

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea Magistrale in Fisica

## Lensing gravitazionale di particelle massive

**Relatore:**  
**Prof. Lauro Moscardini**

**Presentata da:**  
**Marco Pinelli**

**Correlatore:**  
**Dott. Mauro Sereno**

Anno Accademico 2017/2018

# Indice

<b>1</b>	<b>Relatività speciale, relatività generale e meccanica hamiltoniana</b>	<b>1</b>
1.1	Relatività speciale . . . . .	1
1.1.1	Trasformazioni di Lorentz . . . . .	2
1.1.2	Simultaneità, dilatazione dei tempi e contrazione delle lunghezze . . . . .	2
1.1.3	Spazio-tempo e meccanica relativistica . . . . .	3
1.2	Dalla relatività speciale alla relatività generale . . . . .	5
1.3	Geometria differenziale . . . . .	6
1.3.1	Tensori . . . . .	6
1.3.2	Derivata covariante . . . . .	7
1.3.3	Tensore di curvatura di Riemann . . . . .	8
1.4	Geodetiche . . . . .	9
1.5	Principio di equivalenza e covarianza generale . . . . .	11
1.5.1	Principio di equivalenza . . . . .	11
1.5.2	Principio di covarianza generale . . . . .	12
1.6	Equazioni di campo . . . . .	12
1.6.1	Tensore energia-impulso . . . . .	13
1.7	Formalismo lagrangiano e hamiltoniano . . . . .	14
1.7.1	Coordinate Generalizzate . . . . .	14
1.7.2	Principio di minima azione e equazioni di Lagrange . . . . .	14
1.7.3	Momenti Generalizzati . . . . .	15
1.7.4	Formalismo hamiltoniano . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Le geodetiche della metrica di Schwarzschild</b>	<b>17</b>
2.1	La deflessione delle particelle in un campo gravitazionale . . . . .	17
2.2	Spazio-tempo di Schwarzschild . . . . .	18
2.2.1	La soluzione di Schwarzschild . . . . .	20
2.2.2	Coordinate di Kruskal . . . . .	21
2.3	Equazioni geodetiche . . . . .	22
2.3.1	Integrali del moto . . . . .	23
2.4	Orbite . . . . .	24
2.4.1	Orbite legate . . . . .	24

2.4.2	Orbite non legate . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Angolo di deflessione</b>	<b>27</b>
3.1	Ipotesi del modello . . . . .	28
3.2	Orbite non legate per particelle senza massa . . . . .	29
3.3	Orbite non legate per particelle massive . . . . .	30
3.4	Ritardo temporale . . . . .	33
3.5	Angolo di deflessione per particelle massive . . . . .	33
3.6	Confronto con risultati di letteratura . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Teoria delle lenti</b>	<b>36</b>
4.1	Distanze cosmologiche . . . . .	36
4.1.1	Modello di Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker . . . . .	37
4.1.2	Redshift e distanze di diametro angolare . . . . .	39
4.2	Fenomeni legati al lensing . . . . .	40
4.3	Angolo di deflessione per lenti sottili . . . . .	42
4.4	Equazione delle lenti . . . . .	43
4.5	Potenziale di lensing . . . . .	44
4.6	Ritardo temporale . . . . .	45
4.7	Amplificazione . . . . .	46
4.8	Proprietà della lente puntiforme . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Lensing per sistemi astrofisici</b>	<b>51</b>
5.1	I neutrini . . . . .	52
5.2	Angolo di deflessione da parte del Sole . . . . .	52
5.3	Angolo di deflessione prodotto da una stella su un fascio di neutrini . . . . .	53
5.4	Angolo di deflessione dovuto ad ammassi di galassie . . . . .	55

## Sommario

Il lensing gravitazionale è uno strumento molto potente per indagare l'universo e le teorie della gravità. In questa tesi si estende il formalismo del lensing gravitazionale a particelle massive. I risultati ottenuti in questa tesi sono generali e il formalismo utilizzato può essere applicato ad altri tipi di particelle dotate di massa.

Nel capitolo 1 si forniscono i concetti matematico-fisici per poter approfondire la trattazione del fenomeno di lensing. In particolare si parte dalla teoria della relatività generale passando attraverso nozioni di geometria differenziale. Infine vengono trattati brevemente sia il formalismo lagrangiano che quello hamiltoniano. I punti chiave di questo capitolo che sono utili per la trattazione del lensing riguardano le equazioni di campo e il formalismo lagrangiano-hamiltoniano.

Nel capitolo 2 si ricava la metrica di Schwarzschild e si fornisce una trattazione generale delle geodetiche in questo spazio-tempo. Si discute sia il caso delle orbite legate che di quelle non legate, sia per particelle dotate di massa che per quelle senza massa.

Nel capitolo 3, partendo dai concetti di relatività generale, geometria differenziale ed utilizzando il formalismo hamiltoniano, si ricava un'espressione originale per l'angolo di deflessione per particelle massive.

Il risultato innovativo di questa tesi consiste nell'aver risolto l'equazione delle geodetiche per l'angolo di deflessione di particelle dotate di massa nella metrica di Schwarzschild. Tale risultato è stato ottenuto nel limite di deflessione debole ("*weak deflection limit*") con un metodo perturbativo applicando le approssimazioni di *campo debole* e velocità prossime a quelle della luce. Per l'angolo di deflessione si sono calcolate le correzioni fino al terzo ordine nella velocità della particella e tenendo solo il termine lineare nella massa della lente.

In letteratura l'angolo di deflessione per particelle dotate di massa con correzioni alla velocità è stato calcolato da Glicenstein [7] studiando il ritardo temporale di fotoni massivi. Il risultato di questo autore è consistente con il risultato fornito in questa tesi nel limite in cui la velocità della particella tende a quella della luce. Il risultato ottenuto da Glicenstein si ferma al primo ordine nelle correzioni alla velocità.

Nel capitolo 4 viene discusso il fenomeno del lensing gravitazionale trattando le sue proprietà. Alla fine di questo capitolo si inserisce il risultato calcolato nel capitolo 3 e nel caso di lente puntiforme vengono presentate formule generalizzate per la posizione e l'amplificazione delle immagini.

In seguito alla presentazione della teoria delle lenti, nel capitolo 5 viene calcolato l'angolo di deflessione riferito al lensing di fotoni da parte del Sole e al lensing di neutrini da parte di stelle. Nel capitolo 5 vengono utilizzati i neutrini per il caso di particelle dotate di massa poiché dagli studi sullo spettro di potenza delle galassie luminose rosse (LRG) è plausibile che essi abbiano massa [10].

Successivamente viene proposto un esperimento teorico considerando un sistema di lensing cosmologico nel quale la sorgente di neutrini è un blazar [22] mentre la lente è rappresentata da un ammasso di galassie. Le scelte delle distanze tra osservatore, ammasso di galassie e blazar, dell'ammasso di galassie come lente e dell'energia del fascio di neutrini ( $\sim eV$ ) sono tali da massimizzare le correzioni al lensing di fotoni.

# Capitolo 1

## Relatività speciale, relatività generale e meccanica hamiltoniana

In questo capitolo si espone il percorso che portò alla nascita della relatività generale (RG) nel 1915 partendo dai concetti della relatività ristretta (RR) sviluppata nel 1905 e inserendo nella trattazione alcuni concetti di geometria differenziale.

Viene presentata anche una breve trattazione della meccanica hamiltoniana che è utile per ricavare l'equazione delle geodetiche per particelle dotate di massa.

### 1.1 Relatività speciale

La teoria della relatività speciale (SR) fu formulata da Einstein nel 1905 per superare alcuni aspetti della meccanica newtoniana.

La relatività speciale è applicata esclusivamente a sistemi di riferimento inerziali e fu questo il principale motivo della successiva estensione a qualsiasi genere di sistema di riferimento.

La teoria è fondata su due assiomi principali: il primo riguarda l'universalità della velocità della luce ( $c$ ) nel vuoto indipendentemente dal moto della sorgente rispetto all'osservatore, mentre il secondo sancisce che le leggi della fisica devono avere la stessa forma per ogni sistema di riferimento inerziale, in pratica non può esistere alcun esperimento che possa discriminare la velocità assoluta di un osservatore [1].

Il secondo assioma è un'estensione del principio di relatività di Galileo il quale una volta unito al primo porta alle trasformazioni di Lorentz (LT).

Lorentz risolse matematicamente il problema dell'invarianza in forma delle equazioni di Maxwell rispetto alle trasformazioni di Galileo, introducendo le nuove trasformazioni che portano il suo nome. Tali trasformazioni vennero giustificate fisicamente da Einstein introducendo la costanza della velocità della luce.

Gli assiomi di Einstein nel corso degli anni hanno ricevuto numerose conferme sperimentali e in particolare hanno cambiato la nozione newtoniana di spazio e di tempo.

### 1.1.1 Trasformazioni di Lorentz

Fissata la velocità  $v$  di un corpo (in termini di  $c$ ) in moto lineare uniforme, con  $v \rightarrow 0$ , se si volesse cambiare sistema di riferimento inerziale si potrebbero applicare le leggi di trasformazione di Galileo (GT). L'accuratezza dell'esperimento è buona finché  $(v)^2 \leq 10^{-4}$ , in caso contrario è necessario usare le trasformazioni di Lorentz. Esse sono una generalizzazione delle trasformazioni di Galileo per velocità relative prossime a quelle della luce.

Dati due sistemi di riferimento inerziali  $O, O'$ , di coordinate  $x, y, z$  e  $x', y', z$ , dove  $O'$  è in moto rettilineo uniforme rispetto a  $O$  lungo il verso positivo dell'asse  $x$  con velocità  $v$ , le LT assumono la forma [2]

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (1.1)$$

$$y' = y \quad (1.2)$$

$$z' = z \quad (1.3)$$

$$t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (1.4)$$

Dalle equazioni (1.1-1.4) segue che spazio e tempo sono due entità connesse, quindi non più assolute e indipendenti. La loro interdipendenza è legata alla velocità relativa tra i due sistemi di riferimento inerziali scelti.

### 1.1.2 Simultaneità, dilatazione dei tempi e contrazione delle lunghezze

L'introduzione di una velocità limite genera necessariamente una dipendenza dello spazio dal tempo e viceversa, di conseguenza è stato creato un nuovo oggetto matematico utile nello sviluppo dei calcoli chiamato spazio-tempo.

Dalle LT nascono però altre interessanti conseguenze, tra le quali la nuova concezione di simultaneità, la dilatazione temporale e la contrazione delle lunghezze.

Due eventi vengono chiamati simultanei quando avvengono nello stesso istante, ma nella relatività speciale è necessario decidere quale sia l'osservatore che misura con il proprio orologio il verificarsi dei due eventi. Una volta scelto l'osservatore, due eventi sono simultanei quando essi emettono due segnali che arrivano nello stesso istante all'osservatore.

Presi due osservatori, di cui uno fermo e l'altro in moto lineare uniforme rispetto al primo, due eventi simultanei per uno non possono esserlo anche per l'altro.

Non è importante chi è in moto poiché la velocità della luce è la stessa per ogni sistema di riferimento inerziale, per ogni velocità dell'osservatore e della sorgente.

La durata di un fenomeno dipende dal sistema di riferimento in cui è misurato e la durata  $\Delta t_0$  misurata nel sistema a riposo è sempre più piccola della durata  $\Delta t$  misurata nel sistema inerziale in moto lineare uniforme rispetto al primo.

L'ultima proposizione discende dalla seguente relazione

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (1.5)$$

Si può concludere che il tempo misurato nel sistema in moto subisce una dilatazione [2].

Un fenomeno analogo si verifica anche per le lunghezze. Infatti, se si considera  $L$  la dimensione di un oggetto misurata lungo la direzione del moto di un sistema di riferimento e  $L_0$  la misura dello stesso oggetto nel sistema di riferimento a riposo, le due quantità sono legate dalla seguente relazione dovuta alle LT:

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2}. \quad (1.6)$$

L'oggetto in moto appare quindi più corto dell'oggetto a riposo.

### 1.1.3 Spazio-tempo e meccanica relativistica

Quando si parla di meccanica relativistica è necessario parlare della notazione che viene utilizzata. D'ora in poi si utilizzerà la notazione tensoriale data dagli indici che possono assumere valori interi positivi. In uno spazio-tempo quadridimensionale possono prendere i valori: 0, 1, 2, 3. Il valore 0 è riferito alla coordinata temporale, mentre gli altri valori sono riferiti alle coordinate spaziali. Le equazioni e le quantità tensoriali impiegano la notazione di Einstein, cioè gli indici ripetuti vengono sommati.

Le quantità con gli indici in alto rappresentano i vettori, mentre quelle con gli indici in basso i co-vettori. Nello spazio euclideo vettori e co-vettori sono uguali, mentre ciò non è vero in uno spazio-tempo pseudo-euclideo.

Lo spazio-tempo è una varietà quadridimensionale che descrive la geometria dell'universo. Il concetto di varietà ammette una metrica  $\eta$  che rappresenta il modo in cui si calcolano le distanze. La metrica è una funzione che, dati due punti  $x$  e  $y$ , associa un numero reale e deve rispettare alcune proprietà tra le quali la simmetria rispetto ai punti  $x$  e  $y$ .

Questo nuovo concetto di spazio nato nel 1908 è chiamato di Minkowski in nome del suo creatore. Lo spazio-tempo di Minkowski è uno spazio quadridimensionale pseudo-euclideo, la cui metrica è una matrice diagonale  $\eta_{\alpha\beta} = (-1, 1, 1, 1)$ . Per la proprietà di simmetria è una matrice  $4 \cdot 4$  simmetrica.

La metrica consente di passare dal vettore  $V^\mu$  al co-vettore  $V_\mu$  secondo la relazione

$$V^\mu = \eta^{\mu\nu} V_\nu. \quad (1.7)$$



Dai paragrafi precedenti si nota che, scelti due osservatori dotati di righelli e orologi, mentre le lunghezze si contraggono, gli intervalli temporali si dilatano. In fisica è naturale introdurre una misura invariante che si definisce come

$$\Delta s^2 = -\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = \Delta s'^2, \quad (1.8)$$

la quale è legata alla metrica dalla relazione

$$ds^2 = \eta_{ij} du^i du^j, \quad (1.9)$$

dove  $u$  rappresenta le coordinate  $t, x, y, z$ .

In meccanica classica le tre quantità fondamentali per descrivere un sistema meccanico in assenza di cariche elettriche sono la posizione, il tempo e la massa. Tutte le altre quantità si derivano da queste tre [1].

La posizione e il tempo sono relativi e sono descritti dalle LT, mentre la massa a priori non sembra relativa al sistema di riferimento scelto.

Si può dimostrare sia teoricamente che sperimentalmente che la massa di un oggetto cresce al crescere della velocità dell'oggetto stesso. Sia  $m_0$  la massa di un oggetto a riposo e sia  $m$  la massa dello stesso oggetto osservato da un sistema in moto uniforme rispetto al primo, la relazione che lega queste due quantità discende anch'essa dalle LT ed è

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (1.10)$$

Questa semplice relazione, insieme alle equazioni (1.5-1.6) e alle LT, porta a sviluppare una nuova teoria relativistica della meccanica, che sia invariante tra due sistemi di riferimento inerziali in moto con velocità relativa prossima a quella della luce.

E' da ricordare che la relatività ristretta è in accordo con la meccanica classica quando la velocità  $v$  in termini di  $c$  è trascurabile.

La prima equazione che bisogna modificare è il principio fondamentale della dinamica di Newton, ovvero la più importante equazione della meccanica classica,

$$F = ma, \quad (1.11)$$

che deve essere trasformata in

$$F = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2}} \right). \quad (1.12)$$

La differenza consiste nel non considerare la massa come costante nel tempo, ma una funzione della velocità del corpo.

La teoria è consistente con il primo assioma poiché al crescere della velocità del corpo tendendo alla velocità della luce, la massa  $m \rightarrow \infty$ , quindi servirebbe una forza infinita per accelerarlo nuovamente e  $c$  rimane la velocità limite.

Normalmente una forza applicata ad un corpo fa aumentare la sua energia, quindi ci si aspetta che anche in questo caso accada qualcosa di simile. La formula che gestisce questo legame è

$$E = \gamma m_0, \quad (1.13)$$

dove  $\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$  è il fattore relativistico utilizzato in precedenza.

L'ultima quantità da modificare rimane il momento. E' necessario farlo poiché il momento classico non si conserva cambiando sistema di riferimento con le nuove trasformazioni, mentre per descrivere adeguatamente un problema meccanico si deve avere una quantità che abbia questa caratteristica.

Il momento relativistico è un quadrivettore  $P = mU = (E, p^1, p^2, p^3)$ , le cui componenti sono l'energia e il momento classico.

I quadrivettori sono molto interessanti poiché dal loro modulo quadro, utilizzando la metrica di Minkowski si ottiene uno scalare (quantità costante per ogni sistema di riferimento). Infatti per il quadrimomento otteniamo  $P_\mu P^\mu = -m_0^2$ .

## 1.2 Dalla relatività speciale alla relatività generale

Elettromagnetismo e meccanica classica erano incompatibili poiché entrambe non erano invarianti in forma per un unico set di trasformazioni di coordinate. Sostituendo le GT con le LT e ammettendo che lo spazio e il tempo sono correlati e non più assoluti, è possibile dare una nuova visione chiara e coerente della meccanica.

Sfortunatamente continua ad esserci un'ulteriore contraddizione con una teoria accettata e verificata sperimentalmente per più di due secoli, la teoria della gravitazione. La teoria di Newton non era invariante per le LT e la SR non ammetteva che l'informazione potesse viaggiare a velocità infinita.

Per superare questo ulteriore dilemma Einstein formulò la nuova teoria della gravitazione, chiamata relatività generale.

Come si è visto all'inizio del capitolo, la SR si basa sul concetto di sistema di riferimento inerziale. Esso può essere esteso a piacere senza alcuna limitazione, ma la domanda che bisognerebbe porsi è se è effettivamente possibile ricreare una situazione come questa. Per il caso di un campo gravitazionale non uniforme si verifica sperimentalmente che la risposta è negativa [1].

In altre parole lo spazio-tempo non può essere approssimato in generale come uno spazio piatto quadridimensionale, ma questo può essere fatto solo localmente.

Lo scopo della GR è di estendere la SR in uno spazio curvo generico, combinando nuovi principi di relatività con alcuni strumenti di geometria differenziale quali varietà differenziabili, tensori e derivate covarianti.

Come ci si aspetta, ogni teoria verificata sperimentalmente deve essere recuperata in qualche limite. In particolare la relatività generale deve ritrovare la relatività ristretta se si è in presenza di un campo gravitazionale uniforme.

Quest'ultimo limite sancisce l'impossibilità di estendere a piacere un sistema di riferimento inerziale, il quale descrive bene la realtà solo localmente. D'ora in poi per passare da un sistema di riferimento ad un altro ci si dimentica delle LT e si usano trasformazioni di coordinate generiche.

Lo strumento adatto a questa trattazione generale è appunto il formalismo tensoriale che permette di avere le equazioni della fisica invarianti in forma per un cambio di coordinate generico.

Prima di procedere con la presentazione della geometria differenziale bisogna tenere presente che ogni forza fondamentale può essere introdotta e utilizzata nel nuovo costruito teorico, tranne la gravità. In GR la gravità viene vista come conseguenza della curvatura dello spazio-tempo. In altre parole la gravità diventa uno strumento geometrico, ovvero la metrica, che tiene conto del campo gravitazionale esterno e della curvatura.

## 1.3 Geometria differenziale

L'idea di spazio curvo viene descritta matematicamente dal concetto di varietà. Una varietà è uno spazio continuo che localmente è approssimabile ad uno spazio euclideo.

Si considerano solo varietà differenziabili, quindi spazi nei quali nell'intorno di ogni punto è possibile definire una funzione dalla varietà allo spazio euclideo che preservi le derivate di funzioni scalari nel punto.

Per quanto riguarda il concetto di derivabilità è un'estensione del caso euclideo, quindi si vuole costruire un nuovo modo di calcolare le derivate che tiene conto della curvatura intrinseca dello spazio considerato.

Il più importante esempio di varietà differenziabile è la sfera.

### 1.3.1 Tensori

Prima di definire il nuovo tipo di derivata è necessario definire cos'è un tensore.

Un tensore  $(M, N)$  è una funzione lineare di  $M$  co-vettori e  $N$  vettori che dà come risultato un numero reale. La caratteristica più importante di questi oggetti riguarda il modo in cui essi si trasformano sotto un cambiamento generale di coordinate [3].

Preso  $R_{\nu}^{\mu}$  come un tensore  $(1, 1)$ , usando una metrica generale  $g_{\alpha\beta}$ , il tensore trasformato  $R'$  diventa

$$R'_{\nu'}^{\mu'} = g_i^{\mu'} g_{\nu'}^j R_j^i. \quad (1.14)$$

In SR, in presenza di un campo gravitazionale uniforme,  $g_{\alpha\beta} \rightarrow \eta_{\alpha\beta}$ .

Si può generalizzare questa costruzione (1.14) nel caso di tensori  $(M, N)$ , usando  $M$  trasformazioni per gli  $M$  co-vettori e  $N$  trasformazioni per i rispettivi vettori.

### 1.3.2 Derivata covariante

L'assunzione di differenziabilità introdotta all'inizio del paragrafo significa che si può definire un intero set di tensori del tipo  $(M, N)$ . Il più importante è la metrica, ovvero un tensore simmetrico  $(0, 2)$  che permette di tener conto della curvatura di uno spazio.

La metrica inoltre contiene le informazioni sul modo in cui righelli e orologi misurano lo spazio e il tempo tra i vari punti dello spazio.

Una varietà differenziabile nella quale è possibile definire per ogni punto un tensore  $(0, 2)$  simmetrico che rappresenta la metrica viene chiamata varietà riemanniana.

Si ricorda che definendo la metrica in ogni punto si aggiunge una struttura allo spazio considerato, quindi è esattamente la metrica che definisce completamente la curvatura della varietà.

Come si vedrà nelle seguenti sezioni, ogni oggetto matematico rilevante di geometria differenziale che descrive la curvatura può essere scritto in funzione della metrica. In relatività ristretta viene usata la metrica minkowskiana  $\eta_{\alpha\beta}$ , mentre in uno spazio curvo si usa una metrica generale  $g_{\alpha\beta}$ . Il motivo deriva dal fatto che la metrica di Minkowski vale solo nei dintorni di un punto in uno spazio curvo.

Usualmente la derivata di un campo vettoriale viene definita come differenza tra due vettori in due punti differenti, ma nel caso di spazio curvo la nozione di differenza deve essere trattata con cautela dato che lo spazio tra i due vettori è curvo. A priori, dato che la metrica tiene conto della curvatura, si potrebbero definire infiniti differenti modi di costruire lo strumento derivata. Si sceglie la derivata di un tensore come un'operazione che sotto un cambio generale di coordinate si trasforma anch'essa come un tensore [1].

L'usuale derivata parziale di un campo vettoriale, non restituisce un tensore sotto un cambio arbitrario di coordinate. Questo fatto lo si può verificare direttamente considerando un cambio di coordinate generico  $x^{a'} = x^{a'}(x^b)$ , dove le coordinate primarie si riferiscono alle coordinate nel nuovo sistema,

$$\partial_{b'} T^{a'} = \frac{x^{a'}}{x^b} \frac{x^c}{x^{b'}} \partial_c T^b + \frac{\partial^2 x^{a'}}{\partial x^b \partial x^c} \frac{\partial x^c}{\partial x^{b'}} T^b; \quad (1.15)$$

si è decomposto il risultato in termini delle coordinate di base, ma per la presenza del secondo termine nella parte destra dell'equazione la quantità non si trasforma come un tensore.

Introducendo il simbolo di Christoffel, che non è un tensore, come

$$\Gamma_{jk}^i \equiv \frac{1}{2} g^{il} (\partial_k g_{lj} + \partial_j g_{lk} - \partial_l g_{jk}), \quad (1.16)$$

e definendo il nuovo tipo di derivata come

$$V_{;\beta}^\alpha = V_{,\beta}^\alpha + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha V^\mu, \quad (1.17)$$

si nota immediatamente che si trasforma come un tensore. Questa è la derivata covariante.

La virgola si riferisce alla derivata usuale, mentre il punto-virgola rappresenta la derivata covariante. Come si è menzionato in precedenza questa generalizzazione della derivata deve ottenere la derivata usuale nel limite di spazio piatto e ciò si verifica dato che  $\Gamma_{\beta\mu}^\alpha$  va a zero nello spazio euclideo.

### 1.3.3 Tensore di curvatura di Riemann

Per poter discriminare in maniera univoca se si è in presenza di uno spazio dotato di curvatura o meno vi è bisogno di una quantità che svolga questo compito.

Il tensore di curvatura di Riemann è l'oggetto ideale per descrivere la curvatura in una varietà riemanniana. Esso associa ad ogni punto della varietà un tensore che misura l'estensione per cui il tensore metrico è localmente isometrico allo spazio euclideo.

E' definito in funzione dei simboli di Christoffel, e quindi della metrica, nel modo seguente

$$R_{\beta\mu\nu}^\alpha \equiv \Gamma_{\beta\nu,\mu}^\alpha - \Gamma_{\beta\mu,\nu}^\alpha + \Gamma_{\sigma\mu}^\alpha \Gamma_{\beta\nu}^\sigma - \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha \Gamma_{\beta\mu}^\sigma. \quad (1.18)$$

Il tensore di Riemann è un tensore antisimmetrico nella prima e nella seconda coppia di indici e simmetrico nello scambio delle due coppie. In quattro dimensioni ha 20 componenti indipendenti.

Si può dare una descrizione matematica della curvatura intrinseca della varietà usando il trasporto parallelo di un vettore intorno ad un percorso chiuso, che è la nostra definizione di curvatura.

Una varietà piatta possiede una definizione generale di parallelismo: un vettore può essere trasportato parallelamente a se stesso in una arbitraria curva chiusa e la differenza tra il vettore iniziale e il vettore trasportato è nulla. La diretta conseguenza è che per una varietà piatta  $R_{\beta\mu\nu}^\alpha = 0$ .

Il tensore di Riemann fornisce il commutatore di derivate covarianti  $\nabla$  come

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] V^\mu = R_{\nu\alpha\beta}^\mu V^\nu. \quad (1.19)$$

Questa è una equazione tensoriale, perciò valida in ogni sistema di coordinate. Ciò significa che in uno spazio curvo qualsiasi bisogna tener conto dell'ordine in cui si utilizzano le derivate covarianti poiché esse non commutano.

Dal tensore di curvatura di Riemann si possono derivare altre importanti quantità che servono nella costruzione delle equazioni di campo di Einstein.

Riprendendo la definizione (1.18), differenziandola con  $x^\lambda$  e valutandola in un sistema inerziale locale ( $\Gamma_{\beta\mu}^\alpha = 0$ ), sfruttando la simmetria di  $g_{\alpha\beta}$  si trova

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = 0. \quad (1.20)$$

Questa equazione tensoriale è vera per ogni sistema di coordinate e viene chiamata identità di Bianchi.

Contraendo il primo e il terzo indice del tensore di curvatura di Riemann si ottiene

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^\alpha. \quad (1.21)$$

Si è scelta questa contrazione di  $R_{\alpha\beta\mu\nu}$  nonostante anche altre possono essere fatte, ma per l'antisimmetria in  $\alpha$  e  $\beta$  e quella in  $\mu$  e  $\nu$ , le altre possibili vanno a zero identicamente o forniscono  $\pm R_{\alpha\beta}$  [1].

Allo stesso modo lo scalare di Ricci è definito come

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (1.22)$$

Queste quantità combinate in maniera opportuna rientreranno nelle equazioni di campo sotto forma di un nuovo tensore, chiamato tensore di Einstein:

$$G^{\alpha\beta} \equiv R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R. \quad (1.23)$$

## 1.4 Geodetiche

La geometria differenziale cerca di descrivere il moto di un corpo su una superficie curva. Gli strumenti definiti nella sezione precedente consentono di ricavare l'equazione del moto in funzione delle coordinate scelte: tale equazione viene chiamata geodetica.

Data una varietà differenziabile la geodetica è la curva che minimizza la distanza tra due punti distinti sulla varietà.

Si dà la definizione di geodetica utilizzando il concetto di trasporto parallelo. Si definisce trasporto parallelo di  $\vec{V}$  lungo  $\vec{U}$  come

$$U^\beta V_{;\beta}^\alpha = 0. \quad (1.24)$$

La linea retta nello spazio euclideo è l'unica curva che trasporta parallelamente il suo vettore tangente. In uno spazio curvo, si possono comunque costruire linee che si comportano come le rette su un piano, richiedendo il trasporto parallelo del vettore tangente.

La definizione di geodetica è quindi

$$U^\beta U_{;\beta}^\alpha = 0. \quad (1.25)$$

In particolare, in un sistema di riferimento locale esse sono linee rette. In componenti

$$U^\beta U_{;\beta}^\alpha = U^\beta U_{,\beta}^\alpha + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha U^\mu U^\beta = 0. \quad (1.26)$$

Dato  $\lambda$  il parametro della curva, allora  $U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}$  e  $U^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} = \frac{d}{d\lambda}$ , l'equazione completa delle geodetiche è

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds}, \quad (1.27)$$

dove  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$  sono i simboli di Christoffel che rappresentano la connessione affine, che è simmetrica nei due indici bassi.

La quantità sulla sinistra dell'equazione è l'accelerazione della particella, che è l'analogo della legge del moto di Newton.

I simboli di Christoffel sono funzioni delle coordinate dello spazio tempo, quindi funzioni della metrica. Sono dunque indipendenti dalla velocità e dall'accelerazione, o qualsiasi altra caratteristica dell'oggetto preso in considerazione, il cui moto è dato dall'equazione delle geodetiche.

Dal fatto che i simboli di Christoffel  $\Gamma_{\mu\beta}^\alpha$  sono funzioni note delle coordinate ( $x^\alpha$ ), l'equazione delle geodetiche è una equazione differenziale non lineare del secondo ordine in  $x^\alpha(\lambda)$ . Ha soluzione unica date le condizioni iniziali  $\lambda = \lambda_0$ .

Solamente le trasformazioni lineari di  $\lambda$ , come

$$\phi = a\lambda + b, \quad (1.28)$$

danno nuovi parametri tali per cui l'equazione della geodetica è soddisfatta. Tali parametri, come  $\lambda$  o  $\phi$ , vengono detti parametri affini.

Una curva che ha lo stesso percorso di una geodetica, ma parametrizzata da un parametro non affine non è una curva geodetica. Come si è già accennato la geodetica è quella curva che ha lunghezza estrema tra due qualsiasi punti distinti.

Si fa notare che la linea di mondo di una particella libera da ogni forza esterna non gravitazionale è un particolare tipo di geodetica. In altre parole un moto in caduta libera si muove sempre lungo una geodetica.

## 1.5 Principio di equivalenza e covarianza generale

Costruire una nuova teoria consiste nel dover esprimere concetti fisici usando un formalismo matematico, ma questa è solo una relazione tra concetti matematici con alcune quantità fisiche misurabili. Questa relazione va considerata quando si usano concetti di geometria differenziale per spiegare gli effetti della gravità nel mondo fisico [1].

Si è assunto che lo spazio-tempo è una varietà differenziabile e non esiste un sistema di riferimento inerziale globale in presenza di un campo gravitazionale non-uniforme. La metrica dello spazio-tempo può essere portata in forma di Lorentz  $\eta_{\alpha\beta}$  in ogni punto (evento spazio-temporale) data una particolare scelta di coordinate, ma in generale, per un campo gravitazionale arbitrariamente complesso la metrica  $g_{\alpha\beta}$  non è sempre nota.

Ora si introducono i due principi dai quali nasce la nuova teoria della gravitazione.

### 1.5.1 Principio di equivalenza

Il principio fondamentale della relatività generale è il principio di equivalenza che è una diretta generalizzazione del secondo principio della SR che riguarda i sistemi di riferimento inerziali. Si è detto che non è possibile estendere la costruzione di un sistema inerziale per una regione ampia a piacere se è presente un campo gravitazionale non uniforme. Mantenendo localmente ciò che si è sviluppato in SR e facendo uso dei tensori, si possono costruire cambi di coordinate che mettono in relazione punti in diverse regioni dello spazio-tempo.

Il principio di equivalenza discende dall'uguaglianza tra massa gravitazionale e massa inerziale. Dalle parole di Einstein

A little reflection will show that the law of the equality of the inertial and gravitational mass is equivalent to the assertion that the acceleration imparted to a body by a gravitational field is independent of the nature of the body [4].

Come conseguenza, nessun campo gravitazionale esterno omogeneo e statico può essere misurato in un sistema in caduta libera.

La proposizione precedente indica che si assume una completa equivalenza fisica tra un campo gravitazionale e la corrispondente accelerazione in un sistema di riferimento.

Storicamente questo fu il principio di equivalenza debole dato che riguarda solo sistemi in caduta libera, ma può essere esteso a tutti i possibili sistemi di riferimento.

L'enunciato del principio può essere riassunto come: le leggi della natura sono le stesse in ogni punto dello spazio-tempo curvato da un campo gravitazionale esterno [1].



## 1.5.2 Principio di covarianza generale

La covarianza generale è l'invarianza in forma delle leggi fisiche sotto trasformazioni di coordinate differenziabili arbitrarie. L'idea essenziale riguarda il fatto che le coordinate non esistono a priori in natura, ma sono solo un artificio matematico per descriverla adeguatamente. Questo significa che le leggi fondamentali della natura non devono dipendere, in forma, da una particolare scelta di coordinate.

A priori la SR è stata costruita con l'idea di mantenere l'uguaglianza in forma delle leggi, ma limitata al caso di moti uniformi inerziali. Estenderle al caso di un cambio di coordinate generico è possibile soltanto usando il principio di equivalenza forte.

Il calcolo tensoriale è lo strumento matematico che porta a sviluppare in maniera semplice e diretta il cambio generale di coordinate, quindi ad una generalizzazione delle leggi fisiche.

Matematicamente, l'accoppiamento tra principio di equivalenza e covarianza, corrisponde al fatto che se si ha una legge locale della fisica che è espressa in quantità tensoriali in SR, la sua forma matematica è la stessa localmente in ogni sistema inerziale nello spazio-tempo curvo. Sostituendo le derivate usuali con le derivate covarianti si estende la medesima legge per qualsiasi osservatore nello spazio-tempo curvo.

## 1.6 Equazioni di campo

Le equazioni di campo di Einstein (*Einstein Field Equations*, EFE) sono una conseguenza dei principi di equivalenza e covarianza, e comprendono un set di equazioni che descrivono l'interazione gravitazionale come risultato di uno spazio-tempo curvato da massa e energia.

Prendendo spunto dall'elettromagnetismo nel quale si utilizzano le cariche e le correnti per determinare i campi elettromagnetici, allo stesso modo le EFE sono usate per determinare la geometria dell'universo dovuta alla presenza di una distribuzione di massa. In altre parole si determina il tensore metrico una volta che è dato il tensore energia-impulso.

Le EFE mettono in relazione la curvatura locale, espressa dal tensore di Einstein nell'equazione (1.23), con la distribuzione locale di energia dovuta al tensore energia-impulso.

Le equazioni di campo vengono scritte nella forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (1.29)$$

dove  $R_{\mu\nu}$  è il tensore di curvatura di Ricci,  $R$  è lo scalare di curvatura,  $g_{\mu\nu}$  è il tensore metrico e  $T_{\mu\nu}$  il tensore energia-impulso.

Le EFE sono equazioni tensoriali riferite ad un set di tensori simmetrici  $(0,2)$  i cui indici hanno quattro possibili valori, perciò ogni tensore ha 10 componenti indipendenti.

Risolvere le EFE è un problema molto complicato a priori, poiché esse sono un sistema di 10 equazioni accoppiate non lineari alle derivate parziali. L'esatta soluzione analitica può solo essere trovata sotto ipotesi restrittive, per esempio le simmetrie.

### 1.6.1 Tensore energia-impulso

Data una specifica distribuzione di energia e materia nella forma del tensore energia-impulso, le EFE sono delle equazioni in funzione della metrica  $g$  dato che sia il tensore di Ricci che lo scalare di curvatura dipendono da essa.

La relatività generale è consistente con la conservazione locale dell'energia e del momento espressa come conservazione del tensore energia-impulso. Le equazioni di campo devono quindi sia obbedire alla conservazione di  $T^{\mu\nu}$  e si devono ridurre alla legge di Newton per la gravitazione in presenza di campo debole e velocità molto minori rispetto a quella luminare. La legge di conservazione è dunque un vincolo fisico, data da [2]

$$T^{\nu\mu}_{;\mu} = 0. \quad (1.30)$$

Le equazioni di campo dipendono dal tensore energia-impulso, il quale dipende dalla dinamica di materia e energia come le particelle in moto, ma lo stesso moto dipende dal campo gravitazionale.

Nel caso in cui si voglia una trattazione generale ed esatta, l'evoluzione della metrica e del tensore energia-impulso devono essere risolte insieme.

Per ottenere la soluzione, il sistema da risolvere è composto dalle EFE più l'equazione di continuità. Si nota che esse non bastano poiché sono solo 14 equazioni (10 per le EFE e 4 per la continuità) per le 20 incognite (10 dalla metrica e 10 dal tensore energia-impulso).

In generale si vede che almeno altre 6 equazioni sono richieste, mentre ulteriori equazioni possono essere aggiunte nel caso di gradi di libertà interni.

Si può semplificare il problema usando l'approssimazione del vuoto

$$T_{\mu\nu} = 0, \quad (1.31)$$

o di fluido perfetto

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho) U_\mu U_\nu + p g_{\mu\nu}, \quad (1.32)$$

dove  $U^\mu U_\nu = -1$ ,  $\rho$  è la densità di massa-energia,  $U^\mu$  è il campo delle quadrivelocità e  $p$  è la pressione.

Solo 10 delle 14 equazioni sono in realtà indipendenti, perchè l'equazione di continuità è una conseguenza delle equazioni di Einstein. Ciò riflette il fatto che il sistema è gauge invariante, cioè invariante per il sistema di coordinate scelto. E' necessario imporre altri 4 vincoli che corrispondono alla libertà di scegliere il sistema di coordinate, in modo da ottenere risultati univoci.

Una volta scelti il sistema di coordinate e l'equazione di stato, il set di equazioni è completo e può essere risolto.

In questa tesi si utilizzano le soluzioni di Schwarzschild e Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker. Nel prossimo capitolo viene ricavata la metrica di Schwarzschild, mentre nel capitolo 5 si fornisce una descrizione della soluzione di Friedmann, che è utile per una trattazione generale delle distanze di diametro angolare.

## 1.7 Formalismo lagrangiano e hamiltoniano

La particella è uno dei concetti fondamentali della meccanica. Per particella si intende un corpo le cui dimensioni sono trascurabili nel descrivere il suo moto. La possibilità di fare questa approssimazione dipende ovviamente dal tipo di problema da risolvere [5].

La posizione della particella nello spazio è definita usando le coordinate cartesiane  $(x, y, z)$  o quelle sferiche  $(r, \phi, \theta)$ . Si può introdurre la derivata prima  $v_r = \frac{dr}{dt}$  di  $r$ , e lo stesso può essere fatto per tutte le altre coordinate.

### 1.7.1 Coordinate Generalizzate

Le coordinate scelte possono in generale non essere cartesiane o sferiche e l'utilizzo di un tipo piuttosto che un altro discende dalla convenienza in relazione al problema affrontato. Esse possono rivelare quantità conservate e simmetrie in maniera diretta, che possono rendere il problema molto più semplice.

Prese  $n$  quantità  $q_1, q_2, \dots, q_n$  che definiscono completamente la posizione di un sistema con  $n$  gradi di libertà vengono definite coordinate generalizzate, le cui derivate temporali  $\dot{q}_i$  sono chiamate velocità generalizzate. Se tutte le coordinate e le velocità sono simultaneamente conosciute, dall'esperienza si deduce che lo stato della particella è completamente determinato e il suo moto può essere in principio calcolato.

In altre parole significa che se tutte le coordinate  $q$  e le rispettive velocità  $\dot{q}$  sono date in un determinato istante, le accelerazioni  $\ddot{q}$  sono univocamente definite.

Le relazioni tra le accelerazioni, le velocità e le coordinate sono chiamate equazioni del moto. Sono equazioni differenziali del secondo ordine per le funzioni  $q(t)$  e la loro integrazione rende in principio possibile la determinazione di queste funzioni.

### 1.7.2 Principio di minima azione e equazioni di Lagrange

La formulazione più generale delle leggi che governano il moto di un sistema meccanico discende dal principio di minima azione.

Si prenda un sistema che agli istanti  $t_1$  e  $t_2$  occupa le posizioni  $q(1)$  and  $q(2)$ ; ogni sistema meccanico è caratterizzato da una funzione  $L(q, \dot{q}, t)$  chiamata lagrangiana  $L$ , la cui evoluzione è tale che l'azione  $S$  del moto deve assumere un valore minimo tra la posizione iniziale e finale. Per  $S$  si intende [5]

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt. \quad (1.33)$$

Il fatto che la lagrangiana contenga solo  $q(t)$  e  $\dot{q}(t)$  e non ordini maggiori nelle derivate esprime quanto detto in precedenza che lo stato meccanico del sistema è completamente definito quando sono date le coordinate e le rispettive velocità.

Adesso si deriveranno le equazioni differenziali che risolvono il problema di minimizzare l'integrale  $S$ .

Sia  $q = q(t)$  la funzione per la quale  $S$  sia un minimo.  $S$  deve aumentare quando  $q(t)$  è sostituita da ogni funzione nella forma  $q(t) + \delta q(t)$ , dove  $\delta q(t)$  è la variazione della funzione  $q(t)$ .  $\delta q(t)$  è una funzione piccola rispetto a  $q(t)$  ovunque nell'intervallo di tempo da  $t_1$  a  $t_2$ . Tutte le funzioni di questa forma devono rispettare  $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ . Il principio di minima azione può essere scritto come

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0, \quad (1.34)$$

integrando il secondo termine per parti, ricordando che  $\delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q$ , si ottiene

$$\delta S = \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0. \quad (1.35)$$

La condizione menzionata in precedenza mostra che il primo termine integrato è zero quindi rimane un integrale che deve essere zero per tutti i possibili valori di  $\delta q$ . Ne consegue che

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (1.36)$$

Queste sono le equazioni di Lagrange.

Nel caso in cui il sistema abbia più di un grado di libertà, le  $n$  differenti funzioni  $q_i(t)$  devono variare indipendentemente nel principio di minima azione.

### 1.7.3 Momenti Generalizzati

I momenti generalizzati canonicamente coniugati alle coordinate  $q_i$  sono definiti da

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (1.37)$$

Un'importante proprietà di  $L$  è che le quantità conservate possono essere facilmente dedotte osservando la forma della lagrangiana. Se  $L$  non dipende da alcune coordinate  $q_i$ , segue dalle equazioni di Lagrange che

$$\dot{p}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (1.38)$$

quindi i corrispondenti momenti generalizzati sono costanti nel tempo, ovvero quantità conservate. Questo è un caso speciale del teorema di Noether.

Il teorema di Noether mette in luce il legame esistente tra simmetrie di un sistema fisico e quantità conservate. Gli esempi più famosi in fisica sono rappresentati dalla conservazione della quantità di moto, se il sistema ha una simmetria per traslazioni spaziali, oppure dalla conservazione del momento angolare per sistemi invarianti per rotazioni.

In particolare stabilisce che a ogni simmetria della lagrangiana, ovvero a ogni trasformazione continua delle coordinate  $q(t)$  e  $\dot{q}(t)$ , che lascia invariata la lagrangiana  $L(q, \dot{q}, t)$ , corrisponde una quantità che si conserva.

### 1.7.4 Formalismo hamiltoniano

Partendo dal formalismo lagrangiano, trovando i relativi momenti per ogni coordinata generalizzata e usando la trasformazione di Legendre di  $L$ ,  $H = \dot{q}p - L$ , si trova una nuova funzione chiamata hamiltoniana  $H$ , funzione di  $q$  e  $p$ .

Date  $n$  coordinate generalizzate  $q(t)$ , le equazioni del moto per il formalismo hamiltoniano sono  $2n$  equazioni differenziali del primo ordine, date da  $n$  equazioni per  $p$

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\dot{p}_j, \quad (1.39)$$

e  $n$  equazioni per  $q$

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j. \quad (1.40)$$

Le rispettive equazioni di Lagrange consistono invece in  $n$  equazioni differenziali del secondo ordine. Comunque, le equazioni di Hamilton normalmente non riducono la difficoltà di trovare soluzioni esplicite.

Anche in questo caso si hanno quantità conservate, se  $H$  non dipende da alcune coordinate  $q_i$ .

## Capitolo 2

# Le geodetiche della metrica di Schwarzschild

Nel capitolo precedente sono stati introdotti concetti chiave di relatività e geometria differenziale affiancati al formalismo lagrangiano o hamiltoniano. Questi temi sono necessari per poter portare avanti la trattazione sul lensing gravitazionale.

Il seguente capitolo inizia con una veloce deduzione del fenomeno di lensing senza utilizzare le equazioni di Einstein [4]. Questo capitolo verte principalmente intorno alla metrica di Schwarzschild. Per un corpo a simmetria sferica ed elettricamente neutro in un universo vuoto, la metrica di Schwarzschild è la metrica asintoticamente piatta che descrive lo spazio-tempo intorno ad esso obbedendo alle equazioni di Einstein per il vuoto [1]. Tale metrica viene calcolata nella sezione 2.2 partendo da uno spazio-tempo statico a simmetria sferica. Nella sezione successiva viene inoltre studiato il problema di questa metrica nella superficie  $r = 2M$  introducendo le coordinate di Kruskal [1].

Nella sezione 2.4, seguendo la trattazione di Chandrasekhar [3], si ricava dalla lagrangiana dello spazio-tempo di Schwarzschild l'equazione delle geodetiche.

Alla fine del capitolo vengono presentate sia le orbite legate che quelle non legate studiando il comportamento del potenziale effettivo nell'equazione generale delle geodetiche.

### 2.1 La deflessione delle particelle in un campo gravitazionale

Usando implicazioni basate sul principio di equivalenza, ma senza l'utilizzo delle equazioni di campo, si può dedurre che i corpi massivi deflettono la luce [4].

Il principio di equivalenza afferma che gravità e accelerazione non possono essere distinte. In altre parole, un osservatore in caduta libera non riconosce gli effetti della

gravità e un osservatore accelerato può interpretare le forze inerziali come dovute a un campo gravitazionale.

Si immagini un osservatore in una camera chiusa con un buco sulla parete sinistra. Se la camera è accelerata verso l'alto, l'uomo osserva le forze inerziali agenti su di lui come forze gravitazionali che spingono verso il basso.

Ora si consideri un raggio di luce che entra dal buco sulla parete di sinistra e raggiunge quella di destra. Mentre la camera si muove verso l'alto, il raggio colpisce la parete di destra in un punto più basso rispetto a quello di entrata. Quindi il raggio appare deviato dal fatto che la camera è accelerata.

D'altra parte, facendo uso del principio di equivalenza, si può costruire il caso opposto. Si consideri una camera ferma con un campo gravitazionale di intensità tale da riprodurre le stesse forze inerziali presenti nel caso precedente. Se la luce non fosse deflessa dalla gravità vorrebbe dire che l'osservatore ha la possibilità di discriminare tra gravità e accelerazione. Questa proposizione è in contrasto con il principio di equivalenza.

Si può concludere che se si assume valido il principio di equivalenza la luce o altre particelle devono essere deflesse dalla gravità [4].

## 2.2 Spazio-tempo di Schwarzschild

Si procede ora con il derivare la metrica di Schwarzschild facendo l'ipotesi di spazio-tempo statico a simmetria sferica.

La simmetria sferica non ammette una direzione privilegiata nello spazio. La metrica più generale in uno spazio-tempo a simmetria sferica è [1]

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + 2g_{0r}drdt + g_{rr}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (2.1)$$

dove  $d\Omega = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$  è la parte angolare della metrica. In questa metrica  $t$  è la coordinata temporale misurata da un orologio stazionario collocato a distanza infinita dalla lente;  $r$  è la coordinata radiale di una sfera centrata intorno al centro della lente, che viene calcolata come la circonferenza divisa per  $2\pi$ ;  $\theta$  è la colatitudine, cioè l'angolo calcolato rispetto al nord in radianti, mentre  $\phi$  è la longitudine in radianti.

Per spazio-tempo statico si intende uno spazio-tempo in cui è possibile trovare una coordinata  $t$  tale che le componenti della metrica devono essere indipendenti da  $t$  e la geometria rimane invariata sotto inversione temporale.

Se ne deduce che  $g_{0r} = 0$ , quindi la metrica per uno spazio-tempo statico a simmetria sferica è

$$ds^2 = -e^{2\Phi}dt^2 + e^{2\Lambda}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (2.2)$$

dove si sono introdotte  $\Phi(r)$  e  $\Lambda(r)$ . Questa sostituzione è accettabile se  $g_{00}(r) < 0$  e  $g_{rr}(r) > 0$  valgono dappertutto [1].

Si impone inoltre la seguente condizione per richiedere che lo spazio-tempo all'infinito sia piatto

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \Lambda(r) = 0. \quad (2.3)$$

La metrica nella relazione (2.2) è soluzione delle equazioni di Einstein nel vuoto ( $T^{\mu\nu} = 0$ ), perciò la si può inserire nel tensore di Einstein e calcolare le singole componenti. Esse sono

$$G_{00} = \frac{1}{r^2} e^{2\Phi} \frac{d}{dr} [r(1 - e^{-2\Lambda})], \quad (2.4)$$

$$G_{rr} = -\frac{1}{r^2} e^{2\Lambda} (1 - e^{-2\Lambda}) + \frac{2}{r} \dot{\Phi}, \quad (2.5)$$

$$G_{\theta\theta} = r^2 e^{-2\Lambda} \left[ \ddot{\Phi} + \dot{\Phi}^2 + \frac{\dot{\Phi}}{r} - \dot{\Phi} \dot{\Lambda} - \frac{\dot{\Lambda}}{r} \right], \quad (2.6)$$

$$G_{\phi\phi} = \sin^2 \theta G_{\theta\theta}, \quad (2.7)$$

dove  $\dot{\Phi}$  è la derivata prima rispetto a  $r$ . Le componenti di  $G$  sono 16, ma tutte quelle fuori dalla diagonale sono nulle.

Si è interessati al caso di corpi statici, nei quali il fluido è a riposo. L'unica componente non nulla di  $\vec{U}$  è quindi  $U^0$ .

La condizione di normalizzazione richiede

$$\vec{U} \cdot \vec{U} = -1, \quad (2.8)$$

la quale implica che

$$U^0 = e^{-\Phi}, \quad (2.9)$$

$$U_0 = -e^{\Phi}. \quad (2.10)$$

Per un fluido perfetto il tensore energia-impulso è  $T$  e soddisfa

$$T^{\alpha\beta} = (p + \rho) U^\alpha U^\beta + p \eta^{\alpha\beta}, \quad (2.11)$$

dove  $\eta$  è la metrica minkowskiana con  $\eta^{00} = -1$ ,  $p$  la pressione e  $\rho$  la densità.

In questo caso  $T$  ha le componenti

$$T_{00} = \rho e^{2\Phi}, \quad (2.12)$$

$$T_{rr} = p e^{2\Lambda}, \quad (2.13)$$

$$T_{\theta\theta} = r^2 p, \quad (2.14)$$

$$T_{\phi\phi} = \sin^2 \theta T_{\theta\theta}. \quad (2.15)$$



Le leggi di conservazione,

$$T_{;\beta}^{\alpha\beta} = 0, \quad (2.16)$$

sono un set di quattro equazioni, una per ogni valore dell'indice libero  $\alpha$ . Data la simmetria di  $T$ , solo quella con  $r$  non è nulla. Quindi

$$(p + \rho) \frac{d\Phi}{dr} = -\frac{dp}{dr}. \quad (2.17)$$

Questa equazione mostra la relazione tra la pressione e staticità del fluido, ovvero quanto gradiente di pressione è richiesto per mantenere il fluido statico nel campo gravitazionale.

Definendo  $m(r) \equiv \frac{1}{2}r(1 - e^{-2\Lambda})$ , allora

$$g_{rr} = e^{2\Lambda} = \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1}. \quad (2.18)$$

La componente  $(0, 0)$  delle equazioni di Einstein è

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho. \quad (2.19)$$

L'equazione di  $G(r, r)$  può essere scritta nella forma

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{m(r) + 4\pi r^3 p}{r[r - 2m(r)]}. \quad (2.20)$$

Le equazioni (2.17-2.19-2.20) insieme all'equazione di stato  $p = p(\rho)$  sono quattro equazioni per le quattro incognite  $\Phi, m, \rho, p$ .

La geometria esterna nel caso di  $p = \rho = 0$  porta a

$$\frac{dm}{dr} = 0, \quad (2.21)$$

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{m}{r(r - 2m)}. \quad (2.22)$$

Tale coppia di equazioni ha come soluzioni  $m(r) = M = \text{const}$  e  $e^{2\Phi} = 1 - \frac{2M}{r}$ .  $M$  può essere interpretata come la massa.

## 2.2.1 La soluzione di Schwarzschild

La soluzione di Schwarzschild è adatta a descrivere oggetti astronomici come stelle e pianeti, inclusi Terra e Sole. In sostanza per poter applicare questa soluzione ad un oggetto, esso deve avere carica elettrica nulla ed essere privo di momento angolare.

La metrica di Schwarzschild è la soluzione più generale di simmetria sferica delle equazioni di campo di Einstein nel vuoto con spazio asintoticamente piatto [1].

Nelle coordinate di Schwarzschild  $(r, t, \theta, \phi)$  con segnatura  $(1, -1, -1, -1)$ , l'elemento di linea è

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.23)$$

dove  $r_s$  è il raggio di Schwarzschild dell'oggetto, quindi un fattore di scala legato alla sua massa  $M$  da  $r_s = 2M$ .

La metrica di Schwarzschild è stata ricavata solo fuori dalla distribuzione dell'oggetto, quindi per un corpo sferico di raggio  $R$ , la soluzione vale per  $r > R$ .

Per descrivere il campo gravitazionale sia dentro che fuori, la soluzione di Schwarzschild deve essere collegata in  $r = R$  alla soluzione interna di Schwarzschild che non viene discussa in questa tesi.

Ogni massa non rotante e priva di carica con dimensioni molto più piccole del suo raggio di Schwarzschild forma un buco nero. La soluzione delle equazioni di Einstein è valida indipendentemente dal valore della massa  $M$ .

Il buco nero di Schwarzschild è caratterizzato da condizioni sferiche di contorno, chiamato l'orizzonte degli eventi, che è situato al raggio di Schwarzschild. Esso non è una superficie fisica, ma è solamente un difetto della metrica. Nella seguente sezione si parla di come trattare questo problema.

## 2.2.2 Coordinate di Kruskal

E' chiaro che l'elemento di linea dato dalla relazione (2.23) ha una singolarità in  $r = 2M$ , il problema riguarda le coordinate scelte e non la geometria dello spazio-tempo [1].

Tali singolarità nascono quando le coordinate non descrivono adeguatamente lo spazio-tempo e nel caso della geometria di Schwarzschild le coordinate usuali generano una singolarità sulla superficie  $r = 2M$ . Lo spazio-tempo non ha però alcun problema in quella posizione. Scelta una particella che cade radialmente su quella superficie da qualsiasi raggio finito  $R$  maggiore di  $r$ , si scopre che il tempo proprio di questo percorso è una quantità finita. Ogni particella può raggiungere l'orizzonte degli eventi ( $r = 2M$ ) e superarlo in un tempo finito.

Il problema si risolve utilizzando le coordinate giuste. Si è interessati a coordinate che prevengano qualsiasi singolarità in punti dello spazio-tempo che non dovrebbero averla. Esse vengono chiamate coordinate di Kruskal e sono definite come

$$u = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{\frac{r}{4M}} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right), \quad (2.24)$$

$$v = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{\frac{r}{4M}} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right), \quad (2.25)$$

per  $r > 2M$  e

$$u = \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{\frac{r}{4M}} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right), \quad (2.26)$$

$$v = \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{\frac{r}{4M}} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right), \quad (2.27)$$

per  $r < 2M$ . Questa trasformazione è singolare in  $r = 2M$ , ma questo discende dalla singolarità delle coordinate precedenti.

La metrica in queste coordinate è

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r} e^{-\frac{r}{2M}} (dv^2 - du^2) - r^2 d\Omega^2, \quad (2.28)$$

dove  $r$  non deve essere considerata come una coordinata, ma come una funzione di  $u$  e  $v$ , data implicitamente dall'inversa delle equazioni (2.24-2.25).

La singolarità in  $r = 2M$  era un difetto della vecchia metrica e ora non vi è associato nulla di problematico. La singolarità in  $r = 0$  rimane presente dato che fisicamente è un difetto della geometria dello spazio-tempo.

Le linee radiali nulle, cioè quelle con  $d\theta = d\phi = ds = 0$ , sono tutte le linee che seguono  $dv = \pm du$ . Esse sono le linee di mondo per velocità luminari.

## 2.3 Equazioni geodetiche

Si sviluppa in questa sezione una trattazione generale delle geodetiche nello spazio-tempo di Schwarzschild, indipendente dalla massa della particella deviata.

Il formalismo hamiltoniano permette di trovare due equazioni per le costanti del moto del sistema che serviranno a posteriori per trovare le equazioni delle geodetiche per  $\phi$  e  $t$  in funzione della coordinata radiale  $r$ .

La metrica di Schwarzschild è una soluzione a simmetria sferica, carica elettrica nulla che risolve le EFE nel vuoto mostrate nell'equazione (1.29). La metrica è legata alla lagrangiana da [3]

$$L = \frac{1}{2} g_{ij} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau}. \quad (2.29)$$

Le equazioni del moto, cioè le geodetiche, sono le soluzioni delle equazioni di Lagrange per ogni coordinata.

La lagrangiana dello spazio-tempo di Schwarzschild è [3]

$$L = \frac{1}{2} \left[ \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2M}{r}} - r^2 \dot{\theta}^2 - (r^2 \sin^2 \theta) \dot{\phi}^2 \right], \quad (2.30)$$

dove il punto significa la differenziazione rispetto al parametro della curva.

E' possibile ricavare i momenti coniugati riferiti ad ogni coordinata  $(r, t, \theta, \phi)$  come segue

$$p_t = \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}, \quad (2.31)$$

$$p_r = -\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\dot{r}}{1 - \frac{2M}{r}}, \quad (2.32)$$

$$p_\phi = -\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = (r^2 \sin^2 \theta) \dot{\phi}, \quad (2.33)$$

$$p_\theta = -\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = r^2 \dot{\theta}. \quad (2.34)$$

Ricavando l'hamiltoniana  $H$  del sistema si ottiene

$$H = p_t \dot{t} - \left( p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} + p_\phi \dot{\phi} \right) - L = L. \quad (2.35)$$

L'ultima uguaglianza deriva dall'assenza di energia potenziale.

### 2.3.1 Integrali del moto

$H$  e  $L$  non dipendono esplicitamente da  $t$  e da  $\phi$ , perciò dal teorema di Noether (sez. 1.7.3) devono essere presenti due integrali del moto. Queste costanti del moto sono  $p_t$  e  $p_\phi$ , vengono chiamate rispettivamente energia  $E$  e momento angolare  $J$ . Queste costanti rispettano le seguenti relazioni

$$\frac{dp_t}{d\tau} = \frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad (2.36)$$

$$\frac{dp_\phi}{d\tau} = -\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0. \quad (2.37)$$

Considerando l'equazione del moto di  $\theta$

$$\frac{dp_\theta}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} (r^2 \dot{\theta}) = -\frac{\partial L}{\partial \theta} = (r^2 \sin \theta \cos \theta) \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2, \quad (2.38)$$

si può concludere che se si fissa il valore di  $\theta$  a  $\frac{\pi}{2}$  quando  $\dot{\theta}$  è zero, allora  $\ddot{\theta}$  è anch'esso nullo. Questa assunzione mostra che  $\theta$  sarà costante e il moto delle geodetiche giace nello spazio invariante  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . L'equazione per  $\phi$  diventa

$$p_\phi = -\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = r^2 \dot{\phi} = J, \quad (2.39)$$

mentre quella per  $t$  è

$$p_t = \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t} = E. \quad (2.40)$$

Le equazioni (2.39-2.40) scritte esplicitando la dipendenza dal parametro della curva  $\tau$ , sono

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{1 - \frac{2M}{r}}, \quad (2.41)$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{J}{r^2}. \quad (2.42)$$

Inserendo le equazioni (2.41-2.42) nella lagrangiana mostrata nella relazione (2.30), si esplicita la dipendenza di  $L$  da  $r$ . La sua forma è

$$\frac{E^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2M}{r}} - \frac{J^2}{r^2} = 2L. \quad (2.43)$$

L'invariante relativistico è dato da  $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ , perciò il legame tra  $L$  e  $ds^2$  è

$$ds^2 = Ld\tau^2. \quad (2.44)$$

Per le geodetiche riguardanti particelle senza massa vale  $ds^2 = 0$ , mentre per le particelle massive  $ds$  è il parametro della curva. La lagrangiana nello spazio-tempo di Schwarzschild è costante nel tempo e assume i valori 1 o 0 in base al tipo di particella considerato.

## 2.4 Orbite

In generale, se non si fissano i valori dell'energia  $E$  e del momento angolare  $J$ , il moto delle geodetiche può assumere diverse traiettorie. Principalmente esse possono essere legate o non legate [1].

In questa tesi si è interessati principalmente a orbite non legate per poter stimare l'angolo di deflessione. Per generalità si presentano sia le orbite legate che quelle non legate, sia per il caso massivo che per quello senza massa.

### 2.4.1 Orbite legate

Partendo dall'equazione (2.43) si ottengono due tipi di equazioni, una per il caso massivo

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \tilde{E}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{\tilde{J}^2}{r^2}\right), \quad (2.45)$$

e una per quello senza massa

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{J^2}{r^2}. \quad (2.46)$$

Entrambe le equazioni hanno la stessa forma generale data da  $\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - W^2$ . Il termine  $W$  è il potenziale effettivo dell'orbita.  $W$  dipende dalla particella considerata,

perciò si userà la notazione  $\tilde{E}$ ,  $\tilde{J}$  e  $\tilde{W}$  per i termini riferiti al caso massivo, mentre  $E$ ,  $J$  e  $W$  per i termini riferiti al caso senza massa.

Esplicitamente i potenziali effettivi sono dati da

$$\tilde{W}^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{J^2}{r^2}\right), \quad (2.47)$$

$$W^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{J^2}{r^2}. \quad (2.48)$$

La parte sinistra delle equazioni (2.45-2.46) è un quadrato perciò è positiva o zero. L'energia della traiettoria quindi non può mai essere minore del suo potenziale.

Le orbite legate hanno raggio costante o variabile in un intervallo limitato di valori. Se il raggio è costante l'orbita è circolare. Questa situazione è possibile solo in un punto di minimo o in un punto massimo del potenziale. E' importante notare che se la particella si trova in un punto di minimo l'orbita è stabile, mentre è instabile se si trova in un punto di massimo.

Studiando  $\tilde{W}$ , esso ammette sia minimo che massimo per ogni  $\tilde{J}$ , quindi le particelle massive nel potenziale di Schwarzschild possono avere sia orbite chiuse stabili che instabili. Tale situazione non si presenta nel caso senza massa dato che  $W$  ammette solamente un punto di massimo per ogni valore  $J$  [1].

Calcolando  $\frac{dW}{dr} = 0$  e  $\frac{d\tilde{W}}{dr} = 0$  si ottiene per particelle massive

$$r_{\pm} = \frac{\tilde{J}^2}{2M} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{12M^2}{\tilde{J}^2}} \right], \quad (2.49)$$

e per quelle a massa nulla

$$r = 3M. \quad (2.50)$$

Le soluzioni dell'equazione (2.49) rappresentano i raggi delle orbite stabili ( $r_+$ ) e instabili ( $r_-$ ) per particelle massive con potenziale  $\tilde{W}$ . I due raggi sono distinti solo se  $\tilde{J}^2 > 12M^2$  mentre per  $\tilde{J}^2 = 12M^2$  hanno lo stesso valore che vale  $r = 6M$ .

Nel caso senza massa non sono ammesse orbite stabili, mentre è possibile un'unica orbita instabile in  $r = 3M$  indipendentemente dal valore  $J$ .

## 2.4.2 Orbite non legate

Studiando il potenziale dell'orbita  $\tilde{W}$  si ha che per avere orbite non legate, il valore dell'energia  $\tilde{E}$  deve essere tale da ammettere un raggio minimo nell'orbita, ma non un raggio massimo. Nel caso di  $W$  questo problema non si pone perché le tutte le orbite sono non legate tranne l'orbita chiusa instabile in  $r = 3M$ . Sia per  $\tilde{W}$  che per  $W$ , esiste sempre un raggio  $r_x$  tale che  $E^2 = W^2$ , quindi  $dr/d\tau = 0$ .  $r_x$  ammette un

singolo valore di minimo nei raggi possibili che può assumere l'orbita, ma non un valore massimo. Questa situazione rappresenta la traiettoria di una particella proveniente da distanze molto grandi dalla massa  $M$ , che dopo aver raggiunto un punto di massimo avvicinamento, ritorna a distanze molto grandi dalla massa  $M$ .

Differenziando le equazioni (2.45-2.46) rispetto a  $\tau$  si ottiene

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dr} \tilde{W}^2. \quad (2.51)$$

Lo stesso risultato lo si ottiene per  $W$ . Queste equazioni sono l'analogo di  $ma = -\nabla\phi$ , con  $\phi$  potenziale qualsiasi.

Considerando il raggio  $r_x$  si vede che l'accelerazione radiale della traiettoria è uscente in quel punto, perciò la particella dotata di massa (o senza massa) esce dall'orbita e torna a distanze molto grandi dall'oggetto che devia la particella [1].

# Capitolo 3

## Angolo di deflessione

In questo capitolo si trattano le geodetiche non legate riferite a particelle sia dotate di massa che senza in uno spazio-tempo di Schwarzschild. La massa delle particelle viene considerata molto piccola ( $\simeq eV$ ) e la loro velocità è sub-luminare.

La prima sezione del capitolo riguarda una presentazione delle approssimazioni che vengono fatte per poter sviluppare i calcoli. Nelle sezioni successive verranno ricavati gli angoli di deflessione per particelle massive e senza massa.

Il calcolo dell'angolo di deflessione per particelle senza massa viene ricavato integrando la geodetica ottenuta in seguito ad un cambio di variabile e all'uso dell'approssimazione di *campo debole*. Per il caso di particelle dotate di massa invece si usa un metodo perturbativo. Considerando l'equazione (2.43) insieme alle costanti del moto mostrate nelle equazioni (2.41-2.42) si ottiene un'equazione per le geodetiche  $r = r(\phi)$ . L'equazione ottenuta viene confrontata con quella ottenuta da Weinberg [2] per mostrare che l'equazione ricavata è consistente con la sua.

Successivamente si useranno le variabili velocità  $V$  e parametro di impatto  $b$  piuttosto che l'energia  $E$  e il momento angolare  $J$  per descrivere il moto delle geodetiche massive [2]. Questo cambio di variabile rende più semplice l'applicazione delle approssimazioni.

Il risultato innovativo di questa tesi viene presentato nella sezione 3.5. Esso rappresenta un metodo di risoluzione dell'equazione differenziale per l'angolo di deflessione di particelle massive. Il metodo consiste nell'espandere in serie di Taylor l'equazione utilizzando le approssimazioni della sezione 3.1 e integrare ogni singolo termine solo sulle orbite imperturbate. Il risultato cercato è presentato nella forma (3.1).

Il risultato viene poi confrontato con quello ottenuto al primo ordine da Glicenstein [7] e si dimostra che i due risultati sono consistenti nel limite in cui  $V \rightarrow 1$ .



### 3.1 Ipotesi del modello

Si vuole proporre un approccio per studiare il lensing e sono necessarie alcune ipotesi di partenza. Queste ipotesi valgono sia per lo studio di orbite non legate di particelle senza massa che per quelle dotate di massa.

Assumiamo che il lensing sia causato da un corpo compatto di massa  $M$ , statico, elettricamente neutro e a simmetria sferica. Lo spazio-tempo intorno al corpo è a simmetria sferica, inoltre è piatto sia asintoticamente che in assenza del corpo stesso. L'universo al di fuori del corpo è completamente vuoto, cioè non ci sono altre sorgenti che deformano lo spazio-tempo. Questo corpo viene chiamato *lente gravitazionale* e deflette il percorso della particella. In realtà è il suo campo gravitazionale, descritto dallo spazio-tempo di Schwarzschild, a deflettere la particella.

Si definisce il parametro di impatto  $b$  come la distanza perpendicolare tra la traiettoria della particella e il centro del campo gravitazionale generato dalla lente alla quale si sta avvicinando. Le particelle considerate hanno velocità uguale a 1 se sono prive di massa mentre hanno velocità sub-luminari nel caso in cui abbiano massa.

Le particelle deviate si considerano provenienti da una sorgente, in viaggio verso l'osservatore senza essere catturate dal campo gravitazionale della lente. L'osservatore e la sorgente giacciono molto distanti dalla lente dove lo spazio-tempo è approssimativamente piatto. L'interazione gravitazionale è significativa solo su una parte infinitesima del percorso totale della particella, e ciò significa che si sta applicando l'approssimazione di *lente sottile*. L'approssimazione di *lente sottile* si basa sul fatto che il parametro di impatto  $b$  è molto più piccolo delle distanze tra osservatore e lente e tra lente e sorgente. Questa approssimazione è applicabile anche a distribuzioni di massa generiche qualora le distanze tra osservatore e lente e tra lente e sorgente siano molto più grandi dello spessore della lente stessa.

L'altra approssimazione che viene applicata riguarda il principio di *campo debole*. L'utilizzo di questa ipotesi consiste nel considerare il cammino della particella molto lontano dal raggio gravitazionale (raggio di Schwarzschild) della lente. Con raggio gravitazionale si intende una quantità caratteristica della lente dipendente dalla massa  $M$ , data da  $r_s = 2M$ .

L'angolo di deflessione  $\phi$  di particelle che compiono orbite non legate in uno spazio-tempo di Schwarzschild, viene espresso in un'espansione in serie della velocità della particella come

$$\phi_V = \phi_\gamma + \delta\phi_{V1} + \delta\phi_{V2} + \delta\phi_{V3} + O(\delta\phi_{V4}, \delta\phi_{M2}), \quad (3.1)$$

dove  $\phi_\gamma$  è la soluzione per il caso senza massa, e  $\delta\phi_{V1}$  è la prima correzione legata alla velocità se la particella è massiva. Nel caso di particelle senza massa come i fotoni tutte le correzioni nell'equazione (3.1) svaniscono.  $O(\delta\phi_{V4}, \delta\phi_{M2})$  indica che vengono tralasciate le correzioni alle velocità superiori al terzo ordine e viene tenuto solo il primo ordine nelle correzioni alla massa della lente  $M$ .

Le approssimazioni fatte vengono usate soprattutto quando si calcolerà l'angolo di deflessione per particelle dotate di massa applicando un approccio perturbativo.

## 3.2 Orbite non legate per particelle senza massa

Le particelle considerate in questa sezione sono senza massa. Tali particelle, nello spazio-tempo di Schwarzschild, ammettono orbite aperte, quindi è possibile calcolarne l'angolo di deflessione.

Il caso senza massa è più semplice da trattare rispetto a quello massivo poiché il potenziale effettivo ha un termine in meno, quindi le geodetiche per  $\phi$  diventano integrabili in seguito ad un cambio di variabile e all'approssimazione di *campo debole* ( $\frac{M}{r} \ll 1$ ).

Dall'equazione (2.43), ponendo  $L = 0$  si ottiene

$$\frac{E^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2M}{r}} - \frac{J^2}{r^2} = 0. \quad (3.2)$$

Prendendo l'equazione per la costante del moto  $\phi$  (2.42) e inserendola nell'equazione (2.43) si ottiene

$$\left(\frac{d\phi}{dr}\right) = \pm \frac{1}{r^2} \left[ \frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \right]^{-1/2}, \quad (3.3)$$

dove  $b \equiv L/E$  è il parametro di impatto. Un fotone incidente con  $L \geq 0$  segue l'equazione

$$\left(\frac{d\phi}{du}\right) = \left(\frac{1}{b^2} - u^2 + 2Mu^3\right)^{-1/2}. \quad (3.4)$$

Per ottenere questa relazione si è definito  $u = 1/r$ . Dalla forma dell'equazione (3.4) si nota che il termine in  $u^3$  contiene il contributo della deflessione di  $M$  sul fotone. La soluzione in assenza della lente è

$$r \sin(\phi - \phi_0) = b, \quad (3.5)$$

dove  $\phi_0$  è l'angolo iniziale, che rappresenta la direzione incidente. Questo è il risultato imperturbato, rappresenta quindi una linea retta che non risente della deflessione.

Imponendo l'approssimazione di *campo debole* ( $Mu \ll 1$ ) e definendo una nuova variabile  $y$  in questo modo

$$y \equiv u(1 - Mu), \quad (3.6)$$

si ottiene la vecchia variabile  $u$  in funzione di  $y$  come

$$u = y(1 + My) + O(M^2u^2). \quad (3.7)$$

L'equazione (3.4), in seguito al cambio di variabile in  $y$ , diventa

$$\left(\frac{d\phi}{dy}\right) = \frac{(1 + 2My)}{\sqrt{\frac{1}{b^2} - y^2}} + O(M^2u^2). \quad (3.8)$$

Questa è l'equazione delle geodetiche per fotoni in un spazio-tempo di Schwarzschild con approssimazione di *campo debole*. La sua integrazione da 0 a  $y$  fornisce l'angolo di uscita  $\phi$  dato da

$$\phi \simeq \phi_0 + \frac{2M}{b} + \arctan\left(\frac{y}{\sqrt{\frac{1}{b^2} - y^2}}\right) - 2M\sqrt{\frac{1}{b^2} - y^2}. \quad (3.9)$$

Il termine  $\phi_0$  rappresenta l'angolo della direzione entrante.

Si ricava la posizione del fotone più vicina alla lente ponendo  $\frac{dr}{d\tau} = 0$  nell'equazione (3.2) e applicando l'approssimazione di *campo debole*. Si ottiene che  $y \simeq 1/b$ .

Il massimo avvicinamento avviene quindi all'angolo

$$\phi \simeq \phi_0 + \frac{2M}{b} + \pi/2. \quad (3.10)$$

Si consideri un fotone che viaggia verso la lente partendo da  $r = -\infty$  ( $y \rightarrow 0$ ) quindi con  $\phi = \phi_0$  e che raggiunge il punto di massimo avvicinamento. Nel raggiungere la lente vi è una deflessione di  $2M/b$ . Per simmetria, se si muovesse in direzione uscente rispetto alla lente, partendo dal punto di massimo avvicinamento e andando in linea retta verso l'infinito, dovrebbe essere deviato dello stesso angolo.

L'angolo totale è  $\pi + 4M/b$ . Nel caso di traiettoria retta l'angolo iniziale vale  $\pi$ , perciò la deflessione sarà  $4M/b$ .

### 3.3 Orbite non legate per particelle massive

Si procede prendendo in considerazione quanto si è ricavato nella sezione 2.3 sulle geodetiche, in particolare l'equazione (2.43).

Il caso di particelle dotate di massa si ottiene ponendo la lagrangiana uguale a 1; segue che

$$\frac{E^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2M}{r}} - \frac{J^2}{r^2} = 1. \quad (3.11)$$

L'equazione delle geodetiche per  $\phi$  per particelle dotate di massa è più complicata da risolvere rispetto a quella del caso senza massa poiché ha un termine in più. Questo termine è dovuto al fatto che la lagrangiana non è nulla.

Per poter risolvere le equazioni del moto è utile riscriverle in termini di nuove variabili fisiche: il parametro di impatto  $b$  e la velocità della particella  $V$ . La velocità è scritta in unità geometriche, quindi il suo valore varia da 0 a 1.

Si utilizzano queste quantità perché permettono di applicare in modo semplice le approssimazioni di *campo debole*, *lente sottile* e velocità quasi luminari. Tali approssimazioni sono necessarie per risolvere l'equazione del moto per  $\phi$ .

L'equazione (3.11) contiene al suo interno il parametro  $\tau$  della curva. Si vogliono scrivere tali equazioni in funzione della distanza radiale  $r$  dal centro della lente, piuttosto che del parametro  $\tau$ . Prendendo la lagrangiana nell'equazione (3.11), e utilizzando le equazioni (2.41-2.42) si ottiene

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = (E^2 - 1) \frac{r^4}{J^2} + \frac{2M}{J^2} r^3 - r^2 + 2Mr, \quad (3.12)$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^3 \left[ \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} - \frac{J^2}{E^2} \frac{1}{r^2} - \frac{1}{E^2} \right]. \quad (3.13)$$

Queste sono equazioni differenziali per  $r = r(t)$  e  $r = r(\phi)$ , e si può provare che le equazioni (3.12-3.13) sono consistenti con quelle in Weinberg [2]

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = (1 - E_w) \frac{r^4}{J_w^2} + E_w \frac{2M}{J_w^2} r^3 - r^2 + 2Mr, \quad (3.14)$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^3 \left[ \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} - \frac{J_w^2}{r^2} - E_w \right], \quad (3.15)$$

dove i termini  $J_w$  e  $E_w$  sono due costanti del moto. Uguagliando le equazioni  $r = r(t)$  e  $r = r(\phi)$  ottenute da Weinberg con quelle ottenute in questa tesi si ottiene

$$J_w = \frac{J}{E}, \quad (3.16)$$

$$E_w = \frac{1}{E^2}. \quad (3.17)$$

La consistenza è conseguenza del riscalamento delle costanti del moto. Se si fosse trovata una dipendenza da  $r$  nell'uguaglianza delle costanti del moto le equazioni non sarebbero state consistenti.

Le equazioni (3.12-3.13) dipendono da  $E$  e  $J$ . La velocità delle particelle  $V$  e il parametro di impatto  $b$  possono rappresentare una scelta più comoda per quanto riguarda l'applicazione delle approssimazioni. Si procede quindi con il cambiare le variabili nelle equazioni delle geodetiche.

Le costanti del moto per definizione possono essere calcolate in ogni punto della traiettoria, perciò ci si posiziona molto lontano dalla lente  $r \rightarrow \infty$ , dove la metrica di Schwarzschild tende a quella minkowskiana  $\eta_{ij}$ .

Considerando una particella che si avvicina alla lente da distanza molto lontana rispetto ad essa  $r \rightarrow \infty$  dove la metrica è approssimativamente piatta, il suo moto è

rappresentato da una linea retta con velocità costante  $V$ . La soluzione per una linea retta (assenza di deflessione) è  $b \simeq r \sin(\phi - \phi_0) \simeq r(\phi - \phi_0)$ , perciò valgono le seguenti approssimazioni [2]

$$\phi \simeq \frac{b}{r}, \quad (3.18)$$

$$-V \simeq \frac{d}{dt}(r \cos(\phi - \phi_0)) \simeq \frac{dr}{dt}. \quad (3.19)$$

Il parametro di impatto  $b$  è in prima approssimazione il massimo avvicinamento della particella alla lente, mentre  $\phi_0$  è la direzione incidente.

Trovando  $\frac{d\phi}{dt}$  dalle costanti del moto nelle equazioni (2.41-2.42) si ottiene

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{J}{r^2} \frac{(1 - \frac{2M}{r})}{E}. \quad (3.20)$$

Questa relazione deve essere soddisfatta in ogni punto della traiettoria della particella poiché è stata ricavata combinando due integrali primi del moto. Se l'equazione (3.20) è valida in ogni punto, deve essere vera anche dove  $\frac{2M}{r} \simeq 0$ . Inserendo le approssimazioni mostrate nelle equazioni (3.18-3.19) nell'equazione (3.20) si trova

$$\frac{J}{E} = bV. \quad (3.21)$$

Lo stesso procedimento può essere fatto usando  $\frac{dr}{dt}$  nell'equazione (3.13), sempre per combinazione di costanti del moto che hanno lo stesso valore in ogni punto della traiettoria. Ponendo la particella ad una distanza molto grande dalla lente e utilizzando la definizione di  $V$  nell'equazione (3.19), si ottiene

$$V^2 = 1 - \frac{1}{E^2}. \quad (3.22)$$

L'approssimazione di spazio-tempo piatto all'infinito unita alla costanza di  $E$  e  $J$  fa tendere a zero il rapporto  $\frac{J^2}{E^2} \frac{1}{r^2}$ .

L'equazione (3.22) si può riscrivere in modo da avere  $E$  in funzione di  $V$  e si ottiene

$$E^2 = \frac{1}{1 - V^2}. \quad (3.23)$$

Le relazioni (3.21-3.23) rappresentano i cambi di variabile da applicare alle equazioni delle geodetiche.

Nelle prossime sezioni vengono discusse brevemente le equazioni per  $\phi$  e  $t$ , mentre viene risolta solo l'equazione per  $\phi$ .

### 3.4 Ritardo temporale

Rimpiazzando le relazioni (3.21-3.23) nell'equazione (3.13), si ottiene l'equazione di  $t$  in funzione delle nuove variabili  $V$  e  $b$ , data da

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^3 \left[-1 + V^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} - \frac{b^2 V^2}{r^2}\right]. \quad (3.24)$$

Si ricorda che si è in presenza di una lente di massa  $M$  e lo spazio-tempo intorno ad essa è descritto dalla metrica di Schwarzschild.

Si considerino particelle di massa  $m$  che partono da una sorgente statica al tempo  $t_s = 0$  con coordinate  $(r_s, \phi_s)$  e raggiungono un osservatore statico al tempo  $t_o$  con coordinate  $(r_o, \phi_o = 0)$  passando nei pressi di una lente di massa  $M \gg m$  che ne deflette il percorso. Sorgente, lente e osservatore vengono considerati in quiete.

La forma integrale della geodetica  $r = r(t)$  nell'equazione (3.13) diventa

$$t_s = \int_{r_s}^{r_o} \frac{dr}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{3/2} \sqrt{-1 + V^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} - \frac{b^2 V^2}{r^2}}}. \quad (3.25)$$

### 3.5 Angolo di deflessione per particelle massive

Rimpiazzando le equazioni (3.21-3.23) nell'equazione (3.12), si ottiene l'equazione di  $\phi$  in funzione delle nuove variabili  $V$  e  $b$ , data da

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{r^4}{b^2} + \frac{2M}{b^2} \left(\frac{1 - V^2}{V^2}\right) r^3 - r^2 + 2Mr. \quad (3.26)$$

La forma integrale della geodetica  $r = r(\phi)$  nell'equazione (3.26) diventa

$$\phi_s = \int_{r_s}^{r_o} \frac{dr}{\sqrt{\frac{r^4}{b^2} + \frac{2M}{b^2} \left(\frac{1 - V^2}{V^2}\right) r^3 - r^2 + 2Mr}}, \quad (3.27)$$

L'integrale nell'equazione (3.27) non ha soluzione analitica in termini di funzioni elementari perciò si utilizza un approccio perturbativo. In sostanza per risolvere tale integrale si sviluppa in serie di potenze di Taylor l'integrando utilizzando le approssimazioni di *campo debole* e velocità prossime a quelle della luce. Le approssimazioni fatte vengono scritte in termini del parametro di espansione  $\epsilon$  in modo da ottenere un risultato in forma compatta.

L'approssimazione di *campo debole* può essere scritta come  $M \rightarrow M\epsilon b$ , mentre quella riguardante particelle quasi luminari diventa  $V \rightarrow 1 - V\epsilon$ . L'ultima approssimazione

riguarda il sistema lente che viene trattato come una lente *sottile*, quindi valgono  $r_o \rightarrow r_{o\epsilon} \frac{b}{\epsilon}$  e  $r_s \rightarrow r_{s\epsilon} \frac{b}{\epsilon}$ . Come si è detto in precedenza quest'ultima approssimazione discende dal fatto che le distanze tra osservatore-lente e tra sorgente-lente sono molto maggiori rispetto al parametro di impatto della particella. I termini  $V_\epsilon$ ,  $M_\epsilon$ ,  $r_{o\epsilon}$  e  $r_{s\epsilon}$  sono i coefficienti del parametro di espansione  $\epsilon$  relativi all'approssimazione usata.

Ogni singolo termine dello sviluppo in serie è un integrale da risolvere da  $r_s$  a  $r_o$ . Si decide di integrare sulle orbite imperturbate dal potenziale gravitazionale della lente.

I percorsi imperturbati partono da  $r_{zero}$ , che è il punto di massimo avvicinamento della particella alla lente e terminano quando la particella raggiunge l'osservatore posto a distanze molto grandi dalla lente ( $r = \infty$ ).

La posizione di massimo avvicinamento si ottiene trovando il minimo dell'equazione (3.26), cioè risolvendo  $\frac{dr}{d\phi} = 0$ . Per risolvere questa equazione si utilizza l'espansione in serie di Taylor per  $\epsilon$  e si ottiene

$$r_{zero} = b \left( 1 - M_\epsilon \epsilon - \frac{1}{2} \epsilon^2 (M_\epsilon (3M_\epsilon + 4V_\epsilon)) - M_\epsilon \epsilon^3 (4M_\epsilon^2 + 2M_\epsilon V_\epsilon + 3V_\epsilon^2) \right) + O(V_\epsilon^4 \epsilon^4, M_\epsilon^4 \epsilon^4). \quad (3.28)$$

Le approssimazioni utilizzate sono quelle definite in precedenza. Il risultato è consistente perché all'ordine zero ci si aspetta di ottenere  $r_{zero} \simeq b$ .

L'equazione per l'angolo di deflessione (3.27), in seguito alle ipotesi fatte diventa

$$\phi_s = 2 \int_{r_{zero}}^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{\frac{r^4}{b^2} + \frac{2M}{b^2} \left( \frac{1-V^2}{V^2} \right) r^3 - r^2 + 2Mr}}. \quad (3.29)$$

La soluzione viene cercata nella forma data dalla relazione (3.1), cioè il risultato è l'angolo di deflessione del fotone più la somma dei contributi dati dalle correzioni alla velocità della particella.

Per risolvere gli integrali introduciamo una nuova variabile  $z$  data da  $z \equiv r_{zero}/r$ . Questa variabile vale 1 quando  $r = r_{zero}$ , mentre va a zero quando  $r = \infty$ . Si sviluppa in serie di potenze di Taylor l'integrando utilizzando le approssimazioni menzionate in precedenza e ogni singolo termine viene integrato in  $z$ .

Viene successivamente fatto il limite della somma per  $r_s \rightarrow \infty$  e  $r_o \rightarrow \infty$ . Il risultato ottenuto viene scritto nella forma data da (3.1) ottenendo

$$\phi_V = \phi_\gamma + \phi_\gamma V_\epsilon \epsilon + \frac{3}{2} \phi_\gamma V_\epsilon^2 \epsilon^2 + 2\phi_\gamma V_\epsilon^3 \epsilon^3 + O(V_\epsilon^4 \epsilon^4, M_\epsilon^2 \epsilon^2). \quad (3.30)$$

Nell'equazione precedente  $\phi_\gamma = \frac{4M}{b}$  è l'angolo di deflessione del fotone, mentre i termini che contengono  $V_\epsilon \epsilon$  sono le correzioni alla velocità dovute alla massa della particella considerata.

E' stato tenuto solo il primo ordine nell'espansione in massa. Tutto questo costrutto teorico ritrova il caso limite del fotone per  $V \rightarrow 1$ , come ci si aspetta.

### 3.6 Confronto con risultati di letteratura

Il risultato teorico ottenuto nell'equazione (3.30) cerca di descrivere l'angolo di deflessione per particelle dotate massa. Lo stesso problema è stato oggetto di indagine del fisico J. Glicenstein [7]. Nonostante lo scopo del suo articolo fosse quello di utilizzare il ritardo temporale per ottenere una possibile approssimazione della massa dei fotoni, Glicenstein ottenne una formula approssimata al primo ordine nelle velocità dell'angolo di deflessione.

Glicenstein considera fotoni massivi che si propagano in uno spazio-tempo con metrica

$$ds^2 = -(1 + 2U(r)) dt^2 + (1 - 2U(r)) dr^2, \quad (3.31)$$

dove  $U(r) = M/r$  e la rispettiva hamiltoniana è data da

$$H = \sqrt{\frac{g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta + m^2}{-g^{00}}}. \quad (3.32)$$

Glicenstein utilizza il sistema cartesiano  $(x, y, z)$  e pone l'asse ottico sull'asse delle  $z$ . L'asse ottico rappresenta la linea retta che congiunge l'osservatore con il centro di massa della lente e tale retta è perpendicolare rispetto al piano della lente e della sorgente. L'autore ottiene l'angolo di deflessione  $\phi$  integrando la variazione del momento data da  $\frac{1}{P} \frac{dp_x}{dz}$  sulle  $z$ . Vengono applicate le approssimazioni di *campo debole*  $M/r \ll 1$  e il limite di basse masse-alte energie  $m^2/E^2 \ll 1$ .

L'angolo di deflessione per fotoni massivi ottenuto da Glicenstein è

$$\phi = \frac{4M}{b} \left( 1 + \frac{1}{2}u^2 \right). \quad (3.33)$$

Il termine  $u^2$  è dato da  $u^2 = m^2/E^2$  e rappresenta in questa tesi  $1/\gamma^2$ . Esplicitando  $\gamma$  si ottiene la relazione tra  $u$  e  $V$ , data da

$$u^2 = 1 - V^2 \ll 1. \quad (3.34)$$

Ponendo uguali la prima correzione dell'equazione (3.30) con la prima correzione di Glicenstein, scomponendo  $1 - V^2$  in una differenza di quadrati, si trova

$$\frac{1}{2}u^2 \simeq 1 - V = V_\epsilon \epsilon. \quad (3.35)$$

I due risultati sono consistenti nel limite in cui  $V \rightarrow 1$ . La trattazione di Glicenstein è un modo alternativo per poter ottenere l'angolo di deflessione con correzioni alla velocità. La correzione ottenuta da questo autore si ferma soltanto al primo ordine.



# Capitolo 4

## Teoria delle lenti

Questo capitolo descrive la teoria delle lenti e si basa principalmente su ([14], [15], [16], [18]). Questa teoria è un importante costrutto teorico che dà una visione geometrica del lensing.

E' da sottolineare che nello sviluppo della teoria delle lenti emergono le distanze di diametro angolare, le quali sono quantità dipendenti dall'espansione dell'universo. Nella prima parte del capitolo si parte dal modello di Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker che tiene conto dell'espansione dell'universo per trattare nel dettaglio le distanze di diametro angolare [17]. Successivamente si trattano i fenomeni legati al lensing e, partendo dall'angolo di deflessione per lenti sottili, si ricava l'equazione delle lenti.

Nelle sezioni 4.5, 4.6 e 4.7 si studiano rispettivamente tre caratteristiche importanti del fenomeno di lensing: il potenziale di lensing, il ritardo temporale e l'amplificazione. Come ultimo passo si presenta il caso semplice, ma molto utile, della lente puntiforme. La lente puntiforme sarà il modello utilizzato nel capitolo 5 per studiare il lensing in contesti astrofisici.

Il contributo originale di questo capitolo è un primo passo per l'estensione del formalismo delle lenti nel caso di deflessione di particelle massive.

La trattazione che andiamo a proporre è generale, indipendente della velocità della particella deflessa. Il ruolo della velocità sarà esplicito nella sezione 4.8, quando si applicherà l'angolo di deflessione calcolato da noi nel capitolo 3 al caso della lente puntiforme.

Per motivi storici in questo capitolo saranno utilizzate unità non geometriche.

### 4.1 Distanze cosmologiche

Per derivare l'equazione delle lenti è necessario definire la distanza di diametro angolare. La distanza di diametro angolare  $D_A$  di un oggetto è una distanza definita come il rapporto della dimensione reale  $S$  e la dimensione angolare  $\theta$  dell'oggetto visto dall'osservatore

[17]

$$D_A = \frac{S}{\theta}. \quad (4.1)$$

Questa quantità per un universo piatto, euclideo e non in espansione si riconduce in prima approssimazione alla usuale distanza tra due oggetti. Nel seguito indicheremo come  $D_L$ ,  $D_S$  e  $D_{LS}$  la distanza di diametro angolare tra osservatore-lente, osservatore-sorgente e lente-sorgente, rispettivamente. In generale per un universo non euclideo e in espansione  $D_L + D_{LS} \neq D_S$  [17].

Le distanze di diametro angolare dipendendo dall'espansione dell'universo. Per propagazioni di particelle che si muovono alla velocità della luce esse possono essere espresse in termini del redshift  $z$ . L'effetto di redshift avviene quando la luce emessa da un oggetto con lunghezza d'onda  $\lambda_e$  viene osservata ad una lunghezza d'onda più alta  $\lambda_o$  da un osservatore a causa dell'espansione dell'universo. La relazione per il redshift  $z$  di una sorgente che si allontana dall'osservatore è data da

$$z \equiv \frac{\lambda_o}{\lambda_e} - 1. \quad (4.2)$$

Per avere una trattazione generale del problema di lensing bisogna tenere conto degli effetti di espansione dell'universo nel caso in cui siano presenti. E' necessario quindi utilizzare una metrica che contenga il fattore di scala  $a(t)$  dell'universo.

#### 4.1.1 Modello di Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker

Un modello che tiene conto dell'espansione dell'universo è il modello di Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW).

La metrica di questo modello è definita come [17]

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 d\Gamma^2, \quad (4.3)$$

dove

$$d\Gamma^2 = \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right). \quad (4.4)$$

In questo caso  $k$  è la misura della curvatura dell'universo e  $a(t)$  è il fattore di scala. Ci sono tre casi per la curvatura: un universo piatto con  $k = 0$ ; un universo chiuso con  $k > 0$ ; un universo aperto per  $k < 0$ .

Le equazioni di Friedmann si scrivono come

$$H^2(t) \equiv \left( \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho(t) - \frac{kc^2}{a(t)^2}, \quad (4.5)$$

$$\dot{H}(t) + H^2(t) = \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3} \left( \rho(t) + \frac{3p(t)}{c^2} \right). \quad (4.6)$$

In queste equazioni sono state introdotte alcune variabili, tra le quali  $H(t)$  che è il parametro di Hubble. Esso rappresenta il tasso di espansione dell'universo, mentre il suo valore  $H_0 \equiv H(z=0)$  è conosciuto come la costante di Hubble.

$p(t)$  e  $\rho(t)$  sono rispettivamente la pressione e la densità dell'universo al tempo  $t$  e contengono i contributi di ogni componente dell'universo, compresa quella oscura.

La costante di Hubble  $H_0$  è la costante di proporzionalità tra la velocità di allontanamento reciproco di due oggetti  $v$  e la loro distanza  $d$  nell'universo in espansione [17]. Il fatto che vi sia una proporzionalità diretta tra  $v$  e  $d$  significa che all'aumentare della distanza tra due oggetti aumenta la loro velocità di allontanamento reciproco [17]. In formule la relazione è la seguente

$$v = H_0 d. \quad (4.7)$$

Si definiscono due nuove quantità [17]. La prima è l'inverso della costante di Hubble, chiamato tempo di Hubble  $t_H = 1/H_0$ . La seconda è la distanza di Hubble  $D_H$  che si calcola come

$$D_H = \frac{c}{H_0}. \quad (4.8)$$

Nella cosmologia odierna si lavora con quantità adimensionali, chiamate parametri di densità [17]. Sono definiti come il rapporto tra la densità di energia o massa della componente considerata e la densità critica

$$\Omega_x(t) = \frac{\rho_x(t)}{\rho_c(t)}. \quad (4.9)$$

$\Omega_\Lambda$ ,  $\Omega_B$  e  $\Omega_{DM}$  sono rispettivamente i parametri di densità per energia oscura, materia barionica e materia oscura.

La densità critica è data da

$$\rho_c(t) \equiv \frac{3H(t)^2}{8\pi G}, \quad (4.10)$$

mentre parametri di densità  $\Omega_M = \Omega_B + \Omega_{DM}$  e  $\Omega_\Lambda$  sono dati da [17]

$$\Omega_M = \frac{8\pi G \rho_M}{3H_0^2}, \quad (4.11)$$

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2}. \quad (4.12)$$

I valori relativi ai parametri cosmologici utilizzati in questa tesi sono quelli determinati dallo studio della radiazione cosmica di fondo e sono basati su sette anni di raccolta dati del *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe* [23] e sono riportati nell'appendice. Dal fatto che la densità totale sia molto vicina a quella critica si fissa  $\Omega_t = \Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$  e  $k = 0$  [17].

### 4.1.2 Redshift e distanze di diametro angolare

Il redshift in cosmologia è legato al fattore di scala  $a(t)$  dalla seguente relazione [17]

$$1 + z = \frac{a(t_o)}{a(t_e)}. \quad (4.13)$$

$a(t_o)$  è il valore del fattore di scala dell'universo al tempo in cui la luce proveniente dall'oggetto è osservata, mentre  $a(t_e)$  è il valore del fattore di scala dell'universo al tempo in cui è stata emessa [17].

Il redshift è spesso riferito rispetto all'osservatore sulla Terra, ma è possibile definire il redshift  $z_{12}$  tra oggetti generici 1 e 2. Il redshift  $z_{12}$  di un oggetto posto a redshift  $z_2$  relativo ad un osservatore a redshift  $z_1$ , con  $z_1 < z_2$  è dato da

$$1 + z_{12} = \frac{1 + z_1}{1 + z_2}. \quad (4.14)$$

Si possono usare i parametri di densità definiti precedentemente e la prima equazione di Friedmann per trovare una semplice espressione per il parametro di Hubble [17] in funzione del redshift

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_k (1+z)^2 + \Omega_M (1+z)^3} \equiv H_0 E(z), \quad (4.15)$$

dove  $\Omega_M = \Omega_{DM} + \Omega_B$ ,  $\Omega_K \equiv 1 - \Omega_M - \Omega_\Lambda$  e  $z$  è il redshift.

Introduciamo ora la distanza comovente quando il mediatore della distanza è il fotone. Essa è la distanza tra due oggetti che rimane costante rispetto all'espansione dell'universo. Partendo dal parametro di Hubble  $H(z)$  che è la misura di questa espansione, si può definire la distanza comovente sulla linea di vista come

$$D_C = D_H \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}. \quad (4.16)$$

La quantità  $E(z)$  è quella definita dall'equazione (4.15).

Per un universo piatto la distanza comovente tra due oggetti allo stesso redshift, ma separati in cielo da un angolo  $\theta$ , è  $D_C \theta$  [17], di conseguenza

$$S = \frac{D_C \theta}{1+z}. \quad (4.17)$$

La distanza di diametro angolare, che è stata definita in precedenza come  $D_A \equiv \frac{S}{\theta}$ , diventa

$$D_A = \frac{D_C}{1+z}. \quad (4.18)$$

L'equazione appena trovata può essere solo usata per calcolare la distanza di diametro angolare dall'osservatore all'oggetto considerato, ma l'equazione delle lenti alla quale si è

interessati richiede anche la distanza tra la sorgente e la lente. Essa è determinata dalla seguente relazione [17]

$$D_{LS} = \frac{1}{1 + z_S} [D_S (1 + z_S) - D_L (1 + z_L)]. \quad (4.19)$$

Le relazioni per le distanze di diametro angolare si possono utilizzare per calcolare le distanze tra osservatore, lente e sorgente in un universo in espansione. Si ricorda che le distanze di diametro angolare in un universo piatto e non in espansione ritrovano le distanze usuali dello spazio euclideo.

Anche se in questa tesi stiamo considerando la deflessione di particelle massive, per il calcolo delle distanze faremo sempre riferimento alle espressioni valide per il caso della luce.

## 4.2 Fenomeni legati al lensing

Nel caso di lensing trattato,  $\vec{\beta}$  è la posizione angolare dove una sorgente sarebbe vista in assenza di deflessione gravitazionale, mentre  $\theta$  è la posizione angolare dell'immagine modificata dal lensing che si osserva in cielo. Un esempio del fenomeno di lensing appena descritto è mostrato in figura (4.1).

In accordo con quanto sviluppato nel capitolo sulla relatività generale, la deflessione è descritta da geodetiche che seguono la curvatura dello spazio-tempo. Tale curvatura è opera della distribuzione di materia nello spazio-tempo.

In presenza di lensing gravitazionale, quindi in presenza di una deformazione spazio-temporale, si generano alcuni importanti fenomeni fisici [15]. In primo luogo percorsi multipli intorno a una singola massa diventano possibili: se una sorgente emette particelle esse possono seguire geodetiche differenti intorno alla lente per raggiungere l'osservatore. La diretta conseguenza consiste nella generazione di immagini multiple di una singola sorgente.

La deflessione di raggi può essere differente in base alla distanza di questi dal centro della lente. Considerando una coppia di raggi, uno dei quali passi più vicino alla lente mentre l'altro passi più lontano rispetto alla lente, il raggio che segue la geodetica più vicina al centro della lente viene deviato maggiormente poiché l'interazione gravitazionale è più forte. Il risultato pratico è che la sorgente appare all'osservatore allungata. Ci si aspetta quindi, che in generale una lente gravitazionale deformi la forma della sorgente. Per lo stesso motivo, essa può sembrare ingrandita o rimpicciolita.

Il lensing non distrugge e non crea fotoni, quindi in assenza di assorbimento ci si aspetta che tutti quelli emessi dalla sorgente verso l'osservatore arrivino a destinazione. Dato che la dimensione dell'immagine non si conserva al contrario della quantità di fotoni, quello che succede è che la sorgente appare amplificata o deamplificata dal lensing.

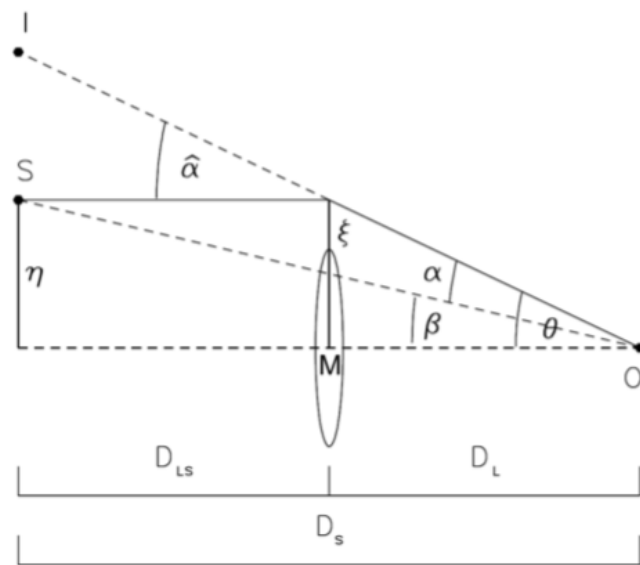


Figura 4.1: Schema geometrico del sistema di lensing considerato [20]. Le distanze di diametro angolare tra sorgente-osservatore, sorgente-lente e lente-osservatore sono rispettivamente  $D_S$ ,  $D_{LS}$  e  $D_L$ , mentre  $\alpha$  è l'angolo di deflessione.  $\eta$  e  $\xi$  sono rispettivamente le proiezioni delle posizioni angolari  $\beta$  e  $\theta$  sui piani della sorgente e della lente.

Se percorsi multipli per la luce tra sorgente e osservatore sono possibili, essi sono caratterizzati da differenti lunghezze, perciò il tempo impiegato per generare le diverse immagini è differente. Una immagine appare prima, mentre l'altra appare ritardata.

In conclusione la deformazione spazio-temporale può comportare la presenza di immagini multiple della stessa sorgente, la distorsione, amplificazione delle immagini e il ritardo temporale nel tempo di arrivo di queste immagini.

### 4.3 Angolo di deflessione per lenti sottili

Si consideri una distribuzione di  $N$  punti di massa  $M_i$  sul piano, le cui posizioni sono date da  $\vec{\xi}_i$  con  $1 \leq i \leq N$ . L'angolo di deflessione riferito ad un raggio che attraversa il piano in  $\xi_i$  è [16]

$$\vec{\phi}(\vec{\xi}) = \sum_i \vec{\phi}_i(\vec{\xi} - \vec{\xi}_i), \quad (4.20)$$

dove si esprime l'angolo di deflessione totale come la somma dei contributi delle singole masse della lente.

Finora abbiamo solo utilizzato l'approssimazione lineare che ci permette di sommare i contributi individuali delle singole masse. Questo approccio può quindi essere generalizzato al caso di particelle massive se per  $\phi$  si utilizza l'espressione ottenuta nel capitolo precedente per il caso di particelle massive.

Nel modello di lensing più generico si può descrivere la lente con una distribuzione di materia tridimensionale. Ricordando l'approssimazione di *lente sottile*, che vale per tanti sistemi di lensing cosmologici [16], si può affermare che in sostanza la deflessione agisce solo su un piccolo intervallo rispetto al cammino del raggio di luce. E' quindi giustificato l'utilizzo di una distribuzione bi-dimensionale di materia per descrivere la lente.

In questa approssimazione la distribuzione di massa della lente gravitazionale è descritta perfettamente dalla sua densità superficiale [18]

$$\Sigma(\vec{\xi}) \equiv \int \rho(\vec{\xi}, z) dz, \quad (4.21)$$

dove  $\vec{\xi}$  è il vettore bi-dimensionale sul piano della lente e  $\rho$  è la densità tridimensionale.

Finché vale questa approssimazione, l'angolo di deflessione totale è ottenuto sommando i contributi di tutte le masse  $\Sigma(\vec{\xi}) d^2\xi$ . La seguente equazione

$$\vec{\phi}(\vec{\xi}) = \frac{4G}{c^2} \int \frac{(\vec{\xi} - \vec{\xi}') \Sigma(\vec{\xi}')}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2} d^2\xi', \quad (4.22)$$

generalizza l'equazione (4.20) nel caso di fotoni.

E' utile definire altre due quantità di cui si farà uso nei seguenti paragrafi [14]. La prima è la densità superficiale critica data da

$$\Sigma_c \equiv \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_S}{D_L D_{LS}}, \quad (4.23)$$

mentre la seconda è la convergenza  $k(\xi)$

$$k(\vec{x}) \equiv \frac{\Sigma(\vec{x})}{\Sigma_c}. \quad (4.24)$$

## 4.4 Equazione delle lenti

L'asse ottico è la linea perpendicolare ai piani della lente e della sorgente che parte dall'osservatore e raggiunge il centro di massa della lente. La posizione angolare sui piani della lente e della sorgente viene calcolata rispetto a questa direzione di riferimento.

Si consideri una sorgente avente posizione angolare  $\vec{\beta}$  che giace sul piano della sorgente alla distanza  $\vec{\eta} = \vec{\beta} D_S$  dall'asse ottico. A causa della deflessione, l'osservatore riceve i raggi provenienti dalla sorgente dalla posizione angolare  $\vec{\theta}$ . L'angolo di deflessione  $\vec{\phi}$  è l'angolo che si forma sul piano della lente tra i raggi di luce provenienti dalla sorgente, con parametro di impatto  $\vec{\xi} = \vec{\theta} D_L$ , e il prolungamento degli stessi raggi che giungono all'osservatore.

Gli angoli  $\vec{\theta}$ ,  $\vec{\beta}$  e  $\vec{\phi}$  sono legati da una semplice relazione geometrica, data da [16]

$$\vec{\theta} D_S = \vec{\beta} D_S + \vec{\phi} D_{LS}. \quad (4.25)$$

Definendo l'angolo di deflessione ridotto come

$$\vec{\phi}_r(\vec{\theta}) \equiv \frac{D_{LS}}{D_S} \vec{\phi}(\vec{\theta}), \quad (4.26)$$

si ottiene

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \vec{\phi}_r(\vec{\theta}). \quad (4.27)$$

Questa equazione è detta equazione delle lenti.

E' utile considerare una forma adimensionale [21] dall'equazione (4.27). Quello che viene fatto è definire una lunghezza di scala  $\xi_0$  sul piano della lente e la corrispondente lunghezza di scala  $\eta_0 \equiv \xi_0 \frac{D_S}{D_L}$  sul piano della sorgente.

I vettori adimensionali legati a queste lunghezze di scala sono dati da

$$\vec{x} \equiv \frac{\vec{\xi}}{\xi_0}, \quad (4.28)$$

$$\vec{y} \equiv \frac{\vec{\eta}}{\eta_0}. \quad (4.29)$$

Si ottiene una nuova forma dell'equazione (4.25) che può essere scritta come

$$\vec{y} = \vec{x} - \vec{\phi}_r(\vec{x}). \quad (4.30)$$



## 4.5 Potenziale di lensing

Si consideri una distribuzione di materia alla quale si associa il suo potenziale effettivo. Quello che si fa per ottenerlo è proiettare il potenziale riscaldato di Newton tridimensionale  $\Phi$  sul piano della lente come segue [21]

$$\hat{\Psi}(\vec{\theta}) = \frac{2D_{LS}}{c^2 D_S} \int \Phi(\vec{\theta}, z) dz. \quad (4.31)$$

Si può rendere adimensionale il potenziale effettivo applicando il cambio di variabile  $\vec{x} = \frac{D_L}{\xi_0} \vec{\theta}$ , e si ottiene

$$\Psi(\vec{x}) = \frac{D_L^2}{\xi_0^2} \hat{\Psi}(\vec{\theta}). \quad (4.32)$$

Il potenziale di lensing ha due importanti proprietà [15]. La prima che si mostra riguarda la relazione tra il gradiente del potenziale effettivo adimensionale e l'angolo di deflessione riscaldato. Applicando il gradiente a  $\Psi(\vec{x})$  si ottiene

$$\vec{\nabla}_x \Psi(\vec{x}) = \frac{2D_{LS}D_L}{\xi_0 D_S} \int \vec{\nabla}_\perp \Phi(\vec{x}, z) dz = \vec{\phi}_r(\vec{x}), \quad (4.33)$$

ricordando che  $\phi = 2 \int \nabla_\perp \Phi dz$ .

La seconda riguarda il laplaciano di  $\Psi$  che è uguale a due volte la convergenza  $k(\vec{x})$ . Si verifica inserendo l'equazione di Poisson, che è definita come  $\Delta \Phi = 4\pi G\rho$ , nelle equazioni (4.21-4.24). Applicando i dovuti cambi di variabili si ottiene

$$\Sigma(\vec{\theta}) = \frac{1}{4\pi G} \int \Delta \Phi dz, \quad (4.34)$$

$$k(\vec{\theta}) = \frac{D_L D_{LS}}{c^2 D_S} \int \Delta \Phi dz. \quad (4.35)$$

Il laplaciano bidimensionale è definito come

$$\Delta_\theta = \frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta_2^2} = D_L^2 \left( \Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right), \quad (4.36)$$

quindi segue che

$$\Delta \Phi = \frac{1}{D_L^2} \Delta_\theta \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}. \quad (4.37)$$

Inserendo l'equazione (4.37) in  $k(\vec{\theta})$  si ottiene

$$k(\vec{\theta}) = \frac{D_{LS}}{c^2 D_S D_L} \left[ \Delta_\theta \int \Phi dz + D_L^2 \int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} dz \right]. \quad (4.38)$$

La lente ha condizioni al contorno  $\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$  dato che è gravitazionalmente legata, perciò dalle equazioni (4.31-4.32) si ottiene che

$$k(\vec{\theta}) = \frac{1}{2} \Delta_{\theta} \hat{\Psi} = \frac{1}{2} \frac{\xi_0^2}{D_L^2} \Delta_{\theta} \Psi. \quad (4.39)$$

Anche in questo caso si predilige usare quantità adimensionali quindi l'equazione (4.39) diventa

$$\Delta_{\theta} = D_L^2 \Delta_{\xi} = \frac{D_L^2}{\xi_0^2} \Delta_x, \quad (4.40)$$

$$k(\vec{x}) = \frac{1}{2} \Delta_x \Psi(\vec{x}). \quad (4.41)$$

Sono state dimostrate due proprietà del potenziale di lensing. La prima  $\vec{\nabla}_x \Psi(\vec{x}) = \vec{\phi}_r(\vec{x})$  lega il potenziale di lensing all'angolo di deflessione, mentre la seconda  $2k(\vec{x}) = \Delta_x \Psi(\vec{x})$  lega il potenziale di lensing alla convergenza.

## 4.6 Ritardo temporale

Le geodetiche hanno tempi di percorrenza diversi e questo ritardo temporale è composto da due contributi:

$$t = t_{ge} + t_{gr} \quad (4.42)$$

Il primo termine è una misura del tempo geometrico di cammino, quindi è legato a quanto tempo impiega il raggio di luce a percorrere il cammino deflesso in assenza di campo gravitazionale. Il secondo termine, chiamato effetto Shapiro, indica il ritardo nel tempo di cammino dovuto agli effetti del campo gravitazionale [21].

Per fare una trattazione generale si consideri una lente a redshift  $z_L$ , allora il ritardo temporale dovuto alla presenza di un campo gravitazionale lungo il suo percorso (nella posizione  $\vec{x}$  sul piano della lente) è dato da

$$t(\vec{x}) = \frac{(1 + z_L) \xi_0^2 D_S}{c D_L D_{LS}} \left( \frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{y})^2 - \Psi(\vec{x}) + \text{costante} \right). \quad (4.43)$$

Il termine *costante* nell'equazione (4.43) viene inserito per indicare che il tempo di ritardo in genere si riferisce al confronto tra due immagini. Di conseguenza si considerano le differenze temporali tra due immagini come

$$\Delta t(\theta_1, \theta_2) = t(\theta_1, \beta) - t(\theta_2, \beta). \quad (4.44)$$

Considerando il potenziale definito nella relazione (4.31), l'equazione delle lenti mostrata in (4.27) diventa

$$\vec{x} - \vec{y} - \nabla \Psi(\vec{x}) = \nabla \left[ \frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{y})^2 - \Psi(\vec{x}) \right] = 0. \quad (4.45)$$

Le equazioni (4.43-4.45) mostrano che le immagini soddisfano il principio di Fermat  $\nabla t(\vec{x}) = 0$ . Il principio di Fermat afferma che, tra tutti i cammini che un raggio di luce può seguire per andare da un punto ad un altro, esso segue quello che richiede la quantità di tempo estrema [19]. Questo vuol dire che le immagini si generano nei punti stazionari della superficie di ritardo temporale data dall'equazione (4.43).

## 4.7 Amplificazione

Come si è accennato all'inizio del capitolo, una delle più importanti caratteristiche del lensing è data dalla distorsione della forma della sorgente. La distorsione nasce dal fatto che i fasci luminosi possono essere deflessi in maniera differente.

Per fare una previsione dettagliata del fenomeno, si deve considerare l'equazione delle lenti per tutti i punti di una sorgente estesa. In particolare, per una sorgente che è molto più piccola delle dimensioni angolari, la relazione tra sorgente e posizione delle immagini può essere localmente linearizzata [21]. Matematicamente parlando, la distorsione delle immagini può essere descritta dalla matrice jacobiana  $A$ , come mostrano le seguenti relazioni:

$$A \equiv \frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}} = \left( \delta_{ij} - \frac{\partial \phi_i(\vec{x})}{\partial x_j} \right) = \left( \delta_{ij} - \frac{\partial^2 \Psi(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right). \quad (4.46)$$

Si scrive  $\Psi_{ij} = \frac{\partial^2 \Psi(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j}$  per utilizzare una forma compatta per le derivate parziali, mentre  $x_i$  indica la  $i$ -esima componente  $\vec{x}$  sul piano della lente.

L'equazione (4.46) mostra che gli elementi della matrice jacobiana  $A$  possono essere scritti come una combinazione delle derivate seconde del potenziale di lensing.

Si può ottenere la matrice anti-simmetrica senza traccia della matrice jacobiana  $A$  in questa maniera

$$\left( A - \frac{1}{2} \text{tr} A \cdot I \right)_{ij} = \delta_{ij} - \Psi_{ij} - \frac{1}{2} (2 - \Psi_{11} - \Psi_{22}) \delta_{ij}, \quad (4.47)$$

che in forma matriciale diventa

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(\Psi_{11} - \Psi_{22}) & -\Psi_{12} \\ -\Psi_{12} & \frac{1}{2}(\Psi_{11} - \Psi_{22}) \end{pmatrix}. \quad (4.48)$$

La matrice mostrata viene chiamata matrice di shear e descrive le anisotropie delle immagini generate [21].

Definendo lo pseudo-vettore  $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2)$  sul piano della lente, le sue componenti sono date da

$$\gamma_1(\vec{x}) = \frac{1}{2}(\Psi_{11} - \Psi_{22}), \quad (4.49)$$

$$\gamma_2(\vec{x}) = \Psi_{12} = \Psi_{21}. \quad (4.50)$$

Gli autovalori della matrice di shear sono

$$\gamma = \pm \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}, \quad (4.51)$$

perciò deve esistere una rotazione di coordinate di angolo  $\alpha$  tale che

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & -\gamma_1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}. \quad (4.52)$$

L'altra parte della matrice jacobiana  $A$  ha la seguente forma

$$\frac{1}{2} \text{tr} A = \left[ 1 - \frac{1}{2} (\Psi_{11} + \Psi_{22}) \right] \delta_{ij}, \quad (4.53)$$

$$= \left( 1 - \frac{1}{2} \Delta \Psi \right) \delta_{ij} = (1 - k) \delta_{ij}. \quad (4.54)$$

Unendo le due parti in cui si è scomposta la matrice jacobiana  $A$  si ottiene

$$A = \begin{pmatrix} 1 - k - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - k + \gamma_1 \end{pmatrix} = (1 - k) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \gamma \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}. \quad (4.55)$$

L'ultima equazione chiarisce il significato di convergenza e shear. La distorsione indotta dalla convergenza è isotropica, quindi le immagini sono riscalate di un fattore costante in tutte le direzioni. D'altra parte lo shear distorce la forma della sorgente lungo una direzione. Per questa ragione una sorgente circolare le cui dimensioni sono piccole rispetto alla scala della lente assume una forma ellittica quando lo shear è non nullo [21].

Gli assi di tale ellisse sono

$$a = \frac{r}{1 - k - \gamma}, \quad (4.56)$$

$$b = \frac{r}{1 - k + \gamma}, \quad (4.57)$$

dove  $r$  è il raggio intrinseco della sorgente circolare.

Una conseguenza importante della distorsione del lensing è l'amplificazione. Utilizzando l'equazione delle lenti, l'elemento di angolo solido  $\delta\beta^2$  (elemento di superficie  $\delta y^2$ ) è trasformato in un angolo solido  $\delta\theta^2$  (elemento di superficie  $\delta x^2$ ).

Il processo di deflessione gravitazionale assicura la conservazione del numero di fotoni emessi dalla sorgente poiché la lente trasparente non assorbe i fotoni incidenti e non ne emette di nuovi. Questo significa che il cambiamento nell'angolo solido sotto il quale la sorgente è osservata causa una variazione del flusso ricevuto dall'osservatore [21].

Dall'equazione (4.46), l'amplificazione è quantificata del determinante dell'inversa della matrice jacobiana  $A$ . La matrice  $M = A^{-1}$  viene chiamata tensore di amplificazione.

Si definisce l'amplificazione  $\mu$  in questa maniera

$$\mu \equiv \det M = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{(1-k)^2 - \gamma^2}. \quad (4.58)$$

L'inverso degli autovalori della matrice jacobiana  $A$  misurano l'amplificazione nella direzione tangente e radiale. Tali autovalori sono dati da

$$u_t = \frac{1}{\lambda_t} = \frac{1}{1-k-\gamma}, \quad (4.59)$$

$$u_r = \frac{1}{\lambda_r} = \frac{1}{1-k+\gamma}. \quad (4.60)$$

L'amplificazione tende all'infinito quando  $\lambda_t = 0$  e quando  $\lambda_r = 0$ .

Queste due condizioni definiscono due curve nel piano delle lenti, chiamate curve critiche. Un'immagine che si forma presso la curva critica tangenziale è fortemente distorta tangenzialmente rispetto al centro della lente; l'immagine che si forma vicino alla linea critica radiale è allungata nella direzione perpendicolare a quest'ultima [21].

## 4.8 Proprietà della lente puntiforme

La lente puntiforme è un'ottima approssimazione per molti oggetti astrofisici compatti [16]. L'angolo di deflessione per la lente puntiforme che è stato da noi calcolato nel capitolo 3 diventa

$$\vec{\phi} = -\frac{4GM_\nu}{c^2 b} \vec{e}_r, \quad (4.61)$$

dove  $\vec{e}_r$  è il vettore unità nella direzione radiale e  $M_\nu \equiv M (1 + V_\epsilon \epsilon + \frac{3}{2} V_\epsilon^2 \epsilon^2 + 2V_\epsilon^3 \epsilon^3)$  è il fattore che contiene le correzioni alla velocità della particella. Nel caso di deflessione di fotoni  $M_\nu$  è la massa della lente.

Questo è un caso puramente simmetrico senza alcuna direzione preferenziale, quindi si può ridurre il problema ad una dimensione. Il parametro di impatto viene scritto in funzione dell'angolo di deflessione  $\theta$  osservato in cielo, secondo la relazione  $b = D_L \theta$ . L'angolo di deflessione diventa

$$\phi = \frac{4GM_\nu}{c^2 D_L \theta}. \quad (4.62)$$

Inserendo l'angolo di deflessione per il caso di lente puntiforme nell'equazione delle lenti mostrata in (4.27), tenendo conto delle distanze di diametro angolare, si ottiene l'equazione delle lenti per il caso di lente puntiforme

$$\beta = \theta - \frac{4GM_\nu D_{LS}}{c^2 D_L \theta D_S}. \quad (4.63)$$

Questa relazione può essere trasformata in forma adimensionale introducendo il fattore di scala definito come

$$\theta_{E\nu} \equiv \sqrt{\frac{4GM_\nu}{c^2 D_L} \frac{D_{LS}}{D_S}} \simeq \theta_E \left( 1 + \frac{V_\epsilon \epsilon}{2} \right), \quad (4.64)$$

dove  $\theta_E$  è il raggio di Einstein nel caso di deflessione di fotoni che ha la seguente forma

$$\theta_E \equiv \sqrt{\frac{4GM}{c^2 D_L} \frac{D_{LS}}{D_S}}. \quad (4.65)$$

Per scrivere il raggio di Einstein modificato  $\theta_{E\nu}$  in funzione di  $\theta_E$  è stata utilizzata solo la prima correzione nelle velocità della particella.

L'equazione delle lenti mostrata in (4.63), in seguito all'introduzione della lunghezza di scala diventa

$$\beta = \theta - \frac{\theta_{E\nu}^2}{\theta}. \quad (4.66)$$

Il raggio di Einstein è una caratteristica del sistema di lensing considerato poiché dipende dalle distanze reciproche tra osservatore, lente e sorgente e dalla massa della lente  $M$ . Noi abbiamo generalizzato la sua espressione in modo che tenga conto anche della velocità delle particelle deflesse. Nel caso in cui la sorgente giaccia sull'asse ottico ( $\beta = 0$ ) il raggio di Einstein rappresenta la posizione delle immagini generate.

Fissando  $y = \frac{\beta}{\theta_{E\nu}}$  and  $x = \frac{\theta}{\theta_{E\nu}}$  si ottiene l'equazione delle lenti in forma adimensionale come si era fatto nel caso generale

$$y = x - \frac{1}{x}. \quad (4.67)$$

A meno della ridefinizione del raggio di Einstein, l'equazione della lente ha la stessa espressione formale del caso dei fotoni. La trattazione del lensing seguirà quindi il caso classico.

L'equazione delle lenti ammette due soluzioni, perciò ogni lente ha due immagini per ogni sorgente, indipendentemente dal valore di  $y$ .

Le soluzioni dell'equazione delle lenti in forma adimensionale sono

$$x_\pm = \frac{1}{2} \left[ y \pm \sqrt{y^2 + 4} \right]. \quad (4.68)$$

L'amplificazione segue dalla matrice jacobiana  $A$  come discusso in precedenza. Dato che il caso puntiforme è un esempio di simmetria assiale si ha che

$$\det A = \frac{y}{x} \frac{\partial y}{\partial x} = \left( 1 - \frac{1}{x^2} \right) \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right) = 1 - \left( \frac{1}{x} \right)^4, \quad (4.69)$$

e ricordando la definizione di amplificazione, che è l'inversa del determinante, si ottiene

$$\mu = \left[ 1 - \left( \frac{1}{x} \right)^4 \right]^{-1}. \quad (4.70)$$

Le amplificazioni delle singole immagini hanno la seguente forma

$$\mu_{\pm} = \left[ 1 - \left( \frac{1}{x_{\pm}} \right)^4 \right]^{-1} = \frac{x_{\pm}^4}{x_{\pm}^4 - 1} = \frac{y^2 + 2}{2y\sqrt{y^2 + 4}} \pm \frac{1}{2}. \quad (4.71)$$

Si osserva che valgono i limiti  $\lim_{y \rightarrow \infty} \mu_- = 0$  e  $\lim_{y \rightarrow \infty} \mu_+ = 1$ . Dato che la lente ha sempre due soluzioni, nel caso in cui vi sia una ampia separazione angolare tra sorgente e lente, un'immagine svanisce a causa della completa de-amplificazione, mentre l'altra diventa praticamente indistinguibile dalla sorgente imperturbata [16]. La seconda immagine diventa indistinguibile dalla sorgente poiché ha lo stesso flusso e la stessa posizione della sorgente.

L'amplificazione totale è data dalla somma dei moduli delle singole amplificazioni e vale

$$\mu_s = |\mu_+| + |\mu_-| = \frac{y^2 + 2}{y\sqrt{y^2 + 4}}, \quad (4.72)$$

mentre il modulo del rapporto tra le singole amplificazioni delle immagini vale

$$\mu_d = \left| \frac{\mu_-}{\mu_+} \right| = \left( \frac{y - \sqrt{y^2 + 4}}{y + \sqrt{y^2 + 4}} \right)^2 = \left( \frac{x_-}{x_+} \right). \quad (4.73)$$

# Capitolo 5

## Lensing per sistemi astrofisici

In questo capitolo si applicano i concetti della teoria delle lenti discussi nel capitolo 4 e gli angoli di deflessione, sia per particelle dotate di massa che per quelle a massa nulla, calcolati nel capitolo 3.

Il capitolo inizia con una presentazione delle particelle dotate di massa utilizzate, che in questo capitolo saranno i neutrini. Si tratteranno i problemi del limite superiore della loro massa e delle possibili sorgenti astrofisiche di neutrini facendo uso degli studi di Padovani e colleghi [22] e degli studi di Cuesta, Niro e Verde [10].

Nelle sezioni 5.2 e 5.3 vengono calcolati rispettivamente l'angolo di deflessione prodotto dal Sole per fotoni e l'angolo di deflessione prodotto da stelle per neutrini. Per quanto riguarda l'angolo di deflessione dei neutrini è stata scelta l'energia del fascio dell'ordine degli  $eV$  per massimizzare gli effetti correttivi al lensing di fotoni. Nonostante questo gli attuali rivelatori di neutrini non sono in grado di osservare neutrini con energie dell'ordine degli  $eV$ .

Nell'ultima sezione viene proposto un esperimento teorico nel quale si calcolano le correzioni al lensing di fotoni per un sistema di lensing che ha come lente un ammasso di galassie e come sorgente di neutrini un blazar. Il sistema di lensing considerato ha un ammasso di galassie posto a redshift  $z_L = 0.4$ , alla distanza di diametro angolare  $D_L \sim 1110 \text{ Mpc}$  dall'osservatore posto sulla Terra. La lente devia i neutrini che possiedono energia  $\sim eV$  provenienti da un blazar con redshift  $z_S = 2$ , a distanza di diametro angolare  $D_S \sim 1760 \text{ Mpc}$  dall'osservatore. In questo sistema si considerano osservatore, ammasso di galassie e blazar posti sull'asse ottico. Le scelte dell'energia del fascio di neutrini, dell'ammasso di galassie come lente e delle distanze reciproche tra osservatore, lente e sorgente sono tali da massimizzare le correzioni all'angolo di deflessione dei fotoni per questo sistema di lensing. Purtroppo gli attuali rivelatori di neutrini non sono in grado di osservare questi effetti di lensing.



## 5.1 I neutrini

Per trattare il caso di particelle massive si prende in considerazione il neutrino. Il neutrino è una particella elementare che segue la statistica fermionica (spin  $1/2$ ) e ammette solo interazione debole e gravitazionale [11]. Essa è una particella subatomica di massa prossima a zero e carica elettrica nulla [11].

La massa del neutrino non è conosciuta con certezza. Essa è vincolata da un limite superiore ottenuto da osservazioni cosmologiche.

Per la massa del neutrino facciamo riferimento a Cuesta, Niro e Verde [10] che, analizzando lo spettro di potenza delle galassie luminose rosse (LRG) osservate nell'ambito della *WiggleZ Dark Energy Survey* e della *Sloan Digital Sky Survey* (SDSS), *Data Release 7*, hanno ottenuto un limite superiore alla massa del neutrino di  $0.13 \text{ eV}$  al 95% di confidenza.

Per scegliere la sorgente di neutrini, ci si ricollega agli studi fatti da Padovani e collaboratori [22]. Nel loro articolo sono elencate varie possibili sorgenti di neutrini con il rispettivo redshift. In particolare gli autori hanno studiato vari blazar utilizzando le osservazioni dell'IceCube Neutrino Observatory. Questi ricercatori hanno esplorato la correlazione tra i raggi gamma emessi dai blazar con gli eventi dell'IceCube imputati ai neutrini. Queste correlazioni portano a credere che i blazar indagati possano effettivamente essere sorgenti di neutrini [22].

## 5.2 Angolo di deflessione da parte del Sole

Dopo la formulazione della relatività generale, Einstein nel 1916, propose tre nuovi test per verificarla. Furono chiamati i *tre test classici sulla relatività generale* e includevano la precessione del perielio di Mercurio, la deflessione della luce da parte del Sole e il redshift gravitazionale della luce [8].

La prima osservazione della deflessione della luce fu eseguita da Eddington e dai suoi collaboratori durante l'eclissi solare totale del maggio del 29 maggio 1919 quando le stelle vicine al Sole nella costellazione Taurus potevano essere osservate. Le osservazioni furono eseguite nella città di Sobral in Brasile e a Sao Tomè e Principe un'isola al largo della costa occidentale dell'Africa [9]. Il risultato nonostante i significativi errori sperimentali e le numerose controversie fu considerato spettacolare e rese la teoria generale della relatività generale famosa. In questo esperimento Eddington misurò una deflessione di  $1.7''$  per un raggio di luce radente la superficie del Sole [9], in pieno accordo con la predizione teorica.

Si consideri un raggio di fotoni che lambisce la superficie del Sole con parametro di impatto  $b$  e raggiunge un osservatore sulla Terra.

Per lo studio della deflessione, si possono utilizzare i risultati per la propagazione della luce nella metrica di Schwarzschild. Fissiamo il parametro di impatto  $b$  al raggio del Sole  $R_\odot$ .

Per svolgere i conti è sufficiente utilizzare la relazione per l'angolo di deflessione dei fotoni data da

$$\phi \simeq \frac{4GM_\odot}{c^2 R_\odot}, \quad (5.1)$$

dove  $M_\odot$  è la massa del Sole.

Utilizzando le misure relative al Sole elencate nell'appendice si ottiene per l'angolo di deflessione del fotone il valore di  $\sim 1.75''$ .

### 5.3 Angolo di deflessione prodotto da una stella su un fascio di neutrini

Dalle ultime ricerche il limite superiore della sua massa  $m_\nu$  è dato da  $0.13 \text{ eV}$ . Per ogni valore della massa si può calcolare l'angolo di deflessione, come correzione al valore ottenuto per il fotone.

Come lente, consideriamo una stella di proprietà simili al Sole. Il fascio di neutrini lambisce la superficie della stella e raggiunge l'osservatore. Il fascio di neutrini raggiunge l'osservatore con energia  $E_\nu$ . La stella viene approssimata ad una lente puntiforme di massa  $M$  e raggio  $R$  prossimi a quelli del Sole. Si approssima il parametro di impatto  $b$  al raggio  $R$  della stella, quindi  $b \simeq R$ .

Per svolgere i conti è sufficiente utilizzare la relazione per l'angolo di deflessione dei neutrini data da

$$\phi \simeq \frac{4GM_\nu}{c^2 R}, \quad (5.2)$$

dove il termine  $M_\nu \simeq M \left( 1 + \left( 1 - \frac{V_\nu}{c} \right) + \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{V_\nu}{c} \right)^2 + 2 \left( 1 - \frac{V_\nu}{c} \right)^3 \right)$  contiene le correzioni alla velocità per i neutrini.

Conoscendo l'energia del fascio  $E_\nu$  e la massa dei neutrini  $m_\nu$  è possibile ricavare la velocità  $V_\nu$  delle particelle. Dalla relazione massa-energia discussa nel capitolo 1 segue che

$$\frac{E_\nu}{m_\nu c^2} = \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V_\nu^2}{c^2}}}, \quad (5.3)$$

Isolando la velocità nell'equazione (5.3) si ottiene la relazione che descrive la velocità dei neutrini in funzione della loro massa:

$$\frac{V_\nu}{c} = \sqrt{1 - \left( \frac{m_\nu c^2}{E_\nu} \right)^2}. \quad (5.4)$$

$m_\nu$ [eV]	$1 - V_\nu$	$\delta\phi_{V1}$ [Arcsec]	$\delta\phi_{V2}$ [Arcsec]	$\delta\phi_{V3}$ [Arcsec]	$\phi_V$ [Arcsec]
0.13	$8.5 \cdot 10^{-5}$	$1.5 \cdot 10^{-4}$	$1.9 \cdot 10^{-8}$	$2.1 \cdot 10^{-12}$	1.749399
0.10	$5.0 \cdot 10^{-5}$	$8.8 \cdot 10^{-5}$	$6.6 \cdot 10^{-9}$	$4.4 \cdot 10^{-13}$	1.749339
0.08	$3.2 \cdot 10^{-5}$	$5.6 \cdot 10^{-5}$	$2.7 \cdot 10^{-9}$	$1.1 \cdot 10^{-13}$	1.749307
0.06	$1.8 \cdot 10^{-5}$	$3.1 \cdot 10^{-5}$	$8.5 \cdot 10^{-10}$	$2.0 \cdot 10^{-14}$	1.749283
0.04	$8.0 \cdot 10^{-6}$	$1.4 \cdot 10^{-5}$	$1.7 \cdot 10^{-10}$	$1.8 \cdot 10^{-15}$	1.749265
0.02	$2.0 \cdot 10^{-6}$	$3.5 \cdot 10^{-6}$	$1.0 \cdot 10^{-11}$	$2.8 \cdot 10^{-17}$	1.749255
0.01	$5.0 \cdot 10^{-7}$	$8.7 \cdot 10^{-7}$	$6.6 \cdot 10^{-13}$	$4.4 \cdot 10^{-19}$	1.749252
0.00	0	0	0	0	1.749251

Tabella 5.1: Lensing prodotto da stelle su fasci di neutrini per diversi valori delle loro masse. Le velocità sono in unità di  $c$ , il parametro di impatto è  $b \simeq R_\odot$ , la massa della stella è  $M \simeq M_\odot$  e l'energia del fascio è  $E_\nu = 10 \text{ eV}$ .

Per ogni valore della massa  $m_\nu$ , fissata l'energia  $E_\nu$  del fascio si ha una velocità dei neutrini  $V_\nu$  differente. Si andranno a considerare masse del neutrino in un intervallo dai  $0.01 \text{ eV}$  ai  $0.13 \text{ eV}$ , quindi l'energia del fascio è stata considerata al valore di  $10 \text{ eV}$  per rendere le correzioni all'angolo di deflessione più rilevanti. Come verrà mostrato nella figura (5.2), per energie del fascio di valore intorno ai  $10 \text{ eV}$  la velocità dei neutrini di massa  $0.13 \text{ eV}$  differisce dalla velocità della luce di un fattore dell'ordine di  $10^{-4}$ . Energie del fascio molto più grandi di  $10 \text{ eV}$  portano a correzioni dell'angolo di deflessione del fotone irrilevanti.

Si riportano i risultati delle correzioni all'angolo di deflessione dei fotoni nella tabella (5.1) e nella figura (5.1) per alcuni valori delle masse dei neutrini.

Come mostrano i dati, le correzioni superiori al primo ordine sono quasi tutte irrilevanti rispetto al valore ottenuto per il fotone. Per i casi di neutrini con masse intorno ai  $0.01 - 0.02 \text{ eV}$  le correzioni al primo ordine calano di due ordini di grandezza rispetto a quelle riferite a neutrini con massa  $0.1 \text{ eV}$ .

Come aveva già mostrato la tabella (5.1), per ogni valore della massa del neutrino la somma delle correzioni superiori al primo ordine è minore di quasi 4 ordini di grandezza rispetto al valore della prima correzione.

I risultati ottenuti dipendono dall'energia del fascio  $E_\nu$ . Nelle figure (5.2-5.3) viene mostrato l'andamento delle correzioni alla velocità dei fotoni  $1 - V_\nu$  e l'andamento della prima correzione all'angolo di deflessione dei fotoni  $\delta\phi_{V1}$  in funzione dell'energia del fascio  $E_\nu$ .

La velocità dei neutrini all'aumentare della loro energia tende alla velocità della luce. Quando  $E_\nu = 10 \text{ eV}$  la velocità dei neutrini con massa  $m_\nu = 0.13$  è  $0.999915$ , quindi la variazione dalla velocità dei fotoni è dell'ordine di  $10^{-4}$ . Si ricorda che questi risultati sono stati ottenuti per neutrini con massa  $m_\nu = 0.13 \text{ eV}$ , quindi per masse più piccole le correzioni alla velocità sono ancora più piccole.

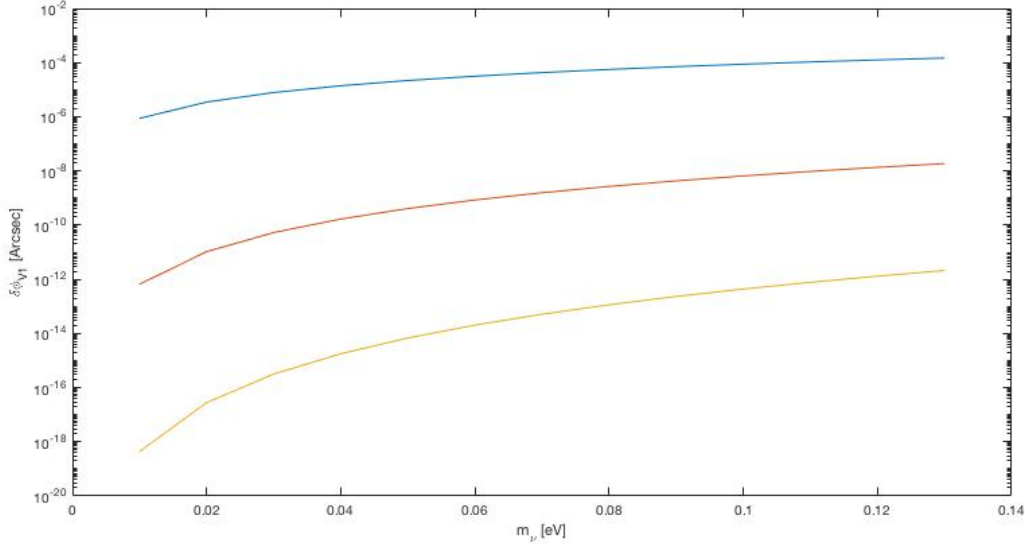


Figura 5.1: Andamento delle correzioni all'angolo di deflessione del fotone prodotto da stelle in funzione della massa dei neutrini con  $E_\nu = 10 \text{ eV}$ . La linea blu indica la prima correzione, la linea rossa indica la seconda correzione, mentre la linea gialla indica la terza correzione.

Per quanto riguarda la prima correzione all'angolo di deflessione dei fotoni  $\delta\phi_{V1}$ , essa scende di 3 ordini di grandezza per energie del fascio che vanno da  $2 \text{ eV}$  a  $50 \text{ eV}$ . Come nel caso della velocità, tale andamento è ancora più rilevante per masse dei neutrini più piccole di  $m_\nu = 0.13 \text{ eV}$ .

La correzione all'angolo di deflessione dei fotoni per neutrini di massa  $m_\nu = 0.13 \text{ eV}$  ed energia del fascio di  $10 \text{ eV}$  vale circa  $10^{-4}$  arcosecondi.

## 5.4 Angolo di deflessione dovuto ad ammassi di galassie

In questa sezione si vuole studiare il sistema di lensing dato da una sorgente, una lente e un osservatore le cui distanze sono tali da dover considerare l'espansione dell'universo. Osservatore, lente e sorgente giacciono fissi sull'asse ottico ( $\beta = 0$ ). L'intervallo dei valori di  $z_L$  è limitato inferiormente dall'osservatore e superiormente dalla sorgente posta a redshift  $z_S$ .

Si consideri come sorgente un blazar generico posto a redshift  $z_S = 2$ . La lente è un ammasso di galassie posto a redshift  $z_L = 0.4$  la cui massa totale è data da  $M \simeq 10^{14} M_\odot$ .

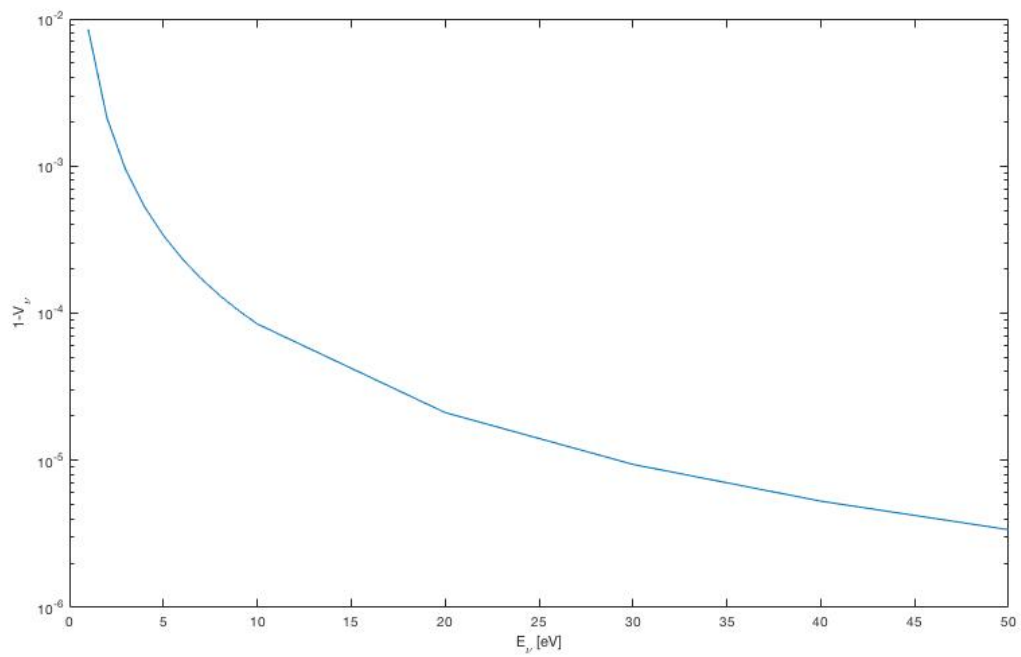


Figura 5.2: Andamento delle correzioni alla velocità dei fotoni  $1 - V_\nu$  in funzione dell'energia  $E_\nu$  dei neutrini. La velocità è in unità di  $c$  e la massa del neutrino  $m_\nu = 0.13$  eV.

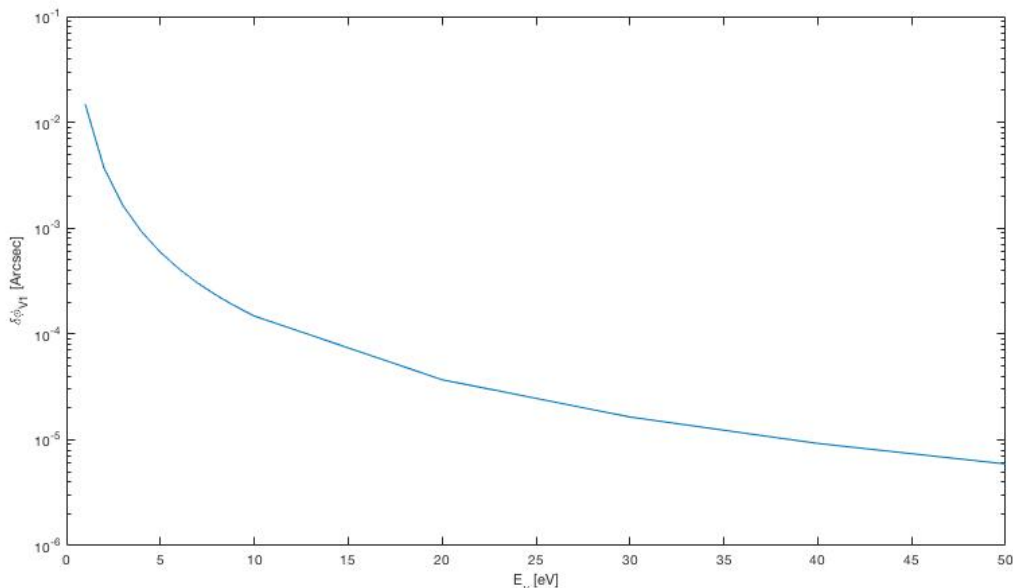


Figura 5.3: Andamento della prima correzione  $\delta\phi_{V1}$  in funzione dell'energia del fascio  $E_\nu$ . La massa del neutrino  $m_\nu = 0.13 \text{ eV}$ .

La sorgente emette un fascio di neutrini con energia  $E_\nu$  con valori compresi da  $2 \text{ eV}$  a  $10 \text{ eV}$  e la massa di tali neutrini viene fatta variare nell'intervallo da  $0.01 \text{ eV}$  a  $0.13 \text{ eV}$ .

Le distanze di diametro angolare calcolate sono riferite ai fotoni. Per calcolare le distanze di diametro angolare si utilizzano risultati del *WMAP*, in particolare  $\Omega_M = 0.272$ ,  $\Omega_\Lambda = 0.728$  e  $H_0 = 70.4 \text{ km/s/Mpc}$ . Le correzioni legate alla velocità sub-luminare in questa sezione sono riferite solo all'angolo di deflessione  $\phi$ , mentre per le distanze cosmologiche si considerano i risultati per geodetiche nulle.

Per procedere con lo studio dell'angolo di deflessione per ammassi di galassie si prende in considerazione l'equazione delle lenti calcolata nel capitolo 4 data da

$$\beta = \theta - \frac{4GM_\nu D_{LS}}{c^2 D_L \theta D_S}, \quad (5.5)$$

dove  $M_\nu$  contiene la prima correzione nelle velocità  $M_\nu \simeq M \left(2 - \frac{V_\nu}{c}\right)$ .

Per risolvere l'equazione delle lenti nel capitolo 4 è stato utilizzato il fattore di scala sul piano della lente dato dal raggio di Einstein  $\theta_{E\nu}$ . Per l'equazione delle lenti contenente le correzioni dovute alla presenza di neutrini si scrive il raggio di Einstein nella seguente forma

$$\theta_{E\nu} \equiv \sqrt{\frac{4GM_\nu D_{LS}}{c^2 D_L D_S}} \simeq \theta_E \left(1 + \frac{1 - \frac{V_\nu}{c}}{2}\right), \quad (5.6)$$

dove  $\theta_E$  è il raggio di Einstein per la deflessione di fotoni.

L'andamento di  $\theta_{E\nu}$  in funzione di  $m_\nu$  è mostrato in (5.4). Il raggio di Einstein è una

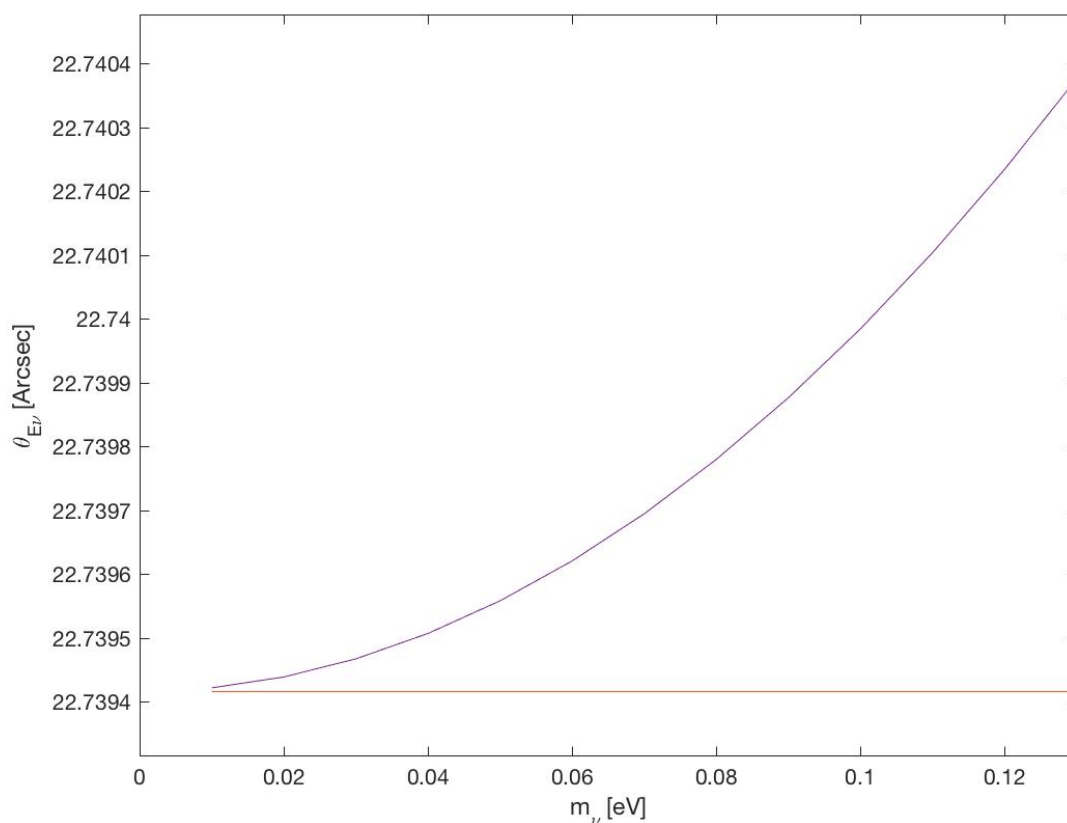


Figura 5.4: Andamento di  $\theta_{E\nu}$  in funzione della massa dei neutrini  $m_\nu$  con  $E_\nu = 10$  eV rappresentato dalla curva magenta. La linea costante rossa è il valore  $\theta_E$  riferito ai fotoni.

caratteristica tipica del sistema di lensing considerato e rappresenta la posizione delle immagini nel caso in cui osservatore, lente e sorgente giacciono sull'asse ottico.

La figura (5.4) mostra il discostamento tra le immagini prodotte dal lensing di fotoni  $\theta_E$  e quelle prodotte dal lensing di neutrini massivi  $\theta_{E\nu}$ . Si ricorda che in questa figura l'energia del fascio è stata fissata a 10 eV. Il valore della posizione angolare delle immagini riferite al lensing dei fotoni è data da  $\sim 23''$ .

Si mostra in figura (5.5) l'andamento di  $\theta_{E\nu}$  in funzione di  $m_\nu$  per vari valori dell'energia del fascio di neutrini. I valori di energia considerati sono  $E_\nu=[2, 4, 6, 8, 10]$  eV.

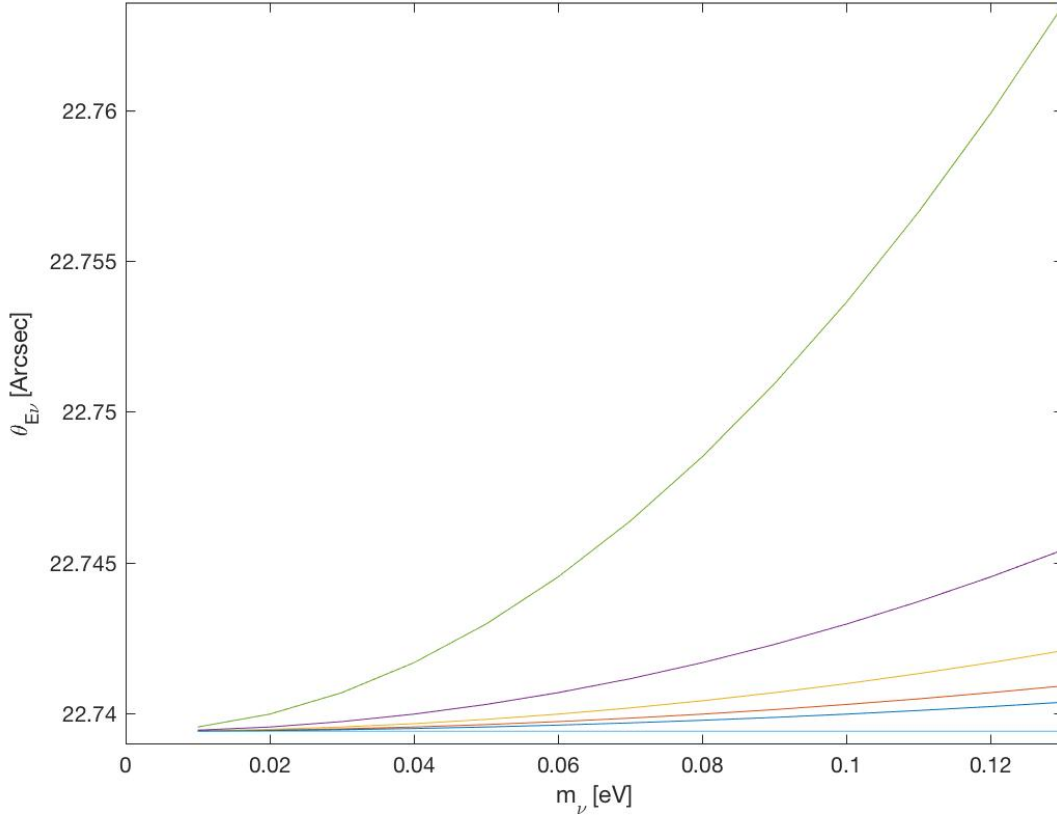


Figura 5.5: Andamento di  $\theta_{E\nu}$  in funzione della massa dei neutrini  $m_\nu$  per vari valori dell'energia dati da  $E_\nu=[2, 4, 6, 8, 10]$  eV. La linea costante azzurra è il valore  $\theta_E$  riferito ai fotoni. La linea più in alto corrisponde all'energia di 2 eV.

$m_\nu$ [eV]	$\delta\theta_{E\nu}(10)$	$\delta\theta_{E\nu}(8)$	$\delta\theta_{E\nu}(6)$	$\delta\theta_{E\nu}(4)$	$\delta\theta_{E\nu}(2)$
0.13	$9.6 \cdot 10^{-4}$	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$2.7 \cdot 10^{-3}$	$6.0 \cdot 10^{-3}$	$2.4 \cdot 10^{-2}$
0.10	$5.7 \cdot 10^{-4}$	$8.9 \cdot 10^{-4}$	$1.6 \cdot 10^{-3}$	$3.6 \cdot 10^{-3}$	$1.4 \cdot 10^{-2}$
0.08	$3.6 \cdot 10^{-4}$	$5.7 \cdot 10^{-4}$	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$2.3 \cdot 10^{-3}$	$9.1 \cdot 10^{-3}$
0.06	$2.0 \cdot 10^{-4}$	$3.2 \cdot 10^{-4}$	$5.7 \cdot 10^{-4}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$5.6 \cdot 10^{-3}$
0.04	$9.1 \cdot 10^{-5}$	$1.4 \cdot 10^{-4}$	$2.5 \cdot 10^{-4}$	$5.7 \cdot 10^{-3}$	$2.3 \cdot 10^{-3}$
0.02	$2.3 \cdot 10^{-6}$	$3.6 \cdot 10^{-6}$	$6.3 \cdot 10^{-5}$	$1.4 \cdot 10^{-3}$	$5.7 \cdot 10^{-4}$
0.01	$5.7 \cdot 10^{-6}$	$8.9 \cdot 10^{-6}$	$1.6 \cdot 10^{-5}$	$3.6 \cdot 10^{-5}$	$1.4 \cdot 10^{-4}$

Tabella 5.2: Correzioni alle posizioni angolari delle immagini dei fotoni  $\delta\theta_{E\nu}$  per vari valori delle masse  $m_\nu$  e delle energie del fascio  $E_\nu$ . I risultati sono in arcosecondi e il termine tra parentesi nel raggio di Einstein si riferisce all'energia del fascio in eV.



La tabella (5.2) mostra i valori delle correzioni alle posizioni angolari delle immagini riferite al lensing di fotoni  $\delta\theta_{E\nu}$  per diversi valori delle masse dei neutrini  $m_\nu$  e delle energie del fascio  $E_\nu$ . Per masse dei neutrini di  $0.01 \text{ eV}$  e  $0.02 \text{ eV}$  e per valori dell'energia del fascio superiori a  $6 \text{ eV}$  il contributo delle correzioni è dell'ordine di  $10^{-6}$  arcosecondi. A parità di massa dei neutrini, più è bassa l'energia del fascio e più sono evidenti i discostamenti tra lensing di neutrini massivi e fotoni.

Nel caso in cui la sorgente non giaccia sull'asse ottico ( $\beta \neq 0$ ), la posizione delle immagini  $\theta_\pm$  non sarà uguale al raggio di Einstein ( $\theta_\pm \neq \pm\theta_{E\nu}$ ). E' interessante mostrare l'andamento delle correzioni alla posizione angolare dell'immagine del fotone  $\delta\theta_+$  in funzione di  $\beta$ . Si svolge questo calcolo facendo variare  $\beta$  tra 0 e  $\theta_{E\nu}$  per qualche massa del neutrino  $m_\nu$ . Nel caso menzionato è stato considerato un fascio di energia  $8 \text{ eV}$ .

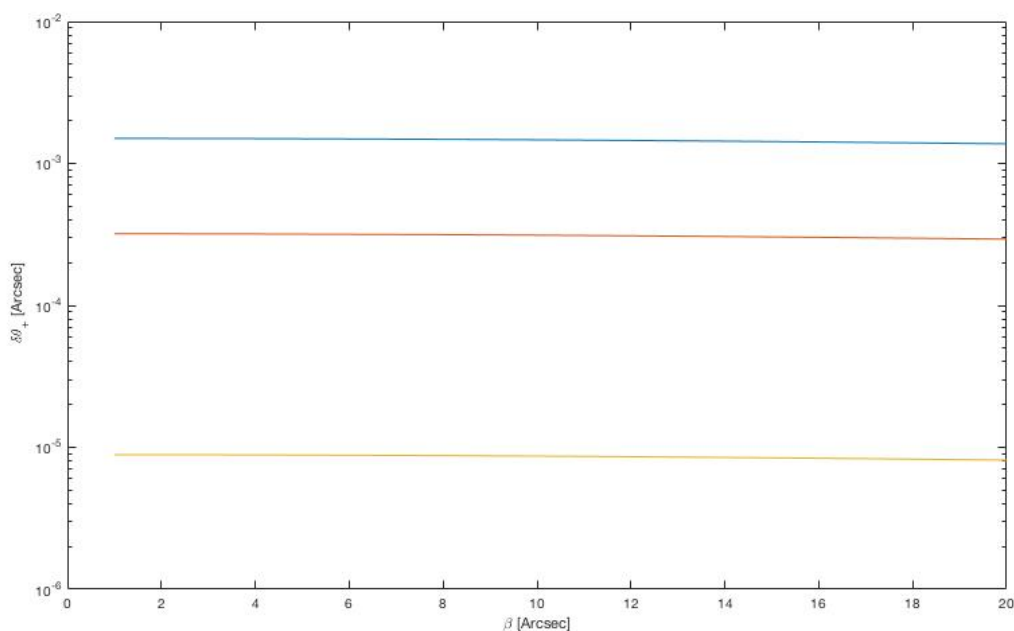


Figura 5.6: Andamento delle correzioni alla posizione delle immagini dei fotoni  $\delta\theta_+$  in funzione di  $\beta$ . L'energia del fascio di neutrini è  $8 \text{ eV}$ . La linea blu è riferita alla massa del neutrino di  $0.13 \text{ eV}$ , la linea rossa alla massa di  $0.06 \text{ eV}$  e la linea gialla alla massa di  $0.01 \text{ eV}$ .

Dalla figura (5.6) si mostra che le correzioni alla posizione delle immagini dei fotoni sono dell'ordine di  $10^{-5}$  arcosecondi per neutrini con massa di  $0.01 \text{ eV}$ . Le correzioni crescono rispettivamente a  $10^{-4}$  arcosecondi e a  $10^{-3}$  arcosecondi per valori delle masse dei neutrini di  $0.06 \text{ eV}$  e di  $0.13 \text{ eV}$ .

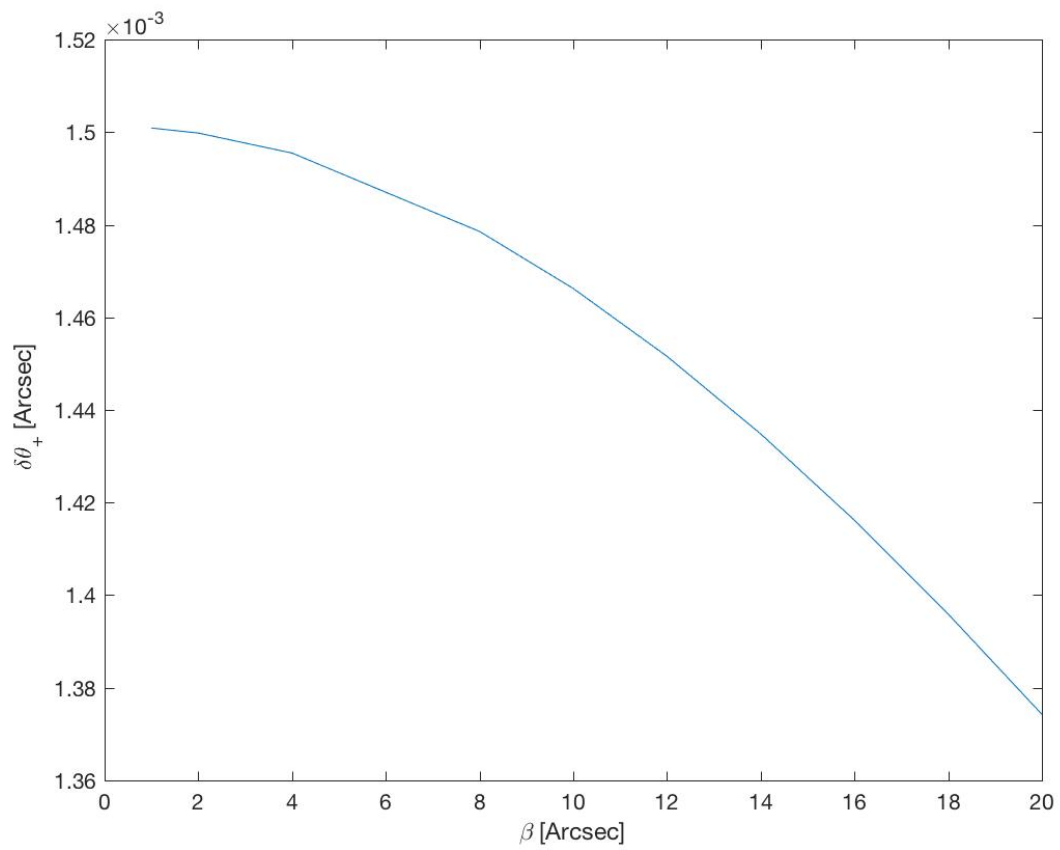


Figura 5.7: Andamento delle correzioni alla posizione delle immagini dei fotoni  $\delta\theta_+$  in funzione di  $\beta$ . L'energia del fascio di neutrini è  $8 \text{ eV}$ . La massa del neutrino è di  $0.13 \text{ eV}$ .

In figura (5.7) è mostrato solo l'andamento delle correzioni alla posizione delle immagini del fotone in funzione di  $\beta$  per un neutrino di massa  $0.13 \text{ eV}$  ed energia del fascio di  $8 \text{ eV}$ . L'andamento di tali correzioni è strettamente decrescente all'aumentare di  $\beta$ , quindi in linea di principio per massimizzare il modulo delle correzioni alla posizione delle immagini è necessario considerare un sistema di lensing con sorgente, lente e osservatore posti sull'asse ottico.

# Conclusioni

Il risultato sostanziale di questa tesi consiste nell'aver trattato le equazioni delle geodetiche per particelle massive con velocità prossime a quelle della luce. L'angolo di deflessione è stato ottenuto con tecniche perturbative nella metrica di Schwarzschild. Questo risultato è generale e in principio il formalismo utilizzato in questa tesi può essere applicato ad altri tipi di particelle dotate di massa. Un esempio possono essere i gravitoni per sviluppare nuove teorie della gravità.

La derivazione dell'angolo di deflessione per le particelle massive ha permesso di generalizzare la teoria delle lenti. Nel capitolo 4 abbiamo proposto una trattazione originale della lente puntiforme con formule generalizzate per la posizione delle immagini e l'amplificazione luminosa.

Questo risultato è stato utilizzato nel capitolo 5 per studiare l'angolo di deflessione prodotto da una stella su un fascio di neutrini ed in particolare l'andamento delle correzioni all'angolo di deflessione dei fotoni al variare della massa dei neutrini. Per svolgere i calcoli nel capitolo 5 sono state considerate masse dei neutrini che variano nell'intervallo da  $0.01 \text{ eV}$  a  $0.13 \text{ eV}$  ed energie nell'ordine degli  $\text{eV}$  per massimizzare gli effetti correttivi.

Per una stella con la massa del Sole, la correzione all'angolo di deflessione dei fotoni è di  $1.5 \cdot 10^{-4}$  arcosecondi per un neutrino di energia  $10 \text{ eV}$  con massa  $0.13 \text{ eV}$ .

Abbiamo poi proposto un esperimento teorico considerando un potenziale sistema astronomico. Come sorgente si è considerato un blazar a redshift 2 e una lente data da un ammasso di galassie a redshift 0.4 dall'osservatore. Le scelte dell'ammasso di galassie come lente, delle distanze reciproche tra osservatore, lente e sorgente e dell'energia del fascio servono a rendere massima la correzione al lensing di fotoni. Per il lensing da ammassi di galassie, la correzione all'angolo di deflessione è di  $9.6 \cdot 10^{-4}$  arcosecondi per neutrini di energia  $10 \text{ eV}$  e massa  $0.13 \text{ eV}$ .

Un importante rivelatore di neutrini è l'IceCube Neutrino Detector collocato al Polo Sud. IceCube è alla ricerca di neutrini provenienti da numerose sorgenti astrofisiche come esplosioni di stelle [25], ed è stato costruito per rilevare neutrini con energie intorno al  $\text{TeV}$  [28]. I neutrini provenienti da sorgenti astrofisiche non vengono osservati direttamente. Vengono osservati quando interagiscono con il ghiaccio e producono particelle elettricamente cariche (elettroni, muoni, tauoni) che portano all'emissione di luce Che-

renkov. L'emissione Cherenkov avviene quando la particella prodotta viaggia attraverso il ghiaccio più velocemente della velocità della luce nel ghiaccio [26].

Quando un neutrino muonico interagisce con l'IceCube crea un muone come particella secondaria che attraversa il rivelatore e lascia una traccia luminosa [28]. L'IceCube Neutrino Detector possiede una risoluzione angolare inferiore al grado per questo tipo di neutrini [24].

A priori se si fosse in grado di scoprire un sistema di lensing come quello ipotizzato nel capitolo 5 e se si fosse in grado di osservare le correzioni al lensing di fotoni dovute alla presenza di neutrini sarebbe possibile determinare la massa dei neutrini. Purtroppo l'accuratezza astrometrica attuale degli osservatori di neutrini non è tale da permettere la misurazione degli effetti descritti. In particolare i fasci di neutrini osservati dall'IceCube Neutrino Detector hanno energie molto maggiori ( $\sim TeV$ ) rispetto a quelle considerate in questa tesi ( $\sim eV$ ) [28].

## Appendice

Costanti fisiche e parametri cosmologici :

Massa del Sole  $M_{\odot} = 1.98855 \cdot 10^{30} \text{ kg}$  [12]

Costante di gravitazione universale  $G = 6.67259 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$

Raggio del Sole  $R_{\odot} = 6.96342 \cdot 10^8 \text{ m}$  [13]

Velocità della luce  $c = 2.99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

Costante di Hubble  $H_0 = 70.4 \text{ km/s/Mpc}$

Densità di materia barionica nell'universo  $\Omega_B = 0.045$  [23]

Densità di materia oscura nell'universo  $\Omega_{DM} = 0.227$  [23]

Contributo alla densità dell'universo da parte dell'energia oscura  $\Omega_{\Lambda} = 0.728$  [23]

# Bibliografia

- [1] B. Schutz, *A first course in general relativity*, Cambridge Univ. Press, New York (2009).
- [2] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology*, J. Wiley & Sons, Canada (1972).
- [3] S. Chandrasekhar, *The mathematical theory of black holes*, Oxford Univ. Press, New York (1983).
- [4] A. Einstein, *The meaning of relativity*, Routledge Classics, London (2003)
- [5] Lev D. Landau, *Fisica teorica*, Editori riuniti Univ. Press (2010).
- [6] B. Schutz, *Geometrical methods of mathematical physics*, Cambridge Univ. Press, New York (1980).
- [7] J. Glicenstein, *Gravitational lensing time delays with massive photons*, arXiv:1710.11587v1 [astro-ph.HE], 31 Oct 2017.
- [8] A. Einstein, *The foundation of the general theory of relativity*, in *Annalen der Physik*, series 4, 49, 769–822, (1916).
- [9] M. Stanley, 'An expedition to heal the wounds of war': the 1919 eclipse and Eddington as quaker adventurer, in *Isis*, Vol. 94, No. 1 (March 2003), pp. 57-89, The University of Chicago Press.
- [10] A. Cuesta, V. Niro, L.Verde, *Neutrino mass limits: robust information from the power spectrum of galaxy surveys*, arXiv:1511.05983v3 [astro-ph.CO], 28 Apr 2016.
- [11] F. Close, *Neutrino*, Oxford Univ. Press Inc., New York (2010)
- [12] *Astronomical Constants*, su [asa.usno.navy.mil](http://asa.usno.navy.mil). (2013).
- [13] T. Brown, J. Christensen-Dalsgaard, *Accurate determination of the solar photospheric radius*, in *Astrophysical Journal Letters*, vol. 500, 1998, pp. L195.

- [14] R. Narayan and M. Bartelmann. Lectures on gravitational lensing. arXiv:astro-ph/9606001v2, 1996.
- [15] S. Refsdal. The gravitational lens effect. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 128:295, 1964.
- [16] P. Schneider, J. Ehlers, and E. E. Falco. Gravitational Lenses. Astronomy and Astrophysics Library. Springer-Verlag, 1992.
- [17] David W. Hogg, Distance measures in cosmology, arXiv:astro-ph/9905116v4 16 Dec 2000.
- [18] P. Schneider, C. Kochanek, and J. Wambsganss. Gravitational Lensing: Strong, Weak and Micro. Springer-Verlag:Berlin, Series:Saas-Fee Advanced Course 33, 2006.
- [19] R. Feynman, La fisica di Feynman, Zanichelli, (2001).
- [20] K. Marteinsson, Gravitational lensing statistics, M.Sc. thesis, Faculty of Physical Sciences, University of Iceland (2012).
- [21] Massimo Meneghetti, Introduction to gravitational lensing, Lecture notes.
- [22] P. Padovani, E. Resconi, P. Giommi, B. Arsoli, Y. L. Chang, Extreme blazars as counterparts of IceCube astrophysical neutrinos, arXiv:1601.06550v1 [astro-ph.HE] 25 Jan 2016.
- [23] N. Jarosik, C. L. Bennett, J. Dunkley, B. Gold, M. R. Greason, M. Halpern, R. S. Hill, G. Hinshaw, A. Kogut, E. Komatsu, D. Larson, M. Limon, S. S. Meyer, M. R. Nolte, N. Odegard, L. Page, K. M. Smith, D. N. Spergel, G. S. Tucker, J. L. Weiland, E. Wollack, and E. L. Wright, Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Sky Maps, Systematic Errors, and Basic Results. Astrophysical Journal Supplement, 192:14–28, February 2011.
- [24] S.Bravo, Searching for neutrino sources with IceCube cascade events, 9 maggio 2017, official website IceCube Neutrino Detector <http://icecube.wisc.edu/news/view/504>.
- [25] Official website IceCube Neutrino Detector <http://icecube.wisc.edu>.
- [26] Official website IceCube Neutrino Detector <http://icecube.wisc.edu/science/icecube/detector>.
- [27] C. Spiering, Towards High-Energy Neutrino Astronomy. A Historical Review, arXiv:1207.4952 [astro-ph.IM], Historical review published in European Physics Journal H, (2012).
- [28] Official website IceCube Neutrino Detector <https://masterclass.icecube.wisc.edu/en/learn/detecting-neutrinos>