \eta'_i \cdot \tau_i \cdot C_{U,i}, \qquad J_{U,i}^* = \eta'_i \cdot \tau_i^2 \cdot J_{U,i} \quad \text{(moto retrogrado)} \tag{16}$$

$$\tau_i = \tau_{i,1} \cdot \tau_{i,2} \cdot \ldots \tag{17}$$

$$\eta_i = \eta_{i,1} \cdot \eta_{i,2} \cdot \ldots \quad \text{(moto diretto)} \tag{18}$$

$$\eta'_i = \eta'_{i,1} \cdot \eta'_{i,2} \cdot \ldots \quad \text{(moto retrogrado)} \tag{19}$$

$$C_U^* = C_{U,1}^* + C_{U,2}^* + \cdots + C_{U,n}^* \tag{20}$$

$$J_U^* = J_{U,1}^* + J_{U,2}^* + \cdots + J_{U,n}^* \tag{21}$$

8. Equazione del moto

Una macchina a 1 gdl, dopo aver ridotto al motore coppie e inerzie, si riduce a un sistema come in *Figura 15*.

A questo punto scriviamo l'equazione di conservazione della potenza per il sistema equivalente ridotto:

$$\begin{aligned} C_M \omega_M = P_M = C_U^* \omega_M + \dot{E}_U^* = C_U^* \omega_M + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} J_U^* \omega_M^2\right) \\ = C_U^* \omega_M + \frac{1}{2}\frac{dJ_U^*}{dt}\omega_M^2 + \frac{1}{2} J_U^* \cdot 2\omega_M \dot{\omega}_M \end{aligned} \qquad [22]$$

(qui si è ignorata l'inerzia del motore). Dopo qualche passaggio algebrico, dividendo per ω_M, si trova

$$C_M - C_U^* = \frac{1}{2}\frac{dJ_U^*}{dt}\omega_M + J_U^* \dot{\omega}_M \qquad [23]$$

dove $\dot{\omega}_M = d/dt\,(\omega_M)$ è l'accelerazione del motore. Questa è l'equazione del moto di un sistema a 1 gdl.

In molte situazioni pratiche, si può ritenere che tutte le inerzie $J_{U,i}$ dei vari carichi collegati alla macchina rimangano costanti. Tuttavia, può darsi che J_U^* sia comunque funzione del tempo: questo capita se all'interno della macchina c'è un sistema di trasmissione con τ variabile. Si pensi ad esempio a meccanismi a quadrilatero articolato, dove il rapporto di trasmissione è funzione della posizione angolare del movente.

Se anche i τ sono tutti costanti, la [23] si può semplificare: infatti J_U^* è costante, la sua derivata è nulla e vale

$$C_M - C_U^* = J_U^* \dot{\omega}_M \qquad [24]$$

Se infine le coppie motrici e resistenti dipendono solo dalla velocità angolare (avendo fissato le variabili di comando, cioè l'alimentazione **y** e il carico **z**) il sistema può raggiungere una condizione di regime assoluto. In tal caso la velocità ω_M del motore rimane costante e pari alla velocità di regime ω_R, quindi $\dot{\omega}_M = 0$ e

$$C_M - C_U^* = 0 \Rightarrow C_M(\omega_R, y) = C_U(\omega_R, z) = C_R \qquad [25]$$

come già visto al paragrafo 5.

9. Bibliografia

Funaioli, Ettore, Maggiore, Alberto e Meneghetti, Umberto. 2005. *Lezioni di meccanica applicata alle macchine.* I. Bologna : Pàtron, 2005. p. 36-39. Vol. I - Fondamenti di meccanica delle macchine.