TEOREMA PENDEKATAN WEIERSTRASS DAN

GENERALISASINYA OLEH STONE

Skripsi

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat

Memperoleh Gelar Sarjana Sains

Program Studi Matematika

Disusun Oleh:

Aloysius Joakim Fernandez

NIM: 053114017

PROGRAM STUDI MATEMATIKA JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS SANATA DHARMA

YOGYAKARTA

2009

THE WEIERSTRASS APPROXIMATION THEOREM

AND ITS GENERALIZATION BY STONE

Thesis

Presented as Partial Fulfillment Of The Requirements

To Obtain SARJANA SAINS Degree

In Mathematics

Presented by:

Aloysius Joakim Fernandez

Student Number: 053114017

MATHEMATICS STUDY PROGRAM MATHEMATICS DEPARTMENT

SCIENCE AND TECHNOLOGY FACULTY

SANATA DHARMA UNIVERSITY

YOGYAKARTA

2009

SKRIPSI

TEOREMA PENDEKATAN WEIERSTRASS

DAN GENERALISASINYA OLEH STONE

Disusun oleh:

Aloysius Joakim Fernandez

NIM : 053114017

Telah disetujui oleh:

Dosen Pembimbing

Prof. Drs. R. Soemantri

Tanggal, 29 September 2009

SKRIPSI

TEOREMA PENDEKATAN WEIERSTRASS

DAN GENERALISASINYA OLEH STONE

Dipersiapkan dan ditulis oleh:

Aloysius Joakim Fernandez

NIM : 053114017

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji

Pada tanggal 9 Oktober 2009

dan dinyatakan telah memenuhi syarat

SUSUNAN PANITIA

	Nama Lengkap	Tanda Tangan
Ketua	: Prof. Dr. Frans Susilo, S.J.	....
Sekretaris	: M.V. Any Herawati, S.Si., M. Si.	....
Anggota	: Prof. Drs. R. Soemantri	....

Yogyakarta, 9 Oktober 2009

Fakultas Sains dan Teknologi

Universitas Sanata Dharma

Dekan FST,

Yosef Agung Cahyanta, S.T., M.T.

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 29 September 2009

Penulis

Aloysius Joakim Fernandez

Nilai tertinggi dari seorang manusia bukanlah dimana ia berpijak pada saat-saat nyaman dan menyenangkan, tetapi dimana ia berpijak pada saat-saat tantangan dan pertentangan.

Ku persembahakan tulisan ini untuk Bunda Maria, Tuhan Yesus Kristus, Kedua Orang Tua, segenap keluarga, almamater, teman dan sahabat-sahabatku.

LEMBAR PERNYATAAN PERSETUJUAN

PUBLIKASI KARYA ILMIAH UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Yang bertanda tangan di bawah ini, saya mahasiswa Universitas Sanata Dharma:

Nama : Aloysius Joakim Fernandez

Nomor Mahasiswa : 053114017

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, saya memberikan kepada Perpustakaan Universitas Sanata Dharma karya ilmiah saya yang berjudul:

TEOREMA PENDEKATAN WEIERSTRASS

DAN GENERALISASINYA OLEH STONE

Beserta perangkat yang diperlukan (bila ada). Dengan demikian saya memberikan kepada Perpustakaan Universitas Sanata Dharma hak untuk menyimpan, mengalihkan dalam bentuk media lain, mengelolanya dalam bentuk pangkalan data, mendistribusikan secara terbatas, dan mempublikasikan di Internet atau media lain untuk kepentingan akademis tanpa perlu meminta ijin dari saya maupun memberikan royalti kepada saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Yogyakarta.

Pada Tanggal: 9 Oktober 2009

Yang menyatakan

(Aloysius Joakim Fernandez)

ABSTRAK

Teorema Pendekatan Weierstrass menyatakan bahwa fungsi real kontinu yang didefinisikan pada selang tertutup dan terbatas dapat didekati secara seragam oleh barisan suku banyak. Dalam teorema ini keluarga suku banyak sebagai struktur matematika, disebut aljabar. Pentingnya Teorema Pendekatan Weierstrass adalah bahwa untuk setiap $a > 0$ terdapat suatu barisan suku banyak dalam x tanpa suku konstan, yang mendekat secara seragam ke $|x|$ pada $[-a, a]$.

Teorema Pendekatan Weierstrass diperumumkan oleh Stone, atau dikenal sebagai Teorema Stone Weierstrass. Dalam teorema ini selang tertutup dan terbatas diperluas menjadi suatu himpunan kompak dari ruang metrik. Aljabar suku banyak diperluas menjadi aljabar fungsi kontinu dengan sifat-sifat tambahan, yang didefinisikan pada himpunan kompak tersebut.

ABSTRACT

The Weierstrass Approximation Theorem states that a real continuous function which is defined on closed and bounded interval can be approached uniformly by a sequence of polynomials. In this theorem, the family of polynomials as a mathematical structure is called algebra. The importance of Weierstrass Approximation Theorem is that for every $a > 0$, there exists a sequence of polynomials in x without constant term approaches to $|x|$ uniformly in $[-a, a]$.

The Weierstrass Approximation Theorem was generalized by Stone and is known as Stone Weierstrass Theorem. In this theorem, the closed and bounded interval is generalized to a compact set in a metric space. The algebra of polynomials is generalized to an algebra of continuous function with additional properties defined on that compact set.

KATA PENGANTAR

Puji syukur dan terima kasih kepada Allah Bapa Yang Maha Kuasa karena hanya kasih dan karunia-Nya penulis dapat meyelesaikan skripsi ini dengan baik.

Skripsi ini dapat diselesaikan dengan baik atas bantuan, gagasan, dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini perkenankan penulis menngucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Drs. R. Soemantri selaku dosen pembimbing yang dengan rendah hati telah meluangkan waktu dan penuh kesabaran membimbing penulis sehingga skripsi ini dapat diselesaikan dengan baik.
2. Bapak Yosef Agung Cahyanta, S.T., M.T., selaku Dekan FST-USD.
3. Ibu Lusia Krismiyati Budiasih, S.Si, M. Si selaku Kaprodi yang selalu mau memberikan solusi dan motivasi bagi penulis.
4. Romo Prof. Dr. Frans Susilo, S.J., selaku pembimbing akademik
5. Ibu M.V Any Herawati, S.Si., M. Si., selaku dosen penguji.
6. Y.G. Hartono, S.Si, M. Sc. dan Herry Pribawanto Suryawan, S.Si, M.Si. yang telah banyak membantu dan memberi masukan kepada penulis.
7. Kepada seluruh dosen ada di Program Studi Matematika yang telah memberi bekal kepada penulis.
8. Karyawan sekretariat FST khususnya Bapak Tukija dan Ibu Linda yang telah memberikan pelayanan selama penulis kuliah serta Karyawan Perpustakaan USD yang telah memberikan kemudahan kepada penulis.
9. Orang tua Drs. Mikhael Fernandez M.Pd dan ibu Dra. Helena Theresia Wungubelen serta kakak Ikha Fernandez yang mengasihi, memberi semangat yang

luar biasa dan doa yang tak hentinya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

10. Om Dr. Inyo Yos Fernandez dan Tante Maria Veronica Hariyanti sebagai wali orang tua selama penulis di Yogyakarta, serta kak Dhany, kak Silvy, dan Bernat, terima kasih atas cinta dan doanya bagi penulis.
11. Teman-teman MAT'05: Ratna, Chris, Noge Josh, Vincent, Tyas, Puput, Priskila, Wuri, Septi, Devi, Dedi, Zetho, Yudhi, Echi, Susi, Inne, dan Sisiria.
12. Teman-teman otol-otol Polaman: Rindi 'ireng', Ci Molen, Ichen 'kode' dan Nona Adonara 'Ntonx'.
13. Teman-teman: kae Iwan, kae Jimmy, Beni al-el, Niko, Christ, Trio, dan teman yang lainnya.
14. Seminari Menengah St. Yohanes Berkhmans Todabelu-Mataloko sebagai almamater terbaik dan laskar Berkhmawan

Penulis menyadari masih ada kekurangan dalam skripsi ini, sehingga saran serta kritik yang membangun sangat diharapkan dalam peningkatan kualitas skripsi ini. Pada akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak.

Yogyakarta, 9 Oktober 2009

Aloysius Joakim Fernandez

DAFTAR ISI

Halaman

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Berbicara tentang analisis dalam bidang matematika, tentu saja selalu terkait dengan fungsi, baik fungsi yang bernilai real maupun bernilai kompleks. Jika diberikan dua himpunan A dan B. Setiap elemen-elemen dari A dipasangakan dengan tepat satu elemen dari B, hubungan ini disebut fungsi dari A ke dalam B. Khusus dalam skripsi ini hanya akan dibahas fungsi bernilai real.

Perkembangan dalam bidang matematika, menyebabkan bahwa fungsi ini tidak dipandang lagi sebagai sesuatu individu, tapi sebagai suatu ruang fungsi-fungsi, yang mempunyai sifat-sifat tertentu. Dalam skripsi akan dibahas ruang fungsi-fungsi kontinu. Salah satu ruang topologi yang mana fungsi-fungsi kontinu didefinisikan adalah ruang metrik.

Ruang metrik adalah salah satu konsep ruang topologi yang juga sangat penting eksistensinya dalam bidang matematika, yakni analisis. Konsep ruang metrik adalah perpaduan antara suatu himpunan tak kosong dengan konsep jarak. Dalam garis real, jarak sering dinotasikan dengan nilai mutlak $|x-y|$ untuk $x, y \epsilon \mathbb{R}$. Selain itu juga konsep himpunan menjadi konsep mutlak untuk dibahas dalam ruang metrik.

Dalam bidang analisis juga dikenal dengan konsep barisan. Dalam kuliah konsep barisan yang diperkenalkan adalah konsep barisan bilangan real. Barisan real dikatakan konvergen jika barisan itu menuju ke suatu titik tertentu. Jika tidak demikian maka barisan tersebut dikatakan divergen. Secara matematis barisan $\langle x_n \rangle$ dikatakan konvergen ke $x \epsilon \mathbb{R}$, untuk sembarang $\varepsilon > 0$ yang diberikan, terdapat bilangan bulat postitf N sehingga untuk semua $n \epsilon N$ dengan $n \geq N$ berlaku $|x_n - x| < \varepsilon$. Dalam penulisan skripsi ini akan dibahas barisan fungsi. Sama halnya dengan barisan bilangan, barisan fungsi dikatakan konvergen jika barisan fungsi itu menuju ke suatu limit, berupa fungsi. Jika tidak demikian barisan fungsi dikatakan divergen.

Permasalahan yang timbul adalah bahwa apakah fungsi limit yang ada merupakan fungsi kontinu. Dengan demikian maka apa saja syarat yang harus dipenuhi agar barisan fungsi kontinu yang konvergen mempunyai fungsi limit yang juga kontinu?

Selain itu juga akan dibahas teorema yang menyatakan bahwa setiap fungsi real $f(x)$ yang didefinisikan dan kontinu pada selang tertutup dan terbatas dapat didekati dengan seragam oleh barisan suku banyak. Teorema ini dikenal dengan Teorema Pendekatan Weierstrass. Teorema ini diperkenalkan oleh **Karl Weierstrass** pada tahun1885. Terdapat dua metode pembuktian yaitu dengan barisan Bernstein dan barisan fungsi konvolusi. Dalam skripsi ini hanya dibuktikan dengan menggunakan cara barisan fungsi konvolusi.

Pokok pembahasan dalam skripsi ini adalah Teorema Stone Weierstrass. Teorema ini diperkenalkan oleh **Marshall H. Stone** pada tahun 1937. Teorema ini merupakan perumuman dari Teorema Pendekatan Weierstrass, karena pendekatan fungsi real kontinu ini didefinisikan pada himpunan kompak, yang disertai dengan dua sifat yakni memisah titik dan tidak pernah nol. Tentu saja bahwa himpunan kompak ini didefinisikan pada ruang metrik.

B. Perumusan Masalah

Pokok permasalahan yang akan dibahas adalah:

1. Bagaimana pembuktian Teorema Pendekatan Weierstrass?
2. Apa yang dimaksud dengan aljabar fungsi?
3. Bagaimana pembuktian Teorema Stone Weierstrass?

C. Pembatasan Masalah

Dalam penulisan skripsi ini ada beberapa pembatasan masalah, antara lain:

1. Beberapa teorema dalam landasan teori tidak dibuktikan dengan maksud untuk mempersingkat dan juga tidak memperluas pembahasan.
2. Fungsi-fungsi barisan yang dibahas adalah fungsi bernilai real yang didefinisikan pada suatu subhimpunan dari ruang metrik.

3. Pembuktian Teorema Weierstrass hanya menggunakan metode konvolusi.

D. Tujuan Penulisan

Skripsi ini bertujuan untuk memenuhi salah satu persyaratan memperoleh gelar Sarjana Sains dalam bidang matematika. Selain itu tujuan penulisan skripsi ini adalah untuk mengetahui dan memahami pembuktian Teorema Pendekatan Weierstrass dan Teorema Stone Weierstrass.

E. Manfaat Penulisan

Manfaat dari penulisan skripsi ini antara lain:

1. Mampu mengetahui dan memahami pembuktian teorema-teorema, khususnya Teorema Pendekatan Weierstrass dan Teorema Stone Weierstrass.
2. Mampu mengetahui dan memahami pengembangan konsep-konsep Teorema Stone Weierstrass, yang dikembangkan dari Teorema Pendekatan Weierstrass.
3. Mampu memahami konsep-konsep dasar dalam matematika analisis.

4. Sebagai motivasi untuk mempelajari konsep-konsep analisis baik yang sudah dipelajari maupun yang belum dipelajari.

5. Belajar untuk lebih teliti lagi dalam melihat persoalan bidang analisis pada khususnya dan bidang matematika lainnya pada umumnya.

F. Metode Penulisan

Metode penulisan yang digunakan dalam skripsi ini adalah metode studi pustaka, yaitu dengan membaca dan mempelajari materi-materi dan buku-buku acuan dan berkonsultasi dengan dosen pembimbing.

G. Sistematika Penulisan

BAB I PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

B. Perumusan Masalah

C. Pembatasan Masalah

D. Tujuan Penulisan

E. Manfaat Penulisan

F. Metode Penulisan

G. Sistematika Penulisan

BAB II

RUANG METRIK

Dalam bab ini akan dibicarakan tentang ruang metirk, topologi ruang metrik, himpunan kompak, barisan, kekontinuan, dan kekonvergenan. Pokok-pokok bahasan tersebut melandasi pembahasan bab selanjutnya.

A. Ruang Metrik

Berikut ini akan dibahas tentang definisi ruang metrik dan contoh-contoh, yang terkait dengan pembahasan selanjutnya.

Definisi 2.1.1

Diberikan himpunan X tidak kosong.

Suatu *metrik* pada himpunan X adalah fungsi $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, yang memenuhi sifat-sifat:

a) $d(x, y) \geq 0$ untuk setiap $x, y \epsilon X$

b) $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$

c) $d(x, y) = d(y, x)$ untuk setiap $x, y \epsilon X$

d) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ untuk setiap $x, y, z \epsilon X$.

Himpunan X tidak kosong dilengkapi dengan suatu metrik disebut *ruang metrik* (*metric space*) dan biasanya dilambangkan dengan (X, d). Elemen suatu ruang metrik disebut *titik* (*point*). Ruang metrik (X, d) sering disingkat dengan X saja (bila metriknya sudah cukup jelas).

Contoh 2.1.2

Diberikan X sembarang himpunan tidak kosong.

Didefinisikan fungsi $(x, y) = \begin{cases} 1, x \neq y \\ 0, x = y \end{cases}$, untuk setiap $x, y \epsilon X$.

Akan ditunjukkan bahwa (X, d) adalah ruang metrik.

i. $d(x, y) \geq 0$ untuk setiap $x, y \epsilon X$

ii. $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$

iii. $d(x, y) = d(y, x)$

Untuk sifat-sifat i,ii, dan iii dipenuhi berdasarkan definisi di atas.

iv. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ untuk setiap $x, y, z \epsilon X$

Jika $d(x, y) = 0$, jelas bahwa $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Jika $d(x, y) = 1$, kemungkinan:

a) $x = z$ dan $z \neq y$

$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

b) $x \neq z$ dan $z = y$

$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

c) $x \neq z$ dan $z \neq y$

$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Jadi (X, d) merupakan ruang metrik, yang selanjutnya disebut *ruang metrik diskrit*.

Contoh 2.1.3

Diberikan $X = \mathbb{R}$ dan didefinisikan $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dengan definisi

$d(x, y) = |x - y|$, yakni nilai mutlak dari $x - y$ untuk setiap $x, y \epsilon \mathbb{R}$.

Akan ditunjukkan bahwa (X, d) adalah ruang metrik.

i. $d(x, y) \geq 0$, jelas dari definisi

ii. $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$

iii. $d(x, y) = |x - y|$

$$= d(y, x)$$

iv. $d(x, y) = |x - y|$

$$= |x - z + z - y|$$

$$= |(x - z) + (z - y)|$$

$$\leq |x - z| + |z - y|$$

$$= d(x, z) + d(z, y)$$

Selanjutnya ruang metrik ini disebut *ruang metrik biasa*.

Contoh 2.1.4

Diberikan $X = \mathbb{R}$ dan didefinisikan $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dengan definisi

$d^*(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ untuk setiap $x, y \epsilon \mathbb{R}$.

Akan ditunjukkan bahwa (X, d^*) ruang metrik.

i. $d^*(x, y) \geq 0$, jelas dari definisi

ii. $d^*(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$

iii. $d^*(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$

$$= \frac{|y-x|}{1+|y-x|}$$

$$= d^*(y, x)$$

iv. $d^*(x, y) \leq d^*(x, z) + d^*(z, y)$

$d^*(x,y) - d^*(x,z) \leq d^*(z,y)$

$$\frac{|x-y|}{1+|x-y|} - \frac{|x-z|}{1+|x-z|} = \frac{|x-y|-|x-z|}{1+|x-z|+|x-y|+|x-y||x-z|}$$

$$\leq \frac{|z-y|}{1+|x-z|+|x-y|}$$

$$\leq \frac{|z-y|}{1+|x-z|+|x-y|} = \frac{|z-y|}{1+|z-y|+|2x|}$$

$$\leq \frac{|z-y|}{1+|z-y|}$$

$$= d^*(z,y).$$

Dengan demikian terbukti $d^*(x,y) \leq d^*(x,z) + d^*(z,y)$.

Contoh 2.1.5

Diberikan $X = \mathbb{R}^n$ dan didefinisikan fungsi $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dengan definisi

$$d(\bar{x},\bar{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

untuk setiap $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \epsilon \mathbb{R}^n$.

Akan ditunjukkan bahwa (X, d) adalah ruang metrik

i. $d(\bar{x},\bar{y}) \geq 0$, jelas dari definisi

ii. $d(\bar{x},\bar{y}) = 0$ jika dan hanya jika $\bar{x} = \bar{y}$

Jika $d(\bar{x},\bar{y}) = 0$ maka $\bar{x} = \bar{y}$

$$d(\bar{x},\bar{y}) = 0$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = 0$$

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 = 0$$

$(x_i - y_i)^2 = 0$ untuk setiap $i = 1, \dots, n$

$(x_i - y_i) = 0$ untuk setiap $i = 1, \dots, n$

$x_i = y_i$ untuk setiap $i = 1, \dots, n$.

Jadi terbukti bahwa jika $d(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ maka $\bar{x} = \bar{y}$.

Jika $\bar{x} = \bar{y}$ maka $d(\bar{x}, \bar{y}) = 0$.

Diketahui $x_i = y_i$ untuk setiap $i = 1, \dots, n$, sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
d(\bar{x}, \bar{y}) &= \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \\
&= \sqrt{(x_1 - x_1)^2 + (x_2 - x_2)^2 + \cdots + (x_n - x_n)^2} \\
&= \sqrt{0^2 + 0^2 + \cdots + 0^2} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Jadi terbukti bahwa Jika $\bar{x} = \bar{y}$ maka $d(\bar{x}, \bar{y}) = 0$

Dengan demikian terbukti bahwa $d(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ jika dan hanya jika $\bar{x} = \bar{y}$.

iii. $d(\bar{x}, \bar{y}) = d(\bar{y}, \bar{x})$

$$
\begin{aligned}
d(\bar{x}, \bar{y}) &= \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \\
&= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= d(\bar{y}, \bar{x})
\end{aligned}
$$

iv. $d(\bar{x}, \bar{y}) \leq d(\bar{x}, \bar{z}) + d(\bar{z}, \bar{y})$

Pembuktian ketidaksamaan segitiga ini membutuhkan pertidaksamaan Cauchy-Schwarz:

$|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i| \leq (\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2)^{\frac{1}{2}}$, untuk setiap $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \epsilon \mathbb{R}^n$.

Bukti

Jika $y_i = 0$, untuk setiap $1 \leq i \leq n$, maka terbukti.

Anggap $y_i \neq 0$ setiap $1 \leq i \leq n$, maka $\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2 > 0$.

Jika t sembarang bilangan real, maka diperoleh

$\sum_{i=1}^{n}(x_i - t y_i)^2 \geq 0$ atau $\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - 2t \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + t^2 \sum_{i=1}^{n} {y_i}^2 \geq 0$ untuk semua $t \epsilon \mathbb{R}$ dan $\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2 > 0$.

Oleh karena itu diskriminan persamaan kuadrat dalam t di atas adalah nonpositif

$D \leq 0$

$b^2 - 4ac \leq 0$

$(-2 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i)^2 - 4 \sum_{i=1}^{n} {y_i}^2 . \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \leq 0$

$4(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)^2 \leq 4 \sum_{i=1}^{n} {y_i}^2 . \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2$

$(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} {y_i}^2 . \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2$

$((\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2 . \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2)^{\frac{1}{2}}$

$|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i| \leq (\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2)^{\frac{1}{2}}$

Jadi terbukti bahwa

$|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i| \leq (\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \sum_{i=1}^{n} {y_i}^2)^{\frac{1}{2}} = (\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2)^{\frac{1}{2}}$, untuk setiap $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \epsilon \mathbb{R}^n$.

Selanjutnya akan dibuktikan pertidaksamaan segitiga,

$$d(\bar{x},\bar{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n}[(x_i - z_i + z_i - y_i)]^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n}[(x_i - z_i) + (z_i - y_i)]^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)(z_i - y_i) + \sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)(z_i - y_i))^{\frac{1}{2}}$$

Dengan menggunakan pertidaksamaan Cauchy-Schawrz

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2 + 2(\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\left[(\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2)^{\frac{1}{2}}\right]^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= (\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= d(\bar{x},\bar{z}) + d(\bar{z},\bar{y}).$$

Jadi terbukti $d(\bar{x},\bar{y}) \leq d(\bar{x},\bar{z}) + d(\bar{z},\bar{y})$.

Untuk selanjutnya ruang metrik ini disebut *ruang metrik Euclides.*

Contoh 2.1.6

Diberikan $X = \mathbb{R}^2$ dan didefinisikan $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dengan definisi $d(\bar{x}, \bar{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ untuk setiap $\bar{x} = (x_1, x_2)$, $\bar{y} = (y_1, y_2) \epsilon \mathbb{R}^2$. Akan ditunjukkan (X, d) ruang metrik.

i. $d(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0$, jelas dengan definisi

ii. $d(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ jika dan hanya jika $\bar{x} = \bar{y}$

$$\begin{aligned} d(\bar{x}, \bar{y}) = 0 &\Leftrightarrow |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 = y_1 \ \wedge \ x_2 = y_2 \\ &\Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y} \end{aligned}$$

iii. $d(\bar{x}, \bar{y}) = d(\bar{y}, \bar{x})$

$$\begin{aligned} d(\bar{x}, \bar{y}) &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \\ &= |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| \\ &= d(\bar{y}, \bar{x}). \end{aligned}$$

iv.
$$\begin{aligned} d(\bar{x}, \bar{y}) &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \\ &= |x_1 - z_1 + z_1 - y_1| + |x_2 - z_2 + z_2 - y_2| \\ &\leq |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| + |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2| \\ &= (|x_1 - z_1| + |x_2 - z_2|) + (|z_1 - y_1| + |z_2 - y_2|) \\ &= d(\bar{x}, \bar{z}) + d(\bar{z}, \bar{y}). \end{aligned}$$

Selanjutnya ruang metrik ini disebut *ruang metrik segi empat* pada $\mathbb{R}^2$.

Contoh 2.1.7

Diberikan $X = \mathbb{R}^2$ dan didefinisikan $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dengan definisi $d(\bar{x}, \bar{y}) =$ maks$\{|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|\}$ untuk setiap $\bar{x} = (x_1, x_2)$, $\bar{y} = (y_1, y_2) \epsilon \mathbb{R}^2$. Akan ditunjukkan (X, d) ruang metrik.

i. $d(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0$, jelas dengan definisi

ii. $d(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ jika dan hanya jika $\bar{x} = \bar{y}$

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \Leftrightarrow x_1 = y_1 \wedge \ x_2 - y_2$$

$$\Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y}$$

iii. $d(\bar{x}, \bar{y}) = d(\bar{y}, \bar{x})$.

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = \text{maks}\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

$$= \text{maks}\{|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|\}$$

$$= d(\bar{y}, \bar{x}).$$

iv. $d(\bar{x}, \bar{y}) = \text{maks}\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$

Misalkan

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = \text{maks}\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

$$= |x_1 - y_1|.$$

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = |x_1 - y_1|$$

$$= |x_1 - z_1 + z_1 - y_1|$$

$$\leq |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1|$$

$$\leq \text{maks}\{|x_1 - z_1|, |x_2 - z_2|\} + \text{maks}\{|z_1 - y_1|, |z_2 - y_2|\}$$

$$= d(\bar{x}, \bar{z}) + d(\bar{z}, \bar{y}).$$

Untuk kemungkinan yang lain $d(\bar{x}, \bar{y})$ dikerjakan dengan cara yang sama. Selanjutnya ruang metrik ini disebut *ruang metrik maksimum* pada $\mathbb{R}^2$.

Contoh 2.1.8

Diberikan $X = C[a,b] = \{f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} | f \text{ kontinu}\}$ dan diketahui fungsi $d: C[a,b] \times C[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dengan definisi $d(f_1, f_2) = \sup_{x\epsilon[a,b]}\{|f_1(x) - f_2(x)|\}$, untuk setiap $f_1, f_2 \epsilon C[a,b]$.

Akan ditunjukkan $(C[a,b], d)$ ruang metrik.

i. $d(f_1, f_2) \geq 0$

   Karena $d(f_1, f_2) = \sup_{x\epsilon[a,b]}\{|f_1(x) - f_2(x)|\}$ dan

   $|f_1(x) - f_2(x)| \geq 0$ maka

   $\sup_{x\epsilon[a,b]}\{|f_1(x) - f_2(x)|\} \geq 0.$

ii. $d(f_1, f_2) = 0$ jika dan hanya jika $f_1 = f_2$

   $d(f_1, f_2) = 0 \Leftrightarrow \sup_{x\epsilon[a,b]}\{|f_1(x) - f_2(x)|\} = 0$

   $\Leftrightarrow |f_1(x) - f_2(x)| = 0$ untuk setiap $x\epsilon[a,b]$

   $\Leftrightarrow f_1 = f_2$

iii. $d(f_1, f_2) = d(f_2, f_1)$.

   $d(f_1, f_2) = \sup_{x\epsilon[a,b]}\{|f_1(x) - f_2(x)|\}$

   $= \sup_{x\epsilon[a,b]}\{|f_2(x) - f_1(x)|\}$

   $= d(f_2, f_1)$

iv. $d(f_1, f_2) \leq d(f_1, f_3) + d(f_3, f_2)$.

   Untuk setiap $x\epsilon[a,b]$,

   $|f_1(x) - f_2(x)| \leq |f_1(x) - f_3(x)| + |f_3(x) - f_2(x)|$

   $\leq \sup_{x\epsilon[a,b]}\{|f_1(x) - f_3(x)|\} + \sup_{x\epsilon[a,b]}\{|f_3(x) - f_2(x)|\}$.

   Jadi $|f_1(x) - f_2(x)| \leq \sup_{x\epsilon[a,b]}\{|f_1(x) - f_3(x)|\} + \sup_{x\epsilon[a,b]}\{|f_3(x) - f_2(x)|\}$

Hal ini berakibat bahwa $\{|f_1(x) - f_2(x)|\}$ terbatas dengan

$\sup_{x\epsilon[a,b]} \{|f_1(x) - f_3(x)|\} + \sup_{x\epsilon[a,b]} \{|f_3(x) - f_2(x)|\}$ sebagai batas atas.

Hal ini berakibat bahwa

$\sup_{x\epsilon[a,b]} \{|f_1(x) - f_2(x)|\} \leq \sup_{x\epsilon[a,b]} \{|f_1(x) - f_3(x)|\} + \sup_{x\epsilon[a,b]} \{|f_3(x) - f_2(x)|\}$

Contoh 2.1.9

Diberikan $X = C[0,1] = \{f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} | f \text{ kontinu}\}$ dan diketahui fungsi $d: C[0,1] \times C[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dengan definisi

$$d(f_1, f_2) = \int_0^1 |f_1(x) - f_2(x)| dx \text{ ; untuk setiap } f_1, f_2 \epsilon C[0,1].$$

Akan ditunjukkan $(C[0,1], d)$ ruang metrik.

i. $d(f_1, f_2) = \int_0^1 |f_1(x) - f_2(x)| dx \geq 0$, karena $|f_1(x) - f_2(x)| \geq 0$

ii. $d(f_1, f_2) = 0$ jika dan hanya jika $f_1 = f_2$

$$\begin{aligned} d(f_1, f_2) = 0 &\Leftrightarrow \int_0^1 |f_1(x) - f_2(x)| dx = 0 \\ &\Leftrightarrow |f_1(x) - f_2(x)| = 0 \\ &\Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x) \text{ untuk setiap } x\epsilon[0,1] \\ &\Leftrightarrow f_1 = f_2 \end{aligned}$$

iii. $d(f_1, f_2) = d(f_2, f_1)$

$$\begin{aligned} d(f_1, f_2) &= \int_0^1 |f_1(x) - f_2(x)| dx \\ &= \int_0^1 |f_2(x) - f_1(x)| dx \\ &= d(f_2, f_1) \end{aligned}$$

iv. $d(f_1, f_2) = \int_0^1 |f_1(x) - f_2(x)| dx$

$$= \int_0^1 |f_1(x) - f_3(x) + f_3(x) - f_2(x)| dx$$

$$= \int_0^1 |(f_1(x) - f_3(x)) + (f_3(x) - f_2(x))| dx$$

$$\leq \int_0^1 (|(f_1(x) - f_3(x)| + |f_3(x) - f_2(x)|)\, dx$$

$$\leq \int_0^1 |(f_1(x) - f_3(x)| dx + \int_0^1 |f_3(x) - f_2(x)|\, dx$$

$$= d(f_1, f_3) + d(f_3, f_2).$$

B. Topologi Ruang Metrik

Dalam subbab ini akan dibicarakan himpunan terbuka dan himpunan tertutup. Topolgi ruang dibangun dengan mendefinisikan apa yang dinamakan himpunan terbuka.

Definisi 2.2.1

Diberikan ruang metrik $(X, d), E \subset X$ dan $p \epsilon X$.

a) *Kitaran* (*neighborhood*) titik p dengan jari-jari $r > 0$ dan ditulis $N_r(p)$ adalah $N_r(p) = \{q \epsilon X | d(p, q) < r\}$.
b) Titik p disebut *titik limit* (*limit point*) himpunan E jika setiap $N_r(p)$ memuat titik $q \neq p$ sedemikian hingga $q \epsilon E$.
c) Titik p disebut *titik interior* (*interior point*) himpunan E jika terdapat $N_r(p)$ sedemikian hingga $N_r(p) \subset E$.
d) Himpunan E dikatakan *terbuka* (*open*) jika setiap elemennya merupakan titik interior (*interior point*) himpunan E.

e) Himpunan E dikatakan *tertutup* (*closed*) jika himpunan E memuat semua titik limitnya.

f) *Komplemen* himpunan E (dinotasikan E^c) adalah himpunan semua titik $p\epsilon X$ sedemikian sehingga $p \notin E$.

g) Himpunan E dikatakan *terbatas* jika terdapat suatu bilangan real M dan suatu titik $q\epsilon X$ sehingga untuk semua $p\epsilon E$, berlaku $d(p,q) < M$.

Teorema 2.2.2

Diberikan ruang metrik $(X,d), E \subset X$.

Himpunan E terbuka jika dan hanya jika E^c tertutup.

Sebagai akibat bahwa himpunan E tertutup jika dan hanya jika E^c terbuka.

Teorema 2.2.3

Diberikan ruang metrik (X,d).

a) Gabungan sembarang keluarga (berhingga atau tak hingga) himpunan-himpunan terbuka dalam ruang metrik (X,d) adalah terbuka.

b) Irisan sembarang keluarga (berhingga atau tak hingga) himpunan-himpunan tertutup dalam ruang metrik (X,d) adalah tertutup.

c) Irisan sembarang keluarga berhingga himpunan-himpunan terbuka dalam ruang metrik (X,d) adalah terbuka.

d) Gabungan sembarang keluarga berhingga himpunan-himpunan tertutup dalam ruang metrik (X,d) adalah tertutup.

Teorema 2.2.4

Diberikan ruang metrik $(X,d)E \subset X$ dan $p\epsilon X$.

Jika p titik limit dari himpunan E, maka untuk setiap $r > 0$, $N_r(p) \cap E$ himpunan tak hingga.

Definisi 2.2.5

Jika diberikan ruang metrik $(X,d), E \subset X$ dan E' adalah himpunan semua titik limit himpunan E, maka himpunan $\bar{E} = E \cup E'$ disebut *penutup* (*closure)* dari himpunan E.

Selain itu E^0 melambangkan himpunan semua titik interior himpunan E dari ruang metrik (X,d).

Teorema 2.2.6

Jika (X,d) ruang metrik dan $E \subset X$, maka

a) Himpunan $\bar{E}$ tertutup
b) Himpunan $E = \bar{E}$ jika dan hanya jika E tertutup
c) Himpunan $\bar{E} \subset F$ untuk setiap himpunan tertutup $F \subset X$ sedemikian sehingga $E \subset F$.

Bukti

a) Jika $p\epsilon X$ dan $p \notin \bar{E}$, maka p bukan merupakan titik dari himpunan E dan juga bukan merupakan titik limit dari himpunan E. Sehingga ada $r > 0$, $N_r(p) \cap E = \emptyset$, sehingga $N_r(p) \subset E^c$. Maka p adalah titik interior dari himpunan E^c. Oleh karena itu himpunan E^c terbuka. Dengan demikian himpunan E tertutup.

b) $\Longrightarrow$ Jika $E = \bar{E}$, maka berdasarkan pembuktian (a) himpunan E tertutup.

$\Longleftarrow$ Karena himpunan E tertutup, maka setiap titik limit himpunan E adalah anggota dari himpunan E dan berdasarkan definisi 2.2.5, himpunan $E = \bar{E}$.

c) Jika himpunan F tertutup dan $E \subset F$, maka $E' \subset F' \subset F$. Dengan demikian $\bar{E} \subset F$. ■

Berdasarkan pembuktian (a) dan (c), maka dapat dinyatakan bahwa himpunan $\bar{E}$ adalah subhimpunan tertutup terkecil dari X yang memuat E.

Contoh 2.2.7

Diberikan $X = \mathbb{R}$ terhadap metrik biasa.

$E = (1,2]$ maka $E^0 = (1,2)$, $E' = [1,2]$ dan $\bar{E} = E \cup E' = [1,2]$.

Contoh 2.2.8

Diberikan $X = \mathbb{R}^2$ terhadap metrik maksimum.

$E = \{(x,y) \epsilon \mathbb{R}^2 | -2 \leq x \leq 4, -1 < y < 5\}$

Maka $E^0 = \{(x,y) \epsilon \mathbb{R}^2 | -2 < x < 4, -1 < y < 5\}$

$E' = \{(x,y) \epsilon \mathbb{R}^2 | -2 \leq x \leq 4, -1 \leq y \leq 5\}$

$\bar{E} = E \cup E' = \{(x,y) \epsilon \mathbb{R}^2 | -2 \leq x \leq 4, -1 \leq y \leq 5\}$

Definisi 2.2.9

Diberikan ruang metrik (X,d), $E \subset Y \subset X$.

Himpunan E dikatakan *terbuka relatif terhadap* Y jika untuk setiap $p\epsilon E$ terdapat $r > 0$ sedemikian sehingga jika $d(p,q) < r$ dan $q\epsilon Y$ maka $q\epsilon E$.

Teorema 2.2.10

Diberikan ruang metrik $(X,d), E \subset Y \subset X$

Himpunan E terbuka relatif terhadap Y jika dan hanya jika terdapat subhimpunan terbuka G dari X sedemikian sehingga $E = Y \cap G$.

Bukti

$\Longrightarrow$ Misalkan himpunan E terbuka relatif terhadap Y, sehingga untuk setiap $p\epsilon E$, terdapat bilangan positif r_p sedemikian sehingga $d(p,q) < r_p$, $q\epsilon Y$ menyebabkan $q\epsilon E$. Andaikan $V_p = \left\{N_{r_p}(p) \colon p\epsilon E\right\}$ dan dibentuk

$$G = \bigcup_{p\epsilon E} V_p.$$

Karena setiap kitaran adalah himpunan terbuka dan juga gabungan tak hingga himpunan terbuka adalah terbuka, maka G subhimpunan terbuka dari X. Karena $p\epsilon N_{r_p}(p)$ untuk setiap $p\epsilon E$, diperoleh $E \subset G$ dan $E \subset Y$, maka $E \subset Y \cap G$. Di lain pihak jika diambil kitaran V_p untuk setiap $p\epsilon E$, diperoleh $V_p \cap Y \subset E$. Sehingga

$$\bigcup_{p\epsilon E}(Y \cap V_p) = Y \cap \left(\bigcup_{p\epsilon E} V_p\right) = Y \cap G \subset E.$$

Dengan demikian $E = G \cap Y$.

$\Longleftarrow$ Misalkan G subhimpunan terbuka dari X sedemikian sehingga $E = Y \cap G$ dan $p\epsilon E$. Karena $p\epsilon G$ dan himpunan G adalah himpunan terbuka, maka ada bilangan positif r_p, terdapat kitaran dari p, yakni $N_{r_p}(p)$ sedemikian sehingga $N_{r_p}(p) \subset G$. Jadi $N_{r_p}(p) \cap Y \subset G \cap Y = E$. Karena p sembarang titik, maka untuk setiap $p \epsilon E$ terdapat kitaran $N_{r_p}(p)$ sedemikain sehingga $N_{r_p}(p) \cap Y \subset E$. Dengan demikian himpunan E terbuka relatif terhadap Y. ■

C. Himpunan Kompak

Pembahasan pada subbab ini adalah himpunan kompak dan sifat-sifatnya yang didefnisikan di dalam ruang metrik. Konsep himpunan kompak ini sangat penting dalam analisis dan ruang topologi, terutama dalam kaitannya dengan da-lam pembahasan fungsi kontinu

Sebelum mendefinisikan himpunan kompak, akan didefinisikan selimut terbuka (*open cover*).

Definisi 2.3.1

Diberikan ruang metrik $(X, d), E \subset X$.

Suatu *selimut terbuka* (*open cover*) dari himpunan E adalah keluarga

$\mathcal{G} = \{G_\alpha : \alpha \epsilon \Lambda\}$ (Λ sembarang himpunan indeks) dari himpunan-himpunan terbuka dalam X yang gabungannya memuat E. Dengan kata lain $E \subset \bigcup_{\alpha \epsilon \Lambda} G_\alpha$.

Jika $\mathcal{G} = \{G_\alpha : \alpha \epsilon \Lambda\}$ selimut terbuka himpunan E, $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$, dan $\mathcal{A}$ juga merupakan selimut terbuka untuk E, maka $\mathcal{A}$ disebut *subselimut terbuka* dari $\mathcal{G}$.

Definisi 2.3.2

Himpunan E disebut *kompak* jika setiap selimut terbuka dari himpunan E memuat subselimut terbuka berhingga.

Jadi himpunan E kompak $\Leftrightarrow$ untuk setiap $\mathcal{g} = \{G_\alpha : \alpha \epsilon \Lambda\}$ (Λ sembarang himpunan indeks) selimut terbuka E terdapat subhimpunan berhingga dari $\mathcal{g}$ sedemikian sehingga untuk $n \epsilon \mathbb{N}$, berlaku $E \subset \bigcup_{j=1}^{n} G_{\alpha_j}$.

Berikut akan dibahas beberapa contoh yang terkait dengan himpunan kompak dan tidak kompak.

Contoh 2.3.3

Diberikan $X = \mathbb{R}$ terhadap ruang metrik biasa.

Buktikan bahwa $E = \left\{\frac{1}{n} : n \epsilon \mathbb{N}\right\}$ tidak kompak.

Bukti

Akan ditunjukkan bahwa selimut terbuka $\mathcal{g}$ dari E tidak mempunyai subselimut berhingga. Dengan kata lain akan ditunjukkan bahwa setiap himpunan terbuka dalam $\mathcal{g}$ hanya memuat tepat satu elemen dari E.

Selang terbuka $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ hanya memuat satu titik dari E, yakni 1. Selanjutnya untuk setiap $n \epsilon \mathbb{N}$ dengan $n \geq 2$, dibentuk selang terbuka $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}\right)$ yang memuat satu titik dari E, yakni $\frac{1}{n}$. Dengan demikian keluarga $\mathcal{g} = \{G_n : n \epsilon \mathbb{N}\}$ dengan

$G_1 = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ dan $G_n = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}\right)$ untuk $n \geq 2$ adalah selimut terbuka untuk E dan $\mathcal{g}$ adalah keluarga tak hingga dari himpunan terbuka. Berdasarkan konstruksi di atas, jika sala satu himpunan dari keluarga tak hingga $\mathcal{g}$ dihapuskan, yakni G_m maka $\bigcup_{n \neq m} G_n$ tidak memuat E. Jelas bahwa $\mathcal{g}$ selimut terbuka tetapi tidak mempunyai subselimut berhingga untuk E. Jadi himpunan E tidak kompak.

Contoh 2.3.4

Diberikan $X = \mathbb{R}$. terhadap metrik biasa dan $E = \left\{\frac{1}{n} : n\epsilon\mathbb{N}\right\}$.

Buktikan bahwa $\overline{E} \; = E \cup \{0\}$ kompak.

Bukti

Diandaikan $\mathcal{g} = \{G_\alpha : \alpha\epsilon\Lambda\}$ (Λ sembarang himpunan indeks) sembarang subselimut terbuka untuk $\widetilde{E}$. Titik 0 adalah satu-satunya titik limit $\widetilde{E}$. Karena $0\epsilon\widetilde{E}$ maka terdapat $G_{\alpha_0}\epsilon\mathcal{g}$ dan $0\epsilon G_{\alpha_0}$. Selain itu karena 0 titik interior G_{α_0} maka dapat dicari untuk $0 < r < 1$ sedemikian sehingga $(-r, r) \subset G_{\alpha_0}$. Terdapat $m\epsilon\mathbb{N}$ sehingga $\frac{1}{(m+1)} < r \leq \frac{1}{m}$. Jadi titik-titik anggota $\widetilde{E}$, kecuali mungkin hanya $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{m}$ adalah anggota G_{α_0}. Untuk setiap n dengan $1 \leq n \leq m$ diambil satu himpunan $G_{\alpha_0}\epsilon\mathcal{g}$ sehingga $\frac{1}{n}\epsilon G_{\alpha_0}$.

Maka $\{G_{\alpha_0}, G_{\alpha_1}, \dots, G_{\alpha_m}\}$ adalah subselimut berhingga dari $\mathcal{g}$ dan terbukti bahwa himpunan $\widetilde{E}$ kompak.

Contoh 2.3.5

Diberikan ruang metrik $(X, d) = \mathbb{R}^2$.

Didefinisikan

$A = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1 \text{ dan } 0 \leq \mathrm{y} \leq 1\}$ dan $B = \{A - (1,1)\}$.

Masing-masing selimut terbuka berikut ini tidak memuat subselimut terbuka berhingga yang menyelimuti A dan B yakni $s = \left\{x^2 + y^2 < \left(\sqrt{2} - 1/n\right)^2 : n\epsilon\mathbb{N}\right\}$ dan

$o = \left\{(x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2 < \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - 1/2n\right)^2 : n\epsilon\mathbb{N}\right\}$.

Dalam teorema selanjutnya akan dibahas kekompakan relatif. Suatu himpunan E *kompak relatif* terhadap ruang metrik X jika setiap selimut terbuka relatif terhadap X memuat subselimut berhingga.

Teorema 2.3.6

Diberikan ruang metrik $(X, d), E \subset Y \subset X$.

Himpunan E kompak relatif terhadap X jika dan hanya jika himpunan E kompak relatif terhadap Y.

Bukti

$\Longrightarrow$ Misalkan E kompak relatif terhadap X dan andaikan $\{V_\alpha; \alpha\epsilon\Lambda\}$ (Λ sembarang himpunan) adalah keluarga himpunan sedemikian sehingga untuk setiap $\alpha\epsilon\Lambda$, V_α terbuka relatif terhadap Y, sehingga

$$E \subset \bigcup_{\alpha\epsilon\Lambda} V_\alpha.$$

Berdasarkan teorema 2.2.10 untuk setiap $\alpha\epsilon\Lambda$, terdapat suatu himpunan G_α sedemikian sehingga terbuka relatif terhadap X dan $V_\alpha = Y \cap G_\alpha$.

Karena $E \subset Y$ dan

$$E \subset \bigcup_{\alpha\epsilon\Lambda} V_\alpha = \bigcup_{\alpha\epsilon\Lambda}(Y \cap G_\alpha) = Y \cap \bigcup_{\alpha\epsilon\Lambda} G_\alpha,$$

sehingga diperoleh

$$E \subset \bigcup_{\alpha\epsilon\Lambda} G_\alpha.$$

Karena E kompak relatif terhadap X, terdapat anggota berhingga dari Λ, yakni $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sedemikian sehingga

$$E \subset G_{\alpha_1} \cup G_{\alpha_2} \cup \dots \cup G_{\alpha_n}.$$

Karena $E \subset Y$ dan $E \subset \bigcup_{j=1}^{n} G_{\alpha_j}$ maka diperoleh

$$E \subset Y \cap \bigcup_{j=1}^{n} G_{\alpha_j} = \bigcup_{j=1}^{n} \left(Y \cap G_{\alpha_j}\right) = \bigcup_{j=1}^{n} V_{\alpha_j}.$$

Karena $\{V_\alpha; \alpha\epsilon\Lambda\}$ sembarang keluarga, $\{V_{\alpha_1}, V_{\alpha_2}, \dots, V_{\alpha_n}\}$ subkeluarganya yang masing elemennya terbuka relatif terhadap Y dan merupakan subelimut berhingga dari himpunan E maka E kompak relatif terhadap Y.

$\Longleftarrow$ Misalkan himpunan E kompak relatif terhadap Y dan $\{w_\alpha; \alpha\epsilon\Lambda\}$ (Λ sembarang himpunan) adalah keluarga himpunan sedemikian sehingga untuk setiap $\alpha\epsilon\Lambda$, w_α terbuka relatif terhadap X dan

$$E \subset \bigcup_{\alpha\epsilon\Lambda} w_\alpha.$$

Untuk setiap $\alpha\epsilon\Lambda$, andaikan $V_\alpha = Y \cap w_\alpha$. Karena $E \subset Y$ dan $E \subset \bigcup_{\alpha\epsilon\Lambda} w_\alpha$ berakibat bahwa

$$E \subset Y \cap \bigcup_{\alpha\epsilon\Lambda} w_\alpha = \bigcup_{\alpha\epsilon\Lambda} (Y \cap w_\alpha) = \bigcup_{\alpha\epsilon\Lambda} V_\alpha .$$

Akibatnya, $\{V_\alpha; \alpha\epsilon\Lambda\}$ terbuka relatif terhadap Y, yang menyelimuti E. Karena E kompak relatif terhadap Y maka terdapat elemen-elemen berhingga dari Λ, yakni $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sehingga $E \subset \bigcup_{j=i}^{n} V_{\alpha_j}$. Karena

$$\bigcup_{j=1}^{n} V_{\alpha_j} = \bigcup_{j=1}^{n} \left(Y \cap w_{\alpha_j}\right) = Y \cap \bigcup_{j=1}^{n} w_{\alpha_j}$$

dan $E \subset Y$ maka $E \subset \bigcup_{j=1}^{n} w_{\alpha_j}$.

Karena $\{w_\alpha; \alpha \epsilon \Lambda\}$ adalah sembarang keluarga, $\{w_{\alpha_1}, w_{\alpha_2}, \dots, w_{\alpha_n}\}$ subkeluarganya, yang masing-masing elemennya terbuka relatif ke X dan merupakan subelimut berhingga dari himpunan E maka E kompak relatif ke X . ■

Teorema 2.3.7

Diberikan ruang metrik $(X, d), E \subset X$.

Jika E subhimpunan kompak dari ruang metrik (X, d), maka himpunan E tertutup dan terbatas.

Bukti

Pertama akan dibuktikan bahwa himpunan E tertutup, dengan menunjukkan himpunan E^c terbuka.

Misalkan $p \epsilon X$ sedemikian sehingga $p \notin E$. untuk setiap $q \epsilon E$, andaikan V_q dan W_q masing-masing adalah kitaran dari p dan q, yang radius $r_p = \frac{1}{2} d(p, q)$. Karena E kompak maka terdapat anngota berhingga dari q, yakni $q_1, q_2, \dots, q_n$ sedemikian sehingga

$$K \subset Wr_{q_1} \cup Wr_{q_2} \cup \dots \cup Wr_{q_n} = W.$$

Jika $V = Vr_{q_1}(p) \cap Vr_{q_2}(p) \cap \dots \cap Vr_{q_n}(p)$ dan diambil $r = \min_{1 \le j \le n} r_{q_j}$ maka $V_r(p)$ adalah kitaran dari p sedemikian sehingga $V_r(p) \cap W = \emptyset$. Dengan demikian $V_r(p) \subset E^c$ dan bahwa p titik interior dari himpunan E^c. Himpunan E^c terbuka. Dengan demikian Himpunan E tertutup.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa himpunan E terbatas.

Untuk setiap $x\epsilon E$ dibuat kitaran $N_1(x)$ sedemikian sehingga keluarga $\mathcal{G} = \{N(x,1): x\epsilon E\}$ adalah selimut terbuka dari E. Karena himpunan E kompak maka terdapat $x_1, x_2, \dots, x_n$ di dalam E sedemikian sehingga $E \subset \bigcup_{j=1}^{n} N\big(x_j, 1\big)$. Selanjutnya dibentuk

$$M = \text{maks}\{d(x_\text{i}, x_1): 1 \leq i \leq n\}$$

sehingga diperoleh $d(x_\text{i}, x_1) < M$ untuk $1 \leq i \leq n$.

Untuk setiap $t\epsilon E$, terdapat $x_1, x_2, \dots, x_n$ sedemikian sehingga $t\epsilon N(x_n, 1)$. Sehingga

$$\begin{aligned} d(x_1, t) &\leq d(x_1, x_n) + d(x_n, t) \\ &\leq M + d(x_n, t) \\ &< M + 1. \end{aligned}$$

Jadi himpunan E terbatas.■

Teorema 2.3.8

Diberikan ruang metrik (X, d)

Jika K subhimpunan kompak dari ruang metrik X dan E subhimpunan tertutup dari K, maka E adalah himpunan kompak.

Bukti

Diberikan ruang metrik $(X, d), E \subset K \subset X$. Subhimpunan K adalah himpunan kompak dan himpunan E tertutup.

Andaikan $\mathcal{G} = \{G_\alpha: \alpha\epsilon\Lambda\}$ (Λ sembarang himpunan indeks) sembarang selimut terbuka dari E. Jika pada $\mathcal{G}$ ditambahkan satu himpunan terbuka $G = E^c$, maka diperoleh selimut terbuka dari K, yakni $\Omega = \mathcal{G} \cup \{G\}$. Karena K himpunan kompak, maka terdapat subselimut terbuka berhingga dari Ω, yang memuat K. Jadi terdapat $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ di dalam Λ, sehingga $\left(G, G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \dots, G_{\alpha_n}\right)$ adalah selimut berhingga dari Ω, akan menyelimuti K. Karena $G = E^c$ saling asing dengan E, maka $\left(G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \dots, G_{\alpha_n}\right)$ subkeluarga berhingga dari $\mathcal{G}$ dan merupakan selimut terbuka berhingga untuk E. Dengan demikian teorema ini terbukti.■

Teorema 2.3.9

Diberikan ruang metrik (X, d)

Jika K subhimpunan kompak dari ruang metrik X dan E himpunan tertutup dari ruang metrik X, maka $E \cap K$ kompak.

Bukti

Diberikan ruang metrik (X, d), himpunan K adalah kompak dan himpunan E tertutup.

Berdasarkan teorema 2.3.7, maka himpunan K tertutup. Dengan demikian berdasarkan teorema 2.2.3 (b), maka $E \cap K$ tertutup. Karena $E \cap K \subset K$, maka berdasarkan teorema 2.3.8, $E \cap K$ adalah himpunan kompak.■

Teorema 2.3.10

Diberikan ruang metrik (X, d).

Jika $\{K_\alpha : \alpha \epsilon \Lambda\}$ (Λ sembarang himpunan indeks) keluarga himpunan kompak dari suatu ruang metrik sedemikian sehingga irisan setiap keluarga berhingga dari $\{K_\alpha\}$ tidak kosong, maka $\bigcap_{\alpha \epsilon \Lambda} K_\alpha$ tidak kosong.

Bukti

Teorema ini akan dibuktikan dengan kontradiksi. Andaikan $\bigcap_{\alpha\epsilon\Lambda} K_\alpha = \emptyset$ dan ambil $K_\delta \epsilon \{K_\alpha : \alpha\epsilon\Lambda\}$. Karena $\bigcap_{\alpha\epsilon\Lambda} K_\alpha = \emptyset$ maka untuk setiap $x\epsilon K_\delta, x \notin \bigcap_{\alpha\epsilon\Lambda} K_\alpha$. Selanjutnya dibentuk $\mathcal{G} = \{K_\alpha : \alpha\epsilon\Lambda, K_\delta \neq K_\alpha\}$.

Karena K_α kompak maka K_α tertutup dan ${K_\alpha}^c$ terbuka. Oleh karena itu untuk sembarang $w\epsilon K_\delta$, maka $w \notin \bigcap_{\alpha\epsilon\Lambda} K_\alpha$. Jika demikian terdapat $\beta\epsilon\Lambda$, sedemikian sehingga $w \notin K_\beta$ yang berarti $w\epsilon {K_\beta}^c$ dan $K_\beta \neq K_\delta$. Karena w sembarang titik diperoleh bahwa untuk setiap $w\epsilon K_\delta$maka ada $\beta\epsilon\Lambda, K_\beta \neq K_\delta$ dan $w\epsilon {K_\beta}^c$. Jika $\mathcal{G}$ adalah selimut terbuka dari K_α maka $K \subset \bigcup_{G\epsilon\mathcal{G}} G$. Di lain pihak karena K_δ kompak maka terdapat anggota berhingga dari $\mathcal{G}$, yakni $K_{\alpha_1}^c, K_{\alpha_2}^c, \dots, K_{\alpha_n}^c$ sedemikian sehingga

$$K_\delta \subset \bigcup_{j=1}^{n} K_{\alpha_j}^c = \left(\bigcap_{j=1}^{n} K_{\alpha_j}\right)^c,$$

berakibat bahwa

$$K_\delta \cap \left(\bigcap_{j=1}^{n} K_{\alpha_j}\right) = \emptyset.$$

Hal ini kontradiksi dengan ketentuan bahwa irisan berhingga dari $\{K_\alpha : \alpha\epsilon\Lambda\}$ adalah tidak kosong. Dengan demikian $\bigcap_{\alpha\epsilon\Lambda} K_\alpha \neq \emptyset$. ■

Teorema 2.3.11

Diberikan ruang metrik (X, d), $E \subset K \subset X$. Himpunan K adalah kompak. Jika E adalah subhimpunan tak hingga dari himpunan kompak K maka himpunan E mempunyai titik limit.

Bukti

Teorem ini dibuktikan dengan kontardiksi. Misalkan himpunan E tidak mempunyai titik limit di dalam K. Maka untuk setiap $q \epsilon K$ mempunyai kitaran untuk $r > 0$, yakni $N_r(q)$. Kitaran $N_r(q)$ memuat paling banyak satu titik dalam E. Keluarga $\mathcal{G} = \{N_r(q): q \epsilon K\}$ membentuk selimut dari K. Dengan jelas bahwa tidak ada subkeluarga berhingga yang menyelimuti K. Di lain pihak karena himpunan K kompak, terdapat selimut terbuka berhingga dari $\mathcal{G} = \{N_r(q): q \epsilon K\}$, yakni $N_r(q_1), N_r(q_2), \dots, N_r(q_n)$ sedemikian sehingga $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} N_r(q_j)$. Selain itu karena $E \subset K$, maka diperoleh $E \subset \bigcup_{j=1}^{n} N_r(q_j)$. Dengan demikian kontradiksi dengan ketentuan bahwa himpunan K adalah kompak. Jadi himpunan E mempunyai titik limit di dalam K.■

D. Barisan dan Kekontinuan

Barisan biangan real adalah konsep penting dalam ruang metrik $\mathbb{R}$. Konsep barisan bilangan real akan mendefinisikan kekonvergenan. Pada subbab ini akan dibahas kekonvergenan barisan titik di dalam ruang metrik. Jika titik-titik ruang metrik itu fungsi, akan dibahas kaitannya dengan kekontinuan dalam ruang metrik.

Definisi 2.4.1

Diberikan ruang metrik (X, d).

Barisan dalam ruang metrik (X, d) merupakan fungsi dengan domain himpunan semua bilangan asli $\mathbb{N}$, yaitu

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow X \text{ dengan } n \epsilon \mathbb{N}.$$

Selanjutnya ditulis: $f(n) = x_n$. Barisan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ditulis $\langle x_n \rangle$; x_n disebut *suku* ke-n dari barisan. Himpunan titik-titik $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ disebut *jangkauan* (*range)* barisan. Suatu barisan dikatakan *terbatas* jika jangkauan (*range)* barisan tersebut terbatas.

Definisi 2.4.2

Diberikan ruang metrik (X, d).

Barisan $\langle x_n \rangle$ di dalam X dikatakan *konvergen* jika ada $x \epsilon X$ sedemikian sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada bilangan bulat positif n_0 dan jika $n \geq n_0$ berlaku $d(x_n, x) < \varepsilon$.

Dalam hal ini dapat ditulis $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ dan dikatakan $\langle x_n \rangle$ konvergen ke x, sering dilambangkan dengan $x_n \longrightarrow x$.

Teorema 2.4.3

Diberikan ruang metrik (X, d) dan $\langle x_n \rangle \subset X$.

Jika $x \epsilon X, x' \epsilon X$ dan $\langle x_n \rangle \longrightarrow x$, $\langle x_n \rangle \longrightarrow x'$ maka $x = x'$.

Bukti

Diambil sembarang $\varepsilon > 0$.

Karena $\langle x_n \rangle \longrightarrow x$ maka terdapat $n_1 \epsilon \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \epsilon \mathbb{N}$ dengan $n \geq n_1$ berlaku $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Karena $\langle x_n \rangle \longrightarrow x'$ maka terdapat $n_2 \epsilon \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \epsilon \mathbb{N}$ dengan $n \geq n_2$ berlaku $d(x_n, x') < \frac{\varepsilon}{2}$.

Diambil $n_0 = $ maks $\{n_1, n_2\}$. Karena itu untuk $n \geq n_0$ berlaku

$$d(x, x') \leq d(x, x_n) + d(x_n, x')$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Jadi untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ berlaku $d(x, x') < \varepsilon$. Ini berarti $x = x'$. ■

Definisi 2.4.4

Diberikan ruang metrik (X, d) dan barisan $\langle x_n \rangle \subset X$. Diperhatikan barisan $\langle n_k \rangle, k \,\epsilon \mathbb{N}$ dengan $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$. Barisan $\langle x_{n_k} \rangle$ disebut *barisan bagian* atau *subbarisan* $\langle x_n \rangle$.

Teorema 2.4.5

Jika (X, d) ruang metrik kompak dan $\langle x_n \rangle$ barisan dalam X, maka barisan $\langle x_n \rangle$ memuat subbarisan yang konvergen ke suatu titik anggota X.

Bukti

Himpunan $E = \{x_n | n \epsilon \mathbb{N}\}$ dinamakan jangkauan (*range*) dari $\langle x_n \rangle$.

Jika E berhingga maka $E = \langle x_1, x_2, x_3, \dots, x_t \rangle$ sehingga terdapat $1 \leq s \leq t$ dan suatu barisan $\langle n_i \rangle$ dengan $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ sehingga terdapat $x_{n_1} = x_{n_2} = x_{n_3} = \cdots = x_s$. Jadi barisan bagian $\langle x_{n_k} \rangle, k \,\epsilon \mathbb{N}$ konvergen ke $x_s \epsilon E \subset X$.

Jika E tak berhingga dan $E \subset X$, X kompak maka E mempunyai suatu titik limit di X, namakan titik x.

Dipilih

n_1 sehingga $d\left(x_{n_1}, x\right) < 1$,

$n_2 > n_1$ sehingga $d\left(x_{n_2}, x\right) < \frac{1}{2}$

$n_3 > n_2$ sehingga $d\left(x_{n_3}, x\right) < \frac{1}{3}$

$\vdots$

$n_i > n_{i-1}$ sehingga $d\left(x_{n_i}, x\right) < \frac{1}{i}$

maka $\langle x_{n_i} \rangle, k\, \epsilon \mathbb{N}$ konvergen ke $x \epsilon X$. ■

Selanjutnya akan dibahas kekompakan n-ruang dengan metrik Euclides. Berikut pembahasan kekompakan pada $\mathbb{R}^n$.

Definisi 2.4.6

Diberikan ruang metrik $(X, d) = \mathbb{R}^n$.

Jika $a_1, a_2, \dots, a_n$ dan $b_1, b_2, \dots, b_n$ bilangan real sedemikian sehingga $a_j < b_j$ untuk $j = 1,2, \dots, n$, maka himpunan titik-titik $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dalam $\mathbb{R}^n$ yang memenuhi ketidaksamaan $a_j \leq x_j \leq b_j$ untuk $j = 1,2, \dots, n$ dinamakan $sel -\ n$ $(n - cell)$.

Teorema 2.4.7

Misalkan k bilangan bulat positif. Jika $\langle I_n \rangle$ barisan dari $sel - n$ sedemikian sehingga $I_n \supset I_{n+1}$ $(n = 1,2, \dots)$, maka $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ tidak kosong.

Bukti

Diketahui bahwa $\langle I_n \rangle$ barisan dari $sel - n$ sedemikian sehingga

$I_n \supset I_{n+1}$ $(n = 1,2, \dots)$

Andaikan $I_n = \left\{\left(x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,k}\right) \epsilon \mathbb{R}^n : a_{n,j} \leq x_{n,j} \leq b_{n,j} ; 1 \leq j \leq n\right\}$.

Selanjutnya dibentuk $I_{1k} = [a_{1,k}, b_{1,k}]$, untuk setiap $1 \leq k \leq n$. Maka untuk setiap $1 \leq k \leq n$ terdapat $x^*{}_k$ sedemikian sehingga $x^*{}_k \epsilon \bigcap I_{1,k}$ $(k = 1,2, \ldots, n)$. Akibatnya bahwa $(x^*{}_1, x^*{}_2, \ldots, x^*{}_n) \epsilon \bigcap I_n$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ tidak kosong.■

Teorema 2.4.8

Dalam ruang metrik $(X, d) = \mathbb{R}^n$ setiap $sel - n$ adalah kompak.

Bukti

Misalkan untuk setiap konstanta real,$a_1, a_2, \ldots, a_n$ dan $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sedemikian sehingga $a_j < b_j$ untuk $j = 1,2,3, \ldots, n$.

Andaikan $I_0 = \{(x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_{n,k}) \epsilon \mathbb{R}^n : a_{n,j} \leq x_{n,j} \leq b_{n,j}; 1 \leq j \leq n\}$ dan

$$\delta = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (b_{n,j} - a_{n,j})^2}$$

Maka $|x - y| \leq \delta$ jika $x \epsilon I_0, y \epsilon I_0$.

Misalkan I_0 tidak kompak. Maka terdapat $\mathcal{G} = \{G_\alpha : \alpha \epsilon \Lambda\}$ (Λ sembarang himpunan) selimut terbuka dari I_0 yang mana subselimut terbuka berhingga tidak menyelimuti I_0.

Untuk $1 \leq j \leq n$, bentuk $c_j = \frac{a_{n,j} + b_{n,j}}{2}$. Himpunan $\{(a_{n,j}, c_{n,j}) : 1 \leq j \leq n\}$ dan $\{(c_{n,j}, b_{n,j}) : 1 \leq j \leq n\}$ dapat membentuk 2^n $sel - n$, yakni $I_k^{(1)}$ untuk $1 \leq k \leq 2^n$. Untuk $1 \leq k \leq 2^n$, $I_k^{(1)}$ adalah subhimpunan dari I_0 dan $\bigcup_{k=1}^{2^n} I_k^{(1)} = I_0$. Sehingga $\mathcal{G} = \{G_\alpha : \alpha \epsilon \Lambda\}$ adalah selimut terbuka untuk setiap 2^n sub $sel - n$. Karena selimut terbuka dari I_0 yang mana subselimut berhingga tidak menyelimuti I_0, maka paling sedikit satu elemen dari $\{I_k^{(1)} : 1 \leq k \leq 2^n\}$ memenuhi sifat tersebut.

Misalkan I_1 elemen dari $\left\{I_k^{(1)}: 1 \leq k \leq 2^n\right\}$, yang mana subselimut berhingga dari $\mathcal{G}$ tidak menyelimuti I_1.

Selanjutnya untuk $\left(x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,k}\right) \epsilon I_1$ diperoleh $a_{n,j} \leq x_{n,j} \leq c_{n,j}$ atau $c_{n,j} \leq x_{n,j} \leq b_{n,j}$, untuk $1 \leq j \leq n$.

Karena $\frac{c_{n,j}-a_{n,j}}{2} = \frac{b_{n,j}-c_{n,j}}{2} = \frac{b_{n,j}-a_{n,j}}{2}$ maka untuk

$x = \left(x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,k}\right), y = (y_{n,1}, y_{n,2}, \dots, y_{n,k}) \epsilon I_1$, diperoleh

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (y_{n,j} - x_{n,j})^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \frac{(b_{n,j}-a_{n,j})^2}{2^2}} = \frac{\delta}{2}.$$

Sehingga panjang $(I_1) = \frac{\delta}{2}$.

Kemudian proses yang sama dilanjutkan dengan

$$I_1 = \left\{\left(x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,k}\right) \epsilon \mathbb{R}^n : a_{n,j}{}^{(1)} \leq x_{n,j}{}^{(1)} \leq b_{n,j}{}^{(1)}; 1 \leq j \leq n\right\}.$$

Diandaikan $c_{n,j}{}^{(1)} = \frac{a_{n,j}{}^{(1)} + b_{n,j}{}^{(1)}}{2}$ membentuk dua himpunan interval $\left\{\left(a_{n,j}{}^{(1)}, c_{n,j}{}^{(1)}\right): 1 \leq j \leq n\right\}$ dan $\left\{\left(c_{n,j}{}^{(1)}, b_{n,j}{}^{(1)}\right): 1 \leq j \leq n\right\}$ yang dapat membentuk $2^n\ sel - n$ yang baru, yakni $I_k^{(2)}$ untuk $1 \leq k \leq 2^n$. $I_k^{(2)}$ adalah subhimpunan dari I_1 dan $\bigcup_{k=1}^{2^n} I_k^{(2)} = I_1$. Karena selimut terbuka dari I_1 yang mana subselimut berhingga tidak menyelimuti I_1, maka paling sedikit satu dari anggota $\left\{I_k^{(2)}: 1 \leq k \leq 2^n\right\}$ tidak diselimuti oleh subselimut berhingga dari $\mathcal{G}$. Misalkan I_2 elemen dari $\left\{I_k^{(2)}: 1 \leq k \leq 2^n\right\}$, yang mana subselimut dari $\mathcal{G}$ tidak menyelimuti I_2 dengan panjang $(I_2) = \frac{\text{panjang}(I_1)}{2} = \frac{\delta}{2^2}$. Jika proses ini dilakukan secara terus menerus maka barisan $\langle I_k \rangle$ dari $sel - n$ memenuhi sifat-sifat berikut ini:

i. $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$,

ii. I_k tidak diselimuti oleh subselimut berhingga dari $\mathcal{G}$,

iii. jika $x\epsilon I_k$ dan $y\epsilon I_k$ maka $|x-y| \leq 2^{-k}\delta$.

Karena $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$, maka $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_k \neq \emptyset$. Andaikan $x^* \epsilon \bigcap_{n=0}^{\infty} I_k$. Karena $\mathcal{G} = \{G_\alpha : \alpha\epsilon\Lambda\}$ adalah selimut terbuka dari I_0 dan $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_k \subset I_0$ terdapat $G_\alpha \epsilon \mathcal{G}$ sedemikian sehingga $x^* \epsilon G_\alpha$. Karena G_α terbuka maka terdapat bilangan real positf $r > 0$ sedemikian sehingga $N_r(x^*) \subset G_\alpha$. Jika n semakin besar maka $2^{-n}\delta < r$. Sehingga untuk semua $n\epsilon\mathbb{N}$, $x^* \epsilon I_k \subset N_r(x^*) \subset G_\alpha$. Dengan demikian kontradiksi dengan sifat (b). Jadi I_0 kompak.■

Teorema 2.4.9

Diberikan ruang metrik Euclides $(\mathbb{R}^n, d)$ dan E subhimpunan dari $(\mathbb{R}^n, d)$. Jika E tetutup dan terbatas, maka E kompak.

Bukti

Andaikan E tetutup dan terbatas. Maka ada suatu $sel - n$, yakni I sedemikian sehingga $E \subset I$. Karena E terbatas maka terdapat bilangan $M > 0$ sedemikian sehingga

$$I = \left\{\left(x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,k}\right)\epsilon\mathbb{R}^n : \max_{1\leq j\leq k}\left|x_{n,j}\right| \leq M+1\right\}$$

Berdasarkan teorema I kompak. Karena $E \subset I$ dan E tertutup, maka berdasarkan teorema 2.4.8 maka E kompak.■

Selanjutnya akan dibicarakan konsep-konsep yang akan melandasi definisi kelengkapan dari suatu ruang metrik dan juga pembahasan selanjutnya.

Definisi 2.4.10

Diberikan ruang metrik (X, d).

Suatu barisan $\langle x_n \rangle \subset X$ disebut *barisan Cauchy* jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan bulat positif $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sedemikian sehingga jika $m, n \geq n_0$ berlaku $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Contoh 2.4.11

Diambil ruang metrik $X = \mathbb{R}$ terhadap metrik biasa.

Akan ditunjukkan bahwa barisan $\langle x_n \rangle$ dengan $x_n = 1/n$ adalah barisan Cauchy.

Diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan bulat $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sedemikian sehingga $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

Maka jika $m \geq n \geq n_0$

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &= |1/n - 1/m| \\ &< 1/n \\ &\leq 1/n_0 < \varepsilon \end{aligned}$$

Dengan demikian terbukti bahwa barisan $\langle x_n \rangle$ dengan $x_n = 1/n$ adalah barisan Cauchy.

Teorema 2.4.12

Diberikan ruang metrik (X, d).

Setiap barisan $\langle x_n \rangle$ konvergen merupakan barisan Cauchy.

Bukti

Diketahui bahwa $x_n \longrightarrow x$ maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan bulat positif $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sedemikian sehingga untuk semua $n \geq n_0$ berlaku

$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga, diperoleh untuk semua $m, n \geq n_0$, berlaku

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x_n, x)$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Jadi terbukti bahwa barisan $\langle x_n \rangle$ konvergen adalah barisan Cauchy.■

Definisi 2.4.13

Diberikan ruang metrik (X, d).

Suatu ruang metrik disebut *ruang metrik lengkap* jika setiap barisan Cauchy dalam ruang metrik itu konvergen ke suatu titik elemen ruang metrik tersebut.

Berikut ini akan dibahas contoh yang berkaitan dengan kelengkapan ruang metrik. Selain itu juga akan diberikan contoh ruang metrik yang tidak lengkap.

Contoh 2.4.14

Diberikan ruang metrik Euclides $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$**.**

Akan ditunjukkan bahwa ruang metrik *Euclides* $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ adalah ruang metrik lengkap.

Bukti

Diketahui bahwa $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ adalah ruang metrik *Euclides* sehingga dapat didefinisikan

$$d(x, y) = \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\xi_j - \eta_j\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ dan $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \epsilon \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$

dimana $x = (\xi_j)$ dan $y = (\eta_j)$. Diambil sembarang barisan Cauchy $\langle x_m \rangle$ dalam $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ dan ditulis $x_m = \langle {\xi_1}^{(m)}, {\xi_2}^{(m)}, \dots, {\xi_n}^{(m)} \rangle$. Karena $\langle x_m \rangle$ Cauchy maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan bulat postif n_0 sedemikian sehingga berlaku

$$d(x_m, x_r) = \left(\sum_{j=1}^{n} \left({\xi_j}^{(m)} - {\eta_j}^{(r)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \qquad (2.1)$$

untuk semua $m, r \geq n_0$. Dengan mengkuadratkan, maka diperoleh untuk

$m, r \geq n_0$ dan $j = 1,2, \dots, n$.

$$\left({\xi_j}^{(m)} - {\eta_j}^{(r)}\right)^2 < \varepsilon^2 \text{ dan } \left|{\xi_j}^{(m)} - {\eta_j}^{(r)}\right| < \varepsilon.$$

Hal ini menunjukkan untuk setiap $1 \leq j \leq n$, $\left({\xi_j}^1, {\xi_j}^2, \dots\right)$ adalah barisan Cauchy dari bilangan real. Karena setiap barisan Cauchy dari bilangan real adalalan barisan konvergen maka ${\xi_j}^m \longrightarrow \xi_j$ untuk $m \longrightarrow \infty$.

Dengan menggunakan n limit, dapat didefinisikan $x = \langle \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \rangle$. Dengan jelas bahwa $x \epsilon \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$. Berdasarkan (2.1) untuk $r \longrightarrow \infty$, berlaku

$$d(x_m, x) \leq \varepsilon,$$

untuk semua $m \geq n_0$. Ini menunjukkan bahwa x adalah limit dari $\langle x_m \rangle$ dan terbukti bahwa ruang metrik Euclid $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ adalah lengkap, karena diambil sembarang barisan Cauchy $\langle x_m \rangle$.

Contoh 2.4.15

Diketahui $Q =$ himpunan bilangan rasional.

Diberikan barisan $\langle s_n \rangle$ dengan $s_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Barisan $\langle s_n \rangle$ akan konvergen ke bilangan irasional $e \notin Q$. Jadi Q tidak lengkap.

Berikut ini akan diberikan beberapa konsep terkait dengan konsep kekompakan dan barisan. Selain itu juga bahwa akan dibahas ekuivalensi barisan dan kekompakan.

Definisi 2.4.16

Ruang Metrik (X, d) dikatakan *kompak barisan* (*sequentially compact*) jika setiap barisan $\langle x_n \rangle \subset X$ mempunyai subbarisan $\langle x_{n_k} \rangle$ yang konvergen.

Definisi 2.4.17

Diberikan ruang metrik (X, d).

Ruang metrik X dikatakan *bersifat Bolzano-Weierstrass* jika setiap subhimpunan tak hingga dari X mempunyai titik limit.

Teorema 2.4.18

Ruang metrik (X, d) kompak barisan jika dan hanya jika (X, d) mempunyai sifat Bolzano-Weierstrass.

Bukti

$\Longrightarrow$ Diketahui ruang metrik (X, d) kompak barisan dan diberikan A subhimpunan tak hingga dari X. Akan dibuktikan bahwa A mempunyai titik limit.

Dibentuk barisan titik-titik berlainan $\langle x_n \rangle$ dari A. Karena ruang metrik (X, d) kompak barisan, maka barisan $\langle x_n \rangle$ mempunyai subbarisan $\langle x_{n_k} \rangle$ yang konvergen ke suatu titik $x \epsilon X$. Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan bulat P sedemikian sehingga untuk setiap $k \geq P$ berlaku $d\left(x, x_{n_k}\right) < \varepsilon$. Karena $\langle x_{n_k} \rangle$ barisan titik-titik berlainan, maka setiap kitar dari x memuat titik-titik berlainan dari subbarisan. Jadi titik x adalah titik limit dari himpunan titik-titik subbarisan. Karena himpunan titik-titik subbarisan adalah subhimpunan dari A, maka x adalah titik limit A. Terbukti bahwa ruang metrik (X, d) mempunyai sifat Bolzano-Weierstrass.

$\Longleftarrow$ Diketahui ruang metrik (X, d) mempunyai sifat Bolzano-Weierstrass, yakni setiap subhimpunan tak hingga mempunyai titik limit. Akan dibuktikan bahwa ruang metrik (X, d) kompak barisan. Misalkan $\langle x_n \rangle$ suatu barisan di dalam X. Jika barisan $\langle x_n \rangle$ mempunyai suatu titik x yang muncul tak hingga banyaknya, maka barisan $\langle x_n \rangle$ mempunyai subbarisan konstan, yakni untuk setiap bilangan bulat positif k sehingga $\langle x_{n_k} \rangle = x$. Jelas bahwa subbarisan konvergen ke titik x. Jika barisan $\langle x_n \rangle$ tidak mempunyai titik yang muncul tak hingga banyaknya, maka $A = \{x_n\}$ subhimpunan tak hingga dari X, sehingga A mempunyai titik limit $x \epsilon X$. Untuk setiap bilangan bulat positif k diambil x_{n_k} dengan $d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{k}$, maka $x_{n_k} \longrightarrow x$ untuk $k \longrightarrow \infty$. Terbukti ruang metrik (X, d) kompak barisan. ■

Teorema 2.4.19

Jika ruang metrik (X, d) kompak, maka (X, d) mempunyai sifat Bolzano-Weierstrass.

Bukti

Diberikan ruang metrik (X, d) kompak dan A subhimpunan tak hingga dari X. Akan ditunjukkan bahwa A mempunyai titik limit.

Andaikan A tidak mempunyai titik limit, maka setiap titik $x \epsilon X$ bukan titik limit dari A, sehingga untuk setiap titik $x \epsilon X$ ada $r_x > 0$ sedemikian sehingga $N_{r_x}(x)$ tidak memuat titik dari A kecuali mungkin titik x. Keluarga $\left\{ N_{r_x}(x) \right\}$ adalah selimut terbuka dari X. Karena ruang metrik X kompak, dapat ditemukan $x_1, x_2, \dots, x_n$ sedemikian sehingga $X \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} N_{r_{x_k}}(x_k)$. Karena himpunan $A \subseteq \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, maka A himpunan berhingga. Kontradiksi karena A himpunan tak hingga.■

Definisi 2.4.20

Diberikan ruang metrik $(X, d), E \subset X$. *Diameter* E adalah $d(E) = \sup\{d(x, y): x, y \epsilon E\}$.

Definisi 2.4.21

Bilangan real $a > 0$ disebut *bilangan Lebesgue* (*Lebesgue number*) untuk selimut terbuka $\{G_i\}$ dari ruang metrik (X, d) jika setiap subhimpunan dari X yang diameternya kurang dari a termuat sekurang-kurangnya dalam satu G_i.

Teorema 2.4.22

Dalam ruang metrik (X, d) yang kompak barisan, setiap selimut terbuka mempunyai bilangan Lebesgue.

Bukti

Diketahui (X, d) kompak barisan dan $\{G_i | i \epsilon \Lambda\}$($\Lambda$ himpunan indeks) selimut terbuka untuk X. Subhimpunan A dari X dikatakan *besar* jika A tidak dimuat dalam setiap selimut terbuka G_i. Jika tidak ada subhimpunan besar, sembarang bilangan real positif a adalah adalah bilangan Lebesgue, sebab setiap $A \subset X$ (termasuk yang diameternya kurang dari a) termuat dalam suatu G_i.

Asumsikan ada himpunan besar dari X. Misalkan $B = \{A: A \subset X, A \text{ besar}\}$ dan $b = \inf\{d(A): A\epsilon B\}$. Jelas bahwa $b \geq 0$.

Jika $b > 0$ maka b dapat diambil sebagai bilangan Lebesgue, sebab jika $A \subset X, d(A) < b$ maka A termuat dalam suatu G_i, sehingga A bukan himpunan besar.

Andaikan $b = 0$. Karena himpunan besar tidak termuat di dalam setiap G_i, maka himpunan besar sekurang-kurangnya terdiri atas dua titik. Untuk setiap bilangan bulat positif n terdapat himpunan besar B_n sedemikian sehingga $0 \leq d(B_n) \leq 1/n$. Dipilih titik x_n di setiap B_n. Karena X kompak barisan, maka barisan $\langle x_n \rangle$ mempunyai subbarisan $\langle x_{n_k} \rangle$ yang konvergen ke $x\epsilon X$. Selanjutnya ada $i\epsilon\Lambda$ sedemikian sehingga $x\epsilon G_i$. Karena G_i terbuka, maka untuk $r > 0$ terdapat kitar $N_r(x) \subset G_i$. Selain itu karena subbarisan konvergen, maka $x_{n_k} \subset N_r(x)$ untuk indeks k tak hingga banyaknya. Selanjutnya untuk bilangan bulat positif n yang tak hingga, $x_n \epsilon N_{r/2}(x)$. Misalkan ada bilangan positif n_0 yang cukup besar sedemikian sehingga $1/n_0 < r/2$. Karena $d(B_{n_0}) < 1/n_0 < r/2$ maka $B_{n_0} \subset N_r(x) \subset G_i$. Terdapat kontradiksi dengan B_{n_0} himpunan besar. Jadi tidak mungkin bahwa $b = 0$. ■

Definisi 2.4.23

Jika diberikan $\varepsilon > 0$, subhimpunan A dari ruang metrik (X, d) dinamakan *jaringan-*ε ($\varepsilon -$ *net*) jika himpunan A berhingga dan $X = \bigcup_{a\epsilon A} N_\varepsilon(a)$.

Selanjutnya ruang metrik (X, d) dikatakan *terbatas total* (*totally bounded*) jika ruang metrik (X, d) mempunyai jaringan-ε untuk setiap $\varepsilon > 0$.

Teorema 2.4.24

Jika ruang metrik (X, d) kompak barisan, maka (X, d) terbatas total.

Bukti

Diketahui ruang metrik (X, d) kompak barisan dan diberikan $\varepsilon > 0$. Ambil satu titik a_1 dalam X dan bentuk kitar $N_\varepsilon(a_1)$. Jika kitar tersebut memuat setiap titik dari X, maka himpunan $\{a_1\}$ adalah jaringan-ε. Jika ada titik-titik di luar dari $N_\varepsilon(a_1)$, namakan titik a_2 dan bentuk himpunan $N_\varepsilon(a_1) \cup N_\varepsilon(a_2)$. Jika gabungan kitar itu memuat setiap titik dari X, maka himpunan $\{a_1, a_2\}$ adalah jaringan-ε. Jika proses ini dilanjutkan, maka gabungan kitar $N_\varepsilon(a_1) \cup N_\varepsilon(a_2) \dots \cup N_\varepsilon(a_n)$ akan memuat setiap titik dari X. Jika proses yang sama dikerjakan terus–menerus secara tak terbatas, maka barisan $\langle a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \rangle$ adalah barisan yang tidak memuat subbarisan yang konvergen. Hal ini bertentangan dengan asumsi bahwa X ruang metrik yang kompak barisan. Jadi himpunan berhingga $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ adalah jaringan-ε, dan terbukti bahwa X terbatas total.■

Teorema 2.4.25

Jika ruang metrik (X, d) kompak barisan, maka (X, d) kompak.

Bukti

Diketahui ruang metrik (X, d) kompak barisan. Diberikan sembarang selimut terbuka $\{G_i | i \epsilon \Lambda\}$($\Lambda$ himpunan indeks). Berdasarkan Teorema 2.4.22, selimut terbuka tersebut mempunyai suatu bilangan Lebesgue a. Selanjutnya diambil $\varepsilon = a/3$ dan dengan menggunakan Teorema 2.4.24 diperoleh jaringan- ε

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

Untuk setiap $k = 1,2, \dots, n$, $d\big(N_\varepsilon(a_k)\big) \leq 2\varepsilon = 2\,a/3 < a$. Berdasarkan definisi bilangan Lebesgue, untuk setiap k terdapat G_{a_k} sedemikian sehingga $N_\varepsilon(a_k) \subset G_{a_k}$. Karena himpunan A adalah jaringan-ε dan setiap titik kitar memuat setiap titik dalam X, maka $X = \bigcup_{a_k \epsilon A} N_\varepsilon(a_k) = \bigcup_{k=1}^{n} G_{a_k}$ dengan $\{G_{a_1}, G_{a_2}, \dots, G_{a_n}\}$ adalah subselimut berhingga dari $\{G_i\}$. Dengan demikian terbukti bahwa ruang metrik (X, d) kompak.■

Teorema 2.4.26

Diberikan ruang metrik (X, d).

Sifat-sifat di bawah ini ekivalen:

a) Ruang metrik X kompak

b) Ruang metrik X bersifat Bolzano-Weierstrass

c) Ruang metrik X kompak barisan.

Bukti

(a) $\Longrightarrow$ (b)

Berdasarkan Teorema 2.4.19.

(b) $\Longrightarrow$ (c)

Berdasarkan Teorema 2.4.18.

(c) $\Longrightarrow$ (a)

Berdasarkan Teorema 2.4.25.■

Khusus dalam ruang metrik $\mathbb{R}^n$, ekivalensi sifat-sifat di atas ditambah bahwa himpunan E tertutup dan terbatas.

Berikut akan dibahas secara singkat beberapa teorema penting yang terkait dengan sifat-sifat kekontinuan dan kekontinuan seragam dalam ruang metrik. Pembahasan ini akan melandasi konsep-konsep yang akan dibicarakan dalam bab selanjutnya.

Definisi 2.4.27

Diberikan ruang-ruang metrik (X, d_1) dan (Y, d_2), himpunan $E \subset X$, $f: E \longrightarrow Y$, dan p titik limit dari E. $\lim_{x \longrightarrow p} f(x) = f(p)$ jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga $d_2\big(f(x), f(p)\big) < \varepsilon$ untuk setiap $x \epsilon E$ dengan $0 < d_1(x, p) < \delta$.

Definisi 2.4.28

Diberikan ruang-ruang metrik (X, d_1) dan (Y, d_2), himpunan $E \subset X$, titik $p \epsilon E$, dan fungsi $f: E \longrightarrow Y$.

Fungsi f dikatakan *kontinu di titik* p jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga $d_2\big(f(x), f(p)\big) < \varepsilon$ untuk setiap $x \epsilon E$ dengan $d_1(x, p) < \delta$.

Jika f kontinu di setiap titik $p \epsilon E$, maka f dikatakan *kontinu* pada himpunan E.

Contoh 2.4.29

Diambil ruang metrik $X = Y = \mathbb{R}$.

Dibentuk fungsi $f: X \longrightarrow Y$ dengan definisi $f(x) = x^2$ untuk $x \epsilon X$.

Akan ditunjukkan bahwa fungsi f kontinu setiap titik $c \epsilon X$.

Ambil sembarang titik $c \epsilon X$.

Diberikan $\varepsilon > 0$ harus dicari $\delta > 0$ sehingga untuk setiap x yang memenuhi $|x - c| < \delta$ berlaku $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

Ditinjau nilai x dalam kitar $N_1(c) = (c - 1, c + 1)$, yaitu nilai-nilai x dengan $|x - c| < 1$.

Akan ditunjukkan adanya bilangan $\delta > 0$ sehingga untuk $|x - c| < \delta$ berlaku $|x^2 - c^2| < \varepsilon$.

Untuk $|x - c| < 1$ maka $|x^2 - c^2| = |x - c||x + c| = |x - c||(x - c) + 2c| < |x - c||1 + 2c|$. Jadi untuk $|x - c| < 1$ maka $|x^2 - c^2| < \varepsilon$ cukup apabila $|x - c| < \frac{\varepsilon}{1+|2c|}$. Dengan demikian jika $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{1+|2c|}\right\}$ maka dan $0 < |x - c| < \delta$ akan berlaku $|x^2 - c^2| < \varepsilon$. Terbukti f kontinu pada c. Karena pengambilan c sembarang maka terbukti f kontinu pada $X = \mathbb{R}$.

Teorema 2.4.30

Diberikan ruang metrik (X, d_1), (Y, d_2), dan (Z, d_3), himpunan $E \subset X$ dan pemetaan-pemetaan $f: E \longrightarrow Y$ $\quad g: f(E) \longrightarrow Z$ $\; h: E \longrightarrow Z$ dengan definisi $h(x) = g(f(x))$ untuk setiap $x \epsilon E$.

Jika f kontinu di $p \epsilon E$ dan g kontinu di $f(p)$, maka h kontinu di p.

Selanjutnya h ditulis sebagai $h = g \circ f$ dan h disebut *fungsi komposisi*.

Bukti

Diambil sembarang bilangan $\varepsilon > 0$.

Karena g kontinu di $f(p)$ maka terdapat bilangan $\eta > 0$ sedemikian hingga untuk setiap $y\epsilon f(E)$ dengan $d_2\big(y, f(p)\big) < \eta$ berlaku $d_3\left(g(y), g\big(f(p)\big)\right) < \varepsilon$. (2.2)

Karena f kontinu di p maka terdapat bilangan $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk setiap $x\epsilon E$ dengan $d_1(x, p) < \delta$ berlaku $d_2\big(f(x), f(p)\big) < \eta$.

Selanjutnya diperoleh $d_3(h(x), h(p)) = d_3\left(g(f(x)), g\big(f(p)\big)\right) < \varepsilon$ sebab $f(x)\epsilon f(E)$ dengan $d_2\big(f(x), f(p)\big) < \eta$.

Dari (2.2) diperoleh juga bahwa $d_3\left(g(f(x)), g\big(f(p)\big)\right) < \varepsilon$ untuk setiap $x\epsilon E$ $d_1(x, p) < \delta$.

Bukti ini menunjukkan bahwa fungsi komposisi h kontinu di titik p. ■

Definisi 2.4.31

Diberikan ruang metrik (X, d_1) dan (Y, d_2) dan Fungsi $f: X \longrightarrow Y$.

Jika $V \subset Y$ maka *bayangan invers* dari V terhadap fungsi f adalah subhimpunan $f^{-1}(V)$ dari X, yakni $f^{-1}(V) = \{x\epsilon X: f(x)\epsilon V\}$.

Teorema 2.4.32

Diberikan ruang metrik (X, d_1) dan (Y, d_2).

Fungsi $f: X \longrightarrow Y$ kontinu pada X jika dan hanya jika $f^{-1}(V)$ terbuka dalam X untuk setiap himpunan terbuka V dalam Y.

Bukti

$\Longrightarrow$ Diketahui f kontinu.

Akan dibuktikan untuk semua himpunan terbuka $V \subset Y, f^{-1}(V)$ terbuka dalam X.

Ambil sembarang himpunan $V \subset Y$ terbuka dan $f^{-1}(V) = V_0$.

Jika V_0 adalah himpunan kosong, maka himpunan V_0 terbuka.

Untuk selanjutnya anggap bahwa V_0 bukan himpunan kosong.

Diambil sembarang $x_0 \epsilon V_0$, harus ditunjukkan x_0 titik interior V_0, sebut saja $y_0 = f(x_0) \epsilon V$.

Karena V terbuka maka y_0 adalah titik interior dari V. Sehingga ada kitaran-ε dari y_0 yaitu N. Karena f kontinu ada kitaran-δ dari x_0 yaitu N_0 sedemikian sehingga $f(N_0) = N$. Karena $N \subset V$ maka $f^{-1}(N) \subset f^{-1}(V)$ atau $N_0 \subset V_0$.

Jadi terdapat kitaran N_0 dari x_0 sehingga $x_0 \epsilon N_0 \subset V_0$.

Terbukti bahwa x_0 titik interior V_0. Jadi setiap elemen V_0 adalah titik interior. Dengan kata lain $V_0 = f^{-1}(V)$ terbuka.

$\Leftarrow$ Diketahui bahwa $f^{-1}(V)$ setiap himpunan terbuka V dalam Y juga terbuka dalam X. Diambil sembarang $x_0 \epsilon X$ dan sembarang kitaran-ε dari $f(x_0)$, yakni N. $f^{-1}(N)$ yaitu N_0 terbuka, karena N terbuka N_0 memuat x_0. Sehingga N_0 juga memuat kitaran-δ dari x_0 yang dipetakan ke N karena N_0 dipetakan ke N. Akibatnya f kontinu di x_0. Lebih lanjut karena x_0 sembarang anggota X terbukti bahwa f kontinu.■

Definisi 2.4.33 (Kontinu Seragam)

Diberikan ruang metrik (X, d_1) dan (Y, d_2), $f: X \longrightarrow Y$.

Fungsi f dikatakan *kontinu seragam* pada X jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sedemikian hingga $d_2\big(f(p), f(q)\big) < \varepsilon$ untuk semua $p, q \epsilon X$ dengan $d_1(p, q) < \delta$.

Berdasarkan definisi kontinu dan kontinu seragam, dapat disimpulkan perbedaan dari kedua konsep tersebut. Pertama kontinu seragam adalah sifat fungsi pada suatu himpunan bukan di suatu titik, sedangkan definisi kontinu untuk suatu fungsi diawali dengan definisi fungsi kontinu di suatu titik. Kedua jika f kontinu pada X, maka jika diberikan $p \epsilon X$ dan $\varepsilon > 0$, dapat dicari $\delta > 0$ yang memenuhi definisi 2.4.28. Bilangan δ bergantung pada p dan ε . Sedangkan jika f kontinu seragam pada X, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada $\delta > 0$ yang dapat digunakan dalam definisi kontinu untuk semua titik dalam X. Dengan kata lain bilangan δ hanya bergantung pada ε.

Berdasarkan definisi jika terdapat fungsi f yang kontinu seragam pada X, maka fungsi f kontinu pada X. Tetapi sebaliknya tidak benar, berikut diberikan contohnya.

Contoh 2.4.34

Diambil ruang metrik $X = Y = \mathbb{R}$.

Dibentuk fungsi $f\colon X \longrightarrow Y$ dengan definisi $f(x) = x^2$ untuk $x \epsilon X$.

Akan ditunjukkan bahwa fungsi f tidak kontinu seragam pada $\mathbb{R}$.

Bukti

Jika $f(x) = x^2$ kontinu pada $\mathbb{R}$.

Diambil $\varepsilon = 1$ dan δ sembarang bilangan positif. Untuk x dan y dalam $\mathbb{R}$ berlaku $|f(x) - f(y)| = |x - y||x + y|$. Dipilih $x > 0$ dan $y = x + \frac{\delta}{2}$, maka

$$|x - y| < \delta \text{ dan } |f(x) - f(y)| = \frac{\delta}{2}\frac{4x + \delta}{2} = \delta x + \frac{\delta^2}{4} > \delta x.$$

Jadi jika diambil $x = 1/\delta$ dan $y = x + \delta/2$ maka $|f(x) - f(y)| > \delta x = 1$.

Terbukti bahwa ada$\varepsilon > 0$ $(\varepsilon = 1)$ sehingga untuk setiap $\delta > 0$ terdapat x dan y dalam $\mathbb{R}$, dengan $|x - y| < \delta$ dan $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. Jadi f tidak kontinu seragam pada $\mathbb{R}$.

BAB III

BARISAN FUNGSI

Pada bab ini akan dibahas tentang barisan fungsi, kekonvergenan titik demi titik dan kekonvergenan seragam, hubungan kekonvergenan seragam dengan kekontinuan, hubungan kekonvegenan seragam dan integral, dan hubungan konvergen seragam dengan differensial. Konsep-konsep tersebut yang kemudian juga akan melandasi pembahasan selanjutnya.

Konsep konvergen seragam ini sangat penting dalam pembahasan mengenai barisan fungsi yakni apakah sifat-sifat yang dimiliki oleh fungsi suku barisan f_n juga dimiliki oleh fungsi f.

A. Barisan Fungsi

Pada subbab ini akan dibicarakan barisan fungsi. Fungsi-fungsi yang dibahas adalah fungsi-fungsi bernilai real, yang didefinisikan pada suatu himpunan di dalam ruang metrik. Selain itu juga akan dibahas tentang kekonvergenan, baik konvergen titik demi titik maupun konvergenan seragam. Barisan yang konvergen seragam pada suatu himpunan adalah konvergen titik demi titik, tetapi sebaliknya belum tentu benar.

Diberikan ruang metrik X dan himpunan $E \subset X$. Barisan $\langle f_n \rangle$ adalah barisan fungsi real yang didefinisikan pada suatu himpunan $E \subset X,$ yaitu $f_n: E \longrightarrow \mathbb{R}$ untuk $n \epsilon \mathbb{N}$.

Jika untuk setiap $x \epsilon E$ barisan bilangan $\langle f_n(x) \rangle$ konvergen, maka dikatakan barisan $\langle f_n \rangle$ *konvergen titik demi titik* pada himpunan E. Karena untuk $x \epsilon E$ dan $y \epsilon E$ barisan bilangan $\langle f_n(x) \rangle$ dan $\langle f_n(y) \rangle$ dapat konvergen ke bilangan yang berbeda, maka barisan $\langle f_n \rangle$ yang konvergen titik demi titik pada E menentukan fungsi limit f yang didefinisikan pada E. Dengan kata lain, untuk setiap $x \epsilon E$, barisan $\langle f_n(x) \rangle$ konvergen ke $f(x)$, dengan notasi $f_n \longrightarrow f$ titik demi titik.

Definisi 3.1.1

Diberikan ruang metrik (X, d), $E \subset X$ dan barisan $\langle f_n \rangle$ dengan $f_n : E \longrightarrow \mathbb{R}$ untuk $n \epsilon \mathbb{N}$. Barisan fungsi $\langle f_n \rangle$ dikatakan *konvergen titik demi titik* ke fungsi f pada himpunan E jika diberikan $x \epsilon E$ dan $\varepsilon > 0$ terdapat $N \epsilon \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \epsilon \mathbb{N}$ dan $n \geq N$ berlaku

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Berdasarkan definisi di atas, bilangan bulat positif N bergantung pada ε dan x. Jadi N adalah fungsi dari ε dan x. Namun mungkin terjadi bahwa bilangan asli N dalam definisi barisan $\langle f_n \rangle$ konvergen ke fungsi f pada X hanya bergantung pada ε saja. Kekonvergenan semacam itu disebut kekonvergenan seragam.

Definisi 3.1.2

Diberikan ruang metrik (X, d), $E \subset X$ dan barisan $\langle f_n \rangle$ dengan $f_n : E \longrightarrow \mathbb{R}$ untuk $n \epsilon \mathbb{N}$. Barisan fungsi $\langle f_n \rangle$ dikatakan *konvergen seragam* ke fungsi f pada himpunan E jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu bilangan bulat positif N sedemikian hingga untuk semua $n \epsilon \mathbb{N}$ dengan $n \geq N$ dan untuk semua $x \epsilon E$ berlaku

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Sering digunakan notasi $f_n \longrightarrow f$ seragam pada E.

Contoh 3.1.3

Diberikan ruang metrik (X, d), $(a, b) \subset X$, dan barisan fungsi $\langle f_n \rangle$ dengan $f_n: (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$. Didefinisikan $f_n(x) = 1/(nx)$ untuk $n \epsilon \mathbb{N}$ dan dan $a < x < b$ dengan $a > 0$.

Buktikan bahwa $\langle f_n \rangle$ konvergen seragam ke f pada (a, b) dan $f(x) = 0$ untuk $a < x < b$.

Bukti

Dengan jelas terlihat bahwa untuk setiap $x \epsilon (a, b)$ maka $\lim_{n \to \infty} 1/(nx) = 0$. Jadi $\langle f_n \rangle$ konvergen titik demi titik pada (a, b), dengan $f(x) = 0$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\langle f_n \rangle$ konvergen seragam ke f pada (a, b).

Untuk setiap $x \epsilon (a, b)$ dan setiap $n \epsilon \mathbb{N}$ berlaku

$$|f_n(x) - f(x)| = 1/(nx) < 1/na.$$

Oleh karena itu jika diberikan $\varepsilon > 0$, maka terdapat bilangan bulat positif N sedemikian sehingga $1/Na < \varepsilon$. Selanjutnya jika diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan bulat positif N sedemikian sehingga $n \geq N$ dan $x \epsilon (a, b)$, berlaku

$$|f_n(x) - f(x)| = 1/(nx) < 1/na < 1/Na < \varepsilon.$$

Dengan demikian (f_n) konvergen seragam ke f pada (a, b).

Jika barisan $\langle f_n \rangle$ tidak konvergen seragam ke f pada E jika dan hanya jika

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall N \epsilon \mathbb{N})(\exists n \epsilon \mathbb{N})(\exists n \geq N)(\exists x \epsilon E)\ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon,$$

atau dengan kata lain bahwa barisan fungsi $\langle f_n \rangle$ tidak konvergen seragam ke fungsi f pada himpunan E, jika terdapat $\varepsilon > 0$ sehingga untuk semua bilangan bulat positif N, dapat dicari suatu n yang lebih besar atau sama dengan N dan suatu $x \epsilon E$ dan berlaku $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$.

Contoh 3.1.4

Diberikan ruang metrik (X, d), $(0,1) \subset X$, dan barisan fungsi $\langle f_n \rangle$ dengan $f_n: (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$. Didefinisikan $f_n(x) = 1/(nx)$ untuk $n \epsilon \mathbb{N}$.

Buktikan bahwa $\langle f_n \rangle$ konvergen titik demi titik tetapi tidak konvergen seragam pada $(0,1)$.

Bukti

Dengan jelas terlihat bahwa untuk setiap $x \epsilon (0,1)$ maka $\lim_{n \to \infty} 1/(nx) = 0$. Jadi $\langle f_n \rangle$ konvergen titik demi titik pada $(0,1)$. Jika diambil $\varepsilon = 1$. Maka untuk sembarang $N \epsilon \mathbb{N}$, dapat dicari $n = 2N > N$ dan $x = 1/(3N) \epsilon (0,1)$ sehingga

$$|f_{2N}(1/3N) - f(1/3N)| = 3/2 > 1.$$

Dengan demikian $\langle f_n \rangle$ tidak konvergen seragam ke f pada $(0,1)$.

Teorema 3.1.5 (Kriteria Cauchy)

Diberikan ruang metrik (X, d), $E \subset X$ dan barisan $\langle f_n \rangle$ dengan $f_n: E \longrightarrow \mathbb{R}$.

Barisan fungsi $\langle f_n \rangle$ konvergen seragam pada E jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu bilangan bulat positif N sedemikian hingga untuk semua $m \geq N$, untuk semua $n \geq N$ dan semua $x \epsilon E$ berlaku

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Bukti

$\Longrightarrow$ Akan dibuktikan jika barisan fungsi $\langle f_n \rangle$ konvergen seragam maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu bilangan bulat positif N sedemikian hingga untuk semua $m, n \geq N$ dan semua $x \epsilon E$ berlaku

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Andaikan barisan fungsi $\langle f_n \rangle$ konvergen seragam. Maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu bilangan bulat positif N sedemikian hingga untuk semua $n \geq N$ dan untuk semua $x \epsilon E$, berlaku

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2,$$

sehingga untuk semua $m, n \geq N$, dan untuk semua $x \epsilon E$ berlaku

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &= |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \\ &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

$\Longleftarrow$ Diketahui untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu bilangan bulat positif N sedemikian sehingga untuk semua $m, n \geq N$ dan semua $x \epsilon E$ berlaku

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon. \qquad (3.1)$$

Dengan demikian untuk setiap $x \epsilon E$ barisan bilangan real $\langle f_n(x) \rangle$ adalah barisan Cauchy. Jadi $\langle f_n(x) \rangle$ konvergen untuk setiap $x \epsilon E$.

Dimisalkan $\langle f_n \rangle$ konvergen ke fungsi limit f pada E. Akan dibuktikan bahwa $\langle f_n \rangle$ konvergen seragam ke f pada E.

Jika diambil n tetap dan $n \geq N$ sedangkan diandaikan $m \longrightarrow \infty$, maka ketidaksamaan (3.1) menghasilkan

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

untuk semua $x \epsilon E$.

Dengan demikian telah dibuktikan bahwa untuk $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat bilangan bulat positif N sehingga untuk semua $n \geq N$ dan semua $x \epsilon E$ berlaku $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Jadi $f_n \longrightarrow f$ seragam pada E. ■

Teorema 3.1.6

Diberikan ruang metrik (X, d), $E \subset X$ dan barisan $\langle f_n \rangle$ dengan $f_n : E \longrightarrow \mathbb{R}$.

Didefinisikan untuk setiap $n \epsilon \mathbb{N}$

$$M_n = \sup_{x \epsilon E} |f_n(x) - f(x)|.$$

Maka $\langle f_n \rangle$ konvergen seragam ke f pada E jika dan hanya jika $M_n \longrightarrow 0$.

Bukti

$\Longrightarrow$ Jika $\langle f_n \rangle$ konvergen seragam ke f pada E, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan bulat positif N sedemikian sehingga untuk semua $n \geq N$ dan semua $x \epsilon E$ berlaku $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$. Dengan demikian jelaslah bahwa

$$M_n = \sup_{x \epsilon E} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Hal ini berarti bahwa $M_n \longrightarrow 0$.

$\Longleftarrow$ Jika $M_n \longrightarrow 0$, sehingga untuk $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan bulat positif N sedemikian sehingga untuk semua $n \geq N$, berlaku $|M_n| < \varepsilon$. Hal ini berarti untuk semua $n \geq N$ dan semua $x \epsilon E$, berlaku

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Demikian terbukti bahwa $\langle f_n \rangle$ konvergen seragam ke f pada E. ■

B. Kekonvergenan Seragam dan Kekontinuan

Dalam subab ini akan dibahas tentang sifat kekontinuan yang dimiliki oleh suku-suku barisan fungsi yang konvergen seragam pada suatu subhimpunan dari ruang metrik juga dimiliki oleh fungsi limitnya.

Di samping itu juga akan dibahas tentang masalah operasi pengambilan limit, yakni tentang urutan pengambilan limit yang dapat dipertukarkan.

Teorema 3.2.1

Diberikan ruang metrik (X,d), $E \subset X$ dan barisan fungsi $\langle f_n \rangle$ dengan $f_n\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ sedemikain sehingga barisan fungsi $\langle f_n \rangle$ konvergen seragam ke f pada E dan p titik limit dari E.

Jika $\lim_{x\longrightarrow p} f_n(x) = A_n$ untuk $n\epsilon\mathbb{N}$ maka barisan $\langle A_n \rangle$ konvergen dan

$$\lim_{x\longrightarrow p} f(x) = \lim_{n\longrightarrow\infty} A_n.$$

Jadi

$$\lim_{x\longrightarrow p} \lim_{n\longrightarrow\infty} f_n(x) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \lim_{x\longrightarrow p} f_n(x).$$

Bukti

Diberikan $\varepsilon > 0$. Karena diketahui bahwa $\langle f_n \rangle$ konvergen seragam ke fungsi f pada himpunan E maka terdapat bilangan bulat positif N sedemikian hingga untuk semua $n, m \geq N$ dan semua $x\epsilon E$, maka berlaku

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (3.2)$$

Jika pada ketaksamaan (3.2) andaikan $x \longrightarrow p$, maka diperoleh

$$|A_n - A_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Jadi untuk semua $n \geq N$ dan semua $m \geq N$ berlaku $|A_n - A_m| < \varepsilon$ sehingga $\langle A_n \rangle$ barisan Cauchy. Dengan demikian $\langle A_n \rangle$ konvergen ke A atau $A_n \longrightarrow A$.

Akan dibuktikan bahwa $\lim_{x \longrightarrow p} f(x) = A$. Jadi untuk setiap $\varepsilon > 0$, dicari $\delta > 0$ sedemikian untuk $x \epsilon E$ dan $0 < d(x,p) < \delta$ berlaku

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Selanjutnya dibentuk ketidaksamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} |f(x) - A| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - A_n + A_n - A| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A|. \qquad (3.3) \end{aligned}$$

Karena $x \epsilon E$ berlaku $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ maka terdapat bilangan bulat positif N_1 sedemikian sehingga untuk semua $n \geq N_1$, berlaku $|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Selain itu karena $A_n \longrightarrow A$ maka terdapat bilangan bulat positif N_2 sedemikian sehingga untuk semua $n \geq N_2$, berlaku $|A_n - A| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Jadi untuk bilangan bulat positif $N = \text{maks}\{N_1, N_2\}$ dan untuk semua $x \epsilon E$ berlaku $|f(x) - f_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ dan juga $|A_N - A| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Karena $\lim_{x \longrightarrow p} f_N(x) = A_N$ maka terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk semua $x \epsilon E$ dan $0 < d(x,p) < \delta$ berlaku $|f_N(x) - A_N| < \frac{\varepsilon}{3}$. Dengan demikian untuk semua $x \epsilon E$ dan $0 < d(x,p) < \delta$ mengakibatkan ketaksamaan (3.3) menajdi

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Jadi terbukti bahwa $\lim_{x \longrightarrow p} f(x) = A$.

Dengan jelas terbukti bahwa

$$\lim_{x \longrightarrow p} \lim_{n \longrightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{x \longrightarrow p} f(x) = A = \lim_{n \longrightarrow \infty} A_n = \lim_{n \longrightarrow \infty} \lim_{x \longrightarrow p} f_n(x).$$

Demikian urutan dalam pengambilan limit $x \longrightarrow p$ dan $n \longrightarrow \infty$ dapat dipertukar-kan.■

Teorema 3.2.2

Diberikan ruang metrik $(X, d), E \subset X$.

Jika $\langle f_n \rangle$ barisan fungsi kontinu pada himpunan E dan $\langle f_n \rangle$ konvergen seragam ke fungsi f pada himpunan E, maka fungsi f kontinu pada himpunan E.

Bukti

Teorema ini sebagai akibat dari teorema 3.2.1 dengan

$\lim_{x \longrightarrow p} f_n(x) = A_n = f_n(p)$ (f_n kontinu di p), sehingga

$$\lim_{x \longrightarrow p} f(x) = \lim_{x \longrightarrow p} \lim_{n \longrightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \lim_{x \longrightarrow p} f_n(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} f_n(p) = f(p).$$

Jadi untuk sembarang $p \epsilon E$ berlaku $\lim_{x \longrightarrow p} f(x) = f(p)$ dan f kontinu pada E. ■

C. Kekonvergenan Seragam dan Keterintegralan

Teorema berikut ini juga menunjukkan bahwa sifat integral dari fungsi su-ku-suku dalam barisan fungsi yang konvergen seragam pada suatu himpunan juga dimiliki oleh fungsi limitnya.

Teorema 3.3.1

Diberikan barisan fungsi $\langle f_n \rangle$ yang didefinisikan dan terintegral pada selang $[a, b]$. Jika barisan $\langle f_n \rangle$ konvergen seragam ke f pada $[a, b]$ maka f terintegral pada $[a, b]$ dan

$$\int_a^b f = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n \, .$$

Jadi $\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n = \int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$. Dengan demikian bahwa urutan proses pengambilan limit dan pengintegralan dapat dipertukarkan.

D. Konvergen Seragam dan Keterdiferensial

Teorema berikut ini juga menunjukkan bahwa sifat terdiferensialnya dari fungsi-fungsi suku dalam barisan fungsi yang konvergen seragam pada suatu himpunan juga dimiliki oleh fungsi limitnya. Teorema ini tidak disertasi pembuk-tian, karena tidak akan digunakan pada pembahasan selanjutnya.

Teorema 3.4.1

Misalkan $\langle f_n \rangle$ barisan fungsi, terdiferensial pada $[a, b]$ dan $\langle f_n(x_0) \rangle$ konvergen untuk suatu titik x_0 pada $[a, b]$. Jika $\langle f_n' \rangle$ konvergen seragam pada $[a, b]$, maka $\langle f_n \rangle$ konvergen seragam ke fungsi f pada $[a, b]$, dan untuk $x \epsilon [a, b]$, berlaku

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

BAB IV

TEOREMA STONE WEIERSTRASS

Pokok atau inti dari pembahasan bab ini adalah Teorema Stone Weierstrass. Teorema ini sebenarnya adalah suatu perumuman dari Teorema Pendekatan sWeierstrass. Oleh karena itu Sebelum membahas Teorema Stone Weierstrass, akan dibahas Teorema Pendekatan Weierstrass dan teorema-teorema lainnya yang mendukung pembahasan Teorema Stone Wierstrass.

A. Teorema Pendekatan Weierstrass

Teorema Pendekatan Weierstrass mengatakan bahwa setiap fungsi real $f(x)$ yang didefinisikan dan kontinu pada selang tertutup dan terbatas $[a, b]$ dapat didekati secara seragam oleh barisan suku banyak dalam x. Teorema ini dibuktikan dengan fungsi konvolusi.

Teorema 4.1.1

Jika f fungsi kontinu real pada $[a, b]$, maka terdapat barisan suku banyak $\langle p_n \rangle$ sedemikian sehingga $\langle p_n \rangle$ konvergen seragam ke fungsi f pada $[a, b]$.

Bukti

Fungsi kontinu $f(x)$ yang didefinisikan pada selang tertutup dan terbatas $[a, b]$ dapat diubah menjadi fungsi kontinu $g(l)$ pada $[0,1]$ dengan penggantian variabel

$$x = (b - a)t + a \qquad 0 \leq l \leq 1$$

$$t = \frac{x-a}{b-a} \qquad (a \leq x \leq b)$$

Jadi fungsi f yang kontinu pada $[a, b]$ dengan diubah menjadi fungsi kontinu $g(l) = f((b-a)t + a)$ yang kontinu pada $[0,1]$. Kemudian dibentuk fungsi h dari fungsi g tersebut dengan

$$h(x) = g(x) - g(0) - x[g(1) - g(0)]$$

untuk $x\epsilon[0,1]$ dan $h(0) = h(1) = 0$. Jika h diperoleh sebagai limit dari barisan suku banyak dalam x yang konvergen seragam maka berlaku juga untuk g.

Jadi Teorema Pendekatan Weierstrass ini cukup dibuktikan untuk fungsi kontinu f pada $[a, b]$ untuk $a = 0$ dan $b = 1$ dengan $f(0) = f(1) = 0$.

Lebih jauh lagi fungsi f yang didefinisikan dan kontinu pada $[0,1]$ dengan $f(0) = f(1) = 0$ diperluas lagi hingga terdefinisi dan kontinu pada $\mathbb{R}$ dengan memberikan nilai $f(x) = 0$ untuk x di luar $[0,1]$.

Pertama dibentuk suku banyak $Q_n(x)$ untuk $x\epsilon\mathbb{R}$ dan $n\epsilon\mathbb{N}$, yakni

$$Q_n(x) = c_n(1 - x^2)^n, \qquad (4.1)$$

dimana c_n dipilih sedemikian sehingga

$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)dx = 1 \qquad (4.2)$$

$$\int_{-1}^{1} c_n(1 - x^2)^n dx = 1$$

$$c_n{}^{-1} = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n dx.$$

Selanjutnya akan diselidiki besarnya c_n. Namun sebelumnya akan dibuktikan ketidaksamaan $(1 - x^2)^n \geq (1 - nx^2)$. Ketidaksamaan ini dibuktikan dengan induksi matematika:

untuk $n = 1$, diperoleh ruas kanan sama dengan ruas kiri. Kemudian diandaikan ketidaksamaan ini benar untuk $n = k$, sehingga diperoleh

$$(1-x^2)^k \geq (1-kx^2)\ .$$

Selanjutnya akan dibuktikan ketidaksamaan tersebut benar untuk $n = k+1$, sebagai berikut

$$\begin{aligned}(1-x^2)^{k+1} &= (1-x^2)^k(1-x^2)\\ &\geq (1-kx^2)(1-x^2) = (1-x^2-kx^2+kx^4)\\ &\geq (1-(k+1)x^2).\end{aligned}$$

Sehingga ketidaksamaan ini $(1-x^2)^n \geq (1-nx^2)$ benar.

Oleh karena itu

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx &= 2\int_0^1 (1-x^2)^n dx\\ &\geq 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}(1-x^2)^n\, dx\\ &\geq 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}(1-nx^2)\, dx\\ &= 2\left[\left(x-\frac{1}{3}nx^3\right)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\\ &= 2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{n}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3\right)\\ &= 2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{3\sqrt{n}}\right)\\ &= \frac{4}{3\sqrt{n}}\\ &> \frac{1}{\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

Berdasarkan (4.2), maka

$$\begin{aligned}1 &= \int_{-1}^{1} Q_n(x)dx\\ &= c_n\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx\end{aligned}$$

$$> \frac{c_n}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{1}{c_n} > \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Dengan demikian untuk sembarang bilangan positif c_n, diperoleh

$$c_n < \sqrt{n}. \tag{4.3}$$

Berdasarkan (4.3), berakibat bahwa untuk setiap $\delta > 0$ berlaku

$$0 \leq Q_n(x) \leq \sqrt{n}(1-\delta^2)^n, \qquad (\delta \leq |x| \leq 1). \tag{4.4}$$

Karena barisan bilangan $\langle\sqrt{n}(1-\delta^2)^n\rangle$ konvergen ke 0 maka barisan $\langle Q_n(x)\rangle$ konvergen seragam pada ke 0.

Selanjutnya didefinisikan barisan suku banyak $\langle p_n(x)\rangle$ yang didefinisikan untuk

$$p_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t)\, Q_n(t)dt \qquad\qquad 0 \leq x \leq 1.$$

Akan ditunjukkan bahwa $p_n(x)$ suatu suku banyak dalam x.

Dengan mengganti variabel t dengan y dan $y = x + t$ maka

$$p_n(x) = \int_{-1+x}^{1+x} f(y)\, Q_n(y-x)dy.$$

Karena didefinisikan $f(y) = 0$ untuk y di luar [0,1] maka

$$p_n(x) = \int_0^1 f(y)Q_n(y-x)dy$$

$$= c_n \int_0^1 [1-(y-x)^2]^n f(y)dy,$$

yang menunjukkan bahwa $p_n(x)$ suku banyak dalam x. Fungsi p_n adalah fungsi konvolusi dari fungsi f dan Q_n.

Selanjunya akan ditunjukkan bahwa $\langle p_n\rangle$ konvergen seragam ke fungsi f pada [0,1]. Diketahui bahwa f fungsi kontinu, diberikan $\varepsilon > 0$, dapat dicari $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk semua x, y dalam $\mathbb{R}$, $|y - x| < \delta$ berlaku

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dimisalkan $M = \sup|f(x)|$. Berdasarkan (4.2) dan (4.4) dan bahwa $Q_n(x) \geq 0$, maka untuk $0 \leq x \leq 1$,

$$\begin{aligned}
|p_n(x) - f(x)| &= \left|\int_{-1}^{1}[f(x+t) - f(x)]Q_n(t)dt\right| \\
&\leq \int_{-1}^{1}|f(x+t) - f(x)|Q_n(t)dt \\
&\leq 2M\int_{-1}^{-\delta} Q_n(t)dt + \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t)dt + 2M\int_{\delta}^{1} Q_n(t)dt \\
&\leq 2M\int_{-1}^{-\delta} Q_n(t)dt + \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t)\,dt + 2M\int_{\delta}^{1} Q_n(t)dt \\
&\leq 4M\int_{\delta}^{1} Q_n(t)dt + \frac{\varepsilon}{2}\int_{-1}^{1} Q_n(t)\,dt \\
&\leq 4M\sqrt{n}(1-\delta^2)^n + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Karena $0 < 1 - \delta^2 < 1$ maka $4M\sqrt{n}(1-\delta^2)^n \longrightarrow 0$ untuk $n \longrightarrow \infty$. Sehingga dipilih n cukup besar sehingga $4M\sqrt{n}(1-\delta^2)^n < \frac{\varepsilon}{2}$.

Jadi, jika diberikan $\varepsilon > 0$ dapat dicari n sehingga untuk semua $x \epsilon [0,1]$, berlaku

$$|p_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \blacksquare$$

Berikut akan dibahas teorema yang penting untuk membicarakan perumuman Teorema Pendekatan Weierstrass.

Teorema 4.1.2

Untuk setiap interval $[-a, a]$, terdapat suatu barisan suku banyak $\langle p_n \rangle$ dengan $p_n(0) = 0$ untuk semua $n \epsilon \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\langle p_n(x) \rangle$ konvergen seragam ke $|x|$ pada interval tertutup $[-a, a]$.

Bukti

Berdasarkan teorema 4.1.1, maka terdapat suatu barisan suku banyak real $\langle p_n^* \rangle$ dalam x sedemikain sehingga $p_n^*(x)$ konvergen seragam ke $f(x) = |x|$ pada interval $[-a, a]$. Jadi $p_n^*(0) \longrightarrow f(0) = 0$. Selanjutnya dibentuk barisan suku banyak, dengan

$$p_n(x) = p_n^*(x) - p_n^*(0)$$

untuk semua $n \epsilon \mathbb{N}$.

Barisan ini konvergen ke $f(x) - f(0) = |x|$ pada interval $[-a, a]$.■

B. Aljabar Fungsi

Dalam subbab ini akan dibahas sifat-sifat yang juga akan melandasi pembuktian Teorema Stone Weierstrass. Lebih jauh pembicaraan subbab ini tidak hanya terbatas pada selang tertutup dan terbatas, namun lebih umum tentang ruang metrik.

Definisi 4.2.1

Diberikan ruang metrik $(X, d), E \subset X$. Keluarga $\mathcal{A}$ dari fungsi real yang didefinisikan pada himpunan E, disebut aljabar (*algebra*) jika untuk setiap $f, g \epsilon \mathcal{A}$ dan c konstanta real, berlaku

i. $f + g \epsilon \mathcal{A}$
ii. $fg \epsilon \mathcal{A}$
iii. $cf \epsilon \mathcal{A}$.

Contoh 4.2.2

Himpunan semua suku banyak $P[a,b]$ adalah aljabar yang dibangun oleh dua fungsi $u(x) = 1$ dan $v(x) = x$ pada $[a,b]$. Suku banyak $f \epsilon P[a,b]$ berbentuk $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_N x^N$ untuk suatu $N \epsilon \mathbb{N}$.

Definisi 4.2.3

Diberikan ruang metrik $(X,d), E \subset X$ dan $\mathcal{A}$ keluarga dari fungsi real yang didefinisikan pada himpunan E.

Jika $f \epsilon \mathcal{A}$, $f_n \epsilon \mathcal{A}$ $(n = 1,2,\ldots)$ dan barisan $\langle f_n \rangle$ konvergen seragam ke fungsi f pada himpunan E, maka $\mathcal{A}$ dikatakan *tertutup seragam* (*uniformly closed*).

Definisi 4.2.4

Diberikan ruang metrik $(X,d), E \subset X$ dan $\mathcal{A}$ keluarga dari fungsi real yang didefinisikan pada himpunan E.

Jika $\mathfrak{B}$ himpunan fungsi limit dari barisan fungsi konvergen seragam anggota dari $\mathcal{A}$, maka $\mathfrak{B}$ disebut *penutup seragam* (*uniform closure*) dari $\mathcal{A}$.

Contoh 4.2.5

Dalam Teorema Pendekatan Weirstrass, himpunan semua fungsi kontinu pada $[a,b]$ adalah penutup seragam dari himpunan suku banyak pada $[a,b]$.

Teorema 4.2.6

Diberikan ruang metrik $(X, d), E \subset X$ dan $\mathcal{A}$ aljabar dari fungsi terbatas yang didefinisikan pada himpunan E.

Jika $\mathfrak{B}$ penutup seragam aljabar $\mathcal{A}$, maka $\mathfrak{B}$ aljabar tertutup seragam.

Bukti

Diketahui bahwa $\mathfrak{B}$ penutup seragam (*uniform closure*). Jika $f \epsilon \mathfrak{B}$ dan $g \epsilon \mathfrak{B}$, maka terdapat barisan konvergen seragam $\langle f_n \rangle$ dan $\langle g_n \rangle$ dengan $f_n, g_n \epsilon \mathcal{A}$ sedemikian sehingga $f_n \longrightarrow f$ dan $g_n \longrightarrow g$. Sebagai akibatnya bahwa $f_n + g_n \longrightarrow f + g$ seragam, $f_n g_n \longrightarrow fg$ seragam, dan $cf_n \longrightarrow cf$ seragam dengan c konstanta real. Demikian $f + g \epsilon \mathfrak{B}, fg, \epsilon \mathfrak{B},$ dan $cf \epsilon \mathfrak{B}$. Jadi $\mathfrak{B}$ adalah aljabar. Berdasarkan teorema 2.2.6, maka $\mathfrak{B}$ aljabar tertutup seragam.■

Berikut ini akan dibicarakan sifat-sifat yang dimiliki oleh sutu keluarga fungsi. Sifat-sifat tersebut yang akan melandasi pembuktian Teorema Stone Weierstrass.

Definisi 4.2.7

Diberikan ruang metrik $(X, d), E \subset X$ dan $\mathcal{A}$ keluarga dari fungsi real yang didefinisikan pada himpunan E. Maka $\mathcal{A}$ dikatakan *memisah titik pada E* jika untuk setiap $x_1, x_2 \epsilon E$ dengan $x_1 \neq x_2$ terdapat $f \epsilon \mathcal{A}$ sehingga $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Selain itu $\mathcal{A}$ dikatakan *tidak pernah nol pada E* jika untuk setiap $x \epsilon E$ terdapat $g \epsilon \mathcal{A}$ sedemikian sehingga $g(x) \neq 0$.

Contoh 4.2.8

Aljabar $P[a,b]$ himpunan semua suku banyak dalam x pada $[a,b]$ memisah titik pada dan tidak pernah nol pada $[a,b]$ karena $P[a,b]$ memuat fungsi $u(x) = 1$ dan $v(x) = x$.

Teorema 4.2.9

Diberikan ruang metrik $(X,d), E \subset X$, $\mathcal{A}$ aljabar fungsi-fungsi real yang didefinisikan pada himpunan E, dan $\mathcal{A}$ *memisah titik* dan *tidak pernah nol* pada E. Jika x_1, x_2 adalah dua titik yang berbeda dalam E dan c_1, c_2 adalah konstanta real, maka terdapat $f \epsilon \mathcal{A}$ sedemikian sehingga

$$f(x_1) = c_1 \text{ dan } f(x_2) = c_2.$$

Bukti

Karena $\mathcal{A}$ memisah titik pada E maka terdapat $g \epsilon \mathcal{A}$ dan $g(x_1) \neq g(x_2)$ dan $\mathcal{A}$ tidak pernah nol maka terdapat $h, k \epsilon \mathcal{A}$ dengan $h(x_1) \neq 0$ dan $k(x_2) \neq 0$.

Selanjutnya dibentuk

$$u = gk - g(x_1)k, \qquad v = gh - g(x_2)h.$$

Maka $u \epsilon \mathcal{A}, v \epsilon \mathcal{A}$ sedemikian sehingga $u(x_1) = v(x_2) = 0, u(x_2) \neq 0,$ dan $v(x_1) \neq 0$. Dengan demikian jika dibentuk

$$f = \frac{c_1 v}{v(x_1)} + \frac{c_2 u}{u(x_2)},$$

maka diperoleh $f(x_1) = c_1$ dan $f(x_2) = c_2$. ■

Contoh 4.2.10

Diberikan $\mathcal{A}$ aljabar yang dibangun oleh $\{1, x^2\}$ pada [0,3]. Dicari $f \epsilon \mathcal{A}$ sehingga $f(1) = -3, f(2) = 4$.

Jawab

Menurut teorema 4.2.9, karena $\mathcal{A}$ memuat $\alpha(x) = 1$ maka $\mathcal{A}$ tidak pernah nol pada [0,3] dan $\mathcal{A}$ memuat $\beta(x) = x^2$, $\mathcal{A}$ memisah titik pada [0,3]. Maka $g(x) = x^2$ dan $h(x) = k(x) = 1$. Sehingga dapat dibentuk

$u = gk - g(x_1)k$

$$\begin{aligned} u(x) &= g(x)k(x) - g(x_1)k(x) \\ &= x^2 - 1 \end{aligned}$$

$v = gh - g(x_2)h$

$$\begin{aligned} v(x) &= g(x)h(x) - g(x_2)h(x) \\ &= x^2 - 4. \end{aligned}$$

Dengan demikian fungsi yang dicari adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{c_1 v(x)}{v(x_1)} + \frac{c_2 u(x)}{u(x_2)} \\ &= \frac{-3(x^2 - 4)}{-3} + \frac{4(x^2 - 1)}{3} \\ &= \frac{7}{3}x^2 - \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

C. Teorema Stone Weierstrass

Teorema ini merupakan perumuman dari Teorema Weierstrass. Lebih jauh lagi bahwa aljabar fungsi-fungsi real kontinu didefinisikan pada himpunan kompak dalam ruang metirk. Selain itu juga bahwa aljabar tersebut mempunyai sifat memisah titik dan tidak pernah nol pada himpunan kompak. Sedangkan Teorema Weierstrasss hanya berbicara aljabar suku banyak pada interval tertutup $[a, b]$.

Teorema 4.3.1

Diberikan ruang metrik $(X, d), K \subset X$, himpunan K kompak dan $\mathcal{A}$ aljabar fungsi-fungsi kontinu real yang didefinisikan pada himpunan kompak K.

Jika $\mathcal{A}$ memisah titik pada K dan tidak pernah nol pada himpunan K, maka penutup seragam $\mathfrak{B}$ dari $\mathcal{A}$ terdiri dari semua fungsi kontinu real pada himpunan kompak K.

Bukti

Diketahui himpunan K kompak.

Teorema ini dibuktikan dengan empat langkah, sebagai berikut:

Langkah I

Jika $f \epsilon \mathfrak{B}$ maka $|f| \epsilon \mathfrak{B}$.

Bukti

Diberikan $\varepsilon > 0$.

Diandaikan

$$a = \sup_{x \epsilon K} |f(x)|. \qquad (4.5)$$

Teorema 4.1.2 menjamin bahwa terdapat bilangan real $c_1, c_2, \dots, c_n$ sehingga ada suku banyak $p(y) = \sum_{i=1}^{n} c_i y^i$ dengan $p(0) = 0$ sedemikian sehingga berlaku

$$\left|\sum_{i=1}^{n} c_i y^i - |y|\right| < \varepsilon \qquad -a \le y \le a. \quad (4.6)$$

Karena $\mathfrak{B}$ aljabar, fungsi

$$g = \sum_{i=1}^{n} c_i f^i \qquad (4.7)$$

adalah elemen dari $\mathfrak{B}$. Berdasarkan (4.5), yakni $|f(x)| \le a$ untuk semua $x \epsilon K$ dan dengan menggantikan $y = f(x)$ pada (4.6), diperoleh

$$\left|\sum_{i=1}^{n} c_i y^i - |y|\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} c_i f(x)^i - |f(x)|\right|$$

$$= \left|g(x) - |f(x)|\right| < \varepsilon$$

untuk $x \epsilon K$. Berdasarkan teorema 4.2.6, maka $\mathfrak{B}$ tertutup seragam (*uniformly closed*). Karena $\mathfrak{B}$ tertutup seragam maka $|f| \epsilon \mathfrak{B}$.

Langkah 2

Jika $f \epsilon \mathfrak{B}$ dan $g \epsilon \mathfrak{B}$ maka maks $(f, g) \epsilon \mathfrak{B}$ dan min $(f, g) \epsilon \mathfrak{B}$.

Bukti

Pertama $h(x) =$ maks $(f(x), g(x))$, yang didefinisikan dengan

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{jika } f(x) \ge g(x) \\ g(x) & \text{jika } f(x) < g(x) \end{cases}$$

untuk $x \epsilon K$.

Jika $f \ge g$ maka $\frac{1}{2}(f - g) + \frac{1}{2}(f + g) = f \qquad (4.8)$

Jika $f < g$ maka $\frac{1}{2}(g - f) + \frac{1}{2}(f + g) = g \qquad (4.9)$

Berdasarkan (4.8) dan (4.9) maka diperoleh

$h =$ maks$(f, g) = \frac{1}{2}(f + g) + \frac{1}{2}|f - g| \qquad (4.10)$

Kedua bahwa $h(x) =$ min $(f(x), g(x))$, yang didefinisikan dengan

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{jika } f(x) < g(x) \\ g(x) & \text{jika } f(x) \ge g(x) \end{cases}$$

untuk $x \epsilon K$.

Jika $f < g$ maka $\frac{1}{2}(g - f) - \frac{1}{2}(f + g) = -f$

$$\frac{1}{2}(f + g) - \frac{1}{2}(g - f) = f \qquad (4.11)$$

Jika $f \geq g$ maka $\frac{1}{2}(f - g) - \frac{1}{2}(f + g) = -g$

$$\frac{1}{2}(f + g) - \frac{1}{2}(f - g) = g \qquad (4.12)$$

Berdasarkan (4.11) dan (4.12) maka diperoleh

$$h = \min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g) - \frac{1}{2}|f - g| \qquad (4.13)$$

Karena $\mathfrak{B}$ aljabar dan berdasarkan langkah 1, maka $\text{maks}(f, g) \epsilon \mathfrak{B}$ dan $\min(f, g) \epsilon \mathfrak{B}$.

Dengan metode iterasi, hasil pembuktian di atas diperluas unutk sembarang himpunan berhingga fungsi, yakni jika $f_1, \dots, f_n \epsilon \mathfrak{B}$ maka $\text{maks}(f_1, \dots, f_n) \epsilon \mathfrak{B}$ dan $\min(f_1, \dots, f_n) \epsilon \mathfrak{B}$.

Langkah 3

Diberikan $\varepsilon > 0$, suatu fungsi kontinu $f: K \longrightarrow \mathbb{R}$, dan $x \epsilon K$, terdapat suatu fungsi $g_x \epsilon \mathfrak{B}$ sedemikian sehingga $g_x(x) = f(x)$ dan

$$g_x(t) > f(t) - \varepsilon \qquad (4.14)$$

untuk $t \epsilon K$.

Bukti

Jika $\mathcal{A}$ memenuhi sifat-sifat yang ada pada teorema 4.2.9 dan $\mathcal{A} \subset \mathfrak{B}$ maka $\mathfrak{B}$ juga memenuhi sifat-sifat tersebut. Dengan demikian bahwa untuk setiap $y \epsilon K$, dapat ditemukan suatu fungsi $h_y \epsilon \mathfrak{B}$ sedemikian sehingga

$$h_y(x) = f(x), \qquad h_y(y) = f(y).$$

Dengan kekontinuan dari h_y, ada suatu himpuna terbuka J_y, yang memuat y sedemikian sehingga

$$h_y(t) > f(t) - \varepsilon$$

untuk $t\epsilon J_y$. Karena K kompak, terdapat himpunan berhingga $\{y_1, \dots, y_n\}$ sedemikian sehingga

$$K \subset J_{y_1} \cup \dots \cup J_{y_n}.$$

Kemudian dibentuk

$$g_x = \text{maks } (h_{y_1}, \dots, h_{y_n}),$$

sehingga berdasarkan langkah 2, $g_x \epsilon \mathfrak{B}$ sedemikian sehingga $g_x(x) = f(x)$ dan $g_x(t) > f(t) - \varepsilon$ untuk $t\epsilon K$.

Langkah 4.

Diberikan $\varepsilon > 0$, suatu fungsi kontinu $f: K \longrightarrow \mathbb{R}$, dan $x\epsilon K$, terdapat suatu fungsi $h\epsilon\mathfrak{B}$ sedemikian sehingga

$$|h(x) - f(x)| < \varepsilon$$

untuk $x\epsilon K$.

Bukti

Untuk setiap $x\epsilon K$, dapat ditemukan $g_x\epsilon\mathfrak{B}$ sedemikian sehingga

$$g_x(x) = f(x), \qquad g_x(y) = f(y).$$

Dengan kekontinuan dari g_x, terdapat himpunan terbuka V_x, yang memuat x sedemikian sehingga

$$g_x(t) < f(t) + \varepsilon \tag{4.15}$$

untuk $t\epsilon V_x$. Karena K kompak, terdapat himpunan berhingga $\{x_1, \dots, x_m\}$ sedemikian sehingga

$$K \subset V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_m}. \tag{4.16}$$

Kemudian dibentuk

$$h = \min\,(g_{x_1}, \dots, g_{x_m}).$$

Berdasarkan langkah 2, maka $h \epsilon \mathfrak{B}$ sedemikian sehingga berdasarkan langkah 3, diperoleh

$$h(t) > f(t) - \varepsilon \tag{4.17}$$

untuk $t \epsilon K$. Selain itu juga berdasarkan (4.15) dan (4.16)

$$h(t) < f(t) + \varepsilon \tag{4.18}$$

untuk $t \epsilon K$. Berdasarkan (4.17) dan (4.18) maka diperoleh

$$|h(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

untuk $x \epsilon K$.

Harus dibuktikan bahwa sembarang fungsi real kontinu yang didefinisikan pada K adalah fungsi limit dari suatu barisan dalam $\mathcal{A}$.

Diberikan sembarang fungsi kontinu f dalam $\mathcal{A}$ dan $\varepsilon_n = \frac{1}{n}, n \epsilon \mathbb{N}$.

Empat langkah di atas telah membuktikan untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat $h \epsilon \mathcal{A}$ sedemikian sehingga $|h(x) - f(x)| < \varepsilon$ untuk $x \epsilon K$. Jadi untuk setiap $\varepsilon_n = \frac{1}{n}, n \epsilon \mathbb{N}$ terdapat $h_n \epsilon \mathcal{A}$ sehingga $|h_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n}$ untuk semua $x \epsilon K$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $h_n \longrightarrow f$ seragam.

Untuk $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat $N \epsilon \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\frac{1}{N} < \varepsilon$ maka untuk semua $n \geq N$ dan semua $x \epsilon K$ berlaku $|h_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$.

Jadi barisan $h_n \longrightarrow f$ seragam.■

Contoh 4.3.2

Buktikan jika diberikan fungsi kontinu bernilai real f yang didefinisikan pada himpunan tertutup dan terbatas X dalam ruang *Euclides* $\mathbb{R}^n$ dan $\varepsilon > 0$, maka fungsi f dapat didekati secara seragam oleh barisan suku banyak dengan koefisien real dari n variabel.

Bukti

X adalah himpunan kompak dalam $\mathbb{R}^n$. Diberikan fungsi real kontinu f pada X dan $\varepsilon > 0$. Jadi harus dibuktikan terdapat fungsi g suku banyak dalam n variabel dengan koefisien real dan $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ untuk semua $x \epsilon X$.

Dibentuk aljabar $\mathcal{A}$ yang dibangun oleh fungsi $u(x) = 1, v_1(x) = x_1, v_2(x) = x_2, \dots, v_n = x_n$ untuk $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \epsilon X$.

Aljabar ini tidak pernah nol pada X, sebab $u(x) = 1 \epsilon \mathcal{A}$. Untuk $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \epsilon X$ dan $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \epsilon X$ maka $x \neq y$ jika dan hanya jika terdapat $k \epsilon \{1,2, \dots, n\}$ sehingga $x_k \neq y_k$. Karena $v_j(x) = x_j \ \ (1 \leq j \leq n) \epsilon \mathcal{A}$ maka $\mathcal{A}$ memisah titik pada X.

Jadi $\mathcal{A}$ suatu aljabar fungsi kontinu yang memisah titik dan tidak pernah nol pada himpunan kompak $X \epsilon \mathbb{R}^n$.

Menurut Teorema Stone Weierstrass penutup seragam dari $\mathcal{A}$ adalah aljabar $\mathfrak{B}$ yaitu himpunan semua fungsi real kontinu yang didefiniskan pada X. Jadi jika diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat g fungsi real kontinu di dalam $\mathfrak{B}$ dan $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ untuk semua $x \epsilon X$.

Dengan demikian terdapat $g(x)$ suku banyak dalam $\mathcal{A}$, jadi juga dalam $\mathfrak{B}$ dengan $g(x)$ suku banyak dalam n variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$, dengan koefisien real dan $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ untuk setiap $x \epsilon X$.

BAB V

KESIMPULAN

Setelah membahas hal-hal yang berkaitan dengan ruang fungsi kontinu, maka dapat disimpulkan hal-hal sebagai berikut:

1. Kekonvergenan seragam dari suatu barisan fungsi kontinu adalah syarat cukup agar fungsi limit itu menjadi kontinu.
2. Sifat-sifat kekontinuan, keterintegralan dan keterdiferensial yang dimilki oleh fungsi-fungsi suku barisan yang konvergen seragam pada suatu himpunan juga dimilki oleh fungsi limit dari barisan yang konvergen seragam.
3. Jika f fungsi real yang didefiniskan pada selang tertutup dan terbatas maka terdapat suatu barisan suku banyak $\langle p_n \rangle$ sedemikian sehingga $p_n \longrightarrow f$ seragam pada $[a,b]$. Teorema ini disebut Teorema Pendekatan Weierstrass. Pembuktian teorema ini dengan barisan fungsi konvolusi.
4. Dengan menggunakan konsep aljabar, Teorema Pendekatan Weierstrass dapat diformulasikan sebagai berikut: penutup seragam dari himpunan barisan suku banyak adalah himpunan semua fungsi real kontinu pada selang tertutup dan terbatas $[a,b]$.
5. Teorema Pendekatan Weierstrass ini dikembangkan lagi oleh Stone, yakni perumuman Teorema Weierstrass atau lebih dikenal dengan Teorema Stone- Weierstrass. Diberikan ruang metrik (X,d), ada himpunan $K \subset X$, dan himpunan K kompak. Andaikan $\mathcal{A}$ suatu aljabar fungsi real kontinu yang didefinisikan pada K. Jika $\mathcal{A}$ memisah titik pada Kdan $\mathcal{A}$ tidak per-

nah nol pada K, maka penutup seragam dari semua fungsi kontinu real pada K.

DAFTAR PUSTAKA

Bartle, G. R. & Sherbert, R. D. (2000). *Intoduction to Real Analysis* (3^{rd} ed). New York: John Wiley & Sons, Inc.

Kreyszig, E. (1978). *Introduction to Functional Analysis with Applications*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Rudin, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis* (3^{rd} ed). New York: McGraw-Hill Book Company.

Simmons, F. George. (1963). *Introduction to Topology and Modern Analysis*. Florida, Malabar: Robert E. Krieger Publishing Company.

Soemantri, R. dkk. (2006). *Diktat Pengantar Analisis Real*. Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma