

# Hamiltonzugang zum Deconfinement-Phasenübergang der Yang-Mills-Theorie

DISSERTATION

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Eberhard Karls Universität Tübingen  
zur Erlangung des Grades eines  
Doktors der Naturwissenschaften  
(Dr. rer. nat.)

vorgelegt von  
**JAN PHILIP HEFFNER**  
aus Frankfurt am Main

Tübingen  
2015

Gedruckt mit Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der  
Eberhard Karls Universität Tübingen.

Tag der mündlichen Qualifikation: 22.07.2015

Dekan:

Prof. Dr. Wolfgang Rosenstiel

1. Berichterstatter:

Prof. Dr. Hugo Reinhardt

2. Berichterstatter:

Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Amand Fäßler

---

## Kurzfassung

In der hamiltonschen Formulierung der Yang-Mills-Theorie ist das Variationsprinzip eine nicht-perturbative Methode zur Bestimmung des Vakuumzustandes. Diesen *Hamiltonzugang* erweitern wir in dieser Arbeit auf endliche Temperaturen und untersuchen den Deconfinement-Phasenübergang.

Zum einen geschieht dies durch die Betrachtung des großkanonischen Ensembles der Yang-Mills-Theorie in Coulomb-Eichung in einem Quasiteilchen-Bild für die Gluonen. Mit dem Variationsprinzip für die freie Energie bestimmen wir den thermischen Grundzustand und leiten gekoppelte Bewegungsgleichungen für den Gluon-Propagator und den Geist-Formfaktor her. Im Hochtemperaturlimes bestimmen wir die Lösung dieser Korrelationsfunktionen für asymptotisch kleine Impulse analytisch. Für beliebige Temperaturen und Impulse verwenden wir ein numerisches Lösungsverfahren. Der Gluon-Propagator wird oberhalb einer kritischen Temperatur infrarot endlich, während der Geist-Formfaktor divergent bleibt. Aus dieser Änderung des Infrarotverhaltens bestimmen wir eine kritische Temperatur von 290 MeV für den Deconfinement-Phasenübergang für die Eichgruppe SU(2).

Zum anderen führen wir Temperaturen durch Kompaktifizierung einer räumlichen Dimension ein und betrachten die Yang-Mills-Theorie im Hamiltonzugang auf der räumlichen Mannigfaltigkeit  $\mathbb{R}^2 \times S^1(L)$ . Die inverse Länge  $L^{-1}$  der kompaktifizierten Richtung identifizieren wir mit der Temperatur und bestimmen die Bewegungsgleichungen der Korrelationsfunktionen mit einem verallgemeinerten gaußschen Ansatz für das Wellenfunktional durch Minimierung der Energie. Wir zeigen analytisch, dass diese Gleichungen für verschwindende Temperaturen die  $T = 0$  Bewegungsgleichungen beinhalten und sich im Hochtemperaturlimes auf die Theorie in  $d = 2$  räumlichen Dimensionen reduzieren. Die Lösungen der Bewegungsgleichungen bei beliebigen Temperaturen bestimmen wir numerisch.

Schließlich berechnen wir das effektive Potential des Polyakov-Loops als Ordnungsparameter des Deconfinement-Phasenübergangs der Yang-Mills-Theorie aus der Minimierung der Energiedichte in Anwesenheit eines Hintergrundfeldes. Dabei nutzen wir Vakuum-Lösungen und führen endliche Temperaturen durch Kompaktifizierung einer räumlichen Dimension ein. Aus dem Minimum des effektiven Potentials bestimmen wir den Erwartungswert des Polyakov-Loops, die Ordnungen des Deconfinement-Phasenübergangs, sowie die kritischen Temperaturen 269 MeV für SU(2) und 283 MeV für SU(3).



# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>9</b>
1.1. Konventionen und Notationen . . . . .	11
<b>2. Hamiltonformulierung der Yang-Mills-Theorie</b>	<b>13</b>
2.1. Klassische Yang-Mills-Theorie . . . . .	13
2.1.1. Definition der QCD und Yang-Mills-Theorie . . . . .	13
2.1.2. Hamiltonformalismus der Yang-Mills-Theorie . . . . .	16
2.2. Yang-Mills-Quantentheorie . . . . .	17
2.2.1. Kanonische Quantisierung . . . . .	17
2.2.2. Eichfixierung mit der Faddeev-Popov-Methode . . . . .	19
2.2.3. Yang-Mills-Theorie in Coulomb-Eichung . . . . .	19
2.3. Propagatoren des Hamiltonzugangs . . . . .	21
2.3.1. Korrelationsfunktionen und Dyson-Schwinger-Gleichungen . . . . .	21
2.3.2. Dyson-Schwinger-Gleichungen im Hamiltonzugang . . . . .	23
2.3.3. Propagatoren . . . . .	23
2.3.4. Geist-Dyson-Schwinger-Gleichung und Krümmung . . . . .	24
2.4. Yang-Mills-Quantentheorie bei endlichen Temperaturen . . . . .	25
2.4.1. Großkanonisches Ensemble . . . . .	26
2.4.2. Kompaktifizierung einer räumlichen Richtung . . . . .	27
2.5. Ordnungsparameter des Deconfinement-Phasenübergangs . . . . .	28
2.5.1. Polyakov-Loop . . . . .	28
2.5.2. Nicht-abelsches Coulomb-Potential . . . . .	30
2.6. Zusammenfassung . . . . .	31
<b>3. Vakuumzustand der Yang-Mills-Theorie im Hamiltonzugang</b>	<b>33</b>
3.1. Vakuum-Wellenfunktional . . . . .	34
3.2. Propagatoren und Formfaktoren . . . . .	35
3.3. Energiedichte und Gap-Gleichung . . . . .	37
3.3.1. Energiedichte . . . . .	37
3.3.2. Gap-Gleichung . . . . .	38
3.4. Renormierung . . . . .	39
3.5. Analytische Eigenschaften der Variationslösung . . . . .	41
3.5.1. UV-Analyse . . . . .	42
3.5.2. Infrarotanalyse . . . . .	43
3.6. Numerische Ergebnisse . . . . .	51
3.6.1. Subkritische Lösungen . . . . .	52
3.6.2. Kritische Lösungen . . . . .	55
3.6.3. Coulomb-Potential und regularisierter Coulomb-Formfaktor . . . . .	56
3.6.4. Einfluss des Coulomb-Terms . . . . .	58
3.6.5. Numerisches Infrarot- und UV-Verhalten . . . . .	59
3.6.6. Lösungen in $d = 2$ räumlichen Dimensionen . . . . .	59
3.6.7. Energiedichte der Lösungen . . . . .	60

3.6.8. Parametrisierung der numerischen Lösungen . . . . .	61
3.6.9. Physikalische Skala . . . . .	63
3.7. Zusammenfassung . . . . .	64
<b>4. Deconfinement-Phasenübergang im Hamiltonzugang</b>	<b>67</b>
4.1. Großkanonisches Ensemble . . . . .	67
4.2. Geist- und Coulomb-Propagator . . . . .	69
4.3. Die freie Energie . . . . .	71
4.4. Variationsprinzip bei endlichen Temperaturen . . . . .	73
4.5. Renormierung . . . . .	75
4.6. Vernachlässigung des Coulomb- und Tadpole-Terms . . . . .	76
4.7. Infrarotanalyse . . . . .	77
4.7.1. Infrarotnäherung bei endlichen Temperaturen . . . . .	78
4.8. Numerische Ergebnisse . . . . .	81
4.8.1. Propagatoren bei endlicher Temperatur . . . . .	81
4.8.2. Deconfinement-Phasenübergang . . . . .	82
4.8.3. Coulomb-Formfaktor und Coulomb-Potential . . . . .	86
4.9. Zusammenfassung . . . . .	88
<b>5. Endliche Temperaturen durch eine kompaktifizierte Raumdime</b>	<b>91</b>
5.1. Hamiltonzugang zur Yang-Mills-Theorie auf $\mathbb{R}^2 \times S^1(L)$ . . . . .	91
5.1.1. Yang-Mills-Theorie in Coulomb-Eichung auf $\mathbb{R}^2 \times S^1(L)$ . . . . .	91
5.1.2. Bewegungsgleichungen auf $\mathbb{R}^2 \times S^1(L)$ . . . . .	93
5.2. Grenzfall hoher und verschwindender Temperatur . . . . .	94
5.2.1. Hochtemperaturlimes . . . . .	94
5.2.2. Nulltemperatur . . . . .	96
5.3. Infrarotanalyse . . . . .	96
5.4. Renormierung . . . . .	97
5.5. Numerische Ergebnisse . . . . .	98
5.6. Zusammenfassung . . . . .	100
<b>6. Effektives Potential des Polyakov-Loops</b>	<b>103</b>
6.1. Hamiltonzugang mit Hintergrundfeld . . . . .	103
6.1.1. Fixierung der Hintergrundeichung . . . . .	104
6.1.2. Wellenfunktional in Hintergrundeichung . . . . .	106
6.2. Bewegungsgleichungen im Hintergrundfeld . . . . .	108
6.2.1. Geist- und Gluon-Propagator . . . . .	108
6.2.2. Energie und Gap-Gleichung . . . . .	109
6.3. Hintergrundfeld in der Cartan-Subalgebra . . . . .	110
6.3.1. Wahl des Hintergrundfeldes . . . . .	111
6.3.2. Propagatoren in Cartan-Weyl Basis . . . . .	113
6.3.3. Zusammenhang mit den Propagatoren in Coulomb-Eichung . . . . .	114
6.4. Das effektive Potential des Polyakov-Loops . . . . .	115
6.4.1. Polyakov-Loop bei konstantem Hintergrundfeld . . . . .	115
6.4.2. Energiedichte . . . . .	116
6.4.3. Analytische Berechnung des effektiven Potentials . . . . .	118
6.4.4. Asymptotisches Verhalten des effektiven Potentials . . . . .	119
6.4.5. Deconfinement-Phasenübergang . . . . .	124
6.4.6. Das effektive Potential mit Krümmung . . . . .	127
6.4.7. Temperaturabhängigkeit des Polyakov-Loops . . . . .	130

6.4.8. Kritischer Exponent des Ordnungsparameters . . . . .	132
6.5. Ausblick: Druck . . . . .	133
6.6. Zusammenfassung . . . . .	134
<b>7. Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>137</b>
<b>A. Numerische Methoden</b>	<b>141</b>
A.1. Interpolation mit Tschebyschow-Polynomen . . . . .	141
A.1.1. Tschebyschow-Polynome . . . . .	141
A.1.2. Tschebyschow-Interpolation . . . . .	142
A.2. Numerische Integration . . . . .	142
A.2.1. Numerischer Test der Integrationsmethoden . . . . .	146
<b>B. Rezepte für Integralgleichungen</b>	<b>149</b>
B.1. Form der Integralgleichungssysteme . . . . .	149
B.2. Darstellung der Integralgleichung . . . . .	150
B.2.1. Diskretisierung des Integrals . . . . .	150
B.2.2. Darstellung der unbekanntten Funktion . . . . .	151
B.3. Lösungsmethoden . . . . .	152
B.3.1. Lineare Kerne . . . . .	152
B.3.2. Iterative Lösungsverfahren . . . . .	152
B.4. Dyson-Schwinger-Gleichung in $d$ Dimensionen . . . . .	154
B.4.1. Schleifenintegral in $d$ Dimensionen . . . . .	154
B.4.2. Darstellung der Zweipunktfunktionen . . . . .	156
B.5. Lösungsalgorithmus . . . . .	158
B.6. Parallelisierung und Optimierung . . . . .	159
<b>C. Mathematische Formel</b>	<b>161</b>
C.1. Zum effektiven Potential des Polyakov-Loops . . . . .	161
C.2. Bewegungsgleichungen auf $\mathbb{R}^2 \times S^1$ . . . . .	162
<b>D. Literaturverzeichnis</b>	<b>165</b>



# 1. Einleitung

Die Entdeckungen und Entwicklungen im Bereich der Teilchenphysik zählen zu den größten Leistungen der Naturwissenschaften. Dies trifft sowohl auf theoretischer, als auch auf experimenteller Ebene zu: In dem *Standardmodell* [1] sind alle bekannten Elementarteilchen und die fundamentalen Naturkräfte, außer der Gravitation, in einer mathematischen Theorie vereinigt. Mit dieser gelangen zahlreiche präzise Vorhersagen über zuvor noch unbekannte Teilchen. Diese Entwicklungen auf der theoretischen Seite wurden maßgeblich durch die Errungenschaften auf den Gebieten der experimentellen Forschung stimuliert. Diese gipfelten im Bau des Large Hadron Colliders (LHC), dem größten und kompliziertesten je gebauten Messgerät, und dem Nachweis [2, 3] des letzten durch das Standardmodell postulierten Teilchens, des Higgs-Bosons.

Die Quantenchromodynamik (QCD) ist Bestandteil des Standardmodells der Teilchenphysik und beschreibt die *starke Wechselwirkung*, welche für den Zusammenhalt von Protonen und Neutronen in Atomkernen verantwortlich ist. Die QCD führt *Quarks* als fundamentale Bausteine von Protonen, Neutronen und weiteren in Experimenten gefundenen Teilchen ein. Diese zusammengesetzten Teilchen werden *Hadronen* genannt. Die starke Wechselwirkung wird durch den Austausch von *Gluonen* zwischen Quarks innerhalb der Hadronen erklärt. Die den Atomkern zusammenhaltende Kraft ist auf diese fundamentalere Wechselwirkung zurückzuführen. Quarks tragen ebenso wie Gluonen eine sogenannte *Farbladung*, die in drei Varianten auftritt. Die farbgeladenen Gluonen können auch untereinander wechselwirken und unterscheiden sich damit von den Austauschteilchen der Quantenelektrodynamik (QED), den Photonen, die zwar zwischen elektrischen Ladungen wirken, jedoch selbst keine Ladung tragen.

Das Standardmodell ist eine Quantenfeldtheorie, die mathematisch durch eine *Eichtheorie* formuliert wird. Der QCD liegt eine *nicht-abelsche* Eichtheorie, eine *Yang-Mills-Theorie*, zugrunde. Die von der nicht-abelschen Eichinvarianz induzierte Nicht-Linearität der QCD führt – im Gegensatz zu abelschen Theorien, wie der QED – zu neuen Merkmalen. Diese wichtigen Eigenschaften lassen sich anhand der Energie eines Prozesses in der QCD wie folgt einordnen: Für große Energien nimmt die Kopplung der Wechselwirkung ab, wodurch sich Quarks und Gluonen wie freie Teilchen verhalten. Wegen dieser *asymptotischen Freiheit* können für solche Prozesse *perturbative* Methoden verwendet werden. Diese erlauben die präzise Berechnung von Wirkungsquerschnitten, die in zahlreichen Hochenergie-Experimenten bestätigt wurden und welche die QCD als korrekte Theorie der starken Wechselwirkung bestätigen. Bei kleinen Energien – in unserer alltäglichen Welt – sind die dominierenden Merkmale der QCD die *chirale Symmetriebrechung* und das *Confinement*. Während die zuerst genannte Eigenschaft für einen Großteil der Masse in unserem Universum verantwortlich ist, bedeutet Confinement, dass keine freien farbgeladenen Quarks oder Gluonen beobachtet werden, sondern dass diese nur gebunden in Hadronen auftreten. Beide Eigenschaften sind für perturbative Methoden nicht zugänglich, da bei kleinen Energien, bzw. großen Abständen die Kopplung der QCD divergiert.

Da die Nichtlinearität der QCD den analytischen Zugang in die nicht-perturbativen Bereiche erschwert, ist das Confinement-Problem [4] bis heute ungelöst: Obwohl keine Zweifel daran bestehen, dass die QCD Confinement beschreibt, gibt es weder einen Konsens über die zugrunde liegenden Mechanismen, noch lässt sich Confinement auf fundamentale

ler Ebene beweisen. Für ein Verständnis von Confinement und den Vorgängen bei kleinen Energien sind nicht-perturbative Methoden erforderlich. Dies gilt auch für die theoretische Beschreibung des Phasendiagramms der QCD [5], das durch Beschleuniger-Experimente bei endlichen Temperaturen und Dichten untersucht wird. Hierbei ist der *Deconfinement-Phasenübergang* von der hadronischen Phase zu einem Zustand in der Quarks und Gluonen nicht länger in Hadronen gebunden sind – auch Quark-Gluon-Plasma genannt – von besonderem Interesse.

Eine Möglichkeit die nicht-perturbativen Bereiche der QCD zu erforschen, sind numerische *Gitterrechnungen*. Derartige Betrachtungen auf einer diskreten Raum-Zeit ergänzten schon frühzeitig die analytischen Rechnungen [6]. Heute erlauben sie durch Fortschritte der Computerleistung Berechnungen in vielen Bereichen und bestätigen das Confinement durch ein lineares Quark-Potential [7]. Mit dieser Methode ist jedoch die Untersuchung des Phasendiagramms bei endlichen Dichten (und im Vergleich kleinen Temperaturen) erschwert [8, 9].

Ein analytischer Zugang, der eine Beschreibung der nicht-perturbativen Physik ermöglicht, ist durch das Studium von *Dyson-Schwinger-Gleichungen* möglich. Diese Bewegungsgleichungen von Korrelationsfunktionen der Quantentheorie haben sich in den letzten 20 Jahren neben den Gitterrechnungen zum wichtigsten Zugang zu den Phänomenen der QCD bei kleinen Energien entwickelt [10–12]. Im Gegensatz zu Gitterrechnungen ist die Untersuchung dieser Gleichungen auf zusätzliche Näherungen angewiesen, die ihre Gültigkeit einschränken können. Auch sind die Bewegungsgleichungen im Allgemeinen nur numerisch lösbar. Beide hier genannten Methoden ergänzen sich bei der Untersuchung der QCD gegenseitig.

In dieser Arbeit untersuchen wir die *reine* Yang-Mills-Theorie ohne Quarks bei endlichen Temperaturen, wobei wir wegen der Selbstwechselwirkung der Gluonen auf nicht-perturbative Methoden angewiesen sind. Daher verwenden wir einen Zugang, der auf der hamiltonschen Formulierung beruht und den Grundzustand der Yang-Mills-Schrödinger-Gleichung in Coulomb-Eichung durch das Variationsprinzip bestimmt [13]. Auf diesem Weg werden zu den Dyson-Schwinger-Gleichungen vergleichbare Bewegungsgleichungen für die Korrelationsfunktionen abgeleitet. Die Lösungen dieser Integralgleichungssysteme können in asymptotischen Energie- bzw. Impulsbereichen analytisch und in allen Bereichen numerisch bestimmt werden. In einem zweiten Schritt können aus diesen Lösungen Erkenntnisse über das Verhalten der Yang-Mills-Theorie gewonnen werden.

Bevor wir die wichtigsten Resultate des Variationszugangs zum Vakuumzustand der Yang-Mills-Theorie in Kap. 3 zusammenfassen, führen wir in Kap. 2 die wichtigsten Begriffe des Hamiltonzugangs zur Yang-Mills-Theorie in Coulomb-Eichung ein. Dabei gehen wir auch auf die Einführung von endlichen Temperaturen und auf Ordnungsparameter des Deconfinement-Phasenübergangs ein. In Kap. 4 führen wir endliche Temperaturen durch das großkanonische Ensemble der Yang-Mills-Theorie ein. Mit einer Quasiteilchennäherung für die Dichtematrix leiten wir mit dem Variationsprinzip die Bewegungsgleichung der Korrelationsfunktionen her und bestimmen die Lösungen sowohl analytisch, als auch numerisch bei endlichen Temperaturen. Durch Kompaktifizierung einer räumlichen Dimension führen wir in Kap. 5 endliche Temperaturen ein und bestimmen die Bewegungsgleichungen der Korrelationsfunktionen des Hamiltonzugangs auf der räumlichen Mannigfaltigkeit  $\mathbb{R}^2 \times S^1$ . Schließlich berechnen wir das effektive Potential des Polyakov-Loops in Kap. 6 in Anwesenheit eines Hintergrundfeldes und – durch Kompaktifizierung einer räumlichen Dimension – bei endlichen Temperaturen. Dadurch erhalten wir Zugang zu einem Ordnungsparameter und Einsicht in die qualitativen Vorgänge am Deconfinement-Phasenübergang.

## 1.1. Konventionen und Notationen

Wenn nicht anders angegeben, verwenden wir in dieser Arbeit die natürlichen Einheiten

$$c = \hbar = k_{\text{B}} = 1. \quad (1.1)$$

Sofern wir mit Vierervektoren arbeiten, nutzen wir die Minkowski-Metrik

$$(g_{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, \dots). \quad (1.2)$$

Mit  $D = 1 + d$  bezeichnen wir die Dimension der Raum-Zeit, wobei  $d$  der Zahl der räumlichen Dimensionen entspricht. Mit griechischen Buchstaben  $\mu, \nu, \dots$  werden wir Lorenzindizes bezeichnen. Lateinische Buchstaben im Bereich  $i, j, \dots$  verwenden wir für die *räumlichen* Komponenten  $(1, \dots, d)$  von Vektoren, im Bereich  $a, b, \dots$  für den *Farbindex*. Bei allen explizit geschriebenen Indizes gilt die Summenkonvention. Wenn der Vektorcharakter von räumlichen Vektoren betont werden soll, werden wir sie in fettgedruckter Schreibweise verwenden. Für einen (kontravarianten) Vierervektor gilt entsprechend

$$(x^\mu) = (x_0, \mathbf{x}). \quad (1.3)$$

Weiterhin ist mit dem Produkt zweier fettgedruckter, räumlicher Vektoren ein Skalarprodukt impliziert

$$\mathbf{x}\mathbf{y} := \sum_{i=1}^d x_i y_i. \quad (1.4)$$

Die gleiche Schreibweise verwenden wir für das Skalarprodukt im Farbraum [vgl. (6.58)].

Zur Optimierung der Darstellung von Gleichungen werden wir für die Argumente, Lorenz- und/oder Farbindices von Objekten eine abkürzende Schreibweise verwenden, wenn deren explizite Angabe nicht erforderlich ist. Beispielsweise wird das Argument und die Indizes des Eichfeldes kompakt geschrieben als

$$A(1) := A_i^a(\mathbf{x}). \quad (1.5)$$

Eine Wiederholung des Indizes impliziert eine Integration über die (räumlichen) Koordinaten und eine Summation über die Lorenzindizes bzw. den Farbraum

$$A(1)B(1) := \int d^d x \sum_{k=1}^d \sum_{a=1}^{N_c^2-1} A_k^a(\mathbf{x}) B_k^a(\mathbf{x}). \quad (1.6)$$

In den Fällen bei denen die Angabe von Indizes bzw. Argumenten entbehrlich ist, werden wir auf sie verzichten.

Die mathematischen Operatoren  $\text{tr}$  und  $\det$  sind als Matrixoperatoren  $\text{tr} M = M_{ii}$  zu verstehen, während  $\text{Tr}$  und  $\text{Det}$  als funktionale Operatoren der Art

$$\text{Tr} M = M(1, 1) \quad (1.7)$$

zu lesen sind. Diese beinhalten gegebenenfalls auch die entsprechenden Matrixoperationen.

Die Fouriertransformation definieren wir wie folgt

$$f(\mathbf{p}) = \int d^d x f(x) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}}, \quad f(\mathbf{x}) = \int \bar{d}^d p f(x) e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}, \quad \bar{d}^d p := \frac{d^d p}{(2\pi)^d}. \quad (1.8)$$

Schließlich verwenden wir für die partielle Ableitung die Schreibweise  $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  und bezeichnen mit

$$\frac{\delta}{\delta f(x)} I[f] \quad (1.9)$$

die funktionale Ableitung eines Funktionals  $I[f]$ , wobei  $\frac{\delta f(x)}{\delta f(y)} = \delta(x - y)$  gilt.



## 2. Hamiltonformulierung der Yang-Mills-Theorie

In diesem Kapitel werden wir Grundlagen des Hamiltonzugangs zur Yang-Mills-Theorie darstellen:

Zuerst besprechen wir in Abschn. 2.1 die Lagrange- und Hamiltonformulierung der klassischen Yang-Mills-Theorie. Danach gehen wir in Abschn. 2.2 auf die kanonische Quantisierung und die Implementierung der Coulomb-Eichung ein. Die elementaren Korrelationsfunktionen der Quantenfeldtheorie besprechen wir in Abschn. 2.3. Zum Schluss gehen wir in Abschn. 2.4 auf die Einführung von endlichen Temperaturen im Hamiltonzugang ein und besprechen in Abschn. 2.5 Ordnungparameter für den Deconfinement-Phasenübergang der Yang-Mills-Theorie.

### 2.1. Klassische Yang-Mills-Theorie

Eichtheorien bilden die mathematische Grundlage für das Standardmodell der Teilchenphysik. Bereits der Formulierung der Elektrodynamik im Rahmen der Maxwell-Theorie liegt eine Eichtheorie zugrunde. Benannt wurde dieses Prinzip von Weyl bei seinem (gescheiterten) Versuch eine Theorie der Gravitation und der Elektrodynamik zu konstruieren. Erst durch die Etablierung der Quantenmechanik wurden Eichtheorien in der heutigen Weise verstanden. Sie besitzen eine Invarianz der Lagrange-Dichte bezüglich einer lokalen Transformation, die durch eine Lie-Gruppe erzeugt wird. Diese *lokale Eichinvarianz* kann im Falle der Elektrodynamik mit der Gruppe  $U(1)$  – die Gruppe der komplexen Phasenfaktoren – identifiziert werden.

Die Erweiterung von Eichtheorien auf nicht-abelsche Eichgruppen wurde von Yang und Mills 1954 vorgeschlagen [14]. Mit einer Yang-Mills-Theorie basierend auf der Lie-Gruppe  $SU(2)$  gelang im Glashow-Salam-Weinberg Modell zusammen mit dem Higgs-Mechanismus eine Vereinheitlichung der Elektrodynamik und der schwachen Wechselwirkung. Die starke Wechselwirkung konnte durch das Quarkmodell [15] mit einer  $SU(3)$ -Yang-Mills-Theorie beschrieben werden. Diese Theorie, die *Quantenchromodynamik* (QCD), gilt seit der Entdeckung [16] und experimentellen Bestätigung der asymptotischen Freiheit als akzeptiert. Für eine geschichtliche Darstellung der Eichtheorien siehe z.B. [17, 18].

Um für diese Arbeit die Notation festzulegen, besprechen wir zuerst einige grundlegende Definitionen der (vereinfachten) QCD und beschränken uns anschließend auf die reine Yang-Mills-Theorie.

#### 2.1.1. Definition der QCD und Yang-Mills-Theorie

Die Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}$  der QCD mit einem Quarkfeld  $\psi$  der Masse  $m$  lautet

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi + \mathcal{L}_{\text{YM}}, \quad (2.1a)$$

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{2} \text{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (2.1b)$$

Hier sind  $\gamma^\mu$  die Dirac-Matrizen und  $D_\mu$  ist die *kovariante Ableitung*

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu \quad (2.2)$$

mit dem *Eichfeld*  $A_\mu$  und der *Kopplungskonstanten*  $g$ .<sup>1</sup> Der *Feldstärketensor*  $F_{\mu\nu}$  ist definiert durch

$$F_{\mu\nu} := -\frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu]. \quad (2.3)$$

Der erste Teil der Lagrange-Dichte (2.1a) repräsentiert einen Dirac-Term für das Quarkfeld  $\psi$  mit Kopplung an das Eichfeld  $A_\mu$ , der zweite Teil  $\mathcal{L}_{\text{YM}}$  (2.1b) ist ein dynamischer Term für das Eichfeld  $A_\mu$  selbst

Eine der definierenden Eigenschaften der Lagrange-Dichte (2.1a) ist die *lokale Eichinvarianz* unter der Transformation der Quarkfelder definiert durch

$$\psi' := U(x)\psi, \quad \bar{\psi}' := \bar{\psi}U^\dagger(x), \quad (2.4)$$

wobei  $U(x)$  ein Element der Lie-Gruppe  $\text{SU}(N_c)$  und Funktion der Raum-Zeit  $x \in M \subseteq \mathbb{R}^{1+d}$  ist. Die Menge aller Transformationen  $U(x)$  bilden die *Eichgruppe*.<sup>2</sup> Die für  $N_c \geq 2$  *nicht-abelsche* Gruppe  $\text{SU}(N_c)$  ist eine  $N_c^2 - 1$ -dimensionale Matrixgruppe, die in der fundamentalen Darstellung durch unitäre  $N_c \times N_c$  Matrizen mit Determinante 1 gegeben ist. Das Quarkfeld  $\psi$  ist in dieser fundamentalen Darstellung ein Vektor im *Farbraum*

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \vdots \\ \psi^{N_c} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

mit den Komponenten  $\psi^a$ ,  $a = 1, \dots, N_c$ , wobei im Quarkmodell der QCD  $N_c = 3$  ist.<sup>3</sup>

Für die Invarianz des Dirac-Terms unter der Transformation (2.4)

$$\bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \stackrel{!}{=} \bar{\psi}'(i\gamma^\mu D'_\mu - m)\psi', \quad (2.6)$$

muss für die kovariante Ableitung (2.2) gelten

$$D'_\mu = UD_\mu U^\dagger, \quad (2.7)$$

die somit in der adjungierten Wirkung von  $\text{SU}(N_c)$  transformiert. Daher gilt für das Eichfeld

$$A'_\mu = UA_\mu U^\dagger + \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^\dagger = -\frac{i}{g}UD_\mu U^\dagger. \quad (2.8)$$

unter der Transformation (2.4). Der Feldstärketensor (2.3) transformiert wegen Gl. (2.7) gemäß

$$F'_{\mu\nu} = UF_{\mu\nu}U^\dagger. \quad (2.9)$$

---

<sup>1</sup>Wir werden wir ab Kap. 5 die Kopplungskonstante in das Eichfeld absorbieren  $gA \rightarrow A$ .

<sup>2</sup>Die Eichgruppe kann als die Abbildung  $U(x) : M \rightarrow \text{SU}(N_c)$  oder lokal als das cartesische Produkt

$$U \in \{M \times \text{SU}(N_c)\}$$

verstanden werden, die jedem Raum-Zeit Punkt die sogenannte Strukturgruppe  $\text{SU}(N_c)$  zuordnet. Das cartesische Produkt wird mathematisch als Prinzipal- oder  $G$ -Bündel definiert [19]. Im Folgenden unterscheiden wir zwischen Struktur- und Eichgruppe.

<sup>3</sup>Hier haben wir ausgeblendet, dass jede dieser Komponenten auch als ein vierkomponentiger Dirac-Spinor zu verstehen ist. Wir betrachten hier außerdem den einfachen Fall von nur einem Quark-Flavour ( $N_f = 1$ ).

Der Term  $\mathcal{L}_{\text{YM}}$  ist eichinvariant, da die Spur  $\text{tr}$  über den Darstellungsraum der Gruppe gebildet wird. Somit ist die gesamte Lagrange-Dichte (2.1a) eichinvariant unter einer simultanen Transformation des Quarkfeldes  $\psi \rightarrow \psi'$  (2.4) und des Eichfeldes  $A \rightarrow A'$  (2.8).

Die Elemente  $U(x)$  der Eichgruppe können mit Hilfe der exponentiellen Abbildung parametrisiert werden als

$$U(x) = \exp(-i\Theta^a(x)t^a), \quad (2.10)$$

wobei  $\Theta^a(x)$  Funktionen der Raum-Zeit und  $t^a$  die Generatoren der von  $\text{SU}(N_c)$  induzierten Lie-Algebra  $\mathfrak{su}(N_c)$  sind.<sup>4</sup> Die  $N_c^2 - 1$ -Generatoren  $t^a$  der fundamentalen Darstellung von  $\text{SU}(N_c)$  sind spurfreie, hermitesche  $N_c \times N_c$  Matrizen. Sie erfüllen als Elemente der Lie-Algebra die Relation

$$[t^a, t^b] = if^{abc}t^c \quad (2.11)$$

mit den *Strukturkonstanten*  $f^{abc}$ , die die lokale Struktur der Lie-Algebra und damit auch die lokale Struktur der Eichgruppe festlegen [20]. Für abelsche Lie-Gruppen verschwinden die Zahlen  $f^{abc}$ .

Das algebra-wertige Eichfeld kann in der Basis der Generatoren  $t^a$  der Lie-Algebra dargestellt werden als

$$A_\mu =: A_\mu^a t^a \equiv \sum_{a=1}^{N_c^2-1} A_\mu^a t^a, \quad \text{tr } t^a t^b = \frac{1}{2} \delta^{ab}, \quad (2.12)$$

wobei wir eine Normierung der Generatoren festgelegt haben. Unter einer infinitesimalen Eichtransformation  $\delta U(x)$  gilt mit  $\delta U(x) \approx 1 - i\delta\Theta^a(x)t^a$  und Gl. (2.8) für das Eichfeld

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{g}[D, \delta\Theta]. \quad (2.13)$$

Durch Einführung der adjungierten Darstellung der kovarianten Ableitung (2.2)<sup>5</sup>

$$\hat{D}_\mu^{ab} \equiv \delta^{ab}\partial_\mu - g\hat{A}_\mu^{ab}, \quad \hat{A}_\mu^{ab} = f^{acb}A_\mu^c \quad (2.14)$$

kann Gl. (2.13) geschrieben werden als

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{g}\hat{D}\delta\Theta. \quad (2.15)$$

Mit dem Symbol “ $\hat{\phantom{x}}$ ” werden wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit die adjungierte Darstellung kennzeichnen.

Den überwiegenden Teil dieser Arbeit widmen wir der *reinen* Yang-Mills-Theorie. Von dem QCD-Lagrangian (2.1a) betrachten wir daher nur den dynamischen Term für das Eichfeld  $\mathcal{L}_{\text{YM}}$  (2.1b). Mit  $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a t^a$  gilt für die Komponenten des Feldstärketensors (2.3)

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c, \quad (2.16)$$

mit denen die Yang-Mill-Lagrange-Dichte geschrieben werden kann als

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu} - J^{a,\mu} A_\mu^a, \quad (2.17)$$

<sup>4</sup>Ab Kap. 3 verwenden wir antihermitesche Generatoren  $T^a := it^a$  für die Lie-Algebra  $\mathfrak{su}(N_c)$ .

<sup>5</sup>Die adjungierte Abbildung  $\hat{D}_\circ := [D, \circ]$  definiert eine Darstellung der Lie-Algebra  $\mathfrak{su}(N_c)$  in sich selbst.

wobei wir für die folgenden Betrachtungen ein externes Quellfeld  $J^\mu$  eingeführt haben.<sup>6</sup> In dieser Form wird die Ursache für die Komplexität der reinen Yang-Mills-Theorie offensichtlich: Sie ist *nicht-linear*. Die Strukturkonstanten  $f^{abc}$  der nicht-abelschen Eichgruppe erzeugen Wechselwirkungsterme für das Eichfeld  $A$ . Dies unterscheidet für  $SU(N_c \geq 2)$  die Yang-Mills-Theorie fundamental von der Elektrodynamik. Auch die klassischen Bewegungsgleichungen der Yang-Mills-Theorie sind *nicht-linear*. Aus der Lagrange-Dichte (2.17) folgt die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\hat{D}_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \quad (2.18)$$

die eine Verallgemeinerung der Maxwell-Gleichungen für nicht-abelsche Eichgruppen darstellt.

### 2.1.2. Hamiltonformalismus der Yang-Mills-Theorie

Der Hamiltonformalismus der klassischen Yang-Mills-Theorie ist Ausgangspunkt für die kanonische Quantisierung. Zu dessen Darstellung bestimmen wir aus der Lagrange-Dichte (2.17) durch die Legendre-Transformation

$$\mathcal{H} = \Pi^{a,\mu} \partial_0 A_\mu^a - \mathcal{L}_{\text{YM}} \quad (2.19)$$

die Hamilton-Dichte, wobei wir die konjugierten Impulse

$$\Pi^{a,\mu}(x) := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_\mu^a(x))} = F^{a,\mu 0}(x) \quad (2.20)$$

eingeführt haben. Hieraus folgt insbesondere, dass der zur  $A_0$ -Komponente des Eichfeldes konjugierte Impuls

$$\Pi_0 = 0 \quad (2.21)$$

identisch verschwindet. Im Hamiltonformalismus ist es sinnvoll die kovariante Schreibweise zu verlassen. Daher bezeichnen wir von nun an mit tiefer gestellten lateinischen Indizes die (kontravarianten) Komponenten von  $d$  dimensionalen Vektorfeldern. Wir definieren das chromoelektrische Feld

$$E_i^a := F_{i0}^a = -\partial_0 A_i^a - \hat{D}_i^{ab} A_0^b, \quad (2.22)$$

sowie in  $d = 3$  räumlichen Dimensionen das chromomagnetische Feld

$$B_i^a := \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{jk}^a = \frac{1}{2g} \epsilon_{ijk} [D_j, D_k]^a. \quad (2.23)$$

Hierbei ist der räumliche Anteil des Feldstärke-Tensors (2.16) bzw. der kovarianten Ableitung gegeben durch

$$F_{ij}^a = \partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a + g f^{abc} A_i^b A_j^c, \quad \hat{D}_i^{ab} = \delta^{ab} \partial_i + g f^{acb} A^c. \quad (2.24)$$

Die Yang-Mills-Lagrange-Dichte lautet ausgedrückt durch die Felder  $E$  und  $B$

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 - \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 - \rho_{\text{ext}} A_0, \quad (2.25)$$

---

<sup>6</sup>Dabei vernachlässigen wir die Tatsache, dass ein externes Eichfeld die Eichinvarianz verletzt. Tatsächlich wird eine Farbladungsdichte  $J^\mu = g \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$  durch das Quarkfeld dynamisch erzeugt und die Eichinvarianz gewahrt.

wobei wir die externe *Farbladung*  $\rho_{\text{ext}} \equiv J_0$  eingeführt und auf vektorielle Quellfelder verzichten. Die Hamilton-Dichte folgt aus Gl. (2.19) und lautet in  $d = 3$  räumlichen Dimensionen

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (\mathbf{\Pi}^2 + \mathbf{B}^2) - A_0^a \left( \hat{D}_i^{ab} \Pi_i^b - g \rho_{\text{ext}}^a \right), \quad (2.26)$$

wobei wir Gl. (2.20) und Gl. (2.22) verwendet haben.

Aus den hamiltonischen Bewegungsgleichungen

$$\partial_0 \Pi_i^a = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A_i^a}, \quad \partial_0 A_i^a = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Pi_i^a} \quad (2.27)$$

folgt insbesondere  $\partial_0 A_0 = 0$  und wegen Gl. (2.21)

$$\hat{\mathbf{D}}\mathbf{\Pi} = g \rho_{\text{ext}}. \quad (2.28)$$

Gl. (2.28) ist das *nicht-abelsche gaußsche Gesetz* (2.28), welches durch das nicht dynamische  $A_0$  Feld im Sinne eines Lagrange-Multiplikators implementiert wird.

Wegen des verschwindenden Impulses  $\Pi_0 = 0$ , ist es nicht ohne weiteres möglich Kommutatorrelationen für die kanonische Quantisierung einzuführen. Die *Weyl-Eichung* oder *Zeit-Eichung*

$$A_0^a \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.29)$$

nutzt die Eichfreiheit und eliminiert die  $A_0$ -Komponente des Eichfeldes. Danach können noch zeitunabhängige, räumliche Eichtransformationen  $U(\mathbf{x})$  durchgeführt werden, ohne dass die Weyl-Eichbedingung (2.29) zerstört wird. In Weyl-Eichung vereinfacht sich die Hamilton-Funktion der Yang-Mills-Theorie in  $d$  räumlichen Dimensionen zu<sup>7</sup>

$$H = \frac{1}{2} \int d^d x \left( \mathbf{\Pi}^2(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} F_{ij}^a(\mathbf{x}) F_{ji}^a(\mathbf{x}) \right). \quad (2.30)$$

Diese ist der Ausgangspunkt für die folgende kanonische Quantisierung. Durch die Verwendung der Weyl-Eichung geht jedoch das gaußsche Gesetz (2.28) als dynamische Bewegungsgleichung verloren und muss als Nebenbedingung gefordert werden.

## 2.2. Yang-Mills-Quantentheorie

In diesem Abschnitt verlassen wir die klassische Yang-Mills-Theorie und gehen über zur Quantenfeldtheorie. Dies geschieht in dieser Arbeit im Rahmen der kanonischen Quantisierung.

### 2.2.1. Kanonische Quantisierung

Bei der kanonischen Quantisierung werden Koordinaten und Impulse mit Hilfe einer, auf Poissonklammern beruhenden, Vertauschungsrelation zu Operatoren erhoben. Gleichzeitig werden Zustandsvektoren eines Hilbertraums eingeführt, auf denen diese Operatoren wirken. Die kanonische Quantisierung einer lokalen Eichtheorie, die unphysikalische Freiheitsgrade und implizit zusätzliche Nebenbedingungen beinhaltet, ist nicht trivial. Zahlreiche lesenswerte Referenzen zu diesem Thema finden sich auch in [21].

<sup>7</sup>Hier haben wir das chromoelektrische Feld  $B$  durch den Ausdruck für beliebige (räumliche) Dimensionen ersetzt.

Für die Quantisierung der Yang-Mills-Theorie in Weyl-Eichung ( $A_0 = 0$ ) führen wir folgende Kommutatorrelationen ein

$$\left[ A_i^a(\mathbf{x}), \Pi_j^b(\mathbf{y}) \right] = i\delta^{ab}\delta_{ij}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \left[ A_i^a(\mathbf{x}), A_j^b(\mathbf{y}) \right] = \left[ \Pi_i^a(\mathbf{x}), \Pi_j^b(\mathbf{y}) \right] = 0. \quad (2.31)$$

Im funktionalen Schrödinger-Bild [22] sind die Operatoren zeitunabhängig, während die Zustände des Systems durch einen zeitabhängigen Zustandsvektor  $|\psi\rangle$  beschrieben werden. In Koordinatendarstellung ist das Wellenfunktional des (zeitabhängigen) Zustands  $|\psi\rangle$  ein Funktional des Eichfeldes  $A$ , gegeben durch

$$\psi[A] = \langle A | \psi \rangle \quad (2.32)$$

und die Kommutatorrelationen (2.31) werden durch die (funktionalen) Operatoren

$$\check{A}(1) := A(1), \quad \check{\Pi}(1) := -i\frac{\delta}{\delta A(1)} \quad (2.33)$$

erfüllt. Die *Yang-Mills-Schrödinger-Gleichung* für das Wellenfunktional  $\psi[A]$  lautet [22]

$$i\partial_t\psi[A] = \check{H}\psi[A] \quad (2.34)$$

mit dem Yang-Mills-Hamilton-Operator

$$\check{H} := \frac{1}{2} \int d^d x \left( \mathbf{\Pi}^2(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} F_{ij}^a(\mathbf{x}) F_{ij}^a(\mathbf{x}) \right) \Big|_{\mathbf{\Pi}=\check{\mathbf{\Pi}}}, \quad (2.35)$$

der durch das Einsetzen des Impulsoperators (2.33) in die Hamilton-Funktion (2.30) entsteht.

Da der Hamilton-Operator zeitunabhängig ist und wir an dessen Grundzustand interessiert sein werden, beschränken wir uns auf die *stationäre* Schrödinger Gleichung

$$\check{H}\psi[A] = E\psi[A] \quad (2.36)$$

mit der Energie  $E$  im stationären Zustand  $\psi[A]$ . Wir werden im Folgenden auf die Kennzeichnung von Operatoren mit dem Symbol “ $\check{\phantom{x}}$ ” verzichten.

Durch die Wahl der Weyl-Eichung ( $A_0 = 0$ ) muss zusätzlich zur Schrödinger-Gleichung (2.36) das gaußsche Gesetz als Nebenbedingung

$$\hat{\mathbf{D}}\mathbf{\Pi}\psi[A] = g\rho_{\text{ext}}\psi[A] \quad (2.37)$$

an die *physikalischen* Zustände implementiert werden. Der Operator  $\hat{\mathbf{D}}\mathbf{\Pi}$  ist der Erzeuger von zeitunabhängigen Eichtransformationen und die Bedingung (2.37) Ausdruck der weiterhin bestehenden Eichinvarianz bezüglich räumlichen Eichtransformationen  $U(\mathbf{x})$  [23]. Bei Abwesenheit von externen Ladungen ( $\rho_{\text{ext}} = 0$ ) impliziert Gl. (2.37) die Eichinvarianz des Wellenfunctionals  $\psi[A^U] = \psi[A]$ .

Das Skalarprodukt zwischen zwei Zuständen  $|\psi\rangle$  und  $|\phi\rangle$  ist definiert als [23]

$$\langle \psi | \dots | \phi \rangle := \int \mathcal{D}A \psi^*[A] \dots \phi[A], \quad (2.38)$$

wobei das Pfadintegral über alle Eichfeldkonfigurationen zu nehmen und  $\psi^*[A]$  das komplex konjugierte Wellenfunktional ist. Der Erwartungswert eines Operators  $\mathcal{O}[A, \mathbf{\Pi}]$  im Zustand  $|\psi\rangle$  ist daher

$$\langle \mathcal{O}[A, \mathbf{\Pi}] \rangle := \langle \psi | \mathcal{O}[A, \mathbf{\Pi}] | \psi \rangle \quad (2.39)$$

mit dem Skalarprodukt (2.38).

Auch nach Quantisierung in Weyl-Eichung enthält die Theorie – wegen der bestehenden räumlichen Restreichfreiheit – noch mehr Variablen als physikalische Freiheitsgrade. Daher implementieren wir in der quantisierten Theorie die Coulomb-Eichung, was als Übergang zu krummlinigen Koordinaten verstanden werden kann. Der umgekehrte Weg, das Fixieren der Weyl- und Coulomb-Eichung auf klassischem Niveau und die daran anschließende Einführung von kanonischen Vertauschungsrelationen, ist ebenfalls möglich und führt zu den gleichen Ergebnissen [21].

### 2.2.2. Eichfixierung mit der Faddeev-Popov-Methode

Durch die Eichinvarianz der Zustände  $|\psi\rangle$  bezüglich zeitunabhängigen Eichtransformationen integriert das Pfadintegral in dem Skalarprodukt (2.38) über zahlreiche physikalisch äquivalente Feldkonfigurationen. Die Menge aller durch eine (räumliche) Eichtransformation  $U(\mathbf{x})$  verknüpften Konfigurationen

$$[A] = \{A' = UAU^\dagger + \frac{i}{g}U\nabla U^\dagger\}, \quad (2.40)$$

bildet eine Äquivalenzklasse. Entlang dieser *Eichorbits* bleiben die physikalischen Aussagen unverändert. Die Erwartungswerte (2.39) enthalten daher im Kontinuum eine divergente Konstante, die der Mächtigkeit der (räumlichen) Eichgruppe entspricht. Zusätzlich führt die Eichinvarianz zu technischen Schwierigkeiten [24] und macht im Hamiltonzugang das notwendige Arbeiten mit eichinvarianten Wellenfunktionalen erheblich aufwendiger [25]. Aus den genannten Gründen ist es daher vorteilhaft die unphysikalischen Freiheitsgrade durch eine *Eichfixierung* zu eliminieren. Dies bedeutet anschaulich die Eichorbits durch einen Repräsentanten eindeutig zu parametrisieren

Im Pfadintegral des Skalarproduktes (2.38) kann eine *Eichbedingung*  $F[A] \stackrel{!}{=} 0$  mit der *Faddeev-Popov-Methode* [26] implementiert werden. Diese Methode entspricht formal der Identität

$$1 = \int \mathcal{D}U \delta(F[A^U]) \text{Det}(G_A^{-1}) \quad (2.41)$$

mit der Integration über die Eichgruppe  $\int \mathcal{D}U$  und dem *Faddeev-Popov-Operator*

$$G_A^{-1,ab} := \frac{\delta F^a[A^U]}{\delta \Theta^b}, \quad (2.42)$$

dessen Determinante als Jacobi-Determinante des Übergangs in die neuen Koordinaten angesehen werden kann [27]. Durch Einsetzen von (2.41) kann im Pfadintegral des Skalarproduktes (2.38) die divergente Integration über die Eichgruppe faktorisiert werden.

Wegen des *Gribov-Problems* [28] gelingt mit der Faddeev-Popov-Methode im Allgemeinen *keine* vollständige Eichfixierung, d.h. es gibt weiterhin Feldkonfigurationen, die der Eichbedingung gehorchen und durch eine Eichtransformation ineinander überführt werden können. Im Kontinuumszugang existiert bisher keine zufriedenstellende Methode um diese sogenannten *Gribov-Kopien* vollständig auszuschließen. Für eine ausführlichere Diskussion dieser Problematik verweisen wir z.B. auf [29] und die dort enthaltenen Referenzen.

### 2.2.3. Yang-Mills-Theorie in Coulomb-Eichung

In dieser Arbeit untersuchen wir die Yang-Mills-Theorie in Coulomb-Eichung, die definiert ist durch die Bedingung

$$F^a[A] \equiv \partial_i A_i^a(\mathbf{x}) \stackrel{!}{=} 0. \quad (2.43)$$

Eine Verallgemeinerung dieser Eichung verwenden wir in Kap. 6. Die Coulomb-Eichung kann als physikalische Eichung betrachtet werden, die in abelschen Theorien alle nicht-physikalischen, eichabhängigen Freiheitsgrade eliminiert.

Um in Coulomb-Eichung diese Freiheitsgrade zu separieren, ist es hilfreich die orthogonalen Projektoren

$$t_{ij}(\mathbf{x}) := \delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\partial^2}, \quad l_{ij} := \delta_{ij} - t_{ij}(\mathbf{x}) \quad (2.44)$$

einzuführen, wobei der *transversale* Projektor im Impulsraum durch

$$t_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \quad (2.45)$$

gegeben ist. Für das Eichfeld  $A$  und den Impulsoperator  $\Pi$  gilt somit die Zerlegung

$$\begin{aligned} A_i &= A_i^\perp + A_i^\parallel, & A_i^\perp &= t_{ij} A_j, & A_i^\parallel &= l_{ij} A_j, \\ \Pi_i &= \Pi_i^\perp + \Pi_i^\parallel, & \Pi_i^\perp &= t_{ij} \Pi_j, & \Pi_i^\parallel &= l_{ij} \Pi_j \end{aligned}$$

in jeweils eine longitudinale  $A^\parallel, \Pi^\parallel$  und transversale  $A^\perp, \Pi^\perp$  Komponente. Letztere erfüllen die Kommutatorrelationen

$$\begin{aligned} [A_i^\perp{}^a(\mathbf{x}), \Pi_j^\perp{}^b(\mathbf{y})] &= i t_{ij}(\mathbf{x}) \delta^{ab} \delta_{ij} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ [A_i^\perp{}^a(\mathbf{x}), A_j^\perp{}^b(\mathbf{y})] &= [\Pi_i^\perp{}^a(\mathbf{x}), \Pi_j^\perp{}^b(\mathbf{y})] = 0. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Die Eichbedingung (2.43) wird durch die Faddeev-Popov-Methode im Skalarprodukt (2.38) implementiert, sodass gilt

$$\langle \psi | \mathcal{O} | \phi \rangle = \int \mathcal{D}A \delta(F[A]) \mathcal{J}[A] \psi^*[A] \mathcal{O}[A, \Pi] \phi[A] \quad (2.47)$$

mit dem inversen Faddeev-Popov-Operator (2.42) und der Faddeev-Popov-Determinante in Coulomb-Eichung gegeben durch

$$G_A^{-1} := \partial \hat{\mathbf{D}} \equiv (-\delta^{ab} \partial_i \partial_i - g \hat{A}_i^{ab} \partial_i) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (2.48a)$$

$$\mathcal{J}[A] := \text{Det}(G_A^{-1}). \quad (2.48b)$$

Die longitudinale Komponente des Eichfeldes  $A^\parallel$  kann in Gl. (2.47) durch die Eichbedingung (2.43) und die longitudinale Komponente des Impulsoperators  $\Pi_\parallel$  durch das gaußsche Gesetz (2.37) eliminiert werden. Dadurch ergibt sich der Hamilton-Operator in Coulomb-Eichung [30]<sup>8</sup>

$$H = \frac{1}{2} \left( \mathcal{J}^{-1}[A] \Pi(1) \mathcal{J}[A] \Pi(1) + B(1) B(1) \right) + H_C \quad (2.49)$$

mit dem Coulomb-Term

$$H_C = \frac{g^2}{2} \mathcal{J}^{-1}[A] \rho(1) \mathcal{J}[A] F_A(1, 2) \rho(2), \quad (2.50)$$

---

<sup>8</sup>Mit allen Indizes lautet der Hamilton-Operator

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int d^d x \left( \mathcal{J}^{-1}[A] \Pi_i^a(\mathbf{x}) \mathcal{J}[A] \Pi_i^a(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} F_{ij}^a(\mathbf{x}) F_{ji}^a(\mathbf{x}) \right) \\ &\quad + \frac{g^2}{2} \int d^d x d^d y \mathcal{J}^{-1}[A] \rho^a(\mathbf{x}) \mathcal{J}[A] F_A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho^b(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

der durch Eliminierung der Impulskomponente  $\Pi^{\parallel}$  entstanden ist und die Wechselwirkung der totalen Farbladungsdichte  $\rho = \rho_{\text{dyn}}[A] + \rho_{\text{ext}}$  über den sogenannten Coulomb-Operator

$$F_A = G_A G_0^{-1} G_A \quad (2.51)$$

beschreibt, wobei wir den freien Faddeev-Popov-Operator

$$G_0 = -(\partial^2)^{-1} \quad (2.52)$$

eingeführt haben. Die Ladungsdichte  $\rho$  der Eichbosonen enthält neben der externen  $\rho_{\text{ext}}$  auch die dynamische Farbladung<sup>9</sup>

$$\rho_{\text{dyn}}[A] = -\hat{\mathbf{A}}\mathbf{\Pi}. \quad (2.54)$$

Den ersten Teil des Hamilton-Operators (2.49)  $H_K := \frac{1}{2}\mathcal{J}^{-1}[A]\mathbf{\Pi}(1)\mathcal{J}[A]\mathbf{\Pi}(1)$  nennen wir in Anlehnung an die klassische Mechanik auch kinetischen Term und den zweiten Teil  $H_B := \frac{1}{2}B(1)B(1)$  magnetischen Term.

In Coulomb-Eichung kann das gaußsche Gesetz (2.37) explizit aufgelöst und alle Objekte als Funktion des transversalen Eichfeldes  $A^{\perp}$  ausgedrückt werden. Dafür enthält der Yang-Mills-Hamilton-Operator in Coulomb-Eichung (2.50) den nicht-lokalen Term  $H_C$ . Da von nun an nur noch transversale Felder bzw. Operatoren auftreten, verwenden wir die Schreibweise  $A \equiv A^{\perp}$ ,  $\mathbf{\Pi} \equiv \mathbf{\Pi}^{\perp}$ .

Schließlich lautet das Skalarprodukt (2.38)

$$\langle \psi | \mathcal{O} | \phi \rangle = \int \mathcal{D}A \mathcal{J}[A] \psi^*[A] \mathcal{O}[A, \mathbf{\Pi}] \phi[A] \quad (2.55)$$

mit dem Integral über das transversale Eichfeld  $A$  und der Faddeev-Popov-Determinante (2.48b).

## 2.3. Propagatoren des Hamiltonzugangs

Im Folgenden führen wir zu Charakterisierung der Lösung der Schrödinger-Gleichung *Korrelationsfunktionen* ein, die wir in dieser Arbeit untersuchen werden. Außerdem besprechen wir auf welche Weise für diese Objekte Bewegungsgleichungen in der Quantenfeldtheorie und speziell im Hamiltonzugang bestimmt werden können.

### 2.3.1. Korrelationsfunktionen und Dyson-Schwinger-Gleichungen

Wir betrachten der Einfachheit halber zuerst eine beliebige, euklidische Quantenfeldtheorie, die durch eine Wirkung  $S[\phi]$  definiert wird, die ein Funktional eines Feldes  $\phi$  sei. Im Folgenden beschränken wir uns auf statische, d.h. zeitunabhängige Ausdrücke und verwenden die Konvention (1.5).

Der Erwartungswert eines Operators  $\mathcal{O}[\phi]$ , der eine beliebige Funktion des Feldes  $\phi$  ist, ist durch das Pfadintegral

$$\langle \mathcal{O}[\phi] \rangle := \int \mathcal{D}\phi \mathcal{O}[\phi] \exp[-S[\phi]] \quad (2.56)$$

<sup>9</sup>Die dynamische Farbladung lautet mit allen Indizes

$$\rho_{\text{dyn}}(1) \equiv \rho_{\text{dyn}}^a(x) = \hat{A}_i^{ab} \Pi_i^b. \quad (2.53)$$

Diese kann in der Schreibweise von Gl. (1.5) auch geschrieben werden als  $\rho_{\text{dyn}}(1) = R(1; 2, 3)A(2)\mathbf{\Pi}(3)$  mit  $R(1, 2, 3) = f^{a_1 a_2 a_3} \delta_{i_2 i_3} \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3)$ .

definiert. Von besonderer Bedeutung sind Erwartungswerte einer polynomialen Kombination der Felder, z.B.

$$\langle \phi(1)\phi(2)\dots \rangle . \quad (2.57)$$

Diese Objekte werden Korrelationsfunktionen, Greensche Funktionen oder  $n$  Punktfunktionen, entsprechend der Anzahl  $n$  der auftretenden Felder, genannt.

Für (unzusammenhängende) Korrelationsfunktionen kann das erzeugende Funktional

$$Z[J] := \int \mathcal{D}\phi \exp[-S[\phi] + J(1)\phi(1)] \quad (2.58)$$

definiert werden, wobei ein Quellfeld  $J$  eingeführt wurde. Das Funktional  $Z[J]$  erzeugt Korrelationsfunktionen durch Funktionalableitung, z.B.

$$\langle \phi(1) \rangle = \frac{\delta}{\delta J(1)} Z[J] \Big|_{J=0} . \quad (2.59)$$

Bei Kenntnis aller Korrelationsfunktionen ist das erzeugende Funktional und somit alle Erwartungswerte der Quantenfeldtheorie vollständig bestimmt. Ohne  $Z[J]$  zu kennen, können Relationen zwischen den verschiedenen Korrelationsfunktionen aufgestellt werden. Diese funktionalen Bewegungsgleichungen werden *Dyson-Schwinger-Gleichungen* genannt [31]. Sie folgen aus der Identität [32]

$$0 \equiv \int \mathcal{D}\phi \frac{\delta}{\delta\phi} \exp[-S[\phi] + J(1)\phi(1)] , \quad (2.60)$$

deren Gültigkeit voraussetzt, dass  $\exp[-S[\phi] + \int J\phi]$  auf dem Rand des Integrationsgebietes verschwindet. Gl. (2.60) kann entweder als Bewegungsgleichung für das erzeugende Funktional selbst

$$0 \equiv \left( - \frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi(1)} \Big|_{\phi(1)=\frac{\delta}{\delta J(1)}} + J(1) \right) Z[J] \quad (2.61)$$

oder als Gleichung für Erwartungswerte der Form

$$\left\langle \frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi(1)} \exp[J(2)\phi(2)] \right\rangle = \langle J(1) \exp[J(2)\phi(2)] \rangle \quad (2.62)$$

interpretiert werden. In beiden Fällen folgen die Dyson-Schwinger-Gleichungen der Ordnung  $n$  durch  $n-1$ -faches Ableiten der entsprechenden Ausdrücke (2.61) bzw. (2.62) nach der Quelle  $J$ . Nach Eliminierung der Quelle  $J$  ergibt sich eine funktionale Gleichung für die entsprechende Korrelationsfunktion der Ordnung  $n$ .<sup>10</sup>

Dyson-Schwinger-Gleichungen stellen einen Zugang zur Quantentheorie dar, der zu den Kontinuumsmethoden gezählt wird. Die Anwendung im Rahmen der QCD ist z.B. in [10, 33, 34] beschrieben. Sie geben insbesondere einen “tiefen” Einblick in das Verhalten der Propagatoren bei kleinen Energien bzw. großen Abständen. Auch können endliche Temperaturen [35, 36] und Dichten [37] berücksichtigt werden. Jedoch macht die komplexe Struktur dieser Gleichungen bei deren Untersuchung zusätzliche Näherungen erforderlich.

Aufgrund der einfacheren Formulierung bei bestehender Lorentz-Kovarianz werden die meisten dieser Untersuchungen in Landau-Eichung durchgeführt. In Coulomb-Eichung ergeben sich aufgrund der Auszeichnung der zeitlichen Komponente technische Schwierigkeiten [38]. Dennoch konnten auch hier die Dyson-Schwinger-Gleichungen von Propagatoren untersucht werden [39–43].

---

<sup>10</sup>Das Funktional  $Z[J]$  erzeugt unzusammenhängende Korrelationsfunktionen, die sich in fundamentale Bausteine zerlegen lassen. Für diese können weitere erzeugende Funktionale definiert und deren Dyson-Schwinger-Gleichungen studiert werden. Hier werden wir nicht weiter auf diese Funktionale eingehen und verweisen für eine allgemeine Darstellung auf [32].

### 2.3.2. Dyson-Schwinger-Gleichungen im Hamiltonzugang

Im Hamiltonzugang kann das erzeugende Funktional  $Z[J]$  mit dem Vakuumzustand  $|\psi\rangle$  geschrieben werden als

$$Z[J] = \langle \psi | \exp [J(1)\phi(1)] | \psi \rangle. \quad (2.63)$$

Mit dem funktionalen Skalarprodukt (2.38) und dem Wellenfunktional  $\psi[\phi] = \langle \phi | \psi \rangle$  gilt

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \psi^*[\phi] \exp [J(1)\phi(1)] \psi[\phi]. \quad (2.64)$$

Durch die Definition einer Wirkung

$$e^{-S_\psi} := \psi^*[\phi] \psi[\phi] \quad (2.65)$$

erhält diese Darstellung für das erzeugende Funktional die gleiche Form wie Gl. (2.58). Entsprechend können die Methoden zur Ableitung von Dyson-Schwinger-Gleichungen wie zuvor verwendet werden.

Wird Gl. (2.62) auf das erzeugende Funktional (2.64) der Yang-Mills-Theorie im Hamiltonformalismus übertragen, ergibt sich [44]

$$\left\langle \frac{\delta S_\psi[A]}{\delta A(2)} \exp [J(1)A(1)] \right\rangle = \langle J(2) \exp [J(1)A(1)] \rangle - \left\langle \frac{\delta \ln \mathcal{J}[A]}{\delta A(2)} \exp [J(1)A(1)] \right\rangle, \quad (2.66)$$

wobei  $A$  das räumliche, transversale Eichfeld und  $\mathcal{J}[A]$  die Faddeev-Popov-Determinante (2.48b) in Coulomb-Eichung (2.43) ist.

Im Variationszugang werden wir zur Bestimmung der Lösung der Schrödinger-Gleichung einen Ansatz für das Vakuum-Wellenfunktional  $\psi[\phi]$  benutzen. Die aus Gl. (2.66) abgeleiteten Dyson-Schwinger-Gleichungen lassen sich nutzen, um die von dem Ansatz für das Wellenfunktional implizierten Bewegungsgleichungen auf transparente Weise zu studieren und die Berechnung von Erwartungswerten, insbesondere den im Variationszugang essentiellen Erwartungswert des Hamiltonoperators, zu vereinfachen.

### 2.3.3. Propagatoren

Die wichtigsten Propagatoren, also Korrelationsfunktionen der Ordnung  $n = 2$ , von denen in allen folgenden Kapiteln die Rede sein wird, führen wir im Folgenden ein.

**Gluon-Propagator** Der (statische) *Gluon-Propagator* ist der Erwartungswert einer bilinearen Kombination des Eichfeldes  $A$

$$D(1, 2) := \langle A(1)A(2) \rangle. \quad (2.67)$$

Die vollständige Indexstruktur des Gluon-Propagators lautet  $D(1, 2) \equiv D_{ij}^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

**Geist-Propagator** Der *Geist-Propagator* ist definiert als der Erwartungswert

$$G(1, 2) := \langle G_A(1, 2) \rangle \quad (2.68)$$

des inversen Faddeev-Popov-Operators  $G_A$  (2.48a). Er wird im Hamiltonzugang eingeführt, um die Faddeev-Popov-Determinante (2.48b) darzustellen.

**Coulomb-Propagator** Der *Coulomb-Propagator* ist der Erwartungswert

$$F(1, 2) := \langle F_A(1, 2) \rangle = \langle G_A(1, 3)G_0(3, 4)G_A(4, 2) \rangle \quad (2.69)$$

des Coulomb-Operators  $F_A$  (2.51), der auch dargestellt werden kann als [13, 45]

$$F_A = \frac{\partial}{\partial g}(gG_A). \quad (2.70)$$

Bei Vernachlässigung der  $g$  Abhängigkeit des Wellenfunktionals folgt mit Gl. (2.70) für den Coulomb-Propagator (2.69) der Zusammenhang

$$F(1, 2) = \frac{\partial}{\partial g} [gG(1, 2)] \quad (2.71)$$

mit dem Geist-Propagator  $G(1, 2)$  (2.68).

### 2.3.4. Geist-Dyson-Schwinger-Gleichung und Krümmung

Für den Geist-Propagator (2.68) kann ohne die Einführung eines erzeugenden Funktionals eine Dyson-Schwinger-Gleichung abgeleitet werden. Die Invertierung des Faddeev-Popov-Operators  $G_A^{-1}$  (2.48a) ergibt [13]

$$G_A = G_0 - G_A A \Gamma_0 G_0 \quad (2.72)$$

mit dem freien Geist-Propagator  $G_0$  (2.52) und dem nackten *Geist-Gluon-Vertex*  $\Gamma_0$  definiert durch

$$\Gamma_0(1, 2; 3) := \frac{\delta G_A^{-1}(1, 2)}{\delta A(3)}. \quad (2.73)$$

Aus dem Erwartungswert von Gl. (2.72) folgt für den Geist-Propagator die Gleichung

$$G^{-1}(1, 2) = G_0^{-1}(1, 2) + \Sigma(1, 2), \quad (2.74)$$

wobei wir die Selbstenergie

$$\Sigma(1, 2) := \Gamma_0(1, 4; 3) G(4, 4') D(3, 3') \Gamma(4', 2; 3') \quad (2.75)$$

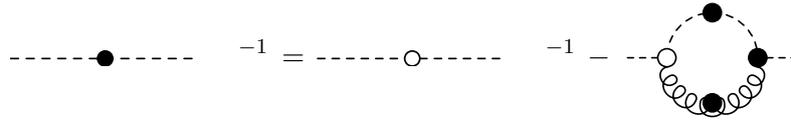
und den vollen Geist-Gluon-Vertex  $\Gamma$

$$\langle A G_A \rangle =: -D \Gamma G \quad (2.76)$$

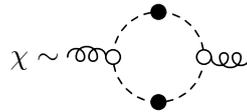
definiert haben. Gl. (2.74) ist in Abb. 2.1 dargestellt. Merkmale dieser typischen Dyson-Schwinger-Gleichung sind die nicht-lineare Struktur und die Kopplung sowohl an den Gluon-Propagator (2.67), als auch an den Geist-Gluon-Vertex  $\Gamma$  (2.76), eine Korrelationsfunktion höherer Ordnung.

In Coulomb-Eichung ist der Geist-Gluon-Vertex, wie auch in Landau-Eichung [46], (infrarot) endlich [47]. Außerdem ist das Dressing des Geist-Gluon-Vertex auf Ein-Loop-Niveau klein [48]. Dies wird auch durch die numerischen Lösungen der Dyson-Schwinger-Gleichung für den Geist-Gluon-Vertex in Coulomb-Eichung bestätigt [49]. Es ist daher gerechtfertigt den vollen Geist-Gluon-Vertex  $\Gamma$  in der *Rainbow-Ladder-Näherung* durch den nackten Vertex  $\Gamma_0$  zu ersetzen. In dieser Näherung lautet die Dyson-Schwinger-Gleichung für den Geist-Propagator (2.68)

$$G^{-1}(1, 2) = G_0^{-1}(1, 2) + \Gamma_0(1, 4; 3) G(4, 4') D(3, 3') \Gamma_0(4', 2; 3'), \quad (2.77)$$



**Abbildung 2.1.:** Darstellung der Dyson-Schwinger-Gleichung für den Geist-Propagator in diagrammatischer Form: gestrichelte Linien entsprechen dem Geist-Propagator, gewickelte Linien dem Gluon-Propagator. Gefüllte bzw. leere Kreise symbolisieren volle, bzw. nackte Vertexfunktionen an.



**Abbildung 2.2.:** Die Krümmung (2.80) entspricht einem Geist-Loop.

die somit nur noch an den Gluon-Propagator gekoppelt ist. Die Darstellung dieser Gleichung im Impulsraum besprechen in Abschn. 3.2.

Zur Berücksichtigung der Faddeev-Popov-Determinante bei der Berechnung der Energie in den folgenden Kapiteln führen wir die Krümmung

$$\chi(1, 2) := -\frac{1}{2} \left\langle \frac{\delta^2 \ln \mathcal{J}[A]}{\delta A(1) \delta A(2)} \right\rangle \quad (2.78)$$

ein. Mit der Ableitung

$$\frac{\delta}{\delta A(1)} \ln \mathcal{J}[A] = \frac{\delta}{\delta A(1)} \text{Tr} \ln G_A^{-1} = \Gamma_0(3, 2; 1) G_A(2, 3) \quad (2.79)$$

der Faddeev-Popov-Determinante (2.48b) gilt in der Rainbow-Ladder-Näherung für die Krümmung [13]

$$\chi(1, 2) = \frac{1}{2} \Gamma_0(3, 4; 1) G(3', 3) G(4, 4') \Gamma_0(4', 3'; 2), \quad (2.80)$$

die somit einem Geist-Loop [vgl. Abb. 2.2] entspricht. Dieser tritt bei der Berechnung der Energie [vgl. Kap. 3] oder innerhalb der Dyson-Schwinger-Gleichung für den Gluon-Propagator auf [48].

## 2.4. Yang-Mills-Quantentheorie bei endlichen Temperaturen

Aufgrund der asymptotischen Freiheit der QCD ist zu erwarten, dass bei hohen Temperaturen oder Dichten Quarks und Gluonen nicht länger in Hadronen gebunden sind. Diesen Übergang von der confinierten Phase – dem Hadronischen Zustand – zur deconfinierten Phase nennen wir *Deconfinement-Phasenübergang* [50, 51]. Die Hochtemperaturphase wird auch als Quark-Gluon-Plasma bezeichnet. In Schwerionenkollisionen am RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider) oder LHC wird nach den Eigenschaften des Quark-Gluon-Plasmas – und dem Phasenübergang – experimentell gesucht.

Gitterrechnungen bestätigen sowohl in der reinen Yang-Mills-Theorie [52] als auch in der vollen QCD die Existenz eines Phasenübergangs [53]. In der reinen Yang-Mills-Theorie wird für die Eichgruppen SU(2) ein Phasenübergang zweiter Ordnung und für SU(3) sowie für unendlich schwere Quarks ein Phasenübergang erster Ordnung erwartet. Für die reale QCD wird der Phasenübergang bei verschwindendem chemischen Potential zu einem kontinuierlichen Crossover [54]. Dies macht die Existenz eines kritischen Punktes im Phasendiagramm plausibel. Das gesamte Phasendiagramm der QCD als Funktion der Temperaturen  $T$  und dem chemischen Potential  $\mu$  weist wahrscheinlich eine komplexe Struktur auf [5].

Wichtigstes Werkzeug zum Studium des Phasendiagramms der QCD sind Gitterrechnungen [5, 9, 55]. Während bei verschwindendem chemischen Potential sehr genaue Berechnungen zum Phasenübergang der QCD möglich sind [9], ist dieser Zugang bei endlichen chemischen Potentialen nur mit zusätzlichen Verfahren möglich [9, 55]. Dem gegenüber haben perturbative Methoden bei endlichen Temperaturen ein sogenanntes Infrarotproblem [56]. Dies begründet die Entwicklung von nicht-perturbativen Verfahren zur Beschreibung der Theorie bei endlichen Temperaturen und Dichten. In dieser Arbeit untersuchen wir den Deconfinement-Phasenübergang in der reinen Yang-Mills-Theorie im Hamiltonformalismus. Daher widmen wir diesen Abschnitt der Einführung von endlichen Temperaturen und von dem Ordnungsparameter des Deconfinement-Phasenübergangs.

### 2.4.1. Großkanonisches Ensemble

Die Informationen der thermischen Yang-Mill-Theorie sind in der Zustandssumme [56]

$$Z = \text{Tr } \mathcal{D} \quad (2.81)$$

enthalten. Hier ist die *Dichtematrix*  $\mathcal{D}$  des großkanonischen Ensembles gegeben durch

$$\mathcal{D} = e^{-L(H(\mathbf{A}) - \mu N)} \quad (2.82)$$

mit dem Hamilton-Operator in Weyl-Eichung  $H(\mathbf{A})$  (2.35), der eine Funktion der räumlichen Komponenten des Eichfeldes  $\mathbf{A}$  ist, der inversen Temperatur  $L = 1/T$  und dem chemische Potential  $\mu$ . Für die (reine) Yang-Mills-Theorie hat das großkanonische Ensemble die gleiche Form wie das kanonischen Ensemble, da das chemische Potential der Gluonen verschwindet ( $\mu \equiv 0$ ). Aus der Zustandssumme (2.81) folgen die thermischen Zustandsgrößen, wie der Druck

$$P = -\frac{\ln Z}{LV}, \quad (2.83)$$

wobei  $V$  das Volumen ist. Thermische Erwartungswerte eines Operators  $\mathcal{O}$  sind über das Ensemble-Mittel

$$\langle \mathcal{O} \rangle_T := Z^{-1} \text{Tr } \mathcal{O} \mathcal{D} \quad (2.84)$$

definiert.

Die Zustandssumme (2.81) kann mit der Wirkung  $S[A]$  der Yang-Mills-Theorie durch ein euklidisches Pfadintegral

$$Z = \int_{\text{periodic}} \mathcal{D}A^\mu e^{-S[A^\mu]}, \quad S[A^\mu] = \int_{-L/2}^{L/2} dx^0 \int d^3x \mathcal{L}_{\text{YM}}(A^\mu) \quad (2.85)$$

ausgedrückt werden, wobei die Integration über in der Zeitrichtung periodische Felder

$$A^\mu(-L/2, \mathbf{x}) = A^\mu(L/2, \mathbf{x}) \quad (\text{bosonische Felder}) \quad (2.86)$$

beschränkt ist. Diese Darstellung der Zustandssumme entspricht der Standardform bei endlichen Temperaturen [56]. Sie kann als die Zustandssumme einer klassischen statistischen Feldtheorie in  $d + 1$  Dimensionen mit einer kompaktifizierten zeitlichen Dimension interpretiert werden.

Im Hamiltonformalismus der Yang-Mills-Theorie ist die Einführung des (großkanonischen) Ensembles (2.82) möglich, allerdings sind aufgrund der Struktur des Hamilton-Operators zusätzliche Näherungen notwendig. Diesen Zugang beschreiben wir in Kap. 4. In Weyl-Eichung ( $A_0 = 0$ ) treten ausschließlich statische Ausdrücke auf, daher ist in diesem Fall die Einführung von endlichen Temperaturen durch Kompaktifizierung der *Zeit-Achse* nicht möglich.

### 2.4.2. Kompaktifizierung einer räumlichen Richtung

Eine Methode Temperaturen im Hamiltonformalismus der Yang-Mills-Theorie durch Kompaktifizierung einer räumlichen Dimension einzuführen, wurde in [57] vorgestellt. Wir begründen hier diesen Zugang anhand der dort präsentierten Darstellungen.

Wegen der  $O(4)$ -Symmetrie der euklidischen Wirkung  $S[A]$  (2.85) sind alle vier Dimensionen äquivalent und anstatt die Zeit-Achse zu kompaktifizieren, können endliche Temperaturen in der Pfadintegraldarstellung auch durch Kompaktifizierung einer räumlichen Dimension eingeführt werden. Um dies zu veranschaulichen, führen wir folgende Variablentransformation durch

$$\begin{aligned} x^0 &\rightarrow z^3 & A^0 &\rightarrow C^3 \\ x^1 &\rightarrow z^0 & A^1 &\rightarrow C^0 \\ x^2 &\rightarrow z^1 & A^2 &\rightarrow C^1 \\ x^3 &\rightarrow z^2 & A^3 &\rightarrow C^2. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Wegen der  $O(4)$  Invarianz des euklidischen Lagrangians gilt

$$\mathcal{L}(A^\mu, x^\mu) = \mathcal{L}(C^\mu, z^\mu) \quad (2.88)$$

und die Zustandssumme (2.81) kann geschrieben werden als

$$Z(L) = \int_{\text{periodic}} \mathcal{D}C^\mu(z) e^{-\tilde{S}[C^\mu]}, \quad (2.89)$$

wobei die Wirkung jetzt definiert ist durch

$$\tilde{S}[C^\mu] := \int dz^0 dz^1 dz^2 \int_{-L/2}^{L/2} dz^3 \mathcal{L}(C^\mu, z^\mu). \quad (2.90)$$

Das Pfadintegral (2.89) ist über Felder zu nehmen, die der periodischen Randbedingung in  $z^3$ -Richtung,

$$C^\mu(z^0, z^1, z^2, L/2) = C^\mu(z^0, z^1, z^2, -L/2) \quad (2.91)$$

gehörchen.

Jetzt kann  $z^0$  als Zeit und  $\mathbf{z} = (z^1, z^2, z^3)$  als die räumlichen Koordinaten interpretiert werden. Anschließend kann die kanonische Quantisierung in ‘‘Weyl Eichung’’  $C^0 = 0$  mit den räumlichen Koordinaten des Eichfeldes  $\mathbf{C} = (C^1, C^2, C^3)$  durchgeführt werden, wobei das Eichfeld auf der räumlichen Mannigfaltigkeit  $\mathbb{R}^2 \times S^1(L)$ , statt auf  $\mathbb{R}^3$  definiert ist. Dies führt auf den gewöhnlichen Yang-Mills-Hamilton-Operator, in dem jedoch die Integration

in der  $z^3$  Koordinaten auf das Intervall  $\left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$  beschränkt ist und den wir mit  $\tilde{H}(\mathbf{C}, L)$  bezeichnen. Für die Zustandssumme (2.89) folgt daher die alternative Darstellung

$$Z(L) = \lim_{l \rightarrow \infty} \text{Tr} e^{-l\tilde{H}(\mathbf{C}, L)} \quad (2.92)$$

mit der Ausdehnung  $l \rightarrow \infty$  der nicht-kompaktifizierten räumlichen Dimension in  $z^0$ -Richtung und unter der Berücksichtigung, dass die (zeitlichen) Randbedingungen im Pfadintegral für  $l \rightarrow \infty$  irrelevant sind. In dieser Zustandssumme trägt nur die Energie  $E(L)$  des Vakuumzustands bei. Angeregte Zustände werden nur relevant, wenn  $l$  endlich bleibt, was bedeutet, dass eine der echten räumlichen Dimensionen auf eine endliche Ausdehnung beschränkt bleibt. Die Berechnung von  $Z(L)$  reduziert sich für  $l \rightarrow \infty$  auf die Lösung der stationären Schrödinger-Gleichung  $\tilde{H}(\mathbf{C}, L)\psi(\mathbf{C}) = E(L)\psi(\mathbf{C})$  für den Vakuumzustand auf der räumlichen Mannigfaltigkeit  $\mathbb{R}^2 \times S^1(L)$ , wobei  $S^1(L)$  ein Kreis mit dem Umfang  $L$  ist. Mit diesem Zugang ist die gesamte Temperaturabhängigkeit in dem auf  $\mathbb{R}^2 \times S^1(L)$  bestimmten Grundzustand und dessen Energie  $E(L)$  enthalten.

Diese Betrachtung zeigt, dass in jeder  $O(4)$  invarianten Quantenfeldtheorie endliche Temperaturen im Hamiltonformalismus durch Kompaktifizierung einer räumlichen Dimension und Lösung der zugehörigen Schrödinger-Gleichung für den Grundzustand eingeführt werden können. Zusammen mit dem Variationsprinzip nutzen wir diese Methode zur Beschreibung der Yang-Mills-Theorie bei endlichen Temperaturen in Kap. 5 und Kap. 6.

## 2.5. Ordnungsparameter des Deconfinement-Phasenübergangs

Für die Untersuchung des Deconfinement-Phasenübergangs ist es sinnvoll Ordnungsparametern zu Betrachten. Im Folgenden führen wir daher den *Polyakov-Loop* ein, den wir in Kap. 6 im Rahmen des Hamiltonformalismus der Yang-Mills-Theorie bestimmen. Zusätzlich definieren wir als *notwendiges* Kriterium für Confinement das *nicht-abelsche Coulomb-Potential*.

### 2.5.1. Polyakov-Loop

Die Wirkung der Yang-Mills-Theorie bei endlichen Temperaturen (2.85) ist invariant unter Eichtransformationen

$$U(L, \mathbf{x}) = z_k(\mathbf{x})U(0, \mathbf{x}), \quad (2.93)$$

welche in der Zeit periodisch bis auf ein Element  $z_k \in Z(N_c)$  des Zentrums der Eichgruppe  $SU(N_c)$  sind. Ein Zentrumselement  $z_k$  ist gegeben durch

$$z_k = e^{2i\pi\tilde{\mu}_k} = e^{i\frac{2\pi}{N_c}k} \mathbb{1} \in Z(N_c), \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.94)$$

mit einem (Ko-) Gewichtsvektor  $\tilde{\mu}_k = \tilde{\mu}_k^a t_a$ . Obwohl die Wirkung invariant unter diesen *Zentrumstransformationen* ist, müssen eichinvariante Observablen es nicht sein.

Der Polyakov-Loop (Operator) ist definiert als [58]

$$P[A_0](\mathbf{x}) := \frac{1}{N_c} \text{tr} \mathcal{P} \exp \left( - \int_0^L dx_0 A_0(x_0, \mathbf{x}) \right), \quad (2.95)$$

wobei  $\mathcal{P}$  die Pfadordnung ist und die Spur über die fundamentale Darstellung gebildet wird. Unter einer Zentrumstransformation (2.93) gilt für den Polyakov-Loop

$$P[A_0](\mathbf{x}) \rightarrow z_k P[A_0](\mathbf{x}), \quad (2.96)$$

der somit nicht invariant ist. Der Erwartungswert des Polyakov-Loops ist daher ein Ordnungsparameter für die Realisierung der Zentrumssymmetrie [4] und es gilt

$$\langle P[A_0](\mathbf{x}) \rangle \begin{cases} = 0 & Z(N_c) \text{ ungebrochen} \\ \neq 0 & Z(N_c) \text{ gebrochen} \end{cases} . \quad (2.97)$$

Zusätzlich entspricht der Erwartungswert des Polyakov-Loops

$$\langle P[A_0](\mathbf{x}) \rangle \sim e^{-LF_q(\mathbf{x})} \quad (2.98)$$

der freien Energie  $F_q(\mathbf{x})$  eines unendlich schweren – also statischen – Quarks [59]. Diese ist in der hadronischen Phase unendlich, während sie oberhalb des Deconfinement-Phasenübergangs endlich ist. Der Erwartungswert  $\langle P[A_0] \rangle$  verschwindet somit in der zentrumssymmetrischen confinierten Phase, während in der deconfinierten Phase  $\langle P[A_0] \rangle \neq 0$  gilt und die Zentrumssymmetrie gebrochen ist. In der reinen Yang-Mills-Theorie ist der *Polyakov-Loop* somit ein Ordnungsparameter des Deconfinement-Phasenübergangs.

Besonders einfach kann der Polyakov-Loop in Polyakov-Eichung berechnet werden, die definiert ist durch  $\partial_0 A_0 = 0$ , wobei  $A_0$  aus der Cartan-Subalgebra der Eichgruppe  $SU(N_c)$  gewählt wird. Da in diesem Fall die Pfadordnung in Gl. (2.95) irrelevant ist, gilt

$$P[A_0](\mathbf{x}) = \frac{1}{N_c} \text{tr} e^{-LA_0(\mathbf{x})} \quad (2.99)$$

und das Eichfeld  $A_0$  transformiert unter einer globalen Zentrumstransformation (2.94) wie

$$A_0 \rightarrow A_0 + \frac{2\pi}{L} \tilde{\mu}_k. \quad (2.100)$$

Für die Eichgruppen  $SU(2)$  and  $SU(3)$  gilt außerdem die Ungleichung [60, 61]

$$\langle P[A_0] \rangle \leq P[\langle A_0 \rangle] \quad (2.101)$$

in der deconfinierten Phase. Daher ist für diese Eichgruppen auch  $P[\langle A_0 \rangle]$  als Ordnungsparameter geeignet. Wegen der Beziehung in Gl. (2.99) zwischen dem Eichfeld  $A_0$  in Polyakov-Eichung und  $P[A_0]$  kann ebenso  $\langle A_0 \rangle$  selbst – statt  $P[\langle A_0 \rangle]$  – als Ordnungsparameter verwendet werden.

Der Wert von  $\langle A_0 \rangle$  wird durch das Minimum des *effektiven Potentials*  $e[\langle A_0 \rangle]$  bestimmt. Dabei erfordert ein nicht-verschwindender Erwartungswert  $\langle A_0 \rangle$  wegen der Eichinvarianz die Anwesenheit eines externen Hintergrundfeldes  $a$ . Ein konstantes Hintergrundfeld  $a$ , das die Bedingung  $a = \langle A_0 \rangle$  erfüllt und diagonal ist, ist selbst ein Ordnungsparameter für den Deconfinement-Phasenübergang, wenn sein Wert aus dem Minimum des effektiven Potentials  $e[\langle A_0 \rangle = a]$  bestimmt wird.

Für das effektive Potential gilt wegen der Eichinvarianz unter Zentrumstransformationen  $Z(N)$  (2.100)

$$e \left[ \langle A_0 \rangle + \frac{2\pi}{L} \tilde{\mu}_k \right] = e[\langle A_0 \rangle] . \quad (2.102)$$

Es wurde zuerst in Störungsrechnung auf Ein-Loop-Niveau bestimmt [62]. Korrekturen für dieses Potential durch die Renormierung des kinetischen Terms des Eichfeldes wurden in [63] berechnet. In diesen Rechnungen hat das Potential  $e[a]$  ein Minimum bei  $a_{\min} = 0$ , weshalb  $\langle P \rangle \simeq P[a_{\min}] = 1$  gilt. Dies bedeutet, dass sich die Theorie in der deconfinierten Phase – mit gebrochener Zentrumssymmetrie – befindet. Solch ein Verhalten wird bei hohen Temperaturen bzw. im perturbativen Bereich erwartet. Bei kleinen Temperaturen

in der confinierten Phase ist zu erwarten, dass  $e[a]$  ein Minimum  $a_{\min}$  bei einer zentrums-symmetrischen Konfiguration hat, für die der Polyakov-Loop mit  $\langle P \rangle \simeq P[a_{\min}] = 0$  verschwindet. Ein derartiges nicht-perturbatives Verhalten für das effektive Potential wurde mit Hilfe von Renormierungsgruppen-Methoden in [61, 64] berechnet.

In Weyl-Eichung ( $A_0 = 0$ ) ist  $\langle A_0 \rangle$  als Ordnungsparameter nicht zugänglich. Jedoch können wir wie in Abschn. 2.4.2 beschrieben unter Ausnutzung der  $O(4)$  Symmetrie auch eine räumliche Dimension kompaktifizieren um die Temperatur einzuführen und  $\langle A_3 \rangle$  als Ordnungsparameter betrachten. Auf diese Weise berechnen wir in Kap. 6 das effektive Potential des Polyakov-Loops im Hamiltonzugang zur Yang-Mills-Theorie bei endlichen Temperaturen.

Neben dem Polyakov-Loop sind der *Wilson-Loop* [6] oder der *'t Hooft-Loop* [65], sowie die Betrachtung von Zentrumsvortices [66, 67] geeignete Größen um die hadronische Phase von der deconfinierten Phase zu unterscheiden. Alle diese Parameter lassen sich mit einer nicht-trivialen Zentrumsymmetrie des Grundzustandes in Verbindung bringen [4].

### 2.5.2. Nicht-abelsches Coulomb-Potential

Als Indikator für Confinement gilt ein statisches Quark-Antiquark-Potential, das linear mit dem Abstand  $r$  anwächst, d.h.

$$V(r) \sim \sigma_W r, \quad (2.103)$$

wobei die *Wilson-String-Tension*  $\sigma_W$  aus dem Wilson-Loop bestimmt werden [4, 6] kann.

In Coulomb-Eichung beschreibt die Coulomb-Energie

$$E_C = \left\langle \frac{g^2}{2} \mathcal{J}^{-1}[A] \rho(1) \mathcal{J}[A] F_A(1, 2) \rho(2) \right\rangle \quad (2.104)$$

die Wechselwirkung von Farbladungen  $\rho$  durch den Coulomb-Propagator  $F_A$  (2.69). Damit kann ein nicht-abelsches *Coulomb-Potential* definiert werden [38]. Mit der externen Farbladungsverteilung

$$\rho(\mathbf{x})^a = \delta^{a3} \frac{1}{2} (\delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}/2) + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}/2)), \quad (2.105)$$

die einem statischen Quark-Antiquark-Paar im Abstand  $r = |\mathbf{r}|$  entspricht, lautet dieses Potential

$$V_C(r) = g^2 \langle F_A(0, 0) - F_A(r, 0) \rangle. \quad (2.106)$$

Das Coulomb-Potential ist eine obere Schranke für das physikalische, eichunabhängige Quark-Antiquark-Potential  $V(r)$  [68]. Daher ist ein notwendiges, aber nicht hinreichendes Kriterium für Confinement ein für große Abstände linear ansteigendes Coulomb-Potential,

$$V_C(r) \sim \sigma_C r. \quad (2.107)$$

In diesem Fall gilt die Ungleichung

$$\sigma_C \geq \sigma_W \quad (2.108)$$

für die String-Tensions der beiden eingeführten Potentiale. Gitterrechnungen [69–72] bestätigen einen mindestens um den Faktor 2 größeren Wert für die Coulomb-String-Tension  $\sigma_C$  gegenüber

$$\sigma_W \approx (440 \text{ MeV})^2. \quad (2.109)$$

Das nicht-abelsche Coulomb-Potential ist mit Gl. (2.71) durch den Geist-Propagator und damit durch die Faddeev-Popov-Determinante bestimmt. Dies steht in Beziehung zu dem

Gribov-Zwanziger-Confinement-Szenario [28, 73], das mit dem Gribov-Problem verbunden ist und Confinement mit dem Infrarotverhalten des Geist-Propagators verknüpft. Das Coulomb-Potential werden wir in den folgenden Kapiteln durch die Lösungen der Gleichungen für die Korrelationsfunktionen bestimmen.

## 2.6. Zusammenfassung

In diesem Kapitel haben wir den Hamiltonformalismus der Yang-Mills-Theorie dargestellt. Dabei sind wir auf die kanonische Quantisierung und die Notwendigkeit einer Eichfixierung eingegangen. Das wichtigste Resultat dieser Betrachtungen ist die funktionale Yang-Mills-Schrödinger-Gleichung in Coulomb-Eichung (2.36). Im nächsten Kapitel werden wir deren *Variationslösungen* für den Vakuumzustand besprechen. Zur Repräsentation dieser Lösungen haben wir Propagatoren eingeführt. Obwohl diese Korrelationsfunktionen wegen ihrer Eichabhängigkeit keine physikalischen Observablen sind, werden wir aus ihren Eigenschaften wichtige Erkenntnisse gewinnen.

Da wir den Deconfinement-Phasenübergang studieren wollen, haben wir in diesem Kapitel die Möglichkeiten zur Einführung von endlichen Temperaturen im Hamiltonformalismus entweder durch das großkanonische Ensemble oder der Kompaktifizierung einer räumlichen Dimension besprochen. Mit dem Polyakov-Loop haben wir den Ordnungsparameter für diesen Phasenübergang eingeführt. Darüber hinaus haben wir das nicht-abelsche Coulomb-Potential betrachtet, das als ein notwendiges Kriterium für Confinement fungiert.

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit bestimmen wir in Kap. 4 den Grundzustand bei endlichen Temperaturen durch das Variationsprinzip für das großkanonische Ensemble. Aus dem Verhalten der Propagatoren bei kleinen Energien werden wir die kritische Temperatur des Deconfinement-Phasenübergangs ermitteln. Endliche Temperaturen führen wir in Kap. 5 durch Kompaktifizierung einer räumlichen Dimension ein. Den Ordnungsparameter für den Deconfinement-Phasenübergang berechnen wir in Kap. 6 durch das effektive Potential des Polyakov-Loops, das wir aus der Energiedichte der Yang-Mills-Theorie mit einer kompaktifizierten Dimension bestimmen.



### 3. Vakuumzustand der Yang-Mills-Theorie im Hamiltonzugang

Die herausragenden Merkmale der Yang-Mills-Theorie – wie Confinement – sind Eigenschaften des Vakuums, das in der hamiltonschen Formulierung durch das Wellenfunktional des Grundzustands des Hamilton-Operators beschrieben wird. Im Gegensatz zur Quantenelektrodynamik ist das exakte Vakuum-Wellenfunktional der Yang-Mills-Theorie unbekannt.<sup>1</sup> Die Kenntnis dieses Wellenfunktionals ist jedoch für ein Verständnis der nicht-perturbativen Eigenschaften wichtig.<sup>2</sup>

Im Hamiltonformalismus steht als nicht-perturbative Methode zur approximativen Bestimmung des Vakuum-Wellenfunktionals das *Variationsprinzip* zur Verfügung.<sup>3</sup> Dieses folgt aus dem Rayleigh-Ritz-Prinzip, welches besagt, dass für die Grundzustandsenergie und einen beliebigen Zustand  $|\psi\rangle$

$$E_0 \leq \frac{\langle \psi | H | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \quad (3.1)$$

gilt. Ein Ansatz für den Grundzustand  $|\psi\rangle$  des Yang-Mills-Vakuums kann durch Minimierung der Energie

$$E = \frac{\langle \psi | H | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \longrightarrow \min \quad (3.2)$$

optimiert werden. Dadurch wird eine approximative Lösung der (stationären) Schrödinger-Gleichung und eine Abschätzung für die wahre Vakuum-Energie erzeugt.

Gegenstand dieses Kapitels ist die Bestimmung des Vakuumzustands der Yang-Mills-Theorie in Coulomb-Eichung mit dem Variationsprinzip. Dieser *Variationszugang* wurde bereits in [80] verwendet und in [27, 81] mit einem gaußschen Ansatz für das Wellenfunktional in einem Quasiteilchen-Bild für Gluonen wieder aufgegriffen. Die hier dargestellten Resultate basieren auf den in [13] entwickelten Methoden, die von den vorangegangenen Arbeiten durch einen modifizierten Ansatz für das Wellenfunktional und einer vollständigen Berücksichtigung der Faddeev-Popov-Determinante abweichen.

In Rahmen des Variationszugangs konnte eine erfolgreiche Beschreibung der Infrarot-Physik der Yang-Mills-Theorie realisiert werden. Insbesondere wurden als Signal für Confinement ein infrarot-unterdrückter Gluon-Propagator [13, 82, 83] und ein linear ansteigendes nicht-abelsches Coulomb-Potential [82] abgeleitet. Als weitere nicht-perturbativen Eigenschaften wurden eine infrarot-endliche laufende Kopplung [13], ein Umfangsgesetz für den 't Hooft-Loop [84] und ein Flächengesetz für den Wilson-Loop [85] für den Vakuumzustand der Yang-Mills-Theorie berechnet. Sowohl Gitterrechnungen in Coulomb-Eichung [71, 86] als auch Ergebnisse aus Renormierungsgruppen-Gleichungen [87] bestätigen diese Resultate.

<sup>1</sup>Eine Diskussion über mögliche Vakuum-Wellenfunktionale in  $D = 2 + 1$  Dimensionen ist in [74, 75] und in  $D = 3 + 1$  in [76, 77] zu finden.

<sup>2</sup>Für perturbative Rechnungen im funktionalen Schrödingerbild [78] ist die Kenntnis des exakten Wellenfunktionals nicht erforderlich.

<sup>3</sup>Auch in kovarianter Formulierung kann ein Variationsprinzip auf Ebene der effektiven Wirkung entwickelt werden [79].

In diesem Kapitel fassen wir die wichtigsten Ergebnisse des Variationszugangs zusammen. Hierzu diskutieren wir zuerst die Wahl der Wellenfunktion in Abschn. 3.1. Die hiermit abgeleiteten Bewegungsgleichungen für den Geist- und Coulomb-Propagator sowie die Einführung von Formfaktoren besprechen wir in Abschn. 3.2. In Abschn. 3.3 stellen wir die Energiedichte und die durch das Variationsprinzip abgeleitete Gap-Gleichung dar. Auf die Renormierungsprozedur der Integralgleichungen gehen wir in Abschn. 3.4 ein. Die analytischen Eigenschaften der Lösungen und die Selbstkonsistenz der gekoppelten Gleichungen erörtern wir in Abschn. 3.5. Zum Schluss diskutieren wir in Abschn. 3.6 die numerischen Lösungen [13, 82, 83, 88] der gekoppelten Integralgleichungen für den Gluon-Propagator sowie für den Geist- und Coulomb-Propagator.

### 3.1. Vakuum-Wellenfunktional

Im Variationszugang (3.2) zur Yang-Mills-Theorie in Coulomb-Eichung verwenden wir für den Vakuumzustand als Ansatz das gaußsche Wellenfunktional [13, 88]<sup>4</sup>

$$\psi[A] = \mathcal{J}^{-1/2}[A] \tilde{\psi}[A], \quad \tilde{\psi}[A] := \mathcal{N} \exp \left[ -\frac{1}{2} A(1) \omega(1, 2) A(2) \right], \quad (3.3)$$

wobei  $\omega(1, 2)$  ein *Variationskern*,  $\mathcal{J}[A]$  die Faddeev-Popov-Determinante der Coulomb-Eichung (2.48b) und  $\mathcal{N}$  eine geeignete Normierungskonstante ist.<sup>5</sup> Nach Fixierung der Coulomb-Eichung (2.43) ist das Wellenfunktional eine Funktion des transversalen Eichfeldes  $A \equiv A_{\perp}$ .

Der Erwartungswert eines Operators  $\mathcal{O}[A, \Pi]$  im Zustand (3.3) kann mit dem Skalarprodukt (2.55) geschrieben werden als [13]

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}[A, \Pi] \rangle &\equiv \int \mathcal{D}A \mathcal{J}[A] \psi^*[A] \mathcal{O}[A, \Pi] \psi[A] \\ &= \int \mathcal{D}A \tilde{\psi}^*[A] \tilde{\mathcal{O}}[A, \Pi] \tilde{\psi}[A] =: \langle \tilde{\mathcal{O}}[A, \Pi] \rangle_{\sim}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

wobei wir den transformierten Operator  $\tilde{\mathcal{O}}[A, \Pi]$  [13]

$$\tilde{\mathcal{O}}[A, \Pi] := \mathcal{J}[A]^{1/2} \mathcal{O}[A, \Pi] \mathcal{J}[A]^{-1/2} \quad (3.5)$$

eingeführt haben. Formal eliminiert diese Transformation und die Normierung des Wellenfunktionals (3.3) die Faddeev-Popov-Determinante  $\mathcal{J}[A]$  aus dem Skalarprodukt und dem Erwartungswert (3.4). Das nicht-lokale Funktional  $\mathcal{J}[A]$  verbleibt jedoch in den nach (3.5) transformierten Operatoren und tritt im Coulomb-Hamiltonian  $H_C$  (2.50) explizit auf.

---

<sup>4</sup>Im Variationszugang können auch Wellenfunktionale berücksichtigt werden, die über die gaußsche Form (3.3) hinaus gehen. In [89] wurde das Wellenfunktional

$$\psi[A] \sim \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \omega A^2 + \frac{1}{3!} \gamma^{(3)} A^3 + \frac{1}{4!} \gamma^{(4)} A^4 \right) \right]$$

betrachtet, das zusätzliche Variationskerne  $\gamma^{(3)}, \gamma^{(4)}$  enthält, die höhere Ordnungen an gluonischen Wechselwirkungen berücksichtigen. Hierdurch wird insbesondere der Gluon-Loop in der Gap-Gleichung berücksichtigt, der das UV-Verhalten im Vergleich zu den perturbativen Lösungen verbessert [89].

<sup>5</sup>Die Normierungskonstante stellt sicher, dass  $\langle \psi | \psi \rangle = 1$ . Der Kern  $\omega$  muss positiv sein, damit die Wellenfunktion normierbar ist und es gilt  $\mathcal{N}^2 \simeq (\text{Det } 2\omega)^{1/2}$ .

Das von dem gaußschen Wellenfunktional (3.3) implizierte erzeugende Funktional für Korrelationsfunktionen [vgl. (2.64)] hat eine besonders einfache Gestalt. Da das Pfadintegral über das transversale Eichfeld ausintegriert werden kann, gilt [13]

$$Z[J] = \exp\left(\frac{1}{2}J(1)D(1,2)J(2)\right), \quad (3.6)$$

wobei zwischen dem Gluon-Propagator  $D(1,2)$  [vgl. (2.67)] und dem Variationskern  $\omega(1,2)$  der einfache Zusammenhang

$$D(1,2) \equiv \frac{1}{2}\omega^{-1}(1,2) \quad (3.7)$$

besteht. Daher lassen sich für das gaußsche Wellenfunktional (3.3) alle Erwartungswerte durch den Gluon-Propagator  $D$  bzw. den Variationskern  $\omega$  ausdrücken.

In Coulomb-Eichung ist der Gluon-Propagator bei räumlicher Homogenität und Isotropie diagonal im Farbraum und transversal in den Vektorkomponenten. Daher kann für den Variationskern  $\omega(1,2)$  der Ansatz

$$\omega_{ij}^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta^{ab}t_{ij}(\mathbf{x})\omega(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (3.8)$$

verwendet werden, wobei der transversale Projektor  $t$  in Gl. (2.44) definiert ist. Im Impulsraum gilt der Zusammenhang

$$D(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\omega(\mathbf{k})}, \quad (3.9)$$

weshalb  $\omega(\mathbf{k})$  auch als *Gluonenergie* bezeichnet wird.

## 3.2. Propagatoren und Formfaktoren

Wir betrachten die Bewegungsgleichungen der in Abschn. 2.3.3 definierten Propagatoren für den Ansatz (3.3) des Wellenfunktionals.

**Gluon-Propagator** Der Gluon-Propagator  $D$  hat für das Wellenfunktional (3.3) den Zusammenhang (3.7) mit dem Variationskern  $\omega$ , der später durch Minimierung der Energie bestimmt wird. Es ist daher nicht nötig für den Gluon-Propagator selbst eine Dyson-Schwinger-Gleichung abzuleiten. Wird bei der Definition des gaußschen Wellenfunktionals (3.3) auf die Normierung mit der Faddeev-Popov-Determinante  $\mathcal{J}[A]$  verzichtet, dann gilt für den Gluon-Propagator im Hamiltonformalismus die Dyson-Schwinger-Gleichung [89, 90]

$$D^{-1}(1,2) = 2\omega(1,2) + 2\chi(1,2), \quad (3.10)$$

wobei  $\chi(1,2)$  die Krümmung (2.78) ist.<sup>6</sup> Den Einfluss der Normierung mit der Faddeev-Popov-Determinante ( $\mathcal{J}^{-1/2}[A]$ ) diskutieren wir bei der Bestimmung der Energiedichte in Abschn. 3.3.

Neben dem Gluon-Propagator sind die Propagatoren

$$\langle \Pi(1)\Pi(2) \rangle = \frac{1}{2}\omega(1,2) \quad (3.11a)$$

$$\langle A(1)\Pi(2) \rangle = \frac{i}{2}\delta(1,2), \quad (3.11b)$$

bei der Berechnung der Energiedichte hilfreich. Beide Gleichungen lassen sich für das Wellenfunktional (3.3) leicht mit dem Impulsoperator (2.33) und dem Skalarprodukt (3.4) ableiten.

<sup>6</sup>Für den inversen Gluon-Propagator wird auch die Bezeichnung  $\Omega := \frac{1}{2}D^{-1}$  verwendet. Mit der in dieser Arbeit verwendeten Normierung des gaußschen Wellenfunktionals (3.3) mit  $\mathcal{J}^{-1/2}[A]$  gilt somit  $\Omega = \omega$ .

**Geist-Formfaktor und Krümmung** Die in Abschn. 2.3.3 aufgestellte Dyson-Schwinger-Gleichung für den Geist-Propagator  $G(1, 2)$  [vgl. (2.74)] ist unabhängig von der Wahl der Wellenfunktion, jedoch an den Gluon-Propagator  $D(\mathbf{k})$  gekoppelt. Wir führen an dieser Stelle den *Geist-Formfaktor*  $d(\mathbf{k})$  ein, der im Impulsraum definiert ist durch

$$G^{ab}(\mathbf{k}) =: \delta^{ab} \frac{d(\mathbf{k})}{g \mathbf{k}^2}. \quad (3.12)$$

Der Formfaktor  $d(\mathbf{p})$  beschreibt die Abweichung der Yang-Mills-Theorie von der abelschen QED ( $d \equiv 1$ ) und kann als die dielektrische Funktion des Yang-Mills-Vakuums angesehen werden [91].

Mit der Definition (3.12) lautet die Dyson-Schwinger-Gleichung [Gl. (2.74)] für den Formfaktor  $d(\mathbf{k})$  [13]

$$d^{-1}(\mathbf{k}) = \frac{1}{g} - I_d(\mathbf{k}), \quad I_d(\mathbf{k}) := N_c \int \bar{d}^d q \left[ 1 - (\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{q}})^2 \right] \frac{d(\mathbf{k} - \mathbf{q})}{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} \frac{1}{2\omega(\mathbf{q})}, \quad (3.13)$$

wobei wir den Gluon-Propagator mit Gl. (3.9) durch den Variationskern  $\omega$  ersetzt haben. Dies ist eine nicht-lineare Integralgleichung, die ein Schleifenintegral (Loop)  $I_d(\mathbf{k})$  über einen (internen) Impuls enthält und an den Gluon-Propagator bzw. die Gluonenergie gekoppelt ist.

Die Konvention in der Definition (3.12) hat den Vorteil, dass die Kopplungskonstante  $g$  nicht mehr in der *renormierten* Gleichung für den Geist-Formfaktor auftritt [vgl. (3.44)]. Tatsächlich entfällt  $g$  aus allen Gleichungen, die keinen gluonischen Vertex enthalten. Auch die Anzahl der Farben  $N_c$  kann auf gleiche Weise mit  $\tilde{d} := d\sqrt{N_c}$  in die Normierung des Geist-Formfaktors absorbiert werden. Somit können alle folgenden Betrachtungen für beliebige  $N_c$  übernommen werden. Lediglich die Verhältnisse zwischen den Formfaktoren und die physikalische Skala [vgl. Abschn. 3.6.9] muss angepasst werden.

Die skalare Krümmung<sup>7</sup> [vgl. (2.80)] lautet im Impulsraum [13]

$$\chi(\mathbf{k}) = \frac{N_c}{2(d-1)} \int \bar{d}^d q \left[ 1 - (\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{q}})^2 \right] \frac{d(\mathbf{k} - \mathbf{q}) d(\mathbf{q})}{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} \quad (3.14)$$

mit dem Geist-Formfaktor  $d(\mathbf{k})$  und der Anzahl  $d-1 = t_{ii}(\mathbf{k})$  der Polarisationsrichtungen der gluonischen Freiheitsgraden in  $d$  räumlichen Dimensionen.

**Coulomb-Formfaktor** Für den Coulomb-Propagator (2.69) führen wir durch

$$F(\mathbf{k}) =: \frac{d(\mathbf{k})^2 f(\mathbf{k})}{g^2 k^2} \quad (3.15)$$

einen Formfaktor  $f$  ein. Mit der Relation

$$f(\mathbf{k}) = -g^2 \frac{\partial}{\partial g} d^{-1}(\mathbf{k}), \quad (3.16)$$

die aus Gl. (2.71) abgeleitet werden kann, folgt bei Vernachlässigung der  $g$ -Abhängigkeit der Wellenfunktion bzw. des Variationskerns  $\omega(\mathbf{k})$  für den Coulomb-Formfaktor (3.15) die Integralgleichung [13]

$$f(\mathbf{k}) = 1 + I_f(\mathbf{k}), \quad I_f(\mathbf{k}) := \frac{N_c}{2} \int \bar{d}^d q \left[ 1 - (\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{q}})^2 \right] \frac{d(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2 f(\mathbf{k} - \mathbf{q})}{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2 \omega(\mathbf{q})}, \quad (3.17)$$

<sup>7</sup>Die skalare Krümmung ist definiert durch  $\chi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) := \frac{1}{d-1} \frac{1}{N_c^2-1} \delta^{ab} t_{ij}(\mathbf{x}) \chi_{ij}^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  [vgl. (2.80)]

mit dem Schleifenintegral  $I_f(\mathbf{k})$ . Schließlich gilt für das nicht-abelsche Coulomb-Potential [vgl. (2.106)]

$$V_C(r) = g^2 \int \bar{d}^d k F(k) (1 - e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}) = \int \bar{d}^d k \frac{d(k)^2 f(k)}{k^2} (1 - e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}) \quad (3.18)$$

mit der Definition des Coulomb-Formfaktors (3.15).

### 3.3. Energiedichte und Gap-Gleichung

Die Bestimmung des Vakuum-Wellenfunktionals durch das Variationsprinzip (3.2) besteht aus zwei Schritten: Zuerst berechnen wir den Erwartungswert des Hamilton-Operators in dem durch das *Test*-Wellenfunktional (3.3) beschriebenen Zustand. Durch die Minimierung der Energie wird dieser Ansatz optimiert und eine *Gap-Gleichung* für den Variationskern  $\omega$  abgeleitet.

Die Energie berechnen wir auf Zwei-Loop-Niveau, weshalb diese nur Terme mit maximal zwei Schleifenintegralen enthält. Daher entspricht die aus der Energie abgeleitete Gap-Gleichung, wie auch die zuvor dargestellten Bewegungsgleichungen für den Geist- und Coulomb-Formfaktor, dem Ein-Loop-Niveau.

#### 3.3.1. Energiedichte

Die Energie ist der Erwartungswert des Hamilton-Operators in Coulomb-Eichung (2.49) im Testzustand  $|\psi\rangle$  (3.3),

$$E := \langle H \rangle \equiv \langle \psi | H | \psi \rangle, \quad (3.19)$$

wobei die einzelnen Beiträge zu  $E$  nach ihrer jeweiligen Quelle in der (klassischen) Hamiltonfunktion aufgeteilt werden können in

$$E =: E_K + E_B + E_C \quad (3.20)$$

mit der kinetischen  $E_K = \langle H_K \rangle$ , der potenziellen  $E_B = \langle H_B \rangle$  und der Coulomb-Energie  $E_C = \langle H_C \rangle$  (2.50).

Da  $H_B$  über das chromomagnetische Feld  $B$  nur Polynome des Eichfeldes  $A$  enthält, lautet die potentielle Energie  $E_B$  im Impulsraum [13, 89]

$$E_B = \frac{(N_c^2 - 1)(d - 1)}{4} V \int \bar{d}^d q \frac{\mathbf{q}^2}{\omega(\mathbf{q})} + g^2 \frac{N_c(N_c^2 - 1)}{16} \frac{(d - 1)^3}{d} V \left( \int \bar{d}^d q \frac{1}{\omega(\mathbf{q})} \right)^2 \quad (3.21)$$

mit dem (divergenten) räumlichen Volumen  $V \equiv \delta(0)$ . Weil die beiden übrigen Bestandteile  $E_K$  und  $E_C$  die Faddeev-Popov-Determinante enthalten, sind zur deren Bestimmung weitere Näherungen nötig. Auf Zwei-Loop-Niveau gilt für die Faddeev-Popov-Determinante [79, 90]

$$\mathcal{J}[A] \simeq \exp[-A(1)\chi(1, 2)A(2)] \quad (3.22)$$

mit der skalaren Krümmung (3.14). Dieser Ausdruck für  $\mathcal{J}[A]$  erleichtert die Berechnung der Energie. Dazu betrachten wir die Transformation (3.5) des Impulsoperators [vgl. (2.33)]

$$\tilde{\Pi}(1) = \mathcal{J}[A]^{1/2} \Pi(1) \mathcal{J}[A]^{-1/2} = \Pi(1) + \frac{i}{2} \frac{\delta \ln \mathcal{J}[A]}{\delta A(1)} \approx \Pi(1) - i\chi(1, 2)A(2), \quad (3.23)$$

wobei die letzte Beziehung am Einfachsten mit der Krümmungs-Näherung (3.22) abgeleitet werden kann. Mit dieser Gleichung für den transformierten Impulsoperator  $\tilde{\Pi}$  und mit den Propagatoren (3.7), (3.11a) und (3.11b) folgt die kinetische Energie [13, 89]

$$E_K = \langle \tilde{\Pi}^\dagger \tilde{\Pi} \rangle_{\sim} = \frac{(N_c^2 - 1)(d - 1)}{4} V \int \tilde{d}^d q \frac{(\omega(\mathbf{q}) - \chi(\mathbf{q}))^2}{\omega(\mathbf{q})}, \quad (3.24)$$

wobei  $\langle \dots \rangle_{\sim}$  in Gl. (3.4) und die skalare Krümmung  $\chi(\mathbf{k})$  in Gl. (3.14) definiert sind.

Die Coulomb-Energie  $E_C = \langle H_C \rangle$  folgt mit der Annahme, dass der Coulomb-Operator (2.70) durch seinen Erwartungswert ersetzt werden kann, auf gleiche Weise [13, 89]

$$E_C = g^2 \frac{N_c(N_c^2 - 1)}{16} V \times \int \tilde{d}^d q \int \tilde{d}^d p \left[ d - 2 + (\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{q}})^2 \right] F(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \frac{(\omega(\mathbf{q}) - \chi(\mathbf{q}) - (\omega(\mathbf{p}) - \chi(\mathbf{p})))^2}{\omega(\mathbf{q})\omega(\mathbf{p})}. \quad (3.25)$$

Hier ist  $F(\mathbf{k})$  der in Gl. (3.15) definierte Coulomb-Propagator.

Schließlich definieren wir die Energiedichte

$$e := \frac{E}{(N_c^2 - 1)(d - 1)V}, \quad (3.26)$$

die mit Gl. (3.21), Gl. (3.24) und Gl. (3.25) lautet

$$e[\omega] = \frac{1}{4} \int \tilde{d}^d q \frac{(\omega(\mathbf{q}) - \chi(\mathbf{q}))^2 + \mathbf{q}^2}{\omega(\mathbf{q})} + \frac{g^2 N_c (d - 1)^2}{16 d} \left( \int \tilde{d}^d q \frac{1}{\omega(\mathbf{q})} \right)^2 + \frac{g^2 N_c}{16(d - 1)} \int \tilde{d}^d q \int \tilde{d}^d p \left[ d - 2 + (\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{q}})^2 \right] F(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \frac{[\omega(\mathbf{q}) - \chi(\mathbf{q}) - (\omega(\mathbf{p}) - \chi(\mathbf{p}))]^2}{\omega(\mathbf{q})\omega(\mathbf{p})}. \quad (3.27)$$

Die Energiedichte ist ein Funktional des Kerns  $\omega(\mathbf{k})$  sowie des Geist- und Coulomb-Formfaktors  $d(\mathbf{k})$  bzw.  $f(\mathbf{k})$ . Diese wurden bei der Berechnung der Energiedichte als Hilfsgrößen verwendet, die durch ihre jeweiligen Integralgleichungen (3.13) bzw. (3.17) bestimmt werden müssen, die an die Gluonenergie  $\omega(\mathbf{k})$  gekoppelt sind.

Eine andere Normierung des Wellenfunktionals (3.3) verändert die Beziehung zwischen dem Gluon-Propagator  $D$  und dem Variationskern  $\omega$ . In diesem Fall kann die Dyson-Schwinger-Gleichung für den Gluon-Propagator (3.10) verwendet werden, um Energiedichte als Funktional des Gluon-Propagators  $D$  zu schreiben, wodurch die Form der Energiedichte unverändert bleibt [13, 89].

### 3.3.2. Gap-Gleichung

Mit dem Variationsprinzip (3.2) kann jetzt eine Bestimmungsgleichung für  $\omega$  im Ansatz (3.3) für das Wellenfunktional abgeleitet werden. Diese *Gap-Gleichung* folgt aus der Variation<sup>8</sup>

$$\frac{\delta e}{\delta \omega(\mathbf{k})} \stackrel{!}{=} 0, \quad (3.28)$$

---

<sup>8</sup>Hierzu ist für das gaußsche Wellenfunktional (3.3) wegen Gl. (3.7) die Variation

$$\frac{\delta e}{\delta D(\mathbf{k})} \stackrel{!}{=} 0$$

nach dem Gluon-Propagator  $D(\mathbf{k})$  äquivalent.

der Energiedichte (3.27) nach dem Kern  $\omega$ . Da wir die Gap-Gleichung auf Ein-Loop-Niveau bestimmen, vernachlässigen wir bei der Variation die implizite Abhängigkeit der Krümmung  $\chi(\mathbf{k})$  und der Formfaktoren  $f(\mathbf{k})$ ,  $d(\mathbf{k})$  von dem Variationskern  $\omega(\mathbf{k})$ . In dieser Näherung ergibt sich die Gap-Gleichung zu [13]

$$\omega^2(\mathbf{k}) = \mathbf{k}^2 + \chi(\mathbf{k})^2 + I_\omega^{(0)} + I_\omega(\mathbf{k}). \quad (3.29)$$

Hier ist das vom nicht-abelschen Teil der magnetischen Energie stammende, impulsunabhängige Tadpole-Integral  $I_\omega^{(0)}$  definiert als

$$I_\omega^{(0)} := \frac{g^2 N_c}{2} \frac{(d-1)^2}{d} \int \mathrm{d}^d q \frac{1}{\omega(\mathbf{q})} \quad (3.30)$$

und das Coulomb-Integral  $I_\omega(\mathbf{k})$  als

$$I_\omega(\mathbf{k}) := \frac{g^2 N_c}{2(d-1)} \int \mathrm{d}^d q \left[ d - 2 + (\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{q}})^2 \right] F(\mathbf{q} + \mathbf{k}) \frac{[\omega(\mathbf{q}) - \chi(\mathbf{q}) + \chi(\mathbf{k})]^2 - \omega(\mathbf{k})^2}{\omega(\mathbf{q})}. \quad (3.31)$$

Letzteres kann in folgender Form aufgeteilt werden [13]

$$I_\omega(\mathbf{k}) = I_\omega^{(2)}(\mathbf{k}) + 2\chi(\mathbf{k})I_\omega^{(1)}(\mathbf{k}), \quad (3.32)$$

wobei die Integrale  $I_\omega^{(l)}$ ,  $l \in \{1, 2\}$  definiert sind durch

$$I_\omega^{(l)}(\mathbf{k}) := \frac{g^2 N_c}{2(d-1)} \int \mathrm{d}^d q \left[ d - 2 + (\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{q}})^2 \right] F(\mathbf{q} + \mathbf{k}) \frac{[\omega(\mathbf{q}) - \chi(\mathbf{q})]^l - [\omega(\mathbf{k}) - \chi(\mathbf{k})]^l}{\omega(\mathbf{q})}. \quad (3.33)$$

Die Darstellung (3.32) ist für das Isolieren von Divergenzen hilfreich.

Das Variationsproblem führt mit dem gaußschen Wellenfunktional in Ein-Loop-Niveau auf die Gap-Gleichung (3.29). Diese muss zusammen mit der Gleichung für den Geist-Formfaktor (3.13) und für den Coulomb-Formfaktor (3.17) selbstkonsistent gelöst werden. Diese sind in  $d = 3$  räumlichen Dimensionen UV-divergent und bedürfen einer Regularisierung sowie einer Renormierung.

### 3.4. Renormierung

Zur Analyse der Divergenzen in der Gap-Gleichung (3.29), sowie in der Gleichung für den Geist- (3.13) und für den Coulomb-Formfaktor (3.17) in  $d = 3$  räumlichen Dimensionen verwenden wir die perturbativen Lösungen [78, 92]

$$\omega(k) = k, \quad d(k) = f(k) = 1, \quad k \equiv |\mathbf{k}|. \quad (3.34)$$

Für die Integrale in der Gap-Gleichung (3.29) ergibt eine naive Dimensionsanalyse

$$\begin{aligned} I_\omega^{(0)} &\sim \Lambda^2 \\ I_\omega^{(1)}(k) &\sim \Lambda + \text{endl.} \\ I_\omega^{(2)}(k) &\sim \Lambda^2 + a_1 k^2 \log(\Lambda/\mu) + b_1 \mu^2 \log(\Lambda/\mu) + \text{endl.}, \end{aligned}$$

wobei  $\Lambda$  eine UV-Regularisierung darstellt<sup>9</sup>,  $\mu$  eine aus Dimensionsgründen eingeführte Impulsskala ist und  $a_1$ ,  $b_1$  dimensionslose Konstanten sind. Außerdem ist die Krümmung (3.14) in der Gap-Gleichung linear divergent, d.h.

$$\chi(\mathbf{k}) \sim \Lambda + \text{endl.}$$

<sup>9</sup>Wir verwenden innerhalb der Impulsintegrale einen  $O(d)$  invarianten Cutoff  $\Lambda$ .

Die renormierte Krümmung folgt aus der Renormierung der Faddeev-Popov-Determinante zu [88]

$$\bar{\chi}(\mathbf{k}) := \chi(\mathbf{k}) - \chi(\mu_\chi) \quad (3.35)$$

mit einer Impulsskala  $\mu_\chi$ . Da die Krümmung in dem Coulomb-Integral (3.31) nur in der Kombination  $\chi(\mathbf{k}) - \chi(\mathbf{q})$  auftritt, kann sie direkt durch die renormierte Krümmung  $\bar{\chi}(\mathbf{k})$  ersetzt werden. Daher verzichten wir auf die Einführung einer Renormierungskonstanten  $\chi(\mu_\chi)$  und betrachten die Impulsskala  $\mu_\chi$  als physikalischen Parameter.

Für die Gap-Gleichung verwenden wir die Renormierungsprozedur aus [88]. Hierbei werden im Hamilton-Operator die Counter-Terme

$$\Delta H = \frac{1}{2} C_0(\Lambda) A(1)A(1) + iC_1(\Lambda)A(1)\Pi(1) \quad (3.36)$$

mit den Renormierungskonstanten  $C_0(\Lambda)$  und  $C_1(\Lambda)$  verwendet. Die Energiedichte (3.27) enthält daher die zusätzlichen Terme

$$\Delta e = C_0(\Lambda) \frac{1}{2} \int \bar{d}^d q \frac{1}{\omega(\mathbf{q})} - C_1(\Lambda) \int \bar{d}^d q \frac{\omega(\mathbf{q}) - \bar{\chi}(\mathbf{q})}{\omega(\mathbf{q})}, \quad (3.37)$$

wodurch die Gap-Gleichung (3.29) modifiziert wird zu [88]

$$\omega(\mathbf{k})^2 = \mathbf{k}^2 + \bar{\chi}(\mathbf{k})^2 + I_\omega^{(0)} + I_\omega^{(2)}(\mathbf{k}) - 2C_0(\Lambda) + 2\bar{\chi}(\mathbf{k}) \left[ I_\omega^{(1)}(\mathbf{k}) - \bar{\chi}(\mathbf{k}) \right]. \quad (3.38)$$

Die endlichen Anteile  $c_0$ ,  $c_1$  der divergenten Konstanten  $C_0(\Lambda)$  und  $C_1(\Lambda)$  können so gewählt werden, dass

$$2C_0(\Lambda) = c_0 + I_\omega^{(0)} + I_\omega^{(2)}(\mu_\omega), \quad C_1(\Lambda) = c_1 + I_\omega^{(1)}(\mu_\omega) \quad (3.39)$$

gilt und die impulsunabhängigen Divergenzen aus der Gap-Gleichung entfernt werden. Mit der Definition

$$\Delta I_\omega^{(l)}(\mathbf{k}) := I_\omega^{(l)}(\mathbf{k}) - I_\omega^{(l)}(\mu_\omega) \quad (3.40)$$

lautet die renormierte Gap-Gleichung schließlich

$$\omega(\mathbf{k})^2 = \mathbf{k}^2 + \bar{\chi}(\mathbf{k})^2 + c_0 + \Delta I_\omega^{(2)}(\mathbf{k}) + 2\bar{\chi}(\mathbf{k}) \left[ \Delta I_\omega^{(1)}(\mathbf{k}) + c_1 \right]. \quad (3.41)$$

Die Renormierungskonstante  $c_0$  hat Einfluss auf den Wert der Gluonenergie  $\omega(\mathbf{k})$  bei  $\mu_\chi$ . Die Bedeutung von  $c_1$  untersuchen wir bei der Analyse des Infrarotverhaltens in Abschn. 3.5.2.

Bei Vernachlässigung der Coulomb-Terme  $\Delta I_\omega^{(1)}$ ,  $\Delta I_\omega^{(2)}$  reduziert sich die renormierte Gap-Gleichung auf die einfache Form

$$\omega^2(\mathbf{k}) = \mathbf{k}^2 + \bar{\chi}^2(\mathbf{k}) + c_0. \quad (3.42)$$

Die endliche Konstante  $c_0$  hat hier ihren Ursprung ausschließlich in dem endlichen Teil des Tadpole-Terms  $I_\omega^{(0)}$ . Einen Vergleich zwischen den Lösungen mit und ohne Coulomb-Term [Gl. (3.41) und Gl. (3.42)] zeigen wir in Abschn. 3.6.4.

Das Schleifenintegral in der Dyson-Schwinger-Gleichung für den Geist-Formfaktor  $d(\mathbf{k})$  (3.13) ist in  $d = 3$  räumlichen Dimensionen logarithmisch divergent

$$I_d(k) \sim \log(\Lambda/\mu) + \text{endl.} \quad (3.43)$$

Diese Gleichung wird renormiert durch Subtraktion bei einer beliebigen Impulsskala  $\mu_d$

$$d^{-1}(\mathbf{k}) = d^{-1}(\mu_d) - \Delta I_d(\mathbf{k}), \quad \Delta I_d(\mathbf{k}) := I_d(\mathbf{k}) - I_d(\mu_d). \quad (3.44)$$

Der Wert der endlichen Renormierungskonstante  $d^{-1}(\mu_d)$  entscheidet in  $d = 3$  räumlichen Dimensionen von welchem Typ die Lösungen der Geist-Gleichung (3.44) sind. Das Gribov-Zwanziger-Confinement-Szenario [28, 73] setzt die Horizont-Bedingung [93] voraus, die für den Geist-Formfaktor geschrieben werden kann als

$$d^{-1}(k = 0) = 0. \quad (3.45)$$

Diese Bedingung kann durch die Wahl

$$d^{-1}(\mu_d) = \Delta I_d(k = 0) = I_d(0) - I_d(\mu_d) \quad (3.46)$$

für die Renormierungskonstante in der renormierten Dyson-Schwinger-Gleichung (3.44) verwirklicht werden. Dies ist für jeden Renormierungspunkt  $\mu_d$  möglich, solange  $I_d(\mu_d)$  endlich ist.<sup>10</sup> Mit diesem Wert für  $d^{-1}(\mu_d)$  ergibt sich die Geist-Gleichung in der Form

$$d^{-1}(\mathbf{k}) = - (I_d(\mathbf{k}) - I_d(0)), \quad (3.47)$$

was der renormierten Gleichung (3.44) bei der Skala  $\mu_d = 0$  und mit  $d^{-1}(\mu_d) = 0$  entspricht.

Die Lösungen, die der Horizont-Bedingung (3.45) genügen und für  $k \rightarrow 0$  divergent sind, werden *kritische Lösungen* genannt. Entsprechend heißt eine Lösung *sub-kritisch* falls  $d^{-1}(0) > 0$  gilt.<sup>11</sup> In den folgenden beiden Abschnitten werden wir ausführlicher besprechen, wie beide Lösungstypen durch den Parameter  $d^{-1}(\mu_d)$  unterschieden werden können.

Die Dyson-Schwinger-Gleichung für den Coulomb-Formfaktor  $f(\mathbf{k})$  (3.17) ist in  $d = 3$  räumlichen Dimensionen ebenso wie die Geist-Gleichung (3.13) logarithmisch divergent,

$$I_f(k) \sim \log(\Lambda/\mu) + \text{endl.} \quad (3.48)$$

Durch Abziehen bei einer beliebigen Skala  $\mu_f$  erhalten wir die renormierte Gleichung

$$f(\mathbf{k}) = f(\mu_f) + \Delta I_f(\mathbf{k}), \quad \Delta I_f(\mathbf{k}) := I_f(\mathbf{k}) - I_f(\mathbf{k} = \mu_f). \quad (3.49)$$

Die Renormierungsskala  $\mu_f$  für den Coulomb-Formfaktor kann unabhängig von der Skala  $\mu_d$  des Geist-Formfaktors gewählt werden. Da diese Integralgleichungen jedoch durch Gl. (3.16) eng verbunden sind, sollte  $\mu_f = \mu_d$  gewählt werden.

In  $d = 2$  räumlichen Dimensionen sind die Gleichungen für  $d(\mathbf{k})$  und  $f(\mathbf{k})$  endlich und bedürfen keiner Renormierung [83]. Außerdem kann gezeigt werden, dass in  $d = 2$  ausschließlich kritische Lösungen möglich sind [83]. Der Parameter  $d^{-1}(\mu_d)$  hat daher in diesem Fall keinen Einfluss auf das Infrarotverhalten, sondern muss wie die übrigen Renormierungskonstanten ( $c_0, \mu_\chi$ ) konsistent mit der Kritikalität des gekoppelten Gleichungssystems sein.

### 3.5. Analytische Eigenschaften der Variationslösung

Die renormierte Gap-Gleichung (3.41) sowie die renormierten Integralgleichungen für den Geist- und den Coulomb-Formfaktor (3.44) bzw. (3.49) können im Hoch- oder Niederenergiebereich – bei großen  $k \rightarrow \infty$  (ultraviolett) oder bei kleinen  $k \rightarrow 0$  (infrarot) äußeren Impulsen – analytisch untersucht werden, um ihr asymptotisches Verhalten zu bestimmen.

<sup>10</sup>Solange das regularisierte Integral  $I_d(\mu_d, \Lambda)$  endlich ist als Funktion von  $\mu_d$ .

<sup>11</sup>Im Dyson-Schwinger-Zugang zur Yang-Mills-Theorie in Landau-Eichung [94] werden diese Lösungen *scaling* und *decoupling* Lösungen genannt.

### 3.5.1. UV-Analyse

Eine UV-Analyse der Bewegungsgleichungen des Variationszugangs wurde in [13] durchgeführt. Ausgehend von dem perturbativen Verhalten  $\omega(k) = k$  wurden in der Winkel-Näherung<sup>12</sup> im Hochenergiebereich die selbst-konsistenten, asymptotischen Lösungen

$$\omega(k) = k, \quad d(k) \sim \frac{1}{\sqrt{\ln(k/\mu)}}, \quad (3.50a)$$

$$f(k) \sim \frac{1}{\sqrt{\ln(k/\mu)}}, \quad \bar{\chi}(k) \sim \frac{k}{\ln(k/\mu)}. \quad (3.50b)$$

für  $d(k)$  und  $f(k)$ , sowie für die Krümmung  $\chi(k)$  in  $d = 3$  räumlichen Dimensionen bestimmt [13]. Das in Gl. (3.50b) dargestellten UV-Verhalten der Krümmung unterscheiden sich von den in [13] veröffentlichten Resultaten. Dies lässt sich wie folgt begründen: Mit dem Ansatz (3.50a) für den Geist-Formfaktor kann die renormierte Krümmung für große Impulse geschrieben werden als

$$\bar{\chi}(k) \sim \int_{\mu_x}^k dq \frac{1}{\ln(k/\mu)} \sim -\frac{k}{\ln(k/\mu)} + \text{const}, \quad (3.51)$$

wobei wir die Winkel-Näherung [21] verwendet haben.

Die *anomalen Dimensionen* des Geist-Formfaktors und der Gluonenergie definieren wir durch

$$d(k \rightarrow \infty) \simeq \frac{1}{\ln^\delta(k/\mu)}, \quad \omega(k \rightarrow \infty) \simeq k \ln^\gamma(k/\mu). \quad (3.52)$$

Ein Vergleich mit dem in Winkel-Näherung bestimmten UV-Verhalten ergibt die Werte

$$\gamma = 0, \quad \delta = 1/2. \quad (3.53)$$

Diese erfüllen die Konsistenzbedingung

$$\gamma + 2\delta = 1, \quad (3.54)$$

die aus der Dyson-Schwinger-Gleichung des Geist-Formfaktors (3.13) abgeleitet werden kann [21]. Die in Winkel-Näherung bestimmten anomalen Dimensionen der Lösungen des Variationszugangs stimmen jedoch nicht mit den perturbativen Ergebnissen in Coulomb-Eichung überein. Aus der eichinvarianten laufenden Kopplung in Ein-Loop-Niveau folgt für das UV-Verhalten der statischen Propagatoren  $\gamma = 3/11$  und  $\delta = 4/11$  [21, 92]. Wir bestimmen die anomalen Dimensionen der numerischen Ergebnisse in Abschn. 3.6.5.

Die Gap-Gleichung ohne Coulomb-Term (3.42) ist eine algebraische Gleichung, deren asymptotisches Verhalten sich aus der Entwicklung der Wurzelfunktion ergibt.<sup>13</sup> Für die Gluonenergie gilt daher bei großen Impulsen  $k \rightarrow \infty$

$$\omega(k \rightarrow \infty) \approx k + \frac{1}{2} \frac{\bar{\chi}(k)^2}{k} + \frac{1}{2} \frac{c_0}{k} + \dots \quad (3.55)$$

Mit dem asymptotischen Verhalten der Krümmung (3.50b) hat  $\omega(k)$  bis zur zweiten Ordnung das UV-Verhalten

$$\omega(k \rightarrow \infty) \approx k \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{c}{[\log(k/\mu)]^2} + \mathcal{O}([\log(k/\mu)]^{-4}) \right] + \frac{1}{2} \frac{c_0}{k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^3}\right). \quad (3.56)$$

Die Lösungen  $\omega(k)$  der Gap-Gleichung (3.42) enthalten daher nach der führenden Ordnung  $k$  zahlreiche logarithmische Korrekturen der Form  $k/\log(k/\mu)^n$ .

<sup>12</sup>Die Winkel-Näherung wird auch *y-max Approximation* [95] genannt. Sie ersetzt eine Funktion, die von dem Skalarprodukt abhängig ist durch:  $h(|\mathbf{k} + \mathbf{q}|) \simeq \Theta(k - q)h(k) + \Theta(q - k)h(q)$ . Siehe auch [96, 97].

<sup>13</sup>Erinnerung:  $(1 + x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \binom{\alpha}{n}$  ( $|x| < 1$ ). Daher ist  $(1 + x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \mathcal{O}(x^3)$ .

### 3.5.2. Infrarotanalyse

Für die Infrarotanalyse der Integralgleichungen benutzen wir die Potenzgesetze

$$\omega(k) = \frac{A}{k^\alpha}, \quad d(k) = \frac{B}{k^\beta}, \quad f(k) = \frac{C}{k^\eta}, \quad (k \equiv |\mathbf{k}|) \quad (3.57)$$

als Ansätze für die Gluonenergie  $\omega(k)$  und die Formfaktoren  $d(k)$ ,  $f(k)$ . Hierdurch werden die *Infrarotexponenten*  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\eta$ , sowie die *Infrarotamplituden*  $A$ ,  $B$ ,  $C$  definiert. Das Verhalten der Schleifenintegrale in den Dyson-Schwinger-Gleichungen (3.44), (3.41) und (3.49) bei kleinen Impulsen  $k \rightarrow 0$  lässt sich mit der sogenannten Infrarotnäherung untersuchen [47, 98–100]. Hierbei werden die Potenzgesetze (3.57) im gesamten Impulsbereich verwendet und die Schleifenintegrale analytisch ausgeführt. Dadurch werden die Bestimmungsgleichungen für die Propagatoren, bzw. Formfaktoren in algebraische Gleichungen überführt. Aus Konsistenz-Bedingungen lassen sich Aussagen über die Infrarotexponenten und Infrarotamplituden des gekoppelten Gleichungssystems machen.

Die Infrarotanalyse der Bewegungsgleichungen des Variationszugangs mit der Infrarotnäherung wurden in [47] und für den Coulomb-Formfaktor gesondert in [88] durchgeführt. Wir fassen hier diese Ergebnisse zusammen und gehen insbesondere auf die Konsistenz der drei Gleichungen (3.44), (3.49) und (3.41) ein.

**Geist-Formfaktor** Mit den Potenzansätzen (3.57) lautet die renormierte Integralgleichung (3.44) für den Geist-Formfaktor  $d(\mathbf{k})$  nach Ausführung des Schleifenintegrals<sup>14</sup>

$$\frac{k^\beta}{B} = d(\mu_d)^{-1} - \frac{N_c B}{A} \frac{d-1}{4} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} k^{d-2+\alpha-\beta} I_{d\omega}(\alpha, \beta, d) + I_d(\mu_d) \quad (3.58)$$

mit der dimensionslosen Funktion [47]

$$I_{d\omega}(\alpha, \beta, d) := \frac{\Gamma(\frac{d}{2} + \frac{\alpha}{2})\Gamma(\frac{d}{2} - \frac{\beta}{2})\Gamma(\frac{1}{2}(2-d-\alpha+\beta))}{\Gamma(1 - \frac{\alpha}{2})\Gamma(d + \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2})\Gamma(1 + \frac{\beta}{2})} \quad (3.59)$$

und einem impulsunabhängigen Beitrag  $I_d(\mu_d)$  aus der Renormierungsprozedur, der eine Funktion des Renormierungspunktes  $\mu_d$  ist. Die Geist-Gleichung in der Infrarotnäherung (3.58) macht keine Aussagen über die absoluten Werte der Unbekannten  $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $A$  und  $B$ . Jedoch bringt eine Fallunterscheidung weitere Erkenntnisse:

- (a) Falls  $d - 2 + \alpha - \beta \geq 0$  ist, dann verschwindet für  $k \rightarrow 0$  die Impulsabhängigkeit der rechten Seite von Gl. (3.58). Entsprechend muss sie auch auf der linken Seite verschwinden. Ist in diesem Fall  $d(\mu_d)^{-1} + I_d(\mu_d) \neq 0$  oder  $d - 2 + \alpha - \beta = 0$  nimmt die rechte Seite einen konstanten Wert an und es gilt  $d(k \rightarrow 0) = \text{konst.}$ , bzw.  $\beta = 0$ . Gilt im Gegensatz dazu  $d(\mu_d)^{-1} + I_d(\mu_d) = 0$ , dann folgt mit der gleichen Annahme  $\beta \geq 0$  sowie die *Summenregel* [47]

$$\alpha = 2\beta - (d - 2), \quad (3.60)$$

da die Impulsabhängigkeit der beiden Seiten von Gl. (3.58) übereinstimmen muss. Dieser Fall schließt daher *kritische* Geist-Formfaktoren mit  $\beta > 0$  ein. Diese Aussagen bleiben auch bei der Wahl von  $\mu_d = 0$  gültig, da nach Voraussetzung  $I_d(\mu_d \rightarrow 0) \sim \mu_d^{d-2+\alpha-\beta}$  verschwindet oder konstant ist.

<sup>14</sup>Für die analytische Berechnung der Faltungsintegrale der Form  $\int d^d q \frac{1}{(q+\mathbf{k})^\alpha} \frac{1}{q^\beta}$  siehe auch [98, 99, 101].

- (b) Falls  $d - 2 + \alpha - \beta < 0$  ist, dann divergiert für  $k \rightarrow 0$  der impulsabhängige Teil auf der rechten Seite und es folgt durch Vergleich der Dimensionen ebenfalls die Summenregel (3.60) und aus der Annahme  $\beta < 0$ , was einem infrarot-unterdrückten Geist-Formfaktor entspricht. Das Abziehen des in diesem Fall divergenten Schleifenintegrals bei  $\mu_d = 0$  führt zu einem Widerspruch mit der Folgerung aus der Annahme, da hierdurch  $\beta \geq 0$  impliziert werden würde.

Die Geist-Gleichung hat somit infrarot-divergente oder unterdrückte Lösungen, die die Summenregel (3.60) erfüllen, sowie Lösungen mit konstantem Geist-Formfaktor  $d(k \rightarrow 0) = \text{konst}$ , die die Summenregel *nicht* erfüllen müssen. Für infrarot-divergente (und unterdrückte) Lösungen folgt aus Gl. (3.58) die Beziehung<sup>15</sup>

$$\frac{A}{B^2} = -\frac{N_c(d-1)}{4} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} I_{d\omega}(\alpha, \beta, d) \Big|_{\alpha=2\beta-d+2}, \quad (3.61)$$

die das dimensionslose Verhältnis  $A/B^2$  zwischen den Infrarotamplituden  $A$  und  $B$  mit den Infrarotexponenten  $\alpha$  und  $\beta$  verknüpft. Unterdrückte Lösungen mit  $\beta < 0$  sind inkompatibel mit der Horizont-Bedingung (3.45) und werden durch die selbstkonsistenten Betrachtungen im Folgenden ausgeschlossen. Wegen der Struktur der Geist Dyson-Schwinger-Gleichung kann für infrarot-divergente oder endliche Lösungen der Renormierungspunkt  $\mu_d = 0$  verwendet werden.

**Coulomb-Formfaktor** Die Gleichung für den Coulomb-Formfaktor (3.49) lautet nach Integration des Schleifenintegrals

$$\frac{C}{k^\eta} = f(\mu_f) + \frac{N_c B^2 C}{A} k^{d-2+\alpha-2\beta-\eta} \frac{d-1}{4} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} I_{fd\omega}(\eta, \beta, \alpha, d) + I_f(\mu_f) \quad (3.62)$$

mit der dimensionslosen Funktion  $I_{fd\omega}(\alpha, \beta, \eta, d)$  definiert durch [88]

$$I_{fd\omega}(\alpha, \beta, \lambda, d) := \frac{\Gamma(\frac{d}{2} - \frac{\alpha}{2})\Gamma(\frac{d}{2} - \beta - \frac{\lambda}{2})\Gamma(\beta + 1 - \frac{d}{2} + \frac{\lambda}{2} - \frac{\alpha}{2})}{\Gamma(1 - \frac{\alpha}{2})\Gamma(1 + \beta + \frac{\lambda}{2})\Gamma(d - \beta + \frac{\alpha}{2} - \frac{\lambda}{2})} \quad (3.63)$$

und dem vom externen Impuls unabhängigen Integral  $I_f(\mu_f)$ . Erneut ist eine Fallunterscheidung hilfreich:

- (a) Falls  $d - 2 + \alpha - 2\beta - \eta \geq 0$  ist, dann verschwindet für  $k \rightarrow 0$  die Impulsabhängigkeit der rechten Seite von Gl. (3.62) und muss entsprechend auch auf der linken Seite verschwinden. Ist in diesem Fall  $f(\mu_f) + I_f(\mu_f) \neq 0$  (oder  $d - 2 + \alpha - 2\beta - \eta = 0$ ) wird die rechte Seite konstant und es gilt  $f(k \rightarrow 0) = \text{konst}$ , bzw.  $\eta = 0$ . Gilt im Gegensatz dazu  $f(\mu_f) + I_f(\mu_f) = 0$ , dann folgt die Summenregel (3.60) und unter obiger Voraussetzung  $\eta \leq 0$ , was einem endlichen oder infrarot-unterdrücktem Coulomb-Formfaktor entspricht.
- (b) Falls  $d - 2 + \alpha - 2\beta - \eta < 0$  ist, dann divergiert für  $k \rightarrow 0$  der impulsabhängige Teil auf der rechten Seite von Gl. (3.62) und die Summenregel (3.60) folgt. In diesem Fall gilt nach Voraussetzung  $\eta > 0$ , was einen infrarot-divergenten Coulomb-Term  $f(k)$  impliziert. Im Gegensatz zum Geist-Formfaktor muss für divergente Coulomb-Formfaktoren  $\mu_f > 0$  für den Renormierungspunkt gewählt werden, da dies andernfalls wegen  $I_f(\mu_f \rightarrow 0) \sim \mu_f^{d-2+\alpha-2\beta-\eta}$  zu  $\eta \leq 0$  führt, was im Widerspruch zur Annahme ( $\eta > 0$ ) steht.

---

<sup>15</sup>  $I_{d\omega}(\alpha, \beta, d) \Big|_{\alpha=2\beta-d+2} = \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\frac{d}{2} - \frac{\beta}{2})\Gamma(-\frac{\beta}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2} - \beta)\Gamma(d + \frac{\beta}{2} + 1)\Gamma(1 + \frac{\beta}{2})}$ .

Im Fall eines infrarot-divergenten (oder unterdrückten) Coulomb-Formfaktors kürzt sich der Infrarotexponent  $\eta$  und die Amplitude  $C$  aus der linearen Gleichung (3.62). Es folgt jedoch eine weitere Beziehung für das Amplitudenverhältnis  $A/B^2$

$$\frac{A}{B^2} = \frac{N_c(d-1)}{4} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} I_{fd\omega}(\alpha, \beta, \eta, d), \quad (3.64)$$

die den Infrarotexponenten  $\eta$  explizit enthält.

**Gap-Gleichung** Zum Schluss betrachten wir das Infrarotverhalten der renormierten Gap-Gleichung (3.41). Ein Flächengesetz des 't Hooft-Loops – als Signal für Confinement – setzt voraus, dass die Differenz

$$\Delta\omega(k) := \omega(k) - \bar{\chi}(k) \quad (3.65)$$

für  $k \rightarrow 0$  verschwindet [84]. Mit der renormierten Gap-Gleichung (3.41) kann  $\Delta\omega$  geschrieben werden als

$$\Delta\omega(k) = \frac{1}{\omega(k) + \bar{\chi}(k)} \left[ k^2 + c_0 + \Delta I_\omega^{(2)}(k) + 2\bar{\chi}(k) \left( \Delta I_\omega^{(1)}(k) + c_1 \right) \right]. \quad (3.66)$$

Wir zeigen, dass die Wahl von  $\mu_\omega = 0$  eine Möglichkeit ist, das Verhalten  $\Delta\omega(k \rightarrow 0) = 0$  sicherzustellen. Die Coulomb-Integrale  $\Delta I_\omega^{(l)}$  sind für  $\mu_\omega = 0$  infrarot-unterdrückt, weshalb  $I_\omega^{(l)}(k \rightarrow 0) = I^{(l)} k^{\zeta_l}$  mit  $\zeta_l > 0$  gilt. Für eine infrarot-divergente, renormierte Krümmung  $\bar{\chi}(k \rightarrow 0) = A/k^\alpha$  mit  $\alpha > 0$  gilt daher

$$\omega(k \rightarrow 0) = \bar{\chi}(k \rightarrow 0), \quad (3.67)$$

sodass (in erster Ordnung) das Infrarotverhalten der Gluonenergie mit der Krümmung identisch ist. Gl. (3.66) kann in diesem Fall für  $k \rightarrow 0$  geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \Delta\omega(k \rightarrow 0) &\simeq \frac{1}{2} \frac{k^2 + c_0 + \Delta I_\omega^{(2)}(k)}{\bar{\chi}(k)} + \Delta I_\omega^{(1)}(k) + c_1 \\ &\simeq \frac{1}{2A} \left[ k^{2+\alpha} + c_0 k^\alpha + I^{(2)} k^{\alpha+\zeta_2} \right] + I^{(1)} k^{\zeta_1} + c_1. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Hier haben wir in der zweiten Zeile das Infrarotverhalten der renormierten Krümmung  $\bar{\chi}(k)$  (3.67) und das der Coulomb-Integrale  $I_\omega^{(l)}(k)$  eingesetzt. Aus dieser Gleichung folgt, dass für  $\mu_\omega = 0$  die Wahl  $c_1 = 0$  nötig ist, damit die Differenz  $\Delta\omega(k)$  (3.65) verschwindet.<sup>16</sup> Wenn die Coulomb-Integrale in der Gap-Gleichung im Folgenden berücksichtigt werden, beschränken wir uns auf die Wahl

$$\mu_\omega = 0, \quad c_1 = 0 \quad (3.69)$$

der Renormierungsparameter. Die Wahl von  $c_1 = 0$  wird auch durch das Variationsprinzip bevorzugt [84].

Wegen Gl. (3.67) ist das Verhalten der Gluonenergie  $\omega(k)$  bei kleinen Impulsen für  $\mu_\omega = 0$  einzig durch eine infrarot-divergente Krümmung bestimmt. Daher verzichten wir darauf die Coulomb-Terme bei der Infrarotanalyse zu berücksichtigen und betrachten von

<sup>16</sup>Umgekehrt kann für kritische Lösungen ( $\alpha > 0$ ) und  $\mu_\omega > 0$  durch  $c_1 = -\Delta I_\omega^{(1)}(0)$  erreicht werden, dass  $\Delta I_\omega^{(1)}(k) + c_1$  im Infraroten verschwindet. Zusätzlich muss in diesem Fall auch  $\alpha + \zeta_2 > 0$  gelten, d.h. die Krümmung muss stärker als die des Coulomb-Terms  $\Delta I^{(2)}(k)$  divergieren.

jetzt an die Gap-Gleichung ohne Coulomb-Integrale (3.42). Die Differenz  $\Delta\omega(k)$  (3.65) kann jetzt geschrieben werden als

$$\Delta\omega(k \rightarrow 0) \simeq \frac{1}{2A} \left[ k^{2+\alpha} + c_0 k^\alpha \right] \quad (3.70)$$

und ist somit für Lösungen mit  $\alpha > 0$  infrarot-unterdrückt. Dies gilt auch für alle  $\alpha = 0$ , falls zusätzlich  $c_0 = 0$  gewählt wird. Das Verhalten der Differenz  $\Delta\omega(k)$  bei Berücksichtigung des Coulomb-Terms untersuchen wir im Rahmen der numerischen Lösungen in Abschn. 3.6.

Für die Gap-Gleichung ohne Coulomb-Term (3.42) gilt mit der Infrarotnäherung nach Integration über den Schleifenimpuls die Darstellung

$$\frac{A^2}{k^{2\alpha}} = k^2 + \left[ N_c B^2 k^{d-2\beta-2} \frac{1}{4} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} I_{dd}(\beta, d) - \chi(\mu_\chi) \right]^2 + c_0 \quad (3.71)$$

mit der dimensionslosen Funktion [47]

$$I_{dd}(\beta, d) = \frac{\Gamma(\frac{d}{2} - \frac{\beta}{2})^2 \Gamma(\beta + 1 - \frac{d}{2})}{\Gamma(1 + \frac{\beta}{2})^2 \Gamma(d - \beta)} \quad (3.72)$$

und dem konstanten Integral  $\chi(\mu_\chi)$ . Gl. (3.71) enthält auf der rechten Seite keine Gluonenergie  $\omega(k)$  und somit weder den Infrarotexponenten  $\alpha$ , noch die Amplitude  $A$ .

Auch für die Gap-Gleichung (3.71) bietet sich eine Fallunterscheidung an:

- (a) Falls  $d - 2\beta - 2 \geq 0$  ist, dann verschwindet für  $k \rightarrow 0$  die Impulsabhängigkeit der rechten Seite von Gl. (3.71). Ist in diesem Fall  $\chi(\mu_\chi) \neq 0$  und/oder  $c_0 \neq 0$  wird für  $k \rightarrow 0$  die linke Seite konstant und es gilt  $\omega(k \rightarrow 0) = \text{konst.}$ , bzw.  $\alpha = 0$ . Verschwinden bei der gleichen Annahme die Konstanten  $\chi(\mu_\chi) = 0$  und  $c_0 = 0$ , ist die Gluonenergie infrarot-unterdrückt. Es folgt falls  $1 > d - 2\beta - 2 \geq 0$  die Summenregel (3.60) und  $0 \geq \alpha > -1$  oder falls  $d - 2\beta - 2 \geq 1$

$$\alpha = -1, \quad (3.73)$$

ohne dass die Summenregel Gültigkeit hat.

- (b) Falls  $d - 2\beta - 2 < 0$  ist, dann divergiert für  $k \rightarrow 0$  der impulsabhängige Teil auf der rechten Seite und die Summenregel (3.60) folgt. Weiterhin folgt aus der Annahme, dass  $\alpha > 0$  ist, was einer infrarot-divergenten Gluonenergie entspricht. Dies ist unabhängig von der Wahl der Konstanten  $c_0$  und  $\chi(\mu_\chi)$ . Einzige Ausnahme ist  $\mu_\chi = 0$ , da in diesem Fall für  $c_0 = 0$  die rechte Seite linear mit  $k$  verschwindet und  $\alpha = -1$  folgt.<sup>17</sup>

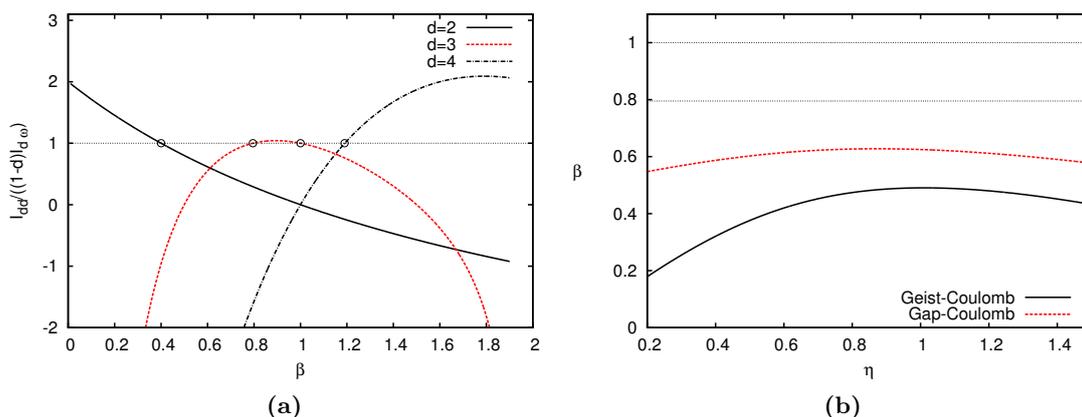
Für die Gap-Gleichung sind neben infrarot-divergenten ( $\alpha > 0$ ) und konstanten ( $\alpha = 0$ ) Lösungen auch infrarot-unterdrückte Lösungen ( $0 \geq \alpha \geq -1$ ) möglich. Der Fall  $\alpha = -1$ , der auch durch das komplette Abziehen der Krümmung ( $\mu_\chi = 0$ ) realisiert werden kann, entspricht dem freien QED Fall mit dem exakten Kern  $\omega(k) = k$ . Für infrarot-divergente oder infrarot-unterdrückte Lösungen ergibt sich aus (3.71) die Bestimmungsgleichung

$$\frac{A}{B^2} = \frac{N_c}{4} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} I_{dd}(\beta, d). \quad (3.74)$$

In der folgenden Konsistenz-Betrachtung schließen wir infrarot-unterdrückte Lösungen aus.

---

<sup>17</sup>Die Voraussetzung hierfür ist, dass  $-1 < d - 2\beta - 2 < 0$  ist.



**Abbildung 3.1.:** In (a) sind die Lösungen der Gleichung (3.75) für die Fälle  $d = 2, 3, 4$  dargestellt und durch einen offenen Kreis markiert. In (b) sind die Lösungen der Gleichungen (3.79) (gestrichelte Linie) und (3.80) (durchgezogene Linie) für  $d = 3$  als Funktion  $\beta(\eta)$  dargestellt. Weiterhin sind die beiden möglichen Lösungen des Geist-Gluon-Systems mit  $\beta \approx 0.8$  und  $\beta = 1$  als horizontale Linien eingezeichnet. Eine selbstkonsistente Lösung der drei Integralgleichungen wäre durch einen gemeinsamen Schnittpunkt der beiden Funktionen mit einer solchen horizontalen Linie gegeben.

**Konsistenz-Betrachtung** Nachdem wir die Integralgleichungen einzeln betrachtet haben, untersuchen wir die Konsistenz der gekoppelten Gleichungen. Dabei beschränken wir uns auf infrarot-divergente oder infrarot-unterdrückte Lösungen, da sonst die Werte der Renormierungsparameter in die Bestimmungsgleichungen eingehen. Für solche Lösungen gilt die Summenregel (3.60), die eine Beziehung zwischen den Exponenten  $\alpha$  und  $\beta$  herstellt und auch aus der Nicht-Renormierbarkeit [46] des Geist-Gluon-Vertex abgeleitet werden kann [47, 99]. Alle selbst-konsistenten Lösungen, bei denen ein Formfaktor infrarot-divergent oder unterdrückt ist, müssen diese erfüllen. Wir können mit der Summenregel Gl. (3.60) außerdem den Exponenten  $\alpha$  als Funktion von  $\beta$ , d.h.  $\alpha(\beta)$  interpretieren und nur den Exponenten  $\beta$  (zusammen mit  $\eta$ ) zur Charakterisierung einer Lösung angeben. Insbesondere sind kritische, infrarot-divergente Lösungen des Geist-Formfaktor mit  $\beta > (d-2)/2$  aufgrund der Summenregel nur mit ebenfalls infrarot-divergenten Lösungen für die Gluonenergie mit  $\alpha > 0$  vereinbar.

Aus der Infrarotnäherung der drei Integralgleichungen folgen die drei Bestimmungsgleichungen (3.61), (3.64) und (3.74) für die unbekannt Infrarotexponenten  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\eta$ , sowie die Amplituden  $A$ ,  $B$  und  $C$ , wobei  $C$  in keiner Bestimmungsgleichung mehr enthalten ist. In allen Gleichungen treten die Amplituden nur in dem (dimensionslosen) Verhältnis  $A/B^2$  auf, sodass die absoluten Werte von  $A$ ,  $B$  und  $C$  nicht aus der Infrarotanalyse abgeleitet werden können, sondern durch die Renormierungsbedingungen festgelegt sind. Dagegen können wir im Folgenden die Werte der Infrarotexponenten  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\eta$  von konsistenten Lösungen bestimmen.

Aus der infraroten Geist- und Gap-Gleichung [(3.74), (3.61)] folgt die Konsistenzbedingung

$$\frac{1}{d-1} I_{dd}(\beta, d) \stackrel{!}{=} -I_{d\omega}(\alpha, \beta, d) \Big|_{\alpha=2\beta-d+2}, \quad (3.75)$$

die wir auch verkürzt Geist-Gluon-System nennen. Die möglichen Lösungen für  $\beta$  der

Gl. (3.75) sind für die drei Fälle  $d = 2, 3, 4$  in Abb. 3.1a graphisch dargestellt.<sup>18</sup> In  $d = 3$  räumlichen Dimensionen hat Gl. (3.75) (im Intervall  $0 \leq \beta \leq 2$ ) die zwei Lösungen [47]

$$\beta \approx 0.7952, \quad \beta = 1, \quad (3.76)$$

während in  $d = 2$  räumlichen Dimensionen aus Gl. (3.75) der Exponent [83]

$$\beta = 2/5, \quad (3.77)$$

sowie in  $d = 4$  räumlichen Dimensionen<sup>19</sup> [47, 98, 99]

$$\beta = \frac{1}{49}(93 - \sqrt{1201}) \approx 1.1908 \quad (3.78)$$

folgt. Für den Infrarotexponenten in  $d = 2$  wurde in [83] aus numerischen Ergebnissen ein Wert von  $\beta \approx 0.45$  bestimmt. Der Infrarotexponent  $\beta = 1$  für  $d = 3$  konnte auch in der Winkel-Näherung gefunden werden [13]. In  $d = 4$  ergeben sich die gleichen Exponenten, die sich aus den Dyson-Schwinger-Gleichungen in Landau-Eichung [99] (in  $D = 3 + 1$  Dimensionen) und den Bewegungsgleichungen für das kovariante Variationsprinzip [79] auf Ein-Loop-Niveau ergeben. Wir vergleichen die analytischen Infrarotexponenten mit denen der numerischen Rechnungen in Abschn. 3.6 und bestätigen dort die Exaktheit der Infrarotnäherung (3.77).

Die Konsistenz des Geist-Gluon-Systems mit der Integralgleichung für den Coulomb-Formfaktor ist Gegenstand einer umfangreicheren Diskussion. Bereits in [13] wurde gezeigt, dass es für infrarot-divergente Lösungen der Funktionen  $d(k)$  und  $\omega(k)$  mit den Exponenten (3.76) keine numerischen Lösungen für den Coulomb-Formfaktor gibt. In [88] konnte durch die analytische Infrarotanalyse bestätigt werden, dass keine konsistenten infrarot-divergenten Lösungen existieren, während dies im Falle eines subkritischen Geist-Gluon-Systems möglich ist. Dies kann wie folgt begründet werden: Neben Gl. (3.75) ergeben sich durch das jeweilige Gleichsetzen der Gl. (3.64) mit Gl. (3.61), bzw. (3.74) zwei weitere Konsistenzbedingungen. Diese lauten

$$I_{fd\omega}(\alpha, \beta, \eta, d)|_{\alpha=2\beta-d+2} \stackrel{!}{=} -I_{dd}(\beta, d) \quad (3.79)$$

$$I_{fd\omega}(\alpha, \beta, \eta, d)|_{\alpha=2\beta-d+2} \stackrel{!}{=} -\frac{1}{d-1}I_{d\omega}(\alpha, \beta, d)|_{\alpha=2\beta-d+2}. \quad (3.80)$$

In Abb. 3.1b sind die Lösungen dieser Gleichungen als Funktion  $\beta = \beta(\eta)$  dargestellt, wobei wir uns auf  $d = 3$  beschränken. Ein Wert für den Exponenten  $\eta$ , der mit den Lösungen des Geist-Gluon-Systems verträglich ist, wäre durch einen Schnittpunkt mit den als horizontale Linien eingetragenen Exponenten  $\beta \in \{0.7952, 1\}$  des Geist-Gluon-Systems erkennbar. Das Fehlen eines Schnittpunktes zeigt, dass keine selbstkonsistente, infrarot-divergente Lösung aller drei Integralgleichungen existiert. Aus dem Maximum der

---

<sup>18</sup>Die hier dargestellten Werte für den Infrarotexponenten  $\beta$  gehören zu zwei Lösungs-Ästen, die wie folgt als Funktion der räumlichen Dimension  $d$  parametrisiert werden können [102]

$$\begin{aligned} \beta_1(d) &\approx \frac{2}{5}(d-1) \\ \beta_2(d) &= (d-2). \end{aligned}$$

<sup>19</sup>Weitere Werte für den Infrarotexponenten  $\beta > 1.1908$ , die nicht in numerischen Rechnungen gefunden werden, sind  $\beta = 2, 2.0605$ .

Funktionen in Abb. 3.1b können wir den größten Wert für  $\beta$  bestimmen, der mit der Gleichung für den Coulomb-Formfaktor verträglich wäre. Diese sind

$$\begin{aligned}\beta &\simeq 0.4905, & (\eta &\simeq 1.0095), \\ \beta &\simeq 0.6276, & (\eta &\simeq 0.8724),\end{aligned}$$

wobei der erste Exponent aus der Konsistenz des Coulomb-Formfaktors mit der Geist-Gleichung und der zweite aus der Konsistenz mit der Gap-Gleichung stammt. Der sich hieraus ergebende Grenzwert  $\beta \approx 0.5$ , ab dem der Coulomb-Formfaktor Lösungen besitzt, wurde auch in [45, 82] berechnet.

Das Fehlen einer konsistenten Lösung der drei Integralgleichungen (3.44), (3.49) und (3.41) für ein kritisches Geist-Gluon-System kann durch die getätigten Näherungen beim Ableiten der Gap-Gleichung oder der Gleichung für den Coulomb-Formfaktor verursacht worden sein. Auch ein nicht berücksichtigtes Dressing für den Geist-Gluon-Vertex ist in der Diskussion. Wie die folgende Analyse zeigt, ist es möglich durch eine Veränderung der Vorfaktoren der Schleifenintegralen selbstkonsistente Lösungen zu erzeugen.

**Regularisierter Coulomb-Formfaktor** Durch die einseitige Modifikation des Vorfaktors eines Schleifenintegrals, das in die Konsistenzbedingungen eingeht, können die möglichen Werte der Infrarotexponenten verändert werden. Um eine vollständig selbstkonsistente Lösung zu erzeugen, betrachten wir im Folgenden die modifizierte Integralgleichung für den Coulomb-Formfaktor [vgl. (3.49)]

$$f(\mathbf{k}) = f(\mu_f) + (1 - \varepsilon)\Delta I_f(\mathbf{k}) \quad (3.81)$$

und wiederholen die vorherige Infrarotanalyse mit einem zusätzlichen Parameter  $\varepsilon \geq 0$ . Für  $\varepsilon \geq 0$  können wir bei der Untersuchung von Lösungen der Gleichungen (3.79), (3.80) für die vorgegebenen Infrarotexponenten des Geist-Gluon-Systems  $\beta \in \{0.7952, 1\}$  in Abhängigkeit von  $\varepsilon$  folgende Fälle unterscheiden:

1. Die geringste Korrektur des Vorfaktors, ab dem Gl. (3.81) eine Lösung hat, ist [Abb. 3.2a]

$$\varepsilon_{\min} \approx 0.6062 \quad (3.82)$$

und gilt für die Lösung mit  $\beta \approx 0.8$ . Für diesen Wert ist der Coulomb-Formfaktor  $f(\mathbf{k})$  infrarot-divergent mit dem Exponenten  $\eta \approx 0.7048$ . Das Coulomb-Potential (3.18) hat daher das Infrarotverhalten

$$V_C(k) \sim \frac{1}{k^\lambda}, \quad \lambda = 2 + 2\beta + \eta \approx 4.2087, \quad (3.83)$$

welches dadurch im Ortsraum stärker als linear ansteigend ist.

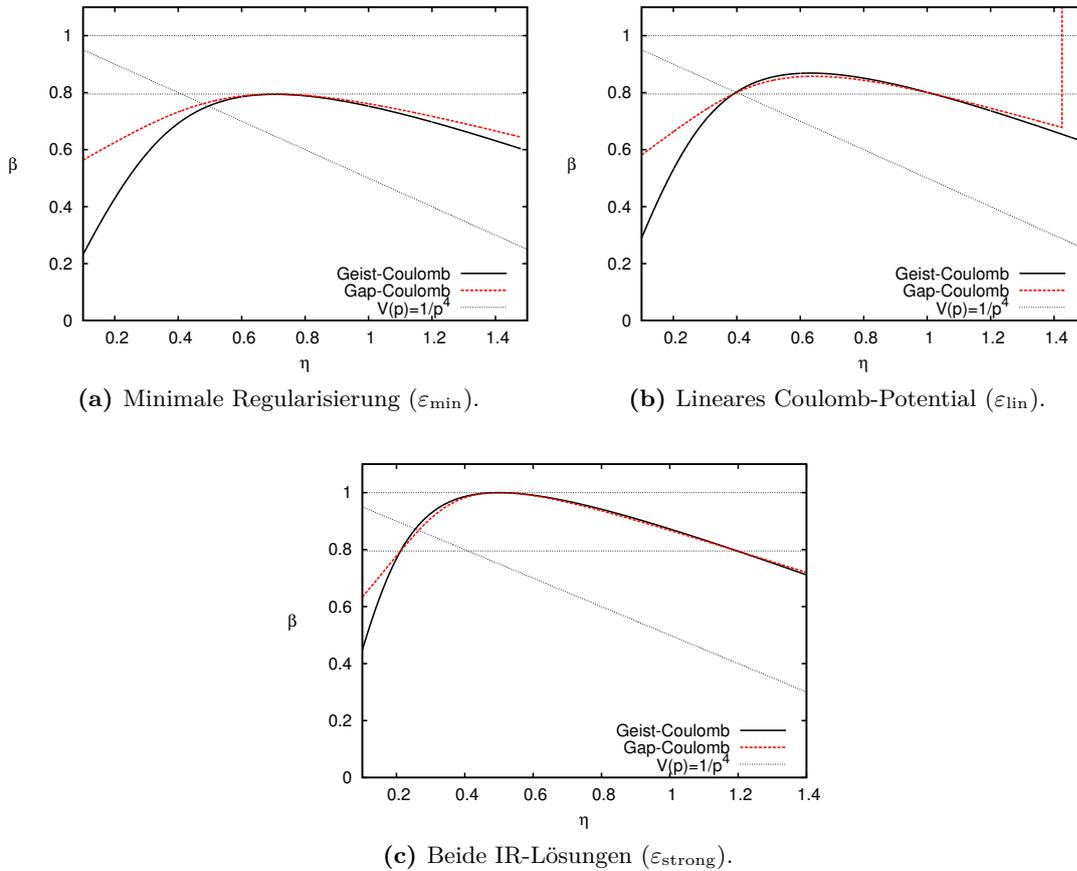
2. Für ein exakt lineares Coulomb-Potential mit  $\lambda = 4$  folgt aus Gl. (3.83) die Bedingung

$$\eta \stackrel{!}{=} 2 - 2\beta, \quad (3.84)$$

welche für die Lösung mit  $\beta \approx 0.8$  durch den Wert

$$\varepsilon_{\text{lin}} \approx 0.6787 \quad (3.85)$$

realisiert werden kann. Wie in Abb. 3.2b zu erkennen ist, existieren für  $\varepsilon_{\text{lin}}$  (und  $\beta \approx 0.8$ ) im Intervall  $[0, 1.5]$  zwei Lösungen für den Coulomb-Formfaktor mit  $\eta = 256/625 \approx 0.4096$  und  $\eta = 1.4096$ . Das Coulomb-Potential ist im ersten Fall streng linear ( $\lambda = 4$ ), während für den zweiten Fall  $\lambda = 5$  gilt.



**Abbildung 3.2.:** Die Bilder (a) - (c) zeigen die Lösungen der impliziten Gleichungen (3.79) und (3.80) für die Infrarotexponenten  $\beta$  und  $\eta$  mit Verwendung von (3.81) als Funktion  $\beta(\eta)$  für verschiedene Werte von  $\varepsilon > 0$ . Als horizontale Linien eingezeichnet sind die Lösungen des Geist-Gluon-Systems  $\beta \approx 0.8$  und  $\beta = 1$ . Eine selbstkonsistente Lösung der drei Gleichungen ist durch einen Schnittpunkt der beiden Funktionen mit einer horizontalen Linie gegeben. Die Bedingung (3.84) für ein lineares Potential ist als Funktion  $\beta(d) = 1 - \eta/2$  eingezeichnet.

3. Konsistente Lösungen für beide Geist-Gluon-Lösungen (3.76) existieren ab dem Wert [vgl. Abb. 3.2c]

$$\varepsilon_{\text{strong}} \approx 0.8047. \quad (3.86)$$

Die möglichen Lösungen sind in diesem Fall

$$\begin{aligned} \eta = 0.2119, 1.1977, & & (\beta \approx 0.8) \\ \eta = 1/2 & & (\beta = 1), \end{aligned} \quad (3.87)$$

von denen keine zu einem linearen Coulomb-Potential führt.

Die hier mit Hilfe der Infrarotnäherung ermittelten Infrarotexponenten und die Werte für die ‘‘Regularisierung’’  $\varepsilon$  sind in Tabelle 3.1 zusammengefasst. Es gibt einen eindeutigen Wert  $\varepsilon_{\text{lin}}$ , bei dem die Lösung mit  $\beta \approx 0.8$  zusammen mit dem nunmehr infrarotdivergenten Coulomb-Formfaktor ein lineares Coulomb-Potential besitzt. Für die  $\beta = 1$

$\beta$	$\varepsilon$	$\eta$	$\lambda$
0.7952	0.6062	0.7048*	4.2087
0.7952	0.6787	0.4096*	4
0.7952	0.6787	1.4096	5
0.7952	0.8047	0.2119*	4.7881
0.7952	0.8047	1.1977	4.7881
1	0.8047	1/2*	4.5

**Tabelle 3.1.:** Mögliche Werte für den Infrarotexponenten  $\eta$  des Coulomb-Formfaktors (3.81) im Intervall  $[0, 1.5]$  für verschiedene Regularisierungen  $\eta$  und für die kritischen Lösungen des Geist-Gluon-Systems mit  $\beta \approx 0.8$  und  $\beta = 1$ . Das Infrarotverhalten des nicht-abelschen Potentials  $V_C$  ist  $\lambda$ . Mit “\*” sind Lösungen markiert, die in den numerischen Rechnungen gefunden werden.

Lösung muss  $\varepsilon = 1$  gewählt bzw. das Schleifenintegral in der Dyson-Schwinger-Gleichung vernachlässigt werden, damit ein lineares Coulomb-Potential und eine selbstkonsistente Lösung der drei Integralgleichung existiert. In den numerischen Rechnungen in Abschn. 3.6.2 werden wir die Aussagen dieser Infrarot-Analyse bestätigen.

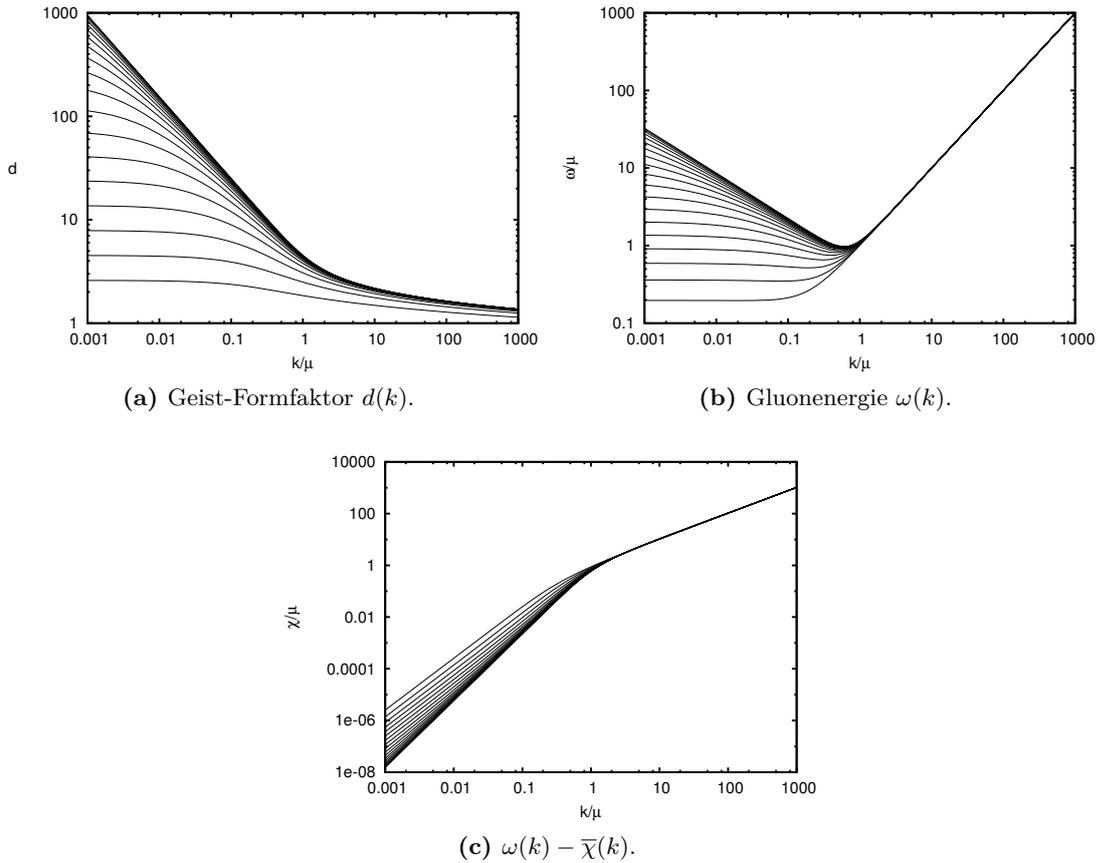
### 3.6. Numerische Ergebnisse

Die renormierte Dyson-Schwinger-Gleichung für den Geist-Formfaktor  $d(\mathbf{k})$  (3.44) sowie den Coulomb-Formfaktor  $f(\mathbf{k})$  (3.49) bilden mit der Gap-Gleichung (3.41) für die Gluonenergie  $\omega(\mathbf{k})$  ein gekoppeltes, nicht-lineares Integralgleichungssystem. Im vorherigen Abschnitt wurde dieses Gleichungssystem für asymptotische Impulse, im Infraroten und Ultraviolett, konsistent gelöst. Der gesamte Impulsbereich kann numerisch behandelt werden, wobei keine zusätzlichen Näherungen erforderlich sind. Numerische Ergebnisse in  $d = 3$  räumlichen Dimensionen wurden für die zwei infrarot-divergenten, kritischen Lösungen mit  $\beta \approx 0.8$  in [13] und mit  $\beta = 1$  in [82] präsentiert. Darüber hinaus sind in [88] die subkritische Lösung und in [83] die Lösungen bei  $d = 2$  beschrieben. Wir fassen hier diese Ergebnisse zusammen und weisen auf einige wichtige Details hin. Zum Beispiel besprechen wir ausführlicher unter welchen Voraussetzungen beide divergenten Lösungen erzeugt werden können.

Alle im weiteren Verlauf gezeigten Resultate sind mit den etablierten Verfahren zum Lösen von gekoppelten Dyson-Schwinger-Gleichungen gewonnen worden. Diese Methoden gehen unter anderem auf [95, 103] zurück. Auch wenn das grundlegende Lösungsprinzip unverändert blieb, wurde es kontinuierlich weiterentwickelt [82, 104–106] und auf moderne Möglichkeiten der Numerik, wie paralleles Rechnen auf Grafikarten (GPUs) [107], erweitert. Die wiederkehrende Struktur der Integralgleichungen ermöglicht die Verwendung von einheitlichen, numerischen Frameworks [108]. Dies erleichtert die erfolgreiche Erweiterung dieser Methoden auf die selbstkonsistente Bestimmung von 3- und 4-Punktfunktionen, wie Rechnungen in Landau-Eichung [109–111] und in Coulomb-Eichung [49] zeigen. Eine Übersicht über mögliche Lösungsrezepte für Integralgleichungssysteme ist im Anh. B zusammengestellt.

Von nun an beschränken wir uns – wenn nicht anders angegeben – auf  $d = 3$  räumliche Dimensionen und  $N_c = 2$ . Alle dimensionsbehafteten Größen sind mit einer beliebigen Impulsskala  $\mu$  derartig skaliert, dass sie dimensionslos sind, d.h.

$$\bar{k} := \frac{k}{\mu}, \quad \bar{\omega}(\bar{k}) := \frac{\omega(\bar{k}\mu)}{\mu}, \quad \text{etc.} \quad (3.88)$$



**Abbildung 3.3.:** Subkritische Lösungen für (a) den Geist-Formfaktor  $d(k)$ , (b) die Gluonenergie  $\omega(k)$  und (c) die Differenz  $\omega(k) - \bar{\chi}(k)$  als Schar von Lösungen mit dem Parameter  $d^{-1}(\mu_d = 0)$ .  $d^{-1}(\mu_d = 0)$  verringert sich von unten nach oben in (a) und (b), sowie von oben nach unten in (c).

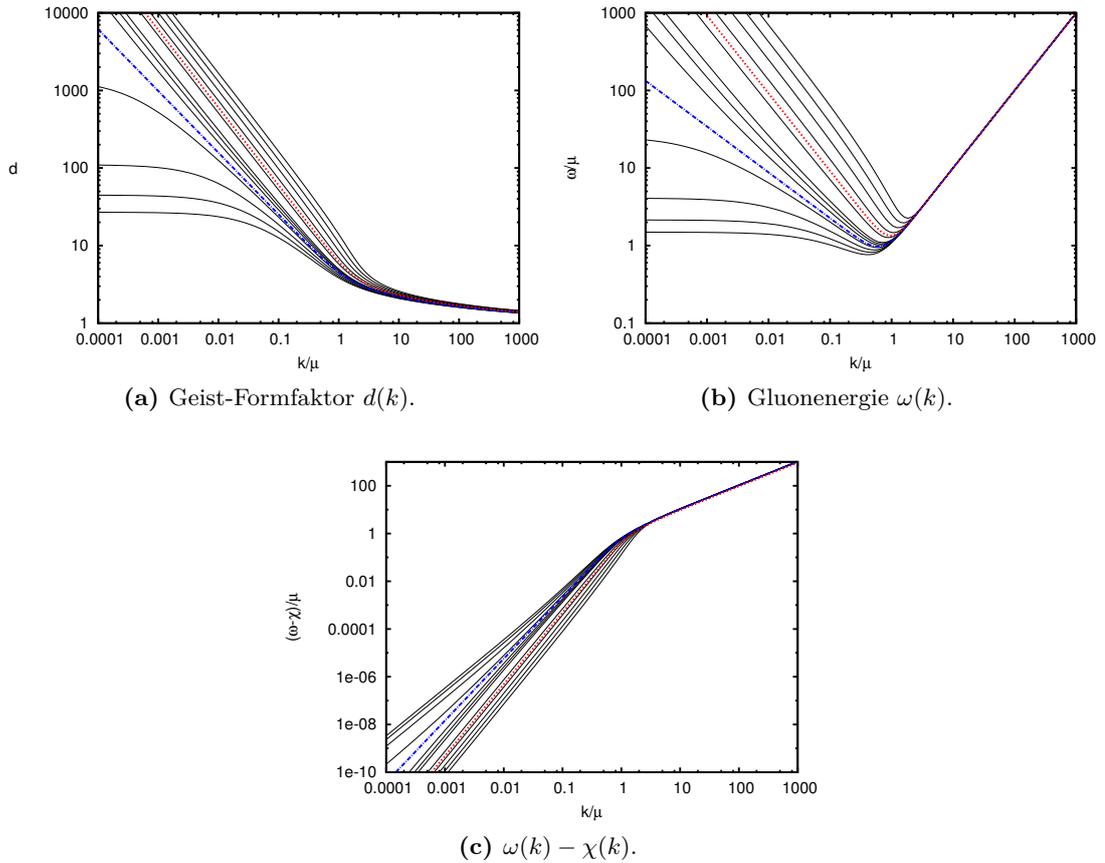
Bis wir in Abschn. 3.6.9 der Skala  $\mu$  einen physikalischer Wert zuordnen verzichten wir auf die Kennzeichnung dimensionsloser Größen mit “-” in diesem Kapitel.

Wir verwenden einen Infrarot- und einen UV-Cutoff  $\lambda_{\text{IR}}$  bzw.  $\Lambda_{\text{UV}}$ , um die Funktionen, die aufgrund der räumlichen Isotropie abhängig vom Betrag des Impulses  $k = |\mathbf{k}|$  sind, innerhalb eines logarithmischen Impulsfensters darzustellen. In dimensionslosen Einheiten haben wir  $\bar{\lambda}_{\text{IR}} = 10^{-8} \dots 10^{-3}$  und  $\bar{\Lambda}_{\text{IR}} = 10^2 \dots 10^5$  gewählt. Alle Ergebnisse sind unabhängig von diesen Cutoffs.

### 3.6.1. Subkritische Lösungen

Subkritische Lösungen des Integralgleichungssystems sind durch einen Geist-Formfaktor  $d(k)$  gekennzeichnet, der infrarot-konstant ist. Entsprechend gilt für den Infrarotexponent  $\beta = 0$ . Die Werte des Renormierungspunktes  $\mu_d$  und der Renormierungskonstanten  $d^{-1}(\mu_d)$  in der Integralgleichung (3.44) entscheiden welche Lösungen erzeugt werden. Eine besonders transparente Wahl für diese Parameter zur Erzeugung von subkritischen Lösungen ist

$$d^{-1}(\mu_d = 0) > 0. \quad (3.89)$$



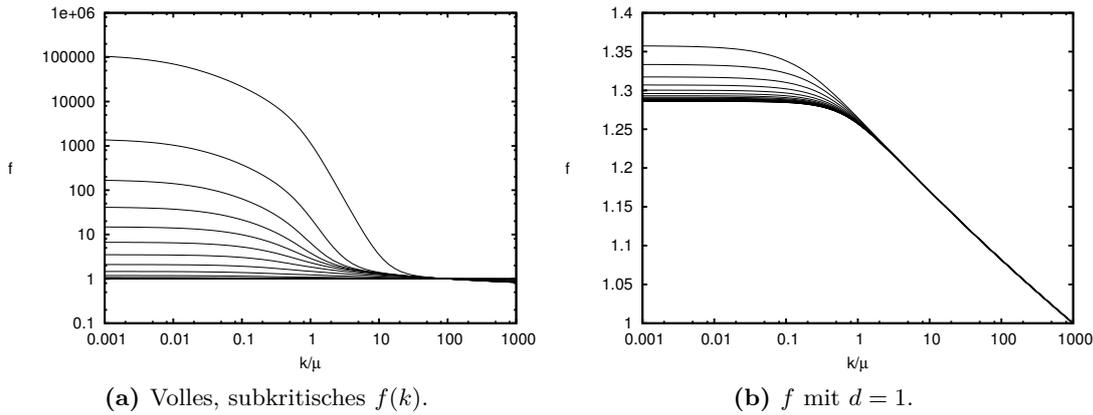
**Abbildung 3.4.:** Subkritische Lösungen für (a) den Geist-Formfaktor  $d(k)$ , (b) die Gluonenergie  $\omega(k)$  und (c) die Differenz  $\omega(k) - \bar{\chi}(k)$  als Schar von Lösungen mit dem Parameter  $d^{-1}(\mu_d = \Lambda_{UV})$ .  $d^{-1}(\mu_d = \Lambda_{UV})$  verringert sich von unten nach oben in (a) und (b), sowie von oben nach unten in (c). Zusätzlich sind die beiden kritischen Lösungen mit  $\beta \approx 0.8$  (Strichpunkte) und  $\beta = 1$  (Punkte) eingezeichnet.

Wir zeigen im Folgenden, dass zusätzlich auch für  $\mu_d > 0$  und “nicht-kritische” Werte von  $d^{-1}(\mu_d)$  subkritische Formfaktoren möglich sind.

**Geist-Formfaktor** Abb. 3.3a zeigt die numerischen Lösungen der Gleichung (3.44) für den Geist-Formfaktor mit der Wahl  $\mu_d = 0$  und für verschiedene Werte von  $d^{-1}(\mu_d = 0) \geq 0$ . Bei einer Verringerung von  $d^{-1}(\mu_d = 0)$  entwickeln die Lösungen zwischen kleinen und mittleren Impulsen ein Potenzverhalten mit dem Exponenten  $\beta \approx 0.8$  und nähert sich für  $d^{-1}(\mu_d = 0) \rightarrow 0$  der infrarot-divergenten, kritischen Lösung an. Der in der Infrarotanalyse vorhergesagte Infrarotexponent  $\beta = 1$  tritt nicht auf.

In [112] wurde für die numerischen Rechnungen durch  $\mu_d \approx \lambda_{IR}$  eine Renormierungsskala am Infrarot-Cutoff gewählt. In diesem Fall werden für Werte mit  $d^{-1}(\lambda_{IR}) > \bar{\lambda}_{IR}$  subkritische Lösungen erzeugt. Bei einer schrittweisen Verringerung von  $d^{-1}(\lambda_{IR})$  tritt für  $d^{-1}(\lambda_{IR}) \approx \bar{\lambda}_{IR}$  die kritische Lösung mit  $\beta \approx 0.8$  und für  $d^{-1}(\lambda_{IR}) \lesssim \bar{\lambda}_{IR}$  eine Schar an Lösungen mit dem Infrarotexponent  $\beta = 1$  auf. Unterhalb eines bestimmten Wertes von  $d^{-1}(\lambda_{IR})$  existieren keine numerischen Lösungen mehr.

Als dritte Möglichkeit für die Wahl von  $\mu_d$  zeigen wir in Abb. 3.4a Resultate für den



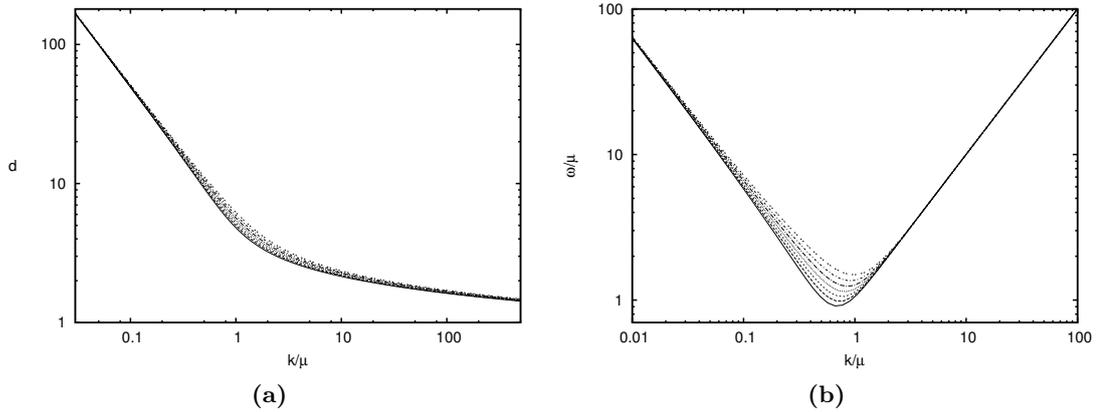
**Abbildung 3.5.:** Subkritische Lösungen für den Coulomb-Formfaktor: (a) zeigt  $f$  für verschiedene Werte von  $d(\mu_d = 0)^{-1} > 0$ , bei denen positive Lösungen existieren. (b) zeigt Lösungen, die mit der Ersetzung  $d \rightarrow 1$  und für  $d^{-1}(\mu_d) \rightarrow 0$  berechnet wurden.

Geist-Formfaktor, die mit einem Subtraktionspunkt am Ultraviolett-Cutoff  $\mu_d \simeq \Lambda_{UV}$  bestimmt wurden. Auch mit dieser Renormierungsskala können subkritische und kritische Lösungen mit  $\beta \approx 0.8$  bzw.  $\beta = 1$  erzeugt werden. Für das gewählte Impulsfenster und  $\bar{\mu}_d = 10^3$  sowie  $\bar{\mu}_\chi = 1$  ergibt sich zur Erzeugung dieser Lösung  $d^{-1}(\mu_d) \approx 0.7262$ .<sup>20</sup> Eine Schar an Lösungen mit  $\beta = 1$  entsteht für  $d^{-1}(\mu_d) \approx 0.70 \dots 0.71$ . Für Werte von  $d^{-1}(\mu_d)$  im Bereich zwischen den kritischen Lösungen treten in den Lösungen jeweils Impulsbereiche mit den Infrarotexponenten  $\beta \approx 0.8$  und  $\beta = 1$  auf.

**Gluonenergie** Abb. 3.3b zeigt die zu dem Geist-Formfaktor in Abb. 3.3a selbst-konsistent bestimmte Gluonenergie  $\omega(k)$ . Diese ist für subkritische Lösungen des Geist-Formfaktors ebenfalls infrarot-endlich und nähert sich für  $d^{-1}(\mu_d = 0) \rightarrow 0$  dem kritischen Verhalten mit  $\alpha \approx 0.6$  an. Beide kritischen Lösungen für die Gluonenergie mit  $\alpha \approx 0.6$  oder  $\alpha = 1$  treten bei geeigneter Wahl der Renormierungsbedingung auf [Abb. 3.4b] und sind in Übereinstimmung mit der Summenregel. Die Differenz  $\Delta\omega(k) = \omega(k) - \bar{\chi}(k)$  ist in Abb. 3.3c und Abb. 3.4c dargestellt. Wie durch die Infrarotanalyse [Abschn. 3.5.2] vorausgesagt, ist diese in jedem Fall infrarot-unterdrückt. Den Einfluss des Coulomb-Terms auf die Ergebnisse für die Gluonenergie vergleichen wir in Abschn. 3.6.4.

**Coulomb-Formfaktor** Die Gap-Gleichung und der Geist-Formfaktor entkoppeln bei Vernachlässigung der Coulomb-Wechselwirkung von dem Coulomb-Formfaktor  $f(k)$ . Eine Lösung  $f(k)$  der linearen Integralgleichung (3.49) kann daher explizit aus zuvor bestimmten Lösungen für die Gluonenergie  $\omega(k)$  und dem Geist-Formfaktor  $d(k)$  berechnet werden. Dies kann beispielsweise mit Hilfe einer Matrixinversion [Anh. B.3.1] geschehen. Abb. 3.5a zeigt  $f(k)$  für verschiedene Werte  $d(\mu_d = 0)^{-1} > 0$ , die mit den subkritischen Lösungen aus Abb. 3.3 bestimmt wurden. Für die hierbei gewählten Parameter,  $\bar{\mu}_f = 100$  und  $f(\mu_f) = 1$  sind unterhalb von  $d(\mu_d = 0)^{-1} \approx 0.008$  die explizit bestimmten Lösungen für den Coulomb-Formfaktor  $f(k)$  nicht länger positiv und haben ein oszillierendes Verhalten.

<sup>20</sup>Der Parameterbereich von  $d^{-1}(\mu_d)$  für die Lösung mit  $\beta \approx 0.8$  ist jedoch schmal, sodass ein “finetuning” erforderlich ist.



**Abbildung 3.6.:** Verschiedene kritische Lösungen mit  $\beta = 1$  für den Geist-Formfaktor  $d(k)$  (a) und die Gluonenergie  $\omega(k)$  (b) skaliert auf die gleiche Infrarotamplitude  $B$ , bzw  $A$  [vgl. (3.57)].

ten.<sup>21</sup> Das iterative Lösungsverfahren [vgl. Anh. B.3] für die Dyson-Schwinger-Gleichung konvergiert in diesem Parameterbereich nicht mehr. Dies bestätigt die Aussage [88] der Infrarotanalyse [vgl. Abschn. 3.5.2], dass es keine selbstkonsistenten, infrarot-divergenten Lösungen des Integralgleichungssystems gibt.

In Abb. 3.5b zeigen wir Lösungen für den Coulomb-Formfaktor  $f(k)$ , wobei in Gl. (3.49) der perturbative Wert  $d(k) \equiv 1$  für den Geist-Formfaktor verwendet wurde. Mit dieser Ersetzung existieren auch bei  $d^{-1}(\mu_d) \rightarrow 0$  (positive) Lösungen für  $f(k)$ . Diese sind infrarotendlich und im gesamten Impulsbereich nur unwesentlich von  $f(k) = 1$  verschieden.

### 3.6.2. Kritische Lösungen

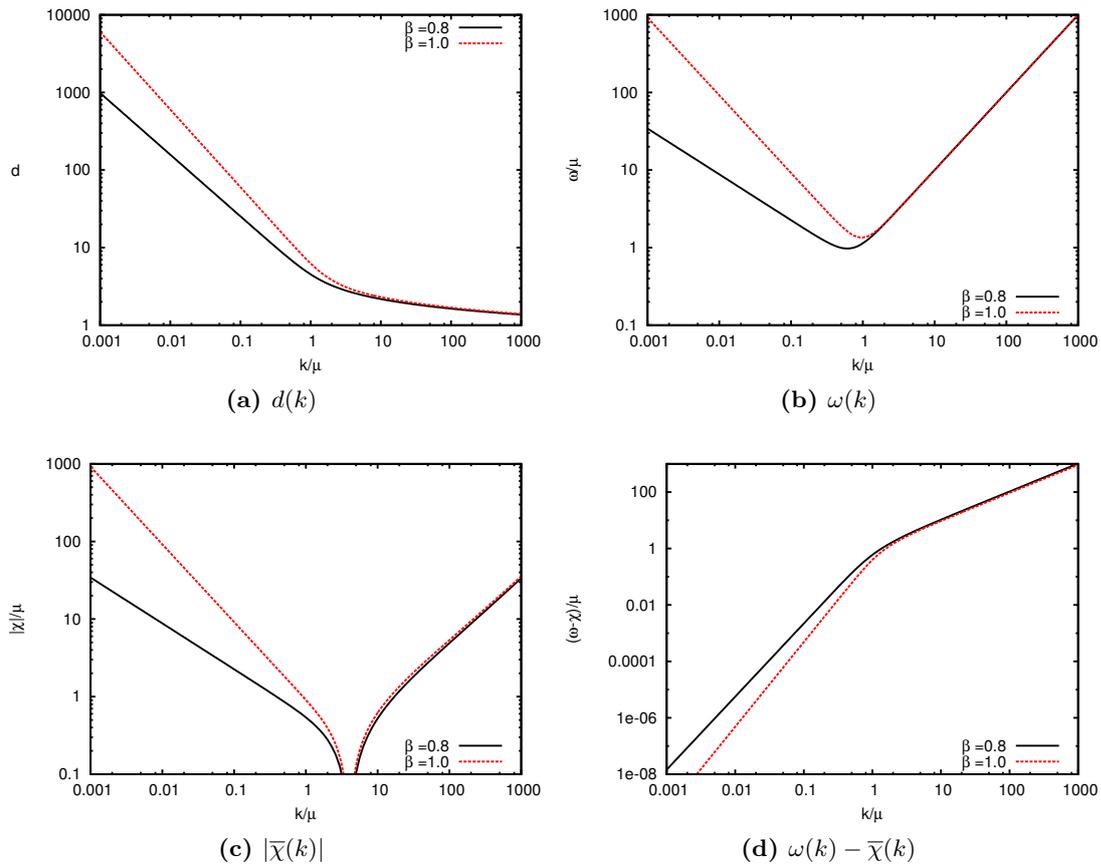
Kritische Lösungen sind diejenigen mit einem infrarot-divergenten Geist-Formfaktor, d.h.  $\beta > 0$ . Sie erfüllen die Horizont-Bedingung (3.45) und können besonders einfach durch die Wahl von  $\mu_d = 0$  und

$$d^{-1}(\mu_d = 0) = 0 \quad (3.90)$$

erzeugt werden, wodurch die Dyson-Schwinger-Gleichung für den Geist-Formfaktor (3.44) explizit kritisch ist. Mit  $\mu_d = 0$  und explizit verwirklichter Horizont-Bedingung (3.90) kann durch eine geeignete Wahl der Startbedingungen für das Lösungsverfahren eine der beiden kritischen Lösungen erzeugt [113] werden. In diesem Fall ist die  $\beta = 1$  Lösung nicht stabil bei der numerischen Iteration [112].<sup>22</sup> Wie die vorangegangene Diskussion zeigt, kann für die Erzeugung von kritischen Lösungen auch ein Renormierungspunkt mit  $\mu_d > 0$  gewählt werden. In diesem Fall ist es von dem Wert von  $d^{-1}(\mu_d) > 0$  abhängig, ob eine Lösung mit  $\beta \approx 0.8$  oder mit  $\beta = 1$  erzeugt wird. Während es zur Erzeugung einer stabilen  $\beta \approx 0.8$  Lösung zu jedem  $\mu_d$  einen eindeutigen Wert für  $d(\mu_d)^{-1}$  gibt, existiert für die Generierung einer stabilen  $\beta = 1$  Lösung für  $d(\mu_d)^{-1}$  jeweils ein ganzer Wertebereich. Somit gibt es eine Schar an infrarot-divergenten Lösungen mit dem Infrarotexponenten  $\beta = 1$ , die durch  $d(\mu_d)^{-1}$  parametrisiert wird.

<sup>21</sup>Dies wurde bereits in [45] diskutiert. Im dort verwendeten Renormierungsgruppen-Zugang ist die Gleichung für den Coulomb-Formfaktor strukturell identisch.

<sup>22</sup>Hier nennen wir eine Lösung nicht stabil, wenn ein solcher Fixpunkt nach endlich vielen Iterationsschritten wieder verlassen wird.



**Abbildung 3.7.:** Der Geist-Formfaktor  $d(k)$  (a), die Gluonenergie  $\omega(k)$  (b), der Betrag der Krümmung  $|\bar{\chi}(k)|$  (c) und die Differenz  $\omega(k) - \bar{\chi}(k)$  (d) für beide kritischen, infrarot-divergenten Lösungen mit  $\beta \approx 0.8$  und  $\beta = 1$ .

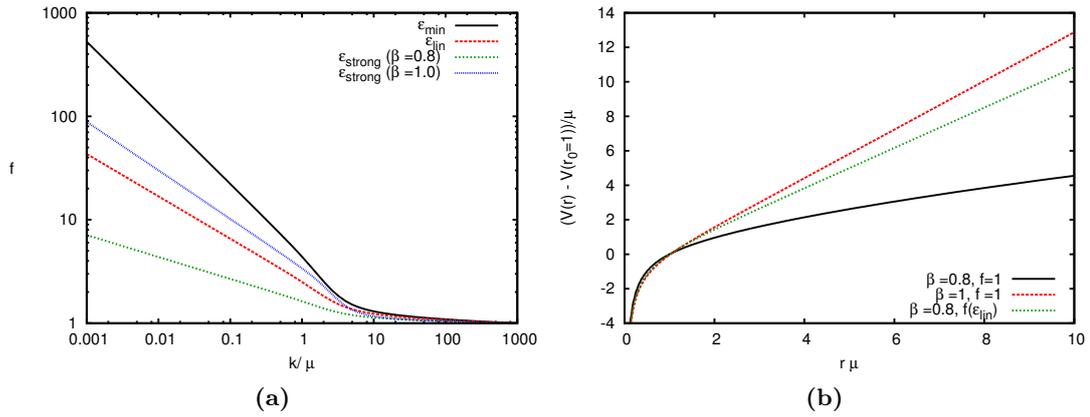
Weil die Lösung mit  $\beta = 1$  zu einem linearen Coulomb-Potential führt und deshalb für die Bestimmung der physikalischen Skala benutzt werden kann, werden wir aus der Menge an Lösungen eine geeignete auswählen: In Abb. 3.6a ist die Schar der kritischen Geist-Formfaktoren  $d(k)$  mit  $\beta = 1$  dargestellt, wobei die Kurven in der Art skaliert sind, dass ihre Infrarotamplituden  $\bar{B}$  [vgl. (3.57)] übereinstimmen und somit die Unterschiede im mittleren Impulsbereich erkennbar sind. Abb. 3.6b zeigt die auf gleiche Weise skalierte Gluonenergie  $\omega(k)$ . Aufgrund der Ergebnisse aus Gitterrechnungen [114] wählen wir entsprechend der Diskussion in [112] diejenige Lösung aus, die die beste Übereinstimmung mit der Gribov-Formel [28]

$$\omega_G(k) = \sqrt{k^2 + \frac{M_G^4}{k^2}} \quad (3.91)$$

hat, wobei  $M_G$  die *Gribovmasse* Masse ist. Die so bestimmte  $\beta = 1$ -Lösung zeigen wir zusammen mit der eindeutigen Lösung mit  $\beta \approx 0.8$  in Abb. 3.7.

### 3.6.3. Coulomb-Potential und regularisierter Coulomb-Formfaktor

Das nicht-abelsche Coulomb-Potential (3.18) kann für das *reine* Infrarotverhalten des Geist- und Coulomb-Formfaktors (3.57) analytisch berechnet werden. In  $d = 3$  räumlichen



**Abbildung 3.8.:** (a) die numerischen Lösungen des regularisierten Coulomb-Formfaktors (3.81) für die drei in Tabelle 3.1 dargestellten Werte für  $\varepsilon$ . (b) zeigt das nicht-abelsche Coulomb-Potential für die beiden kritischen Lösungen mit  $\beta \approx 0.8$  und  $\beta = 1$ , sowie für die Lösung mit dem regularisierten Coulomb-Formfaktor (3.81).

Dimensionen gilt nach Integration über die Winkel in Kugelkoordinaten der Ausdruck

$$V_C(r) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk d(k)^2 f(k) \left(1 - \frac{\sin(kr)}{kr}\right). \quad (3.92)$$

Im Ortsraum ergibt sich für die Potenzgesetze (3.57) [21, 45]<sup>23</sup>

$$V_C(r) \sim r^{2\beta+\eta-1}. \quad (3.94)$$

Bei der Verwendung des perturbativen Geist-Formfaktors ( $d = 1$ ) in der Gleichung für  $f(k)$  (3.49) oder des perturbativen Coulomb-Formfaktors  $f = 1$  gilt für den Infrarotexponenten  $\eta = 0$ . Dadurch hat die kritische Lösung des Geist-Gluon-Systems mit  $\beta = 1$  für große  $r$  ein lineares Coulomb-Potential, während sich das Potential für die Lösung mit  $\beta \approx 0.8$  für große Abstände wie  $\sim r^{0.6}$  verhält.

Um einen mit den kritischen Lösungen des Geist-Gluon-Systems konsistenten Coulomb-Formfaktor  $f(k)$  zu bestimmen, verwenden wir die modifizierte Integralgleichung (3.81). Die numerischen Ergebnisse dieser Gleichung präsentieren wir in Abb. 3.8a, wobei wir für den Parameter  $\varepsilon$  die Werte

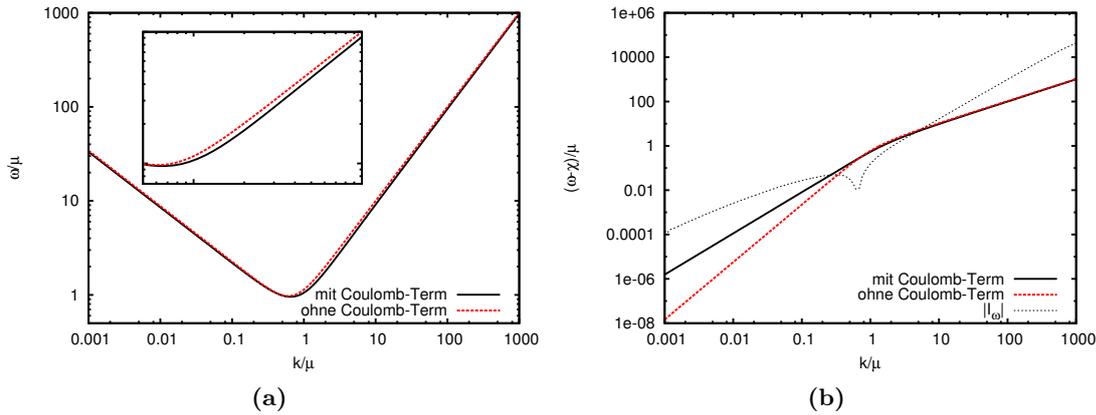
$$\varepsilon_{\min} = 0.6062, \quad \varepsilon_{\text{lin}} = 0.6787, \quad \varepsilon_{\text{strong}} = 0.8047 \quad (3.95)$$

verwendet haben. Dabei haben wir  $f(k)$  aus den zuvor berechneten kritischen Funktionen  $d(k)$  und  $\omega(k)$  bestimmt. Die ersten beiden Werte in Gl. (3.95) sind nur kompatibel mit der  $\beta \approx 0.8$  Lösung, während wir für den letzten Wert sowohl für  $\beta \approx 0.8$ , als auch für  $\beta = 1$  einen infrarot-divergenten Coulomb-Formfaktor finden. Der Infrarotexponent  $\eta$  ist in sehr guter Übereinstimmung mit den in der Infrarotanalyse vorhergesagten Werten [Tabelle 3.1].

<sup>23</sup>Für ein lineares nicht-abelsches Coulomb-Potential gilt für die Coulomb-String-Tension  $\sigma_C$  [vgl. Abschn. 2.5.2] der Zusammenhang [21, 45]

$$\sigma_C = \frac{B^2 C}{8\pi} \quad (3.93)$$

mit den Infrarotamplituden  $B$  und  $C$  des Geist- und Coulomb-Formfaktors.



**Abbildung 3.9.:** (a) die Gluonenergie  $\omega(k)$  und (b) die Differenz  $\Delta\omega(k)$  berechnet mit und ohne Coulomb-Term in der Gap-Gleichung. In (b) zeigen wir zusätzlich die Impulsabhängigkeit des Coulomb-Integrals  $|I_\omega(\mathbf{k})|$ .

In Abb. 3.8b zeigen wir das Coulomb-Potential im Ortsraum für die Lösungen  $\beta \approx 0.8$ ,  $\beta = 1$  ohne die Berücksichtigung des Coulomb-Formfaktors, sowie für die  $\beta \approx 0.8$  Lösung mit dem aus der regularisierten Gleichung (3.81) für  $\varepsilon_{\text{lin}} \approx 0.6787$  bestimmten  $f(k)$ . Dadurch hat auch die schwächer divergente Lösung ( $\beta \approx 0.8$ ) ein lineares Coulomb-Potential.

### 3.6.4. Einfluss des Coulomb-Terms

Die Hinzunahme der Coulomb-Terme koppelt die Gap-Gleichung für  $\omega(k)$  an den Coulomb-Formfaktor  $f(k)$ . Zusätzlich enthält auch die rechte Seite der Gap-Gleichung die (unbekannte) Gluonenergie  $\omega(k)$ . Das iterative Lösungsverfahren wird, je nach Wahl der numerischen Parameter, durch die Hinzunahme der Coulomb-Terme instabiler. Es ist besonders von dem Infrarotverhalten der Differenz  $\Delta\omega(k)$  (3.65) abhängig, da diese in der Kombination  $\Delta\omega(q) - \Delta\omega(k)$  in die Integrale der Coulomb-Terme eingeht und ein Vorzeichenwechsel erzeugen kann. Für die Bestimmung der numerischen Lösungen verwenden wir für den Renormierungspunkt der Coulomb-Integrale  $\mu_\omega = 0$ , wodurch diese infrarot-unterdrückt sind.

Die selbstkonsistenten Lösungen für  $\omega(k)$  sind in Abb. 3.9a mit und ohne Berücksichtigung der Coulomb-Integrale in der Gap-Gleichung dargestellt. Das führende Infrarotverhalten von  $\omega(k)$  ist in beiden Fällen identisch. Im mittleren Impulsbereich, oberhalb des Minimums, unterscheiden sich die Kurven geringfügig. Für große Impulse werden beide Lösungen von dem  $k^2$ -Term in der Gap-Gleichung [vgl. (3.56)] dominiert.

Der Coulomb-Term in der Gap-Gleichung hat somit für den Renormierungspunkt  $\mu_\omega = 0$  keinen Einfluss auf das führende Infrarot- oder UV-Verhalten. Die Lösung für die Gluonenergie unterscheidet sich nur im mittleren Impulsbereich.

Die Lösungen mit und ohne Coulomb-Term können durch Differenz  $\Delta(k) = \omega(k) - \bar{\chi}(k)$  unterschieden werden, die in Abb. 3.9b dargestellt ist. Die Hinzunahme des Coulomb-Terms verändert das Infrarotverhalten  $\Delta\omega(k) \sim 1/k^\xi$  für die hier gezeigte  $\beta \approx 0.8$  Lösung von  $\xi = 2 + \alpha \approx 2.6$  zu  $\xi \approx 1.86$ . Zusätzlich zeigen wir in Abb. 3.9b die Impulsabhängigkeit des Coulomb-Integrals  $I_\omega(\mathbf{k})$  (3.31).

### 3.6.5. Numerisches Infrarot- und UV-Verhalten

Aus den numerischen Lösungen der Bewegungsgleichungen kann das asymptotische Verhalten des Geist-Formfaktors  $d(k)$  und der Gluonenergie  $\omega(k)$ , die Infrarotexponenten, bzw. die anomalen Dimensionen, ermittelt und mit den analytisch vorhergesagten Werten verglichen werden.

Die Exponenten der infraroten Potenzgesetze bestimmen wir durch einen linearen Fit der Funktion  $y(x) = a + bx$  an die numerischen Ergebnisse in doppel-logarithmischer Darstellung. Für die Infrarotexponenten der beiden kritischen Lösungen des Geist-Formfaktors  $d(k)$  bestimmen wir

$$\beta \approx 0.7952, \quad \beta \approx 1.0004 \quad (3.96)$$

und für die Infrarotexponenten der Gluonenergien  $\omega(k)$  entsprechend

$$\alpha \approx 0.5205, \quad \alpha \approx 1.0008. \quad (3.97)$$

Die Abweichung der numerischen Infrarotexponenten von den Ergebnissen der analytischen Infrarotanalyse [vgl. Abschn. 3.5.2] beträgt weniger als 0.1%. Dies bestätigt, dass die Infrarotexponenten, die mit der Infrarotnäherung der Schleifenintegrale bestimmt wurden, exakt sind. Ebenso präzise ist die Summenregel (3.60) und das Amplituden-Verhältnis  $A/B^2$  [Gl. (3.61) und Gl. (3.74)] erfüllt.

Darüber hinaus können wir das UV-Verhalten der Lösungen untersuchen. Für den Geist-Formfaktor  $d(k)$  verwenden wir in diesem Impulsbereich die Parametrisierung

$$d(k \rightarrow \infty) \sim \frac{1}{\ln^\delta(k/\mu)} \quad (3.98)$$

und bestimmen die anomale Dimension bis zum Rand des numerischen Impulsfensters mit  $\bar{\Lambda}_{\text{UV}} = 10^6$  zu  $\delta \approx 0.492$  (mit  $\bar{\mu} \approx 0.49$ ). Mit dem gleichen Vorgehen finden wir für das führenden UV-Verhalten der Krümmung sowie für die logarithmische Korrekturen der Gluonenergie

$$\omega(k \rightarrow \infty) = k + c \frac{k}{\ln^{2\gamma_2}(k/\mu)}, \quad \bar{\chi}(k \rightarrow \infty) = \frac{k}{\ln^{\gamma_2}(k/\mu)}, \quad \bar{\mu} \approx 1.34. \quad (3.99)$$

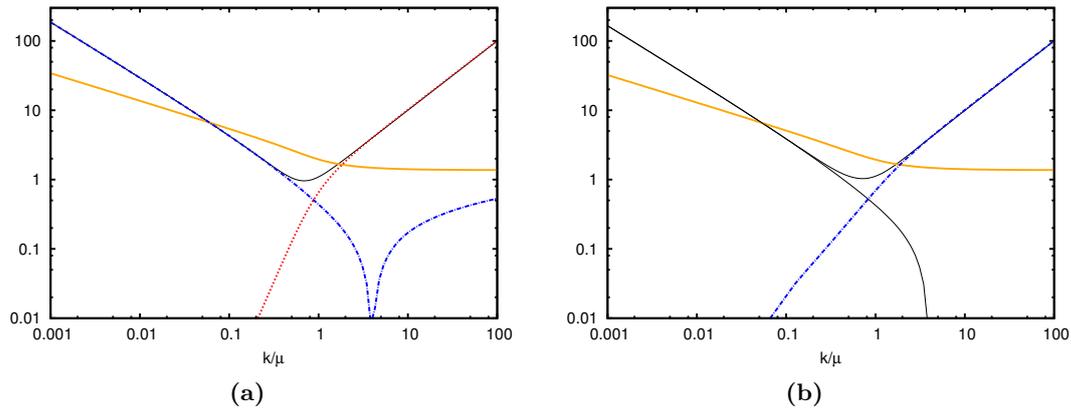
den Wert  $\gamma_2 \approx 1.002$ . Damit bestätigen wir den analytischen Zusammenhang (3.56) für die Gap-Gleichung ohne Coulomb-Term und die Ergebnisse aus der Winkel-Näherung (3.50b).

### 3.6.6. Lösungen in $d = 2$ räumlichen Dimensionen

In  $d = 2$  räumlichen Dimensionen sind die Schleifenintegrale in der Geist-Gleichung (3.13) und in der Gleichung für den Coulomb-Formfaktor (3.17) UV-endlich und müssen nicht renormiert werden. Die in der Geist-Gleichung verbleibende und in  $d = 2$  dimensionsbehaltete Kopplungskonstante  $g$  kann daher verwendet werden, um alle Größen dimensionslos zu skalieren. Die Kritikalität des Geist-Gluon-Systems ist in  $d = 2$  räumlichen Dimensionen eine notwendige Bedingung. Um diese sicher zu stellen und um für spätere Rechnungen bei endlichen Temperaturen einen direkten Vergleich mit den  $d = 3$  Lösungen zu ermöglichen, haben wir die Geist-Gleichung bei einer Skala  $\mu_d > \lambda_{\text{IR}}$  subtrahiert, obwohl zur Renormierung nicht erforderlich ist. In Abb. 3.10 zeigen wir die entsprechenden Lösungen für  $d = 2$ .

Aus den numerischen Lösungen für den Geist-Formfaktor  $d(k)$  und die Krümmung  $\bar{\chi}(k)$  bestimmen wir für  $d = 2$  die Infrarotexponenten

$$\beta \approx 0.4001 \quad \alpha \approx 0.809, \quad (3.100)$$



**Abbildung 3.10.:** Die numerischen Lösungen in  $d = 2$  räumlichen Dimensionen mit (a) und ohne (b) Coulomb-Term für den Geist-Formfaktor  $d(k)$ , die Gluonenergie  $\omega(k)$  und die Differenz  $\omega(k) - \bar{\chi}(k)$ .

womit wir die Aussagen aus der Infrarotanalyse [vgl. Abschn. 3.5.2] bestätigen. Für das asymptotische Verhalten im ultravioletten Impulsbereich gilt außerdem

$$d(k \rightarrow \infty) \sim 1, \quad \chi(k \rightarrow \infty) \sim \log(k/\mu). \quad (3.101)$$

Dies entspricht dem in [83] durch Winkel-Näherung bestimmten UV-Verhalten.

### 3.6.7. Energiedichte der Lösungen

Für stationäre Kerne  $\omega_S$ , die der Gap-Gleichung (3.41) genügen, kann die Energiedichte geschrieben werden als

$$e[\omega_S] = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^d q [\omega_S(\mathbf{q}) - \bar{\chi}(\mathbf{q})] - \frac{1}{8} \int \mathrm{d}^d q \frac{\left\{ I_\omega^{(0)} + I_\omega^{(2)}(\mathbf{q}) + 2[\omega(\mathbf{q}) - \bar{\chi}(\mathbf{q})] I_\omega^{(1)}(\mathbf{q}) \right\}}{\omega(\mathbf{q})} \quad (3.102)$$

mit den selbstkonsistent berechneten Integralen  $I_\omega^{(l)} \equiv I_\omega^{(l)}|_{\omega_S}$  und der Krümmung  $\bar{\chi}(\mathbf{k}) \equiv \bar{\chi}(\mathbf{k})|_{\omega_S}$ . Dieser Ausdruck reduziert sich durch die Vernachlässigung der Coulomb-Integrale  $I_\omega^{(l)}$ , sowie des Tadpole-Terms  $I_\omega^{(0)}$  in der Gap-Gleichung und in der Energiedichte zu

$$e[\omega_S] = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^d q [\omega_S(\mathbf{q}) - \bar{\chi}(\mathbf{q})]. \quad (3.103)$$

In dieser Näherung ist die Energiedichte einer Lösung  $\omega_S$  durch das Integral über die Funktion  $\Delta\omega_S(k) = \omega_S(k) - \bar{\chi}(k)$  gegeben. Somit können wir Abb. 3.7d entnehmen, dass die Lösung der Gap-Gleichung ohne Coulomb-Term mit  $\beta = 1$  eine geringere Energiedichte hat, als die Lösung mit  $\beta \approx 0.8$ , da für die zuletzt genannte Lösung die von der Funktion  $\Delta\omega_S(k)$  eingeschlossene Fläche größer ist. Bei dieser Argumentation nehmen wir an, dass beide Lösungen das gleiche UV-Verhalten haben. Damit sollte die  $\beta = 1$  die energetisch günstigere Lösung sein. Die subkritischen Lösungen [Abb. 3.3c oder Abb. 3.4c] haben ebenfalls eine größere Energiedichte als beide kritischen Lösungen, die somit durch das Variationsprinzip favorisiert werden. Wird der Coulomb-Term in der Gap-Gleichung berücksichtigt, ändert sich zum einen das Infrarotverhalten von  $\Delta\omega_S(k)$  und zum anderen müssen auch die Coulomb-Terme in der Energiedichte (3.102) berücksichtigt werden.

Daher lässt sich diese Argumentation in diesem Fall nicht anwenden. Für die Berücksichtigung der Coulomb-Terme in der Energiedichte müssen diese divergenten Beiträge renormiert werden.

### 3.6.8. Parametrisierung der numerischen Lösungen

Für analytische, aber auch für numerische Berechnungen, ist eine akkurate Parametrisierung der numerischen Lösungen für die Korrelationsfunktionen erforderlich. Dies trifft insbesondere bei Betrachtungen auf Ebene der Energiedichte  $e$  [siehe Kap. 6] zu, da die numerisch bestimmte Gluonenergie durch die Krümmung eine Vielzahl an logarithmischen Korrekturen (3.56) enthält, die sich numerisch nicht handhaben lassen und zu zahlreichen Divergenzen höherer Ordnung führen.

Die kritischen Lösungen für die Gluonenergie  $\omega(k)$  ohne Coulomb-Term stimmen sehr gut mit der Form

$$\omega_\alpha(k) := \sqrt{k^2 + \frac{M^{2+2\alpha}}{k^{2\alpha}}} \quad (3.104)$$

mit einer Massenskala  $M$  überein.<sup>24</sup> Die Funktion (3.104) hat das asymptotische Verhalten

$$\omega_\alpha(k \rightarrow 0) = \frac{M^{1+\alpha}}{k^\alpha} + \frac{1}{2} \frac{k^{2+\alpha}}{M^{1+\alpha}} + \mathcal{O}(k^{6+\alpha}), \quad (3.105a)$$

$$\omega_\alpha(k \rightarrow \infty) = k + \frac{1}{2} \frac{M^{2+2\alpha}}{k^{1+2\alpha}} + \mathcal{O}(1/k^7) \quad (3.105b)$$

und entspricht für  $\alpha = 1$  der Gribov-Formel (3.91). Sie reproduziert das korrekte asymptotische Verhalten der Gluonenergie  $\omega(k)$  in erster Ordnung, sowohl im infraroten als auch im ultravioletten Impulsbereich [vgl. Abschn. 3.5]. Bei Vernachlässigung des Coulomb-Terms in der Gap-Gleichung und für  $c_0 = 0$  stimmt auch das Verhalten in zweiter Ordnung überein, da für eine divergente Krümmung gilt

$$\omega(k \rightarrow 0) \approx \bar{\chi}(k) + \frac{1}{2} \frac{k^2}{\bar{\chi}(k)} \approx \frac{M^{1+\alpha}}{k^\alpha} + \frac{1}{2} \frac{k^{2+\alpha}}{M^{1+\alpha}}. \quad (3.106)$$

Die Parametrisierung (3.105b) reproduziert die logarithmischen UV-Korrekturen in der Gluonenergie [vgl. (3.56)] in diesem Fall dagegen nicht.

Mit der durch Gl. (3.104) parametrisierten Gluonenergie  $\omega(k)$  folgt die Krümmung aus der Gap-Gleichung ohne Coulomb-Term (3.42)

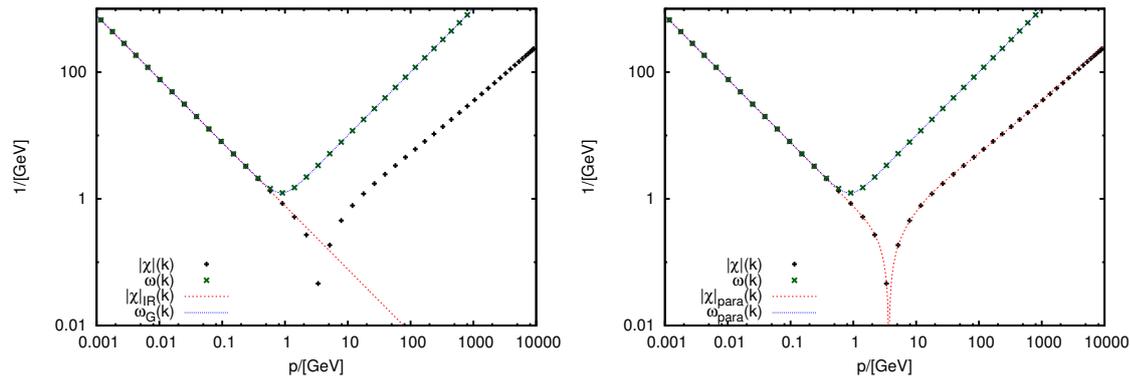
$$\bar{\chi}(k) = \frac{M^{1+\alpha}}{k^\alpha} =: \bar{\chi}_{\text{IR}}(k). \quad (3.107)$$

Somit ist die verallgemeinerte Gribov-Formel (3.104) mit dem führenden Infrarotverhalten der Krümmung kompatibel. Die numerischen Daten für die  $\beta = 1$  Lösungen sind, zusammen mit dem Fit an  $\omega_\alpha(k)$  (3.104) und die daraus bestimmte Krümmung  $\bar{\chi}_{\text{IR}}$  (3.107) in Abb. 3.11 dargestellt. Im doppel-logarithmischen Plot ist die Gribov-Formel (3.91) nicht von den numerischen Daten zu unterscheiden.

Gl. (3.107) enthält ausschließlich das Infrarotverhalten der Krümmung. Das Ultravioletverhalten der Krümmung kann parametrisiert werden durch

$$\bar{\chi}_{\text{UV}}(k) = c \frac{\sqrt{k^2 + \lambda}}{\ln \frac{k^2 + \lambda}{M^2}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} c \frac{k}{\ln \frac{k^2}{M^2}}, \quad c = \text{const}, \quad (3.108)$$

<sup>24</sup>Die Skala  $M$  entspricht dem Minimum der Funktion  $\omega_\alpha(k)$ , da  $k_{\text{min}} = \alpha^{1/(2\alpha+2)} M$  gilt.



**Abbildung 3.11.:** Die Gluonenergie  $\omega(\mathbf{k})$  und der Betrag der Krümmung  $|\bar{\chi}(\mathbf{k})|$  der  $\beta = 1$ -Lösung. Im linken Bild ist der Fit der Gribov-Formel (3.91) an die numerischen Daten für  $\omega(p)$  und der damit bestimmte Infrarotteil der Krümmung  $\bar{\chi}_{\text{IR}}$  (3.107) dargestellt. Im rechten Bild ist die Parametrisierung  $\bar{\chi}_{\text{para}}(p)$  (3.109) zu sehen und die numerisch bestimmte Gluonenergie  $\omega(\mathbf{k})$ , sowie die aus der Gap-Gleichung (3.42) und  $\bar{\chi}_{\text{para}}(p)$  bestimmte Parametrisierung  $\omega_{\text{para}}(k)$ .

was für  $k \rightarrow \infty$  der asymptotischen Entwicklung (3.50b) entspricht. Im gesamten Impulsbereich kann die Krümmung  $\bar{\chi}(k)$  parametrisiert werden durch [57]

$$\bar{\chi}_{\text{para}}(k) = u(k)\bar{\chi}_{\text{IR}}(k) + v(k)\bar{\chi}_{\text{UV}}(k) \quad (3.109)$$

mit zwei Abschneidefunktionen  $u(k)$ ,  $v(k)$ , die das IR- und UV-Verhalten,  $\bar{\chi}_{\text{IR}}(k)$  (3.107), bzw.  $\bar{\chi}_{\text{UV}}(k)$  (3.108), jeweils außerhalb eines Impulsbereiches unterdrücken. Eine für spätere Zwecke geeignete Wahl, die einen optimalen Fit an die numerischen Daten gewährleistet, ist [57]

$$u(k) = \left[1 + \left(\frac{k}{X_1}\right)^m\right]^{-1}, \quad v(k) = 1 - \left(\frac{X_2^2}{k^2 + X_2^2}\right)^n. \quad (3.110)$$

Diese Abschneidefunktionen unterdrücken die asymptotischen Beiträge der Krümmung mit der Potenz<sup>25</sup>

$$u(k \gg X_1) \sim 1/k^m, \quad v(k \ll X_2) \sim k^2. \quad (3.111)$$

Dies stellt insbesondere sicher, dass das Infrarotverhalten der Gribov-Formel  $\sim 1/k^\alpha$  keine (künstlichen) UV-Divergenzen verursacht. Für die Eichgruppe SU(2) ergeben sich aus einem Fit der Gleichung (3.109) an die numerischen Daten für die  $\beta = 1$  Lösung die Werte

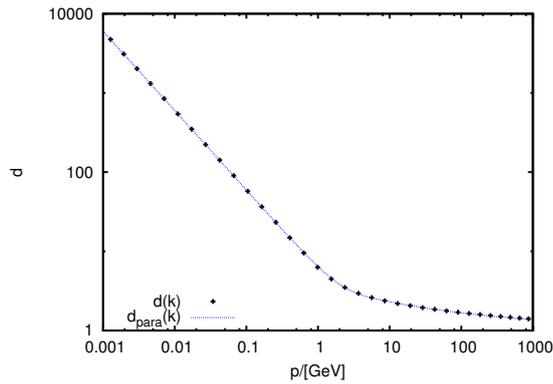
$$\begin{aligned} X_1 &= 4.83\mu, & X_2 &= 9.47\mu \\ m &= 3.13, & n &= 0.89 \end{aligned} \quad (3.112)$$

für die Parameter. In Abb. 3.11 sind die numerischen Daten für  $\bar{\chi}(k)$  und die Funktion  $\chi_{\text{para}}(k)$  (3.109) dargestellt, sowie die hieraus mit Hilfe der Gap-Gleichung (3.42) bestimmte Gluonenergie

$$\omega_{\text{para}}(k) := \sqrt{\chi_{\text{para}}(k)^2 + k^2}. \quad (3.113)$$

<sup>25</sup>Entsprechend gilt für die beiden Abschneidefunktionen

$$u(k \ll X_1) \simeq 1 - X_1/k, \quad v(k \gg X_2) \simeq 1 - X_2/k^{2n}.$$



**Abbildung 3.12.:** Der Geist-Formfaktor  $d(\mathbf{k})$  und die Parametrisierung  $d_{\text{para}}(k)$  (3.114) zeigen eine sehr gute Übereinstimmung über alle Größenordnungen.

Diese Parametrisierung berücksichtigt in  $\omega(k)$  auch die führenden logarithmischen Korrekturen.

Der Geist-Formfaktor lässt sich durch folgende Funktion parametrisieren [41, 89]

$$d_{\text{para}}(k) = \sqrt{\frac{B^2}{k^{2\beta}} + \frac{D}{\log(C^2 + k^2)}}. \quad (3.114)$$

Aus einem Fit an die numerischen Daten bestimmen wir für die  $\beta = 1$  Lösung [Abb. 3.12]

$$B = 35.40\mu, \quad D = 25.73, \quad C^2 = 70.73. \quad (3.115)$$

Im nächsten Abschnitt bestimmen wir die dimensionsbehaftete Skala  $\mu$ .

### 3.6.9. Physikalische Skala

Die reine Yang-Mills-Theorie ist skaleninvariant, erzeugt jedoch dynamisch eine Skala. Alle dimensionsbehafteten Größen sind entsprechend Gl. (3.88) durch Multiplikation mit einer geeigneten Potenz eines beliebigen, festen Impulses  $\mu$  dimensionslos. Die numerische Skala wird im Vergleich zur physikalischen Skala durch die Wahl der Renormierungskonstanten und Renormierungspunkte festgelegt. Um unsere Ergebnisse mit dem Experiment oder mit Gitterdaten vergleichen zu können, müssen wir  $\mu$  fixieren. Hierzu verwenden wir Ergebnisse für den Gluon-Propagator aus Gitterrechnungen in Coulomb-Eichung, die durch Anpassung der Skala an die Wilson-String-Tension  $\sigma_W \simeq (440 \text{ MeV})^2$  gewonnen wurden [114]. Diese Rechnungen zeigen eine sehr gute Übereinstimmung der Gluonenergie  $\omega(\mathbf{k})$  mit der Gribov-Formel (3.91). Aus diesen Rechnungen lässt sich für die Gribov-Masse  $M_G \simeq 880 \text{ MeV} \simeq 2\sqrt{\sigma_W}$  für die Eichgruppe SU(2) [86] und ein vergleichbarer Wert für die Eichgruppe SU(3) [57] ableiten.

Die Gribov-Formel impliziert den Infrarotexponenten  $\alpha = 1$  und wegen der Summenregel (3.60)  $\beta = 1$ . Um die Skala an die Ergebnisse aus Gitterrechnungen anzupassen, verwenden wir die  $\beta = 1$  Lösung, die am besten zu der Gribov-Formel Gl. (3.91) passt. Für die Wahl  $\bar{\mu}_d = 0, \bar{\mu}_\chi = 4, c_0 = 0$  der numerischen Parameter finden wir

$$\bar{A} = \frac{A}{\mu^2} = 0.9149. \quad (3.116)$$

für den Wert der dimensionslosen Infrarotamplitude der Gluonenergie der kritische  $\beta = 1$  Lösung d[112]. Mit der Gribov-Formel (3.91) gilt für  $A$  der Zusammenhang

$$A = M_G^2 \quad (3.117)$$

mit der Gribov-Masse  $M_G$ . Hieraus bestimmt sich die Skala  $\mu$  zu

$$\mu = \frac{M_G}{\sqrt{A}}. \quad (3.118)$$

Diese Beziehung legt die physikalische Skala für die vorangegangenen Ergebnisse in Bezug auf die Gribovmasse  $M_G$  fest. Für SU(2) und  $M_G = 880$  MeV gilt  $\mu \simeq 921$  MeV.<sup>26</sup>

### 3.7. Zusammenfassung

In diesem Kapitel haben wir eine Übersicht über die grundlegenden Ergebnisse des Hamiltonzugang zum Vakuumzustand der Yang-Mills-Theorie in Coulomb-Eichung gegeben [13, 82, 83, 88, 115]. Mit einem gaußschen Ansatz für das Vakuum-Wellenfunktional haben wir den Erwartungswert des Hamilton-Operators bestimmt. Dies geschah unter Zuhilfenahme jeweils einer Dyson-Schwinger-Gleichung für den Geist- und den Coulomb-Formfaktor. Durch das Variationsprinzip wurde der Ansatz für den Vakuumzustand optimiert und eine Gap-Gleichung für den Variationskern abgeleitet, die sowohl an den Geist-Formfaktor, als auch an den Coulomb-Formfaktor gekoppelt ist. Wir haben die Renormierungsprozedur dieses Integralgleichungssystems zusammengefasst und sind auf die analytischen Lösungen in den asymptotischen Impulsbereichen eingegangen. Dabei unterscheiden wir anhand des Verhaltens bei kleinen Impulsen zwischen subkritischen (infrarot-endllichen) und kritischen (infrarot-divergenten) Lösungen. Letztere weisen im infraroten Energiebereich ein Potenzverhalten auf, wobei in Coulomb-Eichung und in  $d = 3$  räumlichen Dimensionen zwei verschiedene Lösungen existieren. Diese charakterisieren wir anhand des Infrarotexponenten des Geist-Formfaktors, der in  $d = 3$  räumlichen Dimensionen die Werte  $\beta \approx 0.8$  oder  $\beta = 1$  annehmen kann.

Die Lösungen im gesamten Impulsbereich für die Gluonenergie, den Geist-Formfaktor und den Coulomb-Formfaktor, die mit einem numerischen Verfahren bestimmt werden können, haben wir ausführlich diskutiert. Dabei sind wir auf die wesentliche Randbedingung eingegangen, die den Lösungstyp bestimmt. Wir haben gezeigt, dass die in der Gleichung für den Geist-Formfaktor auftretende Renormierungskonstante nicht nur unterscheidet, ob kritische oder subkritische Lösungen realisiert werden, sondern auch dazu verwendet werden kann um zwischen den beiden kritischen Lösungen zu unterscheiden.

Beide kritischen Lösungen erzeugen ein im Ortsraum auch für große Abstände ansteigendes, nicht-abelsches Coulomb-Potential. Dieses ist für die stärker infrarot-divergente Lösung mit  $\beta = 1$  linear, was als notwendiges Kriterium für Confinement betrachtet werden kann. Für diese Lösung kann durch Vergleich der Coulomb-String-Tension mit Gitterrechnungen eine physikalische Skala bestimmt werden. Gitterrechnungen in Coulomb-Eichung zeigen [71, 86, 116, 117], dass im Gegensatz zur Situation in Landau-Eichung [118–120] die kritische Lösung realisiert wird. Bei Vernachlässigung der Coulomb-Wechselwirkung

---

<sup>26</sup> Alternativ kann die String-Tension selbst zur Bestimmung der Skala verwendet werden. Mit Gl. (3.93) und  $C = 1$  gilt

$$\bar{\sigma}_C = \frac{\bar{B}^2}{8\pi}$$

und die Skala  $\mu$  ergibt sich zu

$$\mu = \frac{8\pi}{\bar{B}^2} \sigma_C.$$

Für selbst-konsistente Lösungen gilt für  $\beta = 1$  und  $d = 3$  [vgl. (3.61)]

$$\frac{A}{\bar{B}^2} = \frac{N_c}{8\pi^2}.$$

für die Infrarotamplituden  $A$  und  $B$

ist die stärker divergente, confinerende  $\beta = 1$  Lösung im Variationszugang energetisch zu bevorzugen.

Die bisherigen Betrachtungen des Coulomb-Potentials vernachlässigen den Coulomb-Formfaktor, da dessen Integralgleichung inkonsistent mit den infrarot-divergenten, kritischen Lösungen für die Gluonenergie und den Geist-Formfaktor ist. Wir haben daher zusätzlich eine “regularisierte” Gleichung für den Coulomb-Formfaktor betrachtet und deren Lösungen bestimmt. Mit diesen ist auch für die schwächer divergente Lösung mit  $\beta \approx 0.8$  das Coulomb-Potential linear. Es bleibt unklar auf welche Weise der Hamiltonzugang modifiziert werden muss, damit sich die Gleichung für den Coulomb-Formfaktor von vornherein konsistent in das Gleichungssystem einfügt. Hier ist unter anderem das Verlassen der Rainbow-Ladder-Näherung durch die Hinzunahme von konsistent bestimmten Vertizes ein Ansatzpunkt.

Im nächsten Kapitel erweitern wir den Hamiltonzugang auf endliche Temperaturen, indem wir das großkanonische Ensemble studieren. Dabei bilden die in diesem Kapitel dargestellten Lösungen die Referenz für den Fall verschwindender Temperatur.



## 4. Deconfinement-Phasenübergang im Hamiltonzugang

In diesem Kapitel werden wir den Deconfinement-Phasenübergang der Yang-Mills-Theorie im Hamiltonzugang in Coulomb-Eichung untersuchen. Hierzu erweitern wir den Variationszugang [13] durch Einführung des großkanonischen Ensembles der Yang-Mills-Theorie auf endliche Temperaturen. Für die Dichtematrix des Gluonen-Ensembles verwenden wir ein Quasiteilchen-Ansatz. Der thermischen Gleichgewichtszustand folgt durch Minimierung der freien Energie. Aus den numerischen Lösungen der resultierenden Bewegungsgleichungen des Geist-Propagators und der Gluonenergie bestimmen wir unter anderem die kritische Temperatur des Deconfinement-Phasenübergangs.

Die in dieser Arbeit präsentierte Vorgehensweise basiert zum Teil auf den in [121] entwickelten Methoden. Dort beschränkten sich die Untersuchungen allerdings auf die subkritischen Lösungen. Diese besitzen insbesondere kein linear-ansteigendes Quark-Potential. In diesem Kapitel verwenden wir die kritischen Lösungen, die der Horizont-Bedingung [vgl. (3.45)] genügen.

Das Kapitel ist wie folgt aufgebaut: In Abschn. 4.1 führen wir das großkanonische Ensemble für die Beschreibung der Yang-Mills-Theorie bei endlichen Temperaturen ein, wählen eine Basis für den gluonischen Fockraum und besprechen unseren Ansatz für die Dichtematrix. Die Bewegungsgleichungen für den Geist- und den Coulomb-Propagator bei endlichen Temperaturen leiten wir in Abschn. 4.2 ab. Die freie Energie, die Energiedichte, Entropie und Zustandssumme werden in Abschn. 4.3 berechnet. In Abschn. 4.4 nutzen wir das Variationsprinzip für die freie Energie, um den Ansatz für die Dichtematrix und die Basis des Fockraums zu optimieren. Die Renormierung der Bewegungsgleichung wird in Abschn. 4.5 durchgeführt. Nach einer Vereinfachung der aus dem Variationszugang folgenden Gap-Gleichung in Abschn. 4.6 analysieren wir in Abschn. 4.7 das Infrarotverhalten der gekoppelten Integralgleichungen. Schließlich präsentieren wir in Abschn. 4.8 die numerischen Ergebnisse und bestimmen insbesondere die kritische Temperatur des Deconfinement-Phasenübergangs.

Die wesentlichen Ergebnisse dieses Kapitels sind in [112] veröffentlicht.

### 4.1. Großkanonisches Ensemble

Der in Kap. 2 dargestellte Hamiltonformalismus der Yang-Mills-Theorie in Coulomb-Eichung ist die Basis für die folgenden Betrachtungen. Mit dem Hamilton-Operator  $H$  in Coulomb-Eichung (2.49) ist die *Dichtematrix* des großkanonischen Ensembles gegeben durch

$$\mathcal{D} = \exp(-LH). \quad (4.1)$$

Hier ist  $L = 1/T$  die inverse Temperatur. Da das chemische Potential für Gluonen verschwindet ( $\mu = 0$ ), besitzt die Dichtematrix  $\mathcal{D}$  (4.1) die gleiche Form wie ein kanonisches Ensemble. Thermische Erwartungswerte eines Operators  $\mathcal{O}$  sind definiert durch

$$\langle \mathcal{O} \rangle_T := \frac{\text{Tr}(\mathcal{D}\mathcal{O})}{\text{Tr} \mathcal{D}} = \frac{\sum_k \langle k | \mathcal{D}\mathcal{O} | k \rangle}{\sum_k \langle k | \mathcal{D} | k \rangle}, \quad (4.2)$$

wobei die Spur  $\text{Tr}$  über den gesamten Fockraum zu nehmen ist, also insbesondere über Zustände  $\{|k\rangle\}$  mit einer beliebigen Anzahl von Gluonen.

Da jede vollständige Basis geeignet ist, um die Spur in Gl. (4.2) auszuwerten und wir hauptsächlich an der Energie  $\langle H \rangle_T$  interessiert sind, werden wir eine Basis nutzen, die an die Struktur des Yang-Mills-Hamilton-Operators  $H$  (2.49) angepasst ist. Motiviert durch [13, 121] wählen wir für die Zustände des Fockraums eine Normierung in der Form

$$\langle A | k \rangle = \mathcal{J}[A]^{-1/2} \langle A | \tilde{k} \rangle. \quad (4.3)$$

Dieser Ansatz entfernt die Faddeev-Popov-Determinante  $\mathcal{J}[A]$  (2.48b) aus dem Skalarprodukt (2.55). Die Basiszustände  $|\tilde{k}\rangle$  des Fockraums werden wir später definieren. Der thermische Erwartungswert (4.2) kann mit Gl. (4.3) geschrieben werden als

$$\langle \mathcal{O} \rangle_T = \frac{\sum_k \langle \tilde{k} | \tilde{\mathcal{D}} \tilde{\mathcal{O}} | \tilde{k} \rangle}{\sum_k \langle \tilde{k} | \tilde{\mathcal{D}} | \tilde{k} \rangle} =: \langle \tilde{\mathcal{O}} \rangle_{\tilde{T}} \quad (4.4)$$

mit dem transformierten Operator [vgl. (3.5)]

$$\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{J}^{1/2}[A] \mathcal{O} \mathcal{J}^{-1/2}[A]. \quad (4.5)$$

Die transformierte Dichtematrix (4.1) lautet entsprechend

$$\tilde{\mathcal{D}} = \mathcal{J}^{1/2}[A] \mathcal{D} \mathcal{J}^{-1/2}[A] = \exp(-L\tilde{H}). \quad (4.6)$$

Der mit Gl. (4.5) transformierte Yang-Mills-Hamiltonian  $\tilde{H}$  ergibt sich durch die Ersetzung

$$\mathcal{J}^{-1}[A] \Pi \mathcal{J}[A] \Pi \longrightarrow \tilde{\Pi}^\dagger \tilde{\Pi} \quad (4.7)$$

im kinetischen Term des Hamilton-Operators (2.49). Hierbei ist der transformierte Impulsoperator  $\tilde{\Pi}$  gegeben durch [vgl. (3.23)]

$$\tilde{\Pi} = \mathcal{J}^{1/2}[A] \Pi \mathcal{J}^{-1/2}[A] = \Pi + \frac{i}{2} \frac{\delta \ln \mathcal{J}[A]}{\delta A}. \quad (4.8)$$

Die Auswertung der thermischen Erwartungswerte erfolgt im Impulsraum. Den Feldoperator  $A$  und den Impulsoperator  $\Pi$  [vgl. (2.33)] können wir mit

$$A_i^a(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\omega(\mathbf{k})}} \left( a_i^a(\mathbf{k}) + a_i^{a\dagger}(-\mathbf{k}) \right), \quad (4.9a)$$

$$\Pi_i^a(\mathbf{k}) = i\sqrt{\frac{\omega(\mathbf{k})}{2}} \left( a_i^{a\dagger}(\mathbf{k}) - a_i^a(-\mathbf{k}) \right) \quad (4.9b)$$

durch Erzeuger  $a_i^{a\dagger}(\mathbf{k})$  und Vernichter  $a_i^a(\mathbf{k})$  Vernichter ausdrücken, die wegen Gl. (2.46) die Vertauschungsrelation

$$[a_i^a(\mathbf{k}), a_j^{b\dagger}(\mathbf{q})] = \delta^{ab} t_{ij}(\mathbf{k}) (2\pi)^d \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \quad (4.10)$$

erfüllen. Hierbei ist  $t_{ij}(\mathbf{k})$  der transversale Projektor im Impulsraum (2.45).

Bisher ist  $\omega(\mathbf{k})$  eine beliebige positive Funktion. Aus der Bedingung, dass der Vakuumzustand  $|\tilde{0}\rangle$  durch einen Vernichter annihiliert wird,

$$a_i^a(\mathbf{k}) |\tilde{0}\rangle \stackrel{!}{=} 0, \quad (4.11)$$

folgt für die Vakuumwellenfunktion die Darstellung

$$\langle A|\tilde{0}\rangle = \mathcal{N} \exp \left[ -\frac{1}{2} A(1)\omega(1,2)A(2) \right] \quad (4.12)$$

mit einer Normierungskonstanten  $\mathcal{N}$ . Die Zustände

$$|\tilde{0}\rangle, \quad a_i^{a\dagger}(\mathbf{k})|\tilde{0}\rangle, \quad a_i^{a\dagger}(\mathbf{k})a_j^{b\dagger}(\mathbf{q})|\tilde{0}\rangle, \quad \dots \quad (4.13)$$

bilden eine vollständige Basis  $\{|\tilde{k}\rangle\}$  des Fockraums, mit der wir die durch Gl. (4.4) definierten thermischen Erwartungswerte berechnen.

Aufgrund der nicht-lokalen Struktur des Yang-Mills-Hamilton-Operators (2.49) kann die Dichtematrix (4.6) nur mit einer zusätzlichen Näherung berechnet werden. Dem Vorgehen in [121] folgend, ersetzen wir den transformierten Yang-Mills-Hamiltonian  $\tilde{H}$  in der Dichtematrix  $\tilde{\mathcal{D}}$  (4.6) durch

$$\tilde{\mathcal{D}} \approx \exp(-Lh), \quad h := \int \tilde{d}^d k a_i^{a\dagger}(\mathbf{k}) \Omega^{ab}(\mathbf{k}) a_i^b(\mathbf{k}). \quad (4.14)$$

mit einem Einteilchenoperator  $h$ . Die Funktionen  $\Omega^{ab}(\mathbf{k})$  und  $\omega^{ab}(\mathbf{k})$  ist aufgrund der globalen Farb- und Rotationsinvarianz diagonal im Farbraum und eine Funktion des Betrages des dreidimensionalen Impulses  $|\mathbf{k}|$ . Sie werden im Folgenden durch Minimierung der freien Energie bestimmt.

Da die Dichtematrix  $\tilde{\mathcal{D}}$  (4.14) das Exponential des Einteilchenoperators  $h$  ist, kann das Wick-Theorem zur Berechnung von thermischen Erwartungswerten verwendet werden. Die Temperaturabhängigkeit wird durch die bosonischen Besetzungszahlen  $n(\mathbf{k})$  induziert, die im Impulsraum gegeben sind durch

$$\langle a_i^{a\dagger}(\mathbf{k}) a_j^b(\mathbf{q}) \rangle_{\tilde{T}} = \delta^{ab} t_{ij}(\mathbf{k}) (2\pi)^d \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) n(\mathbf{k}), \quad n(\mathbf{k}) := [\exp(L\Omega(\mathbf{k})) - 1]^{-1}. \quad (4.15)$$

Der temperaturabhängige Gluon-Propagator lautet mit der Darstellung des Eichfeldes durch Erzeuger und Vernichter (4.9a)

$$D(1,2) := \langle A(1)A(2) \rangle_{\tilde{T}}, \quad D(\mathbf{k}) = \frac{1 + 2n(\mathbf{k})}{2\omega(\mathbf{k})}. \quad (4.16)$$

Mit Gl. (4.9b) folgt für den Impuls-Propagator

$$K(1,2) := \langle \Pi(1)\Pi(2) \rangle_{\tilde{T}}, \quad K(\mathbf{k}) = \frac{1 + 2n(\mathbf{k})}{2} \omega(\mathbf{k}), \quad (4.17)$$

sowie für den ‘‘gemischten’’ Propagator

$$\langle A(1)\Pi(2) \rangle_{\tilde{T}} = \frac{i}{2} \delta(1,2). \quad (4.18)$$

Die letzten beiden Propagatoren werden wir bei der Berechnung der Energiedichte verwenden.

## 4.2. Geist- und Coulomb-Propagator

Im Folgenden leiten wir die Bewegungsgleichungen für den Geist- und den Coulomb-Propagator bei endlichen Temperaturen ab. Diese Betrachtungen sind ähnlich zu denjenigen bei  $T = 0$  [vgl. [13] und Abschn. 2.3.3]. Insbesondere wir werden auf die gleichen

Näherungen zurückgreifen und die Bewegungsgleichungen auf Ein-Loop-Niveau sowie die Energie auf Zwei-Loop-Niveaubestimmen. In dieser Ordnung gilt für die Faddeev-Popov-Determinante [90]

$$\mathcal{J}[A] = \exp[-A(1)\chi(1,2)A(2)], \quad (4.19)$$

wobei wir analog zu Gl. (3.22) die Krümmung

$$\chi(1,2) := -\frac{1}{2} \left\langle \frac{\delta^2 \ln \mathcal{J}[A]}{\delta A(1)\delta A(2)} \right\rangle_T \quad (4.20)$$

definiert haben. Der Beweis aus [90] für die Darstellung (4.19) ist gültig für  $T = 0$ , lässt sich aber direkt auf endliche Temperaturen übertragen, da die Dichtematrix (4.14) das Exponential eines Einteilchenoperators ist.

Der Geist-Propagator ist hier definiert als der thermische Erwartungswert des Faddeev-Popov-Operators (2.48a)

$$G := \langle G_A \rangle_T. \quad (4.21)$$

Für den Geist-Formfaktor  $d(\mathbf{k})$  (3.12) folgt unter der Annahme, dass auch bei endlichen Temperaturen der volle Geist-Gluon-Vertex durch den nackten Vertex ersetzt werden kann, die Dyson-Schwinger-Gleichung in Rainbow-Ladder-Näherung [13]

$$d^{-1}(\mathbf{k}) = \frac{1}{g} - I_d(\mathbf{k}) \quad (4.22)$$

mit dem Schleifenintegral

$$I_d(\mathbf{k}) = N_c \int \bar{d}^d q [1 - (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{q}})^2] \frac{d(\mathbf{k} - \mathbf{q})}{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} \frac{1 + 2n(\mathbf{q})}{2\omega(\mathbf{q})}. \quad (4.23)$$

Die Gleichung für den Geist-Formfaktor unterscheidet sich von dem Ausdruck bei  $T = 0$  [vgl. (3.13)] durch die Ersetzung des Gluon-Propagators durch sein temperaturabhängiges Pendant (4.16):

$$D(\mathbf{q}, T = 0) = \frac{1}{2\omega(\mathbf{q})} \longrightarrow \frac{1 + 2n(\mathbf{q})}{2\omega(\mathbf{q})} = D(\mathbf{q}, T). \quad (4.24)$$

Die skalare Krümmung (4.20) kann mit dem Geist-Formfaktor (4.22) im Impulsraum geschrieben werden als [13]

$$\chi(\mathbf{k}) = \frac{N_c}{2(d-1)} \int \bar{d}^d q [1 - (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{q}})^2] \frac{d(\mathbf{k} - \mathbf{q})}{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} \frac{d(\mathbf{q})}{2\omega(\mathbf{q})} \quad (4.25)$$

und hat somit die gleiche Gestalt wie bei verschwindender Temperatur [vgl. (3.14)]. Zu beachten ist allerdings, dass der Geist-Formfaktor eine implizite Temperaturabhängigkeit,  $d(\mathbf{q}) \equiv d(\mathbf{q}, T)$ , besitzt.

Ebenfalls analog zu  $T = 0$  [vgl. Gl. (2.69)] definieren wir den Coulomb-Propagator

$$F(1,2) = \langle F_A(1,2) \rangle_T. \quad (4.26)$$

Für den Coulomb-Formfaktor  $f(\mathbf{k})$  (3.15) folgt bei Vernachlässigung der Abhängigkeit der Dichtematrix von der Kopplung  $g$  die Integralgleichung

$$f(\mathbf{k}) = 1 + I_f(\mathbf{k}) \quad (4.27)$$

mit dem Schleifenintegral

$$I_f(\mathbf{k}) = N_c \int \bar{d}^d q [1 - (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{q}})^2] \frac{d(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2}{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} \frac{f(\mathbf{k} - \mathbf{q})}{2\omega(\mathbf{q})} \frac{1 + 2n(\mathbf{q})}{2\omega(\mathbf{q})}. \quad (4.28)$$

Auch diese Integralgleichung unterscheidet sich nur durch den Austausch des Gluon-Propagators mit Gl. (4.16) von derjenigen bei verschwindender Temperatur [vgl. (3.17)].

### 4.3. Die freie Energie

Im Hamiltonzugang in Coulomb-Eichung [Kap. 3] konnten wir bei  $T = 0$  den Ansatz für das Wellenfunktional mit dem Variationsprinzip für die Energiedichte optimieren. Bei endlichen Temperaturen  $T$  ist nicht mehr die Energiedichte, sondern das thermodynamische Potential zu minimieren. Das thermodynamische Potential des großkanonischen Ensembles ist, wegen dem verschwindenden chemischen Potential der Gluonen, die freie Energie

$$\mathcal{F} = \langle \tilde{H} \rangle_{\tilde{T}} - T\mathcal{S}. \quad (4.29)$$

Hier ist die Entropie  $\mathcal{S}$  definiert durch

$$\mathcal{S} := \frac{\partial(T \ln \tilde{Z})}{\partial T} \quad (4.30)$$

mit der Zustandssumme  $\tilde{Z}$  des großkanonischen Ensembles,

$$\tilde{Z} = \text{Tr } \tilde{\mathcal{D}}, \quad (4.31)$$

und der Dichtematrix  $\tilde{\mathcal{D}}$  [vgl. (4.6)].

Die freie Energie (4.29) kann mit der Zustandssumme (4.31) auch in der Form

$$\mathcal{F} = T \ln \tilde{Z} \quad (4.32)$$

geschrieben werden. Da wir einen Ansatz für die exakte Dichtematrix (4.6) gemacht haben, liefern die beiden an sich äquivalenten Formulierungen (4.29) und (4.32) nicht die gleichen Resultate. In der hier präsentierten Näherung ist es daher zwingend erforderlich die freie Energie  $\mathcal{F}$  aus der Gleichung (4.29) zu bestimmen, um die Korrelationen der Gluonen zu berücksichtigen.

Nach dem Bilden der Spur lautet die Zustandssumme (4.31) der Dichtematrix  $\tilde{\mathcal{D}}$  (4.14)

$$\tilde{Z} = \exp \left[ (d-1)(N_c^2 - 1)V \int \mathrm{d}^d q \ln(1 + n(\mathbf{q})) \right] \quad (4.33)$$

mit dem räumlichen Volumen  $V$  und der Anzahl  $N_c^2 - 1$  der Freiheitsgrade im Farbraum der Gluonen. Aus Gl. (4.33) folgt mit Gl. (4.30) für die Entropie

$$\mathcal{S} = (d-1)(N_c^2 - 1)V \int \mathrm{d}^d q [Ln(\mathbf{q})\Omega(\mathbf{q}) + \ln(1 + n(\mathbf{q}))], \quad (4.34)$$

wobei  $\Omega(\mathbf{k})$  der Variationsansatz in der Dichtematrix (4.14) ist. Die Entropiedichte pro Freiheitsgrad der Gluonen definieren wir als

$$s[n] := \frac{\mathcal{S}}{(d-1)(N_c^2 - 1)V/(2\pi)^d}. \quad (4.35)$$

Zur Bestimmung der freien Energie (4.29) müssen wir noch den Erwartungswert  $\langle \tilde{H} \rangle_{\tilde{T}}$  des Yang-Mills-Hamiltonians (2.49) berechnen. Dabei verwenden wir in der gleichen Näherung wie bei  $T = 0$  [vgl. Abschn. 3.3] und berechnen die Energie auf Zwei-Loop-Niveau. Die magnetische Energie kann auf einfache Weise mit dem Wick-Theorem berechnet werden und lautet

$$\begin{aligned} \langle \tilde{H}_B \rangle_{\tilde{T}} = & \frac{(d-1)(N_c^2 - 1)}{4} V \int \mathrm{d}^d q \frac{\mathbf{q}^2}{\omega(\mathbf{q})} [1 + 2n(\mathbf{q})] \\ & + \frac{g^2 N_c (N_c^2 - 1)}{16} \frac{(d-1)^3}{d} V \left( \int \mathrm{d}^d q \frac{1}{\omega(\mathbf{q})} [1 + 2n(\mathbf{q})] \right)^2. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Mit der Darstellung (4.19) für die Faddeev-Popov-Determinante können wir den transformierten Impulsoperator (4.8) schreiben als

$$\tilde{\Pi}(1) = \Pi(1) - i\chi(1, 2)A(2). \quad (4.37)$$

Für Erwartungswerte von zwei Impulsoperatoren, die im kinetischen Term  $H_K$  und im Coulomb-Term  $H_C$  (2.50) auftreten, gilt mit Gl. (4.37) und den Propagatoren (4.16), (4.17), (4.18)

$$\langle \tilde{\Pi}^\dagger(1)\tilde{\Pi}(2) \rangle_{\tilde{T}} = K(1, 2) - \chi(1, 2) + \chi(1, 1')D(1', 2')\chi(2', 2). \quad (4.38)$$

Durch Kontraktion der Indizes in diesem Ausdruck folgt die kinetische Energie

$$\begin{aligned} \langle \tilde{H}_K \rangle_{\tilde{T}} &= \frac{1}{2} [K(1, 1) - \chi(1, 1) + \chi(1, 2)D(2, 3)\chi(3, 1)] \\ &= \frac{(d-1)(N_c^2 - 1)}{2} V \int d^d q [K(\mathbf{q}) - \chi(\mathbf{q}) + \chi^2(\mathbf{q})D(\mathbf{q})]. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Diese ist explizit positiv definit, wenn die Propagatoren mit Gl. (4.16) und Gl. (4.17) durch den Kern  $\omega(\mathbf{k})$  und die Besetzungszahl  $n(\mathbf{k})$  ausgedrückt werden

$$\langle \tilde{H}_K \rangle_{\tilde{T}} = \frac{(d-1)(N_c^2 - 1)}{2} V \int d^d q \left\{ \frac{[\omega(\mathbf{q}) - \chi(\mathbf{q})]^2}{2\omega(\mathbf{q})} + n(\mathbf{q}) \frac{\omega^2(\mathbf{q}) + \chi^2(\mathbf{q})}{\omega(\mathbf{q})} \right\}. \quad (4.40)$$

In dieser Darstellung ist außerdem der temperaturabhängige Teil der kinetischen Energie separiert, der zu den Besetzungszahlen proportional ist.

Schließlich bestimmen wir die Coulomb-Energie  $\langle H_C \rangle_T$ . Auf Zwei-Loop-Niveau kann in  $\langle H_C \rangle_T$  (2.50) der Coulomb-Kern  $F_A(1, 2)$  (2.70) durch seinen Erwartungswert (4.26) ersetzt werden. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} &\langle \rho(1)F_A(1, 2)\rho(2) \rangle \\ &\approx F(1, 2)R(1; 3, 4)R(2; 5, 6) \left[ \langle A(3)A(5) \rangle_{\tilde{T}} \langle \tilde{\Pi}^\dagger(4)\tilde{\Pi}(6) \rangle_{\tilde{T}} \langle A(3)\tilde{\Pi}(6) \rangle_{\tilde{T}} \langle \tilde{\Pi}^\dagger(4)A(5) \rangle_{\tilde{T}} \right], \end{aligned} \quad (4.41)$$

wobei  $R(1; 2, 3)$  in der Farbladungsdichte in Gl. (2.54) definiert wurde. Die in Gl. (4.41) auftretenden Erwartungswerte können mit den Gleichungen (4.37) und (4.38) berechnet werden, sodass wir für den Coulomb-Term

$$\begin{aligned} \langle \tilde{H}_C \rangle_{\tilde{T}} &= \frac{g^2}{2} F(1, 2)R(1; 3, 4)R(2; 5, 6) \\ &\quad \times \left\{ D(3, 5)[K(4, 6) - \chi(4, 6) + \chi(4, 4')D(4', 6')\chi(6', 6)] \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{1}{2} \delta(3, 6) - D(3, 3')\chi(3', 6) \right] \left[ \frac{1}{2} \delta(4, 5) - \chi(4, 4')D(4', 5) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.42)$$

erhalten.

Der thermische Erwartungswert  $\langle \tilde{H} \rangle_{\tilde{T}}$  des Hamilton-Operators ist jetzt durch die Beiträge (4.36), (4.40) und (4.42) bestimmt. Die Energiedichte pro Freiheitsgrad  $e[n, \omega]$  definiert durch

$$e[n, \omega] := \frac{\langle \tilde{H} \rangle_{\tilde{T}}}{(d-1)(N_c^2 - 1)V/(2\pi)^d}, \quad e[n, \omega] \equiv e_K + e_B + e_C \quad (4.43)$$

lautet schließlich im Impulsraum

$$e_K = \frac{(2\pi)^d}{2} \int \tilde{d}^d q \left[ K(\mathbf{q}) - \chi(\mathbf{q}) + \chi^2(\mathbf{q}) D(\mathbf{q}) \right], \quad (4.44a)$$

$$e_B = \frac{(2\pi)^d}{2} \int \tilde{d}^d q \mathbf{q}^2 D(\mathbf{q}) + \frac{g^2 (2\pi)^d N_c (d-1)^2}{4d} \left( \int \tilde{d}^d p D(\mathbf{p}) \right)^2, \quad (4.44b)$$

$$e_C = \frac{g^2 N_c}{4(d-1)} (2\pi)^d \int \tilde{d}^d p \tilde{d}^d q \left[ d-2 + (\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{q}})^2 \right] F(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \left\{ D(\mathbf{p}) K(\mathbf{q}) + D(\mathbf{q}) K(\mathbf{p}) \right. \\ \left. + D(\mathbf{p}) D(\mathbf{q}) [\chi(\mathbf{p}) - \chi(\mathbf{q})]^2 + [D(\mathbf{p}) - D(\mathbf{q})] [\chi(\mathbf{p}) - \chi(\mathbf{q})] - \frac{1}{2} \right\} \quad (4.44c)$$

mit dem in (4.26) definierten Coulomb-Propagator  $F(\mathbf{k})$ . Die freie Energiedichte (4.29) ist jetzt durch die Entropie- und die Energiedichte Gl. (4.35), bzw. Gl. (4.44) bestimmt.

#### 4.4. Variationsprinzip bei endlichen Temperaturen

Den bisher beliebigen Kern  $\Omega(\mathbf{k})$  im Ansatz für die Dichtematrix  $\tilde{D}$  (4.14) bestimmen wir mit dem Variationsprinzip bei endlichen Temperaturen. Hierzu minimieren wir das thermodynamische Potential des großkanonischen Ensembles, das für Gluonen mit der freien Energie übereinstimmt. Die freie Energiedichte ist gegeben durch

$$f[n, \omega] = e[n, \omega] - Ts[n] \quad (4.45)$$

mit der Energiedichte  $e[n, \omega]$  (4.44) und der Entropiedichte  $s[n]$  (4.35). Es ist einfacher die freie Energie nach den Besetzungszahlen  $n(\mathbf{k})$  (4.15) statt nach dem Kern  $\Omega(\mathbf{k})$  zu variieren. Dies ist äquivalent, da die Besetzungszahlen  $n(\mathbf{k})$  eine monotone Funktion von  $\Omega(\mathbf{k})$  sind. Mit dieser Vorgehensweise lautet die Bedingung für Stationarität der freien Energiedichte (4.45)

$$\frac{\delta f[n, \omega]}{\delta n(\mathbf{k})} = \frac{\delta e[n, \omega]}{\delta n(\mathbf{k})} - T \frac{\delta s[n]}{\delta n(\mathbf{k})} \stackrel{!}{=} 0. \quad (4.46)$$

Die Variation der Entropie (4.35) nach den Besetzungszahlen ergibt

$$\frac{\delta s[n]}{\delta n(\mathbf{k})} = \frac{1}{T} \Omega(\mathbf{k}). \quad (4.47)$$

Damit kann die Bedingung Gl. (4.46) geschrieben als

$$\Omega(\mathbf{k}) = \frac{\delta e[n, \omega]}{\delta n(\mathbf{k})}, \quad (4.48)$$

was  $\Omega(\mathbf{k})$  als Quasi-Gluonenenergie identifiziert.

Der positiv definiten Kern  $\omega(\mathbf{k})$ , der in das Vakuumwellenfunktional (4.12) und die gewählte Basis für den Fockraum eingeht, ist ebenfalls noch unbestimmt. Nach Bildung der Spur über die vollständige Basis des Fockraums sind die thermodynamischen Erwartungswerte und die freie Energie unabhängig von  $\omega(\mathbf{k})$ . Da wir den Hamilton-Operator in der Dichtematrix  $\tilde{D}$  (4.6) durch den Einteilchenoperator (4.14) ersetzt haben, ist die Wahl von  $\omega(\mathbf{k})$  nicht beliebig. Wir bestimmen deshalb ein optimales  $\omega(\mathbf{k})$  ebenfalls durch das Variationsprinzip

$$\frac{\delta f[n, \omega]}{\delta \omega(\mathbf{k})} \stackrel{!}{=} 0, \quad (4.49)$$

wobei wir die implizite Abhängigkeit der Funktionen  $\chi(\mathbf{k})$  und  $F(\mathbf{k})$  von  $\omega(\mathbf{k})$  vernachlässigen, da deren Berücksichtigung zu Schleifenintegralen höherer Ordnung führen und die

Bewegungsgleichung das Ein-Loop-Niveau verlassen würde. Die Abhängigkeit der Energiedichte  $e$  von  $\omega(\mathbf{k})$  und  $n(\mathbf{k})$  kann deshalb ausschließlich durch den Impuls- und den Gluon-Propagator  $K$  (4.17), bzw.  $D$  (4.16) ausgedrückt werden

$$e[n, \omega] \equiv e[D[n, \omega], K[n, \omega]]. \quad (4.50)$$

Mit den Gleichungen (4.16), (4.17) und Verwendung der Kettenregel folgt für die Variation der Energiedichte nach den Besetzungszahlen  $n(\mathbf{k})$  bzw. nach dem Kern  $\omega(\mathbf{k})$

$$\frac{\delta e[n, \omega]}{\delta \omega(\mathbf{k})} = \frac{1 + 2n(\mathbf{k})}{2} \left[ \frac{\delta e[n, \omega]}{\delta D(\mathbf{k})} - \omega^2(\mathbf{k}) \frac{\delta e[n, \omega]}{\delta K(\mathbf{k})} \right], \quad (4.51a)$$

$$\frac{\delta e[n, \omega]}{\delta n(\mathbf{k})} = \frac{1}{\omega(\mathbf{k})} \frac{\delta e[n, \omega]}{\delta D(\mathbf{k})} + \omega(\mathbf{k}) \frac{\delta e[n, \omega]}{\delta K(\mathbf{k})}. \quad (4.51b)$$

Da die Entropiedichte  $s[n]$  (4.35) nicht explizit von  $\omega(\mathbf{k})$  abhängt, reduziert sich die Bedingung (4.49) auf

$$\frac{\delta e[n, \omega]}{\delta \omega(\mathbf{k})} \stackrel{!}{=} 0. \quad (4.52)$$

Hieraus folgt mit der Identität (4.51a) schließlich die Gap-Gleichung

$$\frac{\delta e[n, \omega]}{\delta D(\mathbf{k})} = \omega^2(\mathbf{k}) \frac{\delta e[n, \omega]}{\delta K(\mathbf{k})}, \quad (4.53)$$

die für die Energiedichte (4.44) geschrieben werden kann als

$$\omega^2(\mathbf{k}) = \mathbf{k}^2 + \chi^2(\mathbf{k}) + I_\omega^0[n] + I_\omega[n](\mathbf{k}). \quad (4.54)$$

Hier ist  $\chi(\mathbf{k})$  die skalare Krümmung (4.25), sowie

$$I_\omega^0[n] := \frac{g^2 N_c (d-1)^2}{2d} \int \bar{d}^d q \frac{1 + 2n(\mathbf{q})}{\omega(\mathbf{q})} \quad (4.55)$$

der Tadpole-Term und

$$I_\omega[n](\mathbf{k}) := \frac{g^2 N_c}{2(d-1)} \int \bar{d}^d q [d-2 + (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{q}})^2] \frac{F(\mathbf{k}-\mathbf{q})}{\omega(\mathbf{q})} \\ \times \left\{ (1 + 2n(\mathbf{q})) [\omega^2(\mathbf{q}) - \omega^2(\mathbf{k}) + (\chi(\mathbf{q}) - \chi(\mathbf{k}))^2] - 2\omega(\mathbf{q})(\chi(\mathbf{q}) - \chi(\mathbf{k})) \right\} \quad (4.56)$$

die Beiträge aus der Coulomb-Wechselwirkung. Für  $T = 0$  ( $n(\mathbf{k}) = 0$ ) reduziert sich diese Gleichung auf die bekannte Gap-Gleichung in Coulomb-Eichung [vgl. [13]].

Durch Einsetzen der Gap-Gleichung (4.53) in (4.51b) folgt für die Stationarität der Quasi-Gluonenergie  $\Omega(\mathbf{k})$  (4.48)

$$\Omega(\mathbf{k}) = 2\omega(\mathbf{k}) \frac{\delta e}{\delta K(\mathbf{k})}. \quad (4.57)$$

Mit der Energiedichte (4.44) erhalten wir hieraus die Integralgleichung

$$\frac{\Omega(\mathbf{k})}{\omega(\mathbf{k})} = 1 + I_\Omega(\mathbf{k}) \quad (4.58)$$

mit

$$I_\Omega(\mathbf{k}) := \frac{g^2 N_c}{2(d-1)} \int \bar{d}^d q [d-2 + (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{q}})^2] F(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \frac{1 + 2n(\mathbf{q})}{\omega(\mathbf{q})}. \quad (4.59)$$

Die Schleifenintegrale in der Gap-Gleichung (4.54) und der Gleichung für die Gluonenergie  $\Omega(\mathbf{k})$  (4.58) sind, ebenso wie diejenigen in den Dyson-Schwinger-Gleichungen für den Geist-Formfaktor (4.22) und den Coulomb-Formfaktor (4.27), ultraviolett-divergent und müssen reguliert bzw. renormiert werden.

## 4.5. Renormierung

Bei großen äußeren Impulsen  $k \equiv |\mathbf{k}| \gg T$  wird die Temperatur als Skala vernachlässigbar. Daher ist zu erwarten, dass  $\omega(\mathbf{k})$ ,  $d(\mathbf{k})$  und  $f(\mathbf{k})$  bei endlichen Temperaturen das gleiche Ultraviolettverhalten aufweisen, wie bei  $T = 0$ . Die zusätzlichen, temperaturabhängigen Terme in den Bewegungsgleichungen (4.22), (4.27) und (4.58) sind proportional zu den Besetzungszahlen  $n(\mathbf{k})$ . Diese sind exponentiell unterdrückt, da für  $k \rightarrow \infty$  auch  $\Omega(\mathbf{k}) \sim \omega(\mathbf{k}) \sim k$  und

$$n(k \rightarrow \infty) \sim e^{-L\Omega(k \rightarrow \infty)} \sim e^{-Lk} \quad (4.60)$$

gilt. Die temperaturabhängigen Terme sind deshalb UV-endlich und die Renormierung der Integralgleichung kann unabhängig von der Temperatur durchgeführt werden. Insbesondere können die gleichen Counterterme [vgl. auch Abschn. 3.4] wie bei  $T = 0$  verwendet werden.

Zu diesem Zweck trennen wir die temperaturabhängigen, endlichen Beiträge von den divergenten Termen. Die Schleifenintegrale (4.56) des Coulomb-Terms in der Gap-Gleichung (4.54) schreiben wir dazu analog [13] wie folgt

$$I_\omega[n](\mathbf{k}) = I_\omega^{(2)}(\mathbf{k}) + 2\chi(\mathbf{k})I_\omega^{(1)}(\mathbf{k}) + \bar{I}_\omega[n](\mathbf{k}), \quad (4.61)$$

wobei die Integrale  $I_\omega^{(l)}(\mathbf{k})$  in Gl. (3.33) definiert sind. Diese sind nicht explizit von der Temperatur abhängig und linear ( $l = 1$ ) bzw. quadratisch ( $l = 2$ ) divergent. Das temperaturabhängige Integral  $\bar{I}_\omega[n](\mathbf{k})$  in Gl. (4.61),

$$\begin{aligned} \bar{I}_\omega[n](\mathbf{k}) = & \frac{g^2 N_c}{d-1} \int \bar{d}^d q [d-2 + (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{q}})^2] \frac{F(\mathbf{k}-\mathbf{q})}{\omega(\mathbf{q})} \\ & \times n(\mathbf{q}) [\omega^2(\mathbf{q}) - \omega^2(\mathbf{k}) + (\chi(\mathbf{q}) - \chi(\mathbf{k}))^2], \end{aligned} \quad (4.62)$$

ist konvergent, da es proportional zu den Besetzungszahlen  $n(\mathbf{k})$  (4.60) ist. Der impulsunabhängige Tadpole-Term (4.55) kann aufgeteilt werden in

$$I_\omega^0[n] = I_\omega^0 + \bar{I}_\omega^0[n], \quad I_\omega^0 \equiv I_\omega^0[n=0] \quad (4.63)$$

mit dem quadratisch divergenten  $T = 0$ -Integral  $I_\omega^0$  [vgl. Gl. (3.30)] und dem temperaturabhängigen Term  $\bar{I}_\omega^0[n]$ , der wegen den Besetzungszahlen UV-endlich ist. Die  $T = 0$ -Counterterme sind daher ausreichend um die UV-Divergenzen in den Schleifenintegrale  $I_\omega^0$  und  $I_\omega^{(l)}(\mathbf{k})$  und damit die Gap-Gleichung zu renormieren.

Hier ist allerdings zu beachten, dass die Funktionen  $\omega(\mathbf{k})$ ,  $d(\mathbf{k})$  und  $\chi(\mathbf{k})$  implizit von der Temperatur abhängig sind. Daher subtrahieren wir bei der Renormierungs-Prozedur aus [84] [vgl. Abschn. 3.4] die Schleifenintegrale in der Gap-Gleichung mit den  $T = 0$ -Lösungen,

$$\bar{\chi}(\mathbf{k}) = \chi(\mathbf{k}) - \chi(\mu_\chi)|_{T=0}, \quad \Delta I_\omega^{(l)}(\mathbf{k}) = I_\omega^{(l)}(\mathbf{k}) - I_\omega^{(l)}|_{T=0}(0), \quad \Delta I_\omega^0 = I_\omega^0 - I_\omega^0|_{T=0}, \quad (4.64)$$

wobei durch das Subskript  $T = 0$  angedeutet wird, dass in die Schleifenintegrale die selbst-konsistenten Lösungen bei  $T = 0$  einzusetzen sind. Für die Renormierungsskala der Coulomb-Integrale  $\mu_\omega = 0$  wählen wir und für die Faddeev-Popov-Determinante  $\mu_\chi > 0$ . Die renormierte Gap-Gleichung lautet schließlich [84]

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{k})^2 = & \mathbf{k}^2 + \bar{\chi}(\mathbf{k})^2 + \Delta I_\omega^0 + \bar{I}_\omega^0[n] + c_0 \\ & + \Delta I_\omega^{(2)}(\mathbf{k}) + 2\bar{\chi}(\mathbf{k})[\Delta I_\omega^{(1)}(\mathbf{k}) + c_1] + \bar{I}_\omega[n](\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (4.65)$$

mit den endlichen Renormierungskonstanten  $c_0, c_1$ . In Gl. (4.65) ist zu beachten, dass das Tadpole-Integral  $\Delta I_\omega^0$  wegen der impliziten Temperaturabhängigkeit des Kerns  $\omega(\mathbf{k})$  nicht in die Renormierungskonstante  $c_0$  absorbiert werden kann.

Die Dyson-Schwinger-Gleichung für den Geist-Formfaktor (4.22) wird durch die Subtraktion

$$d^{-1}(\mathbf{k}) = d^{-1}(\mu_d) - \Delta I_d(\mathbf{k}), \quad \Delta I_d(\mathbf{k}) = I_d(\mathbf{k}) - I_d(\mu_d)|_{T=0}. \quad (4.66)$$

bei einer beliebigen Skala  $\mu_d$  und bei  $T = 0$  renormiert [vgl. (3.44)]. Das Gribov-Zwanziger-Confinement-Szenario erfordert für  $T = 0$  die Horizont-Bedingung (3.45)

$$d^{-1}(k = 0)|_{T=0} = 0. \quad (4.67)$$

Wie in Abschn. 3.4 diskutiert, kann diese Bedingung durch die Wahl von

$$d^{-1}(\mu_d = 0) = 0 \quad (4.68)$$

explizit in der Gleichung realisiert werden.

Die renormierte Dyson-Schwinger-Gleichung für den Coulomb-Formfaktor  $f(\mathbf{k})$  (4.27) ergibt sich ebenfalls durch einmaliges Abziehen der Integrale (4.28) mit den Lösungen bei  $T = 0$  bei einer beliebigen Skala  $\mu_f$

$$f(\mathbf{k}) = f(\mu_f) + \Delta I_f(\mathbf{k}), \quad \Delta I_f(\mathbf{k}) = I_f(\mathbf{k}) - I_f(\mu_f)|_{T=0}. \quad (4.69)$$

Die Bewegungsgleichungen für den Geist- und den Coulomb-Formfaktor (4.66) bzw. (4.69), sowie die Gap-Gleichung (4.65) für  $\omega(\mathbf{k})$  sind jetzt UV-endlich.

## 4.6. Vernachlässigung des Coulomb- und Tadpole-Terms

Wir interessieren uns für eine Beschreibung des Deconfinement-Phasenübergangs. Wenn das Gribov-Zwanziger Confinement-Szenario in Coulomb-Eichung Gültigkeit hat, erwarten wir, dass sich das Infrarotverhalten der Propagatoren, insbesondere des Geist-Formfaktors  $d(\mathbf{k})$  und der Gluonenergie  $\omega(\mathbf{k})$  bzw.  $\Omega(\mathbf{k})$ , am Phasenübergang ändert. Bei  $T = 0$  zeigen die numerischen Lösungen [Abschn. 3.6.4], dass der Coulomb-Term in der renormierten Gap-Gleichung (4.65) mit  $\mu_\omega = 0$  keinen Einfluss auf das führende Infrarotverhalten hat. Für eine qualitative Analyse des Phasenübergangs ist dieser daher vernachlässigbar.

Ohne Coulomb-Term reduziert sich die renormierte Gap-Gleichung (4.65) auf

$$\omega(\mathbf{k})^2 = \mathbf{k}^2 + \bar{\chi}(\mathbf{k})^2 + \Delta I_\omega^0 + \bar{I}_\omega^0[n] + c_0 + 2c_1\bar{\chi}(\mathbf{k}). \quad (4.70)$$

Während die Gleichungen für den Geist-Formfaktor (4.66) und den Coulomb-Formfaktor (4.69) unverändert bleiben, gilt jetzt für die Quasi-Gluon-Energie (4.58)

$$\Omega(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k}), \quad (4.71)$$

wodurch die Besetzungszahlen  $n(\mathbf{k})$  (4.15) ausschließlich von dem Kern  $\omega(\mathbf{k})$  abhängig sind.

Das Tadpole-Integral  $\Delta I_\omega^0$  (4.64) beinhaltet die Veränderung des Tadpole-Terms durch die Änderung der selbst-konsistenten Lösungen bei endlichen Temperaturen, ist aber unabhängig von den Besetzungszahlen. Es ist daher zu erwarten, dass  $\Delta I_\omega^0$  klein ist. Daher vernachlässigen wir diesen Term ebenfalls, wodurch wir schließlich zu der Gap-Gleichung in der Form

$$\omega^2(\mathbf{k}) = \mathbf{k}^2 + \bar{\chi}^2(\mathbf{k}) + \bar{I}_\omega^0[n] + c_0 + 2c_1\bar{\chi}(\mathbf{k}) \quad (4.72)$$

gelangen, die über die Krümmung  $\bar{\chi}(\mathbf{k})$  an die Gleichung für den Geist-Formfaktor  $d(\mathbf{k})$  gekoppelt ist.

## 4.7. Infrarotanalyse

Bevor wir eine numerische Lösung der gekoppelten Gleichungen (4.69), (4.66) und (4.72) berechnen, werden wir in diesem Abschnitt das Infrarotverhalten der Integralgleichungen bei endlichen Temperaturen untersuchen. Hierzu verwenden wir als Ansatz für das führende Infrarotverhalten der Gluonenergie  $\omega(k)$ , des Geist-Formfaktors  $d(k)$  und des Coulomb-Formfaktors  $f(k)$  die Potenzgesetze

$$\omega(k) = \frac{A}{k^\alpha}, \quad d(k) = \frac{B}{k^\beta}, \quad f(k) = \frac{C}{k^\eta}, \quad (4.73)$$

wobei die Koeffizienten  $A, B, C$  und die Infrarotexponenten  $\alpha, \beta, \eta$  in diesem Kapitel als temperaturabhängig angenommen werden.

Bei  $T = 0$  verschwinden die Besetzungszahlen  $n(\mathbf{k})$  und die Integralgleichungen sind identisch mit denen des Vakuums [vgl. Abschn. 3], daher lieferte eine Infrarotanalyse in diesem Fall die gleichen Ergebnisse [vgl. Abschn. 3.5.2]. Insbesondere folgt mit der Horizont-Bedingung (4.67) aus der Geist Dyson-Schwinger-Gleichung (4.22) unter der Annahme eines nackten Geist-Gluon-Vertex die Summenregel

$$\alpha = 2\beta + 2 - d \quad (4.74)$$

in  $d$  räumlichen Dimensionen. Aus der Konsistenz der Gap-Gleichung mit der Gleichung für den Geist-Formfaktor finden wir in  $d = 3$  räumlichen Dimensionen zwei Lösungen [47]

$$\beta \simeq 0.7952, \quad \beta = 1 \quad (d = 3). \quad (4.75)$$

In  $d = 2$  räumlichen Dimensionen finden wir eine Lösung mit [47, 83]

$$\beta = 0.4, \quad (d = 2). \quad (4.76)$$

Bei endlichen Temperaturen  $T > 0$  beinhalten die Integralgleichungen, in denen ein Gluon-Propagator (4.16) auftritt, einen zusätzlichen Term, der die Besetzungszahlen  $n(\mathbf{k})$  (4.15) enthält und explizit von  $T$  abhängig ist. Durch die exponentielle Abhängigkeit der Besetzungszahlen von  $\omega(\mathbf{k})$  kann die gewöhnliche Methode der Infrarotnäherung nicht direkt angewendet werden. Dies ist jedoch im Hochtemperatur-Grenzfall möglich, da dort für die Besetzungszahlen  $n(\mathbf{k})$  gilt

$$n(\mathbf{k}) = [\exp(L\omega(\mathbf{k})) - 1]^{-1} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{T}{\omega(\mathbf{k})} \quad (4.77)$$

und die Infrarotanalyse der gekoppelten Integralgleichungen in gleicher Weise wie bei  $T = 0$  ausgeführt werden kann.

Wie die nachfolgende detaillierte Infrarotanalyse zeigt, finden wir bei endlichen Temperaturen sowohl die  $T = 0$ -Summenregel (4.74), als auch die ursprünglichen *kritischen* Lösungen (4.75) wieder. Zusätzlich existiert in  $d = 3$  räumlichen Dimensionen bei hohen Temperaturen eine weitere Lösung mit dem Infrarotexponenten

$$\beta = 1/2 \quad (d = 3). \quad (4.78)$$

Die Summenregel (4.74) impliziert für diese Lösung eine mit  $\alpha = 0$  infrarot-endliche Gluonenergie. Des weiteren existiert bei hohen Temperaturen die modifizierte Summenregel

$$2\alpha = 2\beta - d + 2, \quad (4.79)$$

die für  $\beta = 1/2$  mit der  $T = 0$  Summenregel (4.74) übereinstimmt.

### 4.7.1. Infrarotnäherung bei endlichen Temperaturen

Die Infrarotanalyse der gekoppelten Integralgleichungen für den Geist- und Coulomb-Formfaktor sowie für die Gap-Gleichung werden wir im Hochtemperatur-Grenzfall (4.77) durchführen. In der Infrarotnäherung verwenden wir die Potenzgesetze (4.73) als Ansatz für den gesamten Impulsbereich und berechnen die Schleifenintegrale analytisch.

**Geist-Formfaktor** Da die Horizont-Bedingung in der Gleichung für den Geist-Formfaktor  $d(k)$  (4.66) durch die Wahl der Renormierungskonstante  $d(\mu_d)^{-1}$  explizit verwirklicht ist, gilt für den Infrarotexponenten  $\beta$

$$\beta > 0. \quad (4.80)$$

In diesem Fall spielt die Renormierungskonstante und das konstante Schleifenintegral in (4.66) keine Rolle für das Infrarotverhalten und es ist ausreichend die unrenormierte Gleichung (4.22) zu betrachten. Durch Verwendung der Potenzgesetze (4.73) für die Gluonenergie  $\omega(k)$  und den Geist-Formfaktor  $d(k)$ , kann Gl. (4.22) geschrieben werden als

$$\frac{A}{B^2} = -\frac{N_c(d-1)}{4} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} k^{d-2+\alpha-2\beta} \left[ I_{d\omega}(\alpha, \beta, d) + k^\alpha \frac{2T}{A} I_{d\omega}(2\alpha, \beta, d) \right] \quad (4.81)$$

mit der in Gl. (3.59) definierten dimensionslosen Funktion  $I_{d\omega}(\alpha, \beta, d)$ . Die Form (4.81) unterscheidet sich von dem  $T = 0$ -Ergebnis [vgl. (3.61)] durch den zweiten, temperaturabhängigen Term. Bei  $T = 0$  oder für  $\alpha > 0$  (und beliebiger Temperatur) ist dieser Term im Infraroten vernachlässigbar und es folgt die  $T = 0$  Summenregel (4.74). Daher erwarten wir, dass die infrarot-divergenten  $T = 0$  Lösungen auch bei endlichen Temperaturen existieren. Der zweite Term in Gl. (4.81) dominiert im Infraroten für  $T > 0$ ,  $\alpha < 0$  oder  $T/A \gg 1$ ,  $\alpha = 0$  womit die modifizierte Summenregel (4.79) folgt, welche auch in Winkel-Näherung abgeleitet werden kann [112]. Aus Dimensionsgründen verhält sich bei  $T \gg 1$  die Temperaturabhängigkeit der Koeffizienten  $A, B$  wie

$$A = A(T) \sim T, \quad B = B(T) \sim T^{1/2}. \quad (4.82)$$

**Gap-Gleichung** Um im Infraroten selbst-konsistente Lösungen bestimmen zu können, fahren wir mit der Analyse der Gap-Gleichung ohne Coulomb-Term (4.72)

$$\omega^2(k) = \mathbf{k}^2 + \bar{\chi}^2(\mathbf{k}) + \bar{I}_\omega^0[n] + c_0 + 2c_1 \bar{\chi}(\mathbf{k})$$

fort und betrachten hierfür zuerst die (nicht-renormierte) Krümmung  $\chi(k)$  (4.25). Diese ist, bis auf die implizite Temperaturabhängigkeit des Geist-Formfaktors  $d(k)$ , identisch mit der Krümmung bei  $T = 0$  [vgl. (3.13)]. Mit dem Potenzansatz für den Geist-Formfaktor (4.73) und nach Integration über den Schleifenimpuls erhalten wir den Ausdruck [vgl. (3.71)]

$$\chi(k) = k^{d-2-2\beta} B^2 \frac{N_c}{4} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} I_{dd}(\beta, d) \quad (4.83)$$

mit der in (3.72) definierten dimensionslosen Funktion  $I_{dd}(\beta, d)$ . Aus (4.83) lesen wir den Infrarotexponenten

$$\gamma = 2\beta - d + 2 \quad (4.84)$$

der Krümmung  $\chi(k) \sim 1/k^\gamma$  ab. Alle selbst-konsistenten Lösungen erfüllen die Summenregel (4.74) bzw. (4.79), sodass mit Gl. (4.84) für  $\gamma$  gilt

$$\gamma = \alpha, \quad \gamma = 2\alpha \quad (T \gg 1).$$

Wegen der Horizont-Bedingung (4.80) ist  $\alpha$  nach unten beschränkt:

$$\alpha > 2 - d, \quad a > 1 - d/2 (T \gg 1).$$

Wir unterscheiden jetzt folgende Fälle:

- i) Wenn die Krümmung  $\chi(k)$  infrarot-divergent ist ( $\gamma > 0$ ), reduziert sich die Gap-Gleichung (4.72) im Infraroten zu

$$\omega^2(k) = \chi^2(k). \quad (4.85)$$

Da  $\omega(k) > 0$  und (im Infraroten)  $\chi(k) > 0$  ist, gilt für die Gl. (4.85)

$$\omega(k) = \chi(k)$$

und es folgt  $\alpha = \gamma > 0$ , sowie die  $T = 0$ -Summenregel (4.74). Es kann die  $T = 0$ -Selbstkonsistenzgleichung (3.75) aufgestellt werden, die insbesondere auf die Infrarotlösungen (4.75) führt.

- ii) Wenn  $\chi(k)$  im Infraroten endlich ist, wird  $\omega(k)$  im Infraroten konstant ( $\alpha = 0$ ). Aus den Summenregeln (4.74) oder (4.79) folgt

$$\beta = \frac{d-2}{2}. \quad (4.86)$$

In  $d = 3$  räumlichen Dimensionen bedeutet dies

$$\beta = \frac{1}{2} \quad (d = 3). \quad (4.87)$$

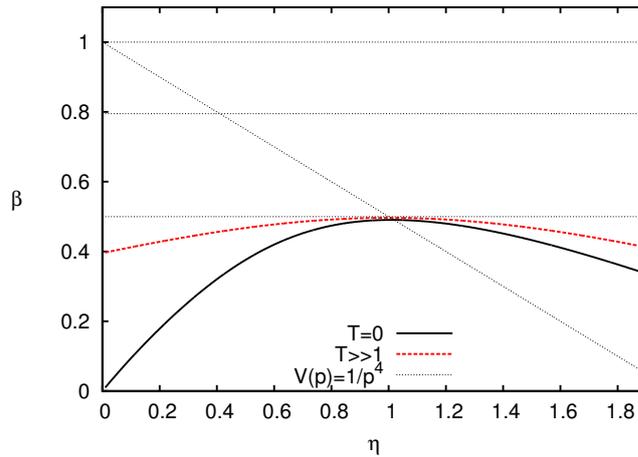
Diese Lösung werden wir in den numerischen Ergebnissen in der deconfinierten Phase finden.

- iii) Falls  $\chi(k)$  im Infraroten unterdrückt ist ( $\gamma < 0$ ), sorgt ein endlicher Tadpole  $\bar{I}_\omega^0[n]$  oder eine endliche Renormierungskonstante  $c_0$  in der Gap-Gleichung (4.72) dafür, dass die Gluonenergie  $\omega(k)$  im Infraroten konstant ( $\alpha = 0$ ) wird. In diesem Fall gilt weiterhin Gl. (4.86). Falls der Tadpole-Term (z. B. für  $g = 0$ ) und die Renormierungskonstante  $c_0 = 0$  verschwinden, ist auch die Gluonenergie  $\omega(k)$  infrarot-unterdrückt, d.h. es gilt  $\alpha < 0$ . Ist  $-1 < \gamma < 0$ , folgt für  $c_2 = 0$  aus der Gap-Gleichung die  $T = 0$ -Summenregel (4.74) sowie  $\alpha = \gamma$ . Für  $\gamma \leq -1$  wird der  $k^2$ -Term in der Gap-Gleichung infrarot-dominierend und legt den Infrarotexponenten der Gluonenergie auf  $\alpha = -1$  fest. Tatsächlich finden wir bei unseren numerischen Untersuchungen [Abschn. 4.8] eine Lösung mit  $\alpha = -1$  und  $\beta \approx 0$ .

**Coulomb-Formfaktor** Zum Schluss untersuchen wir die Dyson-Schwinger-Gleichung für den Coulomb-Formfaktor  $f(k)$  (4.69). Mit der Infrarotnäherung ergibt sich nach Integration über den Schleifenimpuls

$$\frac{C}{k^\eta} = 1 + \frac{CB^2}{A} \frac{N_c(d-2)}{2(4\pi)^{d/2}} k^{d-2+\alpha-2\beta-\eta} \left( I_{fd\omega}(\alpha, \beta, \eta, d) + k^\alpha \frac{2T}{A} I_{fd\omega}(2\alpha, \beta, \eta, d) \right), \quad (4.88)$$

wobei die Funktion  $I_{fd\omega}(\alpha, \beta, \eta, d)$  in Gl. (3.63) definiert ist. Auch hier ist, im Vergleich zu der  $T = 0$ -Infrarotanalyse [vgl. (3.62)], der zweite Term in der Klammer neu. Wir betrachten den Fall eines infrarot-divergenten Coulomb-Formfaktors  $\eta > 0$ . Falls  $T = 0$  oder  $\alpha > 0$  ist, folgen aus (4.88) die  $T = 0$ -Summenregel (4.74) sowie die entsprechenden



**Abbildung 4.1.:** Die Lösungen der impliziten Gleichung (4.89) sowie der entsprechenden Gleichung bei  $T = 0$  (3.79) als Funktion  $\beta(\eta)$ . Ebenso dargestellt sind die möglichen Lösungen  $\beta \in \{0.8, 1, 1/2\}$  des Geist-Gluon Systems.

Konsistenzbedingungen [vgl. Abschn. 3.5.2]. Daher existieren in diesem Fall keine selbst-konsistenten Lösungen von  $\omega(k)$ ,  $d(k)$  und  $f(k)$ . Für  $T > 0$  und  $\alpha \leq 0$  gilt unter der Annahme, dass für  $T \gg 1$  der temperaturabhängige Term in (4.88) dominiert, sowie mit der Geist-Gleichung (4.81) und der Summenregel (4.74)

$$I_{fd\omega}(2\alpha, \beta, \eta, d) \Big|_{\alpha=2\beta-d+2} \stackrel{!}{=} -I_{d\omega}(2\alpha, \beta, d) \Big|_{\alpha=2\beta-d+2}, \quad (4.89)$$

woraus der Exponent  $\eta$  numerisch bestimmt werden kann. In Abb. 4.1 sind die möglichen Lösungen von Gl. (4.89) als Funktion  $\beta(\eta)$  und der äquivalenten Gleichung (3.79) bei  $T = 0$  dargestellt. Zusätzlich sind in Abb. 4.1 die drei möglichen Lösungen des Geist-Gluon-Systems  $\beta \in \{0.8, 1, 1/2\}$  eingezeichnet. Die Gleichung für den Coulomb-Formfaktor hat keine infrarot-divergente Lösung, die konsistent mit diesen Lösungen ist, da die Funktion  $\beta(\eta)$  keinen Schnittpunkt mit einem dieser Infrarotexponenten hat. Der größtmögliche Wert für  $\beta$ , der aus Gl. (4.89) folgt, ist

$$\beta_{\max} = 0.496$$

und tritt bei  $\eta = 1$  auf. Wie in Abschn. 3.5.2 können wir eine Korrektur  $\varepsilon > 0$  des Vorfaktors vor dem Schleifenintegral der Gleichung für den Coulomb-Faktor einführen

$$f(\mathbf{k}, T) = f(\mu_f) + (1 - \varepsilon) \Delta I_f[n](\mathbf{k}, T) \quad (4.90)$$

und nach Lösungen der dadurch modifizierten Gleichung (4.89) suchen. Bei einer geringen Korrektur  $\varepsilon \approx 0.03$  wird der maximale Wert für den Infrarotexponent auf  $\beta_{\max} = 1/2$  verändert, womit es für hohe Temperaturen eine selbstkonsistente Lösung der gekoppelten Gleichungen geben kann. In diesem Falle ergibt sich mit den Exponenten  $\eta = 1$  und  $\beta = 1/2$  ein Infrarotverhalten für das nicht-abelsche Coulomb-Potential  $V(\mathbf{k} \rightarrow 0) \sim 1/k^{2+2\beta+\eta}$  [vgl. (3.18)] von

$$2 + 2\beta + \eta = 4.$$

Dies entspricht im Ortsraum einem linear-ansteigenden Potential  $V_C(r) \sim \sigma_C r$ , welches bei endlichen Temperaturen auch in Gitterrechnungen [69, 122] gefunden wurde. Auch in den numerischen Rechnungen in Abschn. 4.8 finden wir bei  $T \gg 1$  und mit der Regularisierung (4.90) infrarot-divergente Lösungen für den Coulomb-Formfaktor mit dem vorhergesagten Infrarotexponenten  $\eta \approx 1$ .

## 4.8. Numerische Ergebnisse

In diesem Abschnitt bestimmen wir die Lösungen der gekoppelten Gleichungen für den Geist-Formfaktor (4.66) und die Gap-Gleichung (4.72) sowie den regularisierten Coulomb-Formfaktor (4.90) im gesamten Impulsbereich numerisch. Hierzu verwenden wir das gleiche iterative Lösungsverfahren wie bei  $T = 0$ . Weitere Details sind im Anh. B und in [82, 87] zu finden. Von nun an beschränken wir uns auf  $d = 3$  räumliche Dimensionen und  $N_c = 2$ . Für die numerischen Ergebnisse werden wir die physikalische Skala verwenden, die in Abschn. 3.6.9 aus dem Vergleich der Gluonenergie bei  $T = 0$  mit Ergebnissen aus Gitterrechnungen gewonnen wurde.

Für die Renormierungskonstanten in der Gap-Gleichung (4.72) wählen wir

$$c_0 = c_1 = 0, \quad (4.91)$$

da  $c_1 = 0$  für ein t'Hoft-Loop mit Flächengesetz [84] [vgl. Abschn. 3.5.2] zu bevorzugen ist und  $c_0 = 0$  die Energiedichte minimiert [112]. In diesem Kapitel verwenden wir ausschließlich kritische Lösungen, die bei  $T = 0$  die Gl. (4.67) erfüllen. Daher verwenden wir für die Renormierungsparameter  $\mu_d = 0$  und  $d^{-1}(\mu_d) = 0$  sowie für die Krümmung  $\bar{\mu}_\chi = 4$ . Letztere legt die numerische Skala fest und hat keinen Einfluss auf die kritische Temperatur.

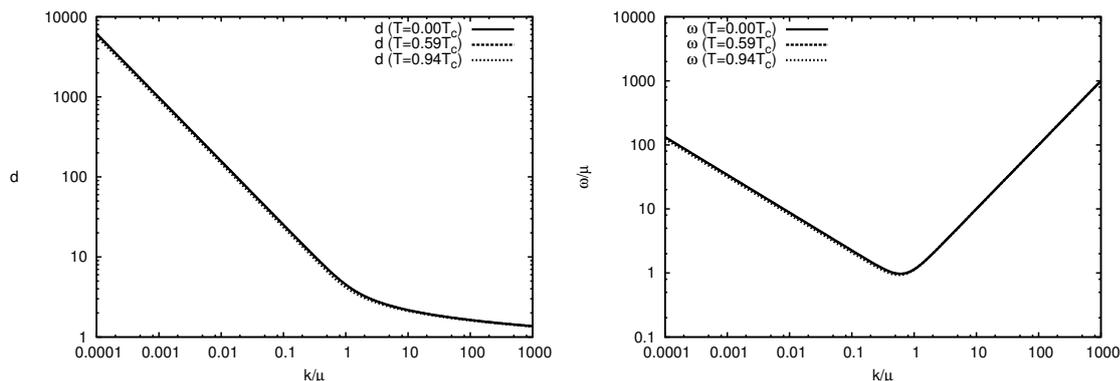
Wie in Abschn. 4.5 diskutiert, müssen die Subtrahenden in den renormierten Gleichungen mit den selbst-konsistenten  $T = 0$ -Lösungen berechnet werden, um temperaturunabhängige Renormierungskonstanten zu gewährleisten. Dies ist in einem iterativen Lösungsverfahren schwierig, da sich das Ultraviolettverhalten der  $T > 0$ - und  $T = 0$ -Integranden in den Schleifenintegralen nicht mehr exakt annihiliert und so künstliche Divergenzen entstehen. Deshalb berechnen wir die abgezogenen Schleifenintegrale mit den Lösungen bei endlichen Temperaturen. Dadurch ist insbesondere die Horizont-Bedingung  $d^{-1}(k = 0) = 0$  (4.67) für alle Temperaturen explizit verwirklicht. Alle hier gezeigten Lösungen sind mit einem (technischen) Infrarot-Cutoff  $\lambda_{\text{IR}}$  im Bereich von  $\bar{\lambda}_{\text{IR}} = 10^{-8} \dots 10^{-5}$ , sowie einem Ultraviolett-Cutoff  $\bar{\Lambda}_{\text{UV}} = 10^3 \dots 10^6$  berechnet worden.<sup>1</sup> Die Ergebnisse sind in-sensitiv auf die Wahl dieser Cutoffs.

### 4.8.1. Propagatoren bei endlicher Temperatur

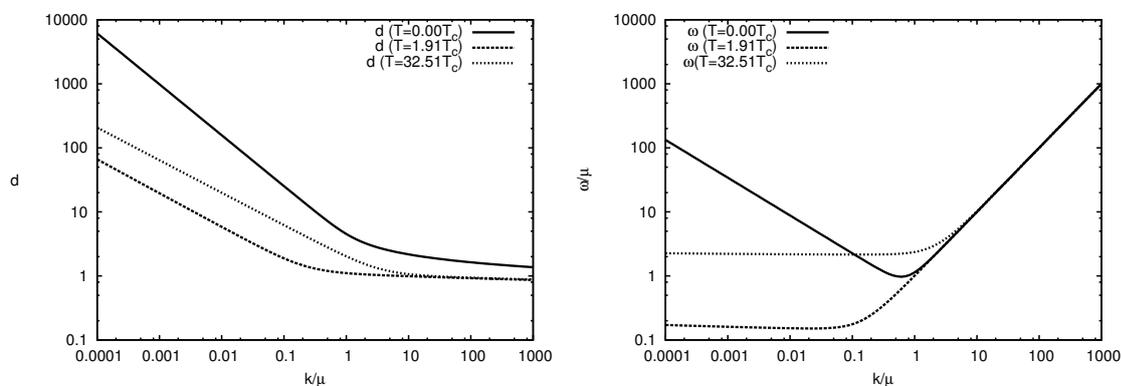
In Abb. 4.2 sind selbst-konsistente Lösungen für den Geist-Formfaktor  $d(\mathbf{k})$  und die Gluonenergie  $\omega(\mathbf{k})$  bei niedrigen Temperaturen  $T \geq 0$  als Funktion des Impulses  $\bar{k} = k/\mu$  dargestellt. Diese gleichen den  $T = 0$ -Lösungen [vgl. Abschn. 3.6] stark. Für die dargestellte Lösung gilt insbesondere  $\beta \approx 0.8$  für den Infrarotexponenten des Geist-Formfaktors sowie die  $T = 0$  Summenregel (4.74).

Oberhalb einer *kritischen Temperatur*  $T_c$  existiert nur eine Lösung mit einem infrarotdivergenten Geist-Formfaktor  $d(k)$  und  $\beta \approx 0.5$  sowie einer infrarot-endlichen ( $\alpha \approx 0$ ) Gluonenergie  $\omega(k)$ . Diese Infrarotexponent sind verträglich mit der Summenregel (4.74) und entsprechen denen der in der Hochtemperatur-Infrarotanalyse [Abschn. 4.7] gefundenen Lösung (4.87). In Abb. 4.3 zeigen wir selbst-konsistente Lösungen für den Geist-Formfaktor  $d(k)$  und die Gluonenergie  $\omega(k)$  als Funktion des Impulses für verschiedene Temperaturen oberhalb von  $T_c$  sowie zum Vergleich die  $T = 0$ -Lösung.

<sup>1</sup>Ein Überstrich kennzeichnet hier dimensionslose Einheiten.



**Abbildung 4.2.:** Lösungen für den Geist-Formfaktor  $d(k)$  (linkes Bild) und die Gluonenergie  $\omega(k)$  (rechtes Bild) für verschiedene Temperaturen  $T < T_c$ .



**Abbildung 4.3.:** Lösungen für den Geist-Formfaktor  $d(k)$  (linkes Bild) und die Gluonenergie  $\omega(k)$  (rechtes Bild) für  $T = 0$  und verschiedenen Temperaturen  $T \geq T_c$ .

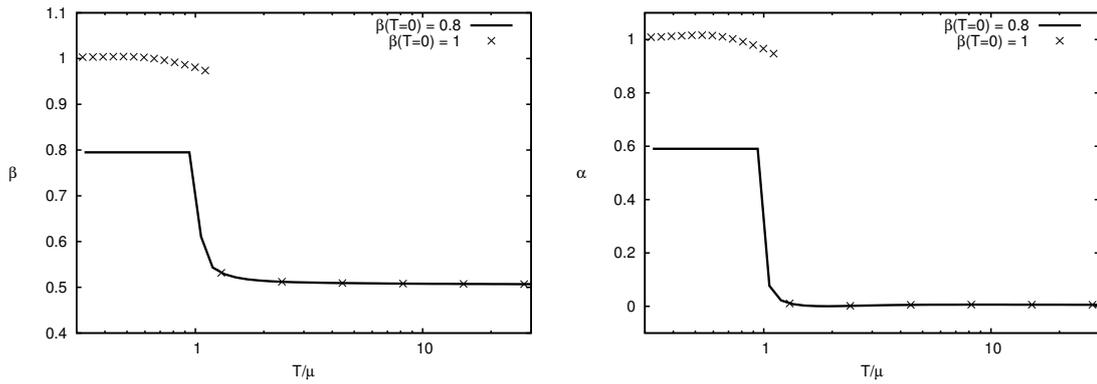
## 4.8.2. Deconfinement-Phasenübergang

**Temperaturabhängigkeit der Infrarotexponenten** Um  $T_c$  zu bestimmen, betrachten wir die Veränderung der Infrarotexponenten, die wir aus einer Vielzahl an Lösungen bei unterschiedlichen Temperaturen bestimmen. Zur Darstellung des kritischen Bereiches in der Nähe des Phasenübergangs haben wir zuerst eine Lösung bei hoher Temperatur  $T \gg T_c$  bestimmt und diese als Startpunkt für die Lösungsprozedur bei einer geringfügig niedrigeren Temperatur verwendet. Dieser Prozess wird sukzessive bis  $T = 0$  weitergeführt.<sup>2</sup>

In Abb. 4.4 zeigen wir  $\beta$  und  $\alpha$  als Funktion der Temperatur. Die Infrarotexponenten nähern sich für  $T \rightarrow \infty$  der Hochtemperatur-Lösung mit den analytischen Werten  $\beta = 1/2$  und  $\alpha = 0$  an. Für  $T \searrow T_c$  wachsen  $\beta$  und  $\alpha$  leicht an und ändern sich bei  $T_c$  abrupt auf die Werte der  $T = 0$ -Infrarotexponenten  $\beta \approx 0.8$  bzw.  $\beta = 1$ , sowie  $\alpha \approx 0.6$  bzw.  $\alpha = 1$ .<sup>3</sup>

<sup>2</sup>Da es hilfreich ist, auch die Parameter der Theorie auf logarithmischen Skalen zu verändern, endet der beschriebene Prozess bei  $T \sim \lambda_{\text{IR}}$ . Die  $T = 0$  Lösung kann außerhalb dieses Verfahrens berechnet werden.

<sup>3</sup>Im Übergangsbereich treten Instabilitäten auf. Dies trifft insbesondere für die, mit der hier gewählten Renormierungskonstanten labile,  $\beta = 1$  Lösung zu. Durchlaufen wir das oben beschriebene Verfahren auch von kleinen Temperaturen  $T < T_c$  kommend, finden wir für die  $\beta = 1$ -Lösung im Übergangsbereich ein Verhalten, das einer "Hysterese" entspricht.



**Abbildung 4.4.:** Die Infrarotexponenten  $\beta$  des Geist-Formfaktors  $d$  (linkes Bild) und  $\alpha$  der Gluonenergie  $\omega$  (rechtes Bild) als Funktion der Temperatur für die kritische Lösung bei  $T = 0$  mit  $\beta \simeq 0.8$  (Linie) und  $\beta = 1$  (Kreuze). Oberhalb der kritischen Temperatur vereinigen sich die beiden zu einer Lösung mit  $\beta = 1/2$ .

**Effektive Gluonmasse** Oberhalb der kritischen Temperatur  $T_c$  können wir den Wert der infrarot-endlichen Gluonenergie  $\omega(k)$  bei verschwindendem Impuls ( $k \rightarrow 0$ ) als eine *effektive* Masse

$$M(T) := \omega(\lambda_{\text{IR}})|_T \quad (4.92)$$

interpretieren, wobei wir berücksichtigt haben, dass  $\omega(k)$  nur bis zu dem Infrarot-Cutoff  $\lambda_{\text{IR}}$  bekannt ist. In Abb. 4.5a ist  $M(T)$  als Funktion der Temperatur dargestellt. Für hohe Temperaturen wächst die effektive Gluonmasse linear mit der Temperatur,  $M(T) \sim T$ . Da weit oberhalb von  $T_c$  die Temperatur die einzige Skala ist, muss die Gluonmasse  $M(T)$  mit  $T$  skalieren.<sup>4</sup> Für  $T \searrow T_c$  divergiert die Gluonmasse, nimmt aber wegen der Verwendung eines Infrarot-Cutoffs unterhalb von  $T_c$  nur den endlichen Wert  $\omega(\lambda_{\text{IR}})$  an.

Das Verhalten der Gluonmasse  $M(T)$  bei  $T_c$  ist durch einen kritischen Exponenten

$$\frac{M(T)}{\mu} = \left( \frac{T}{T_c} - 1 \right)^{-\kappa} \quad (4.93)$$

gekennzeichnet. In Abb. 4.5b ist der kritische Bereich von  $M(T)$  dargestellt. In der doppellogarithmischen Darstellung ist ein Potenzgesetz über mehr als eine Größenordnung erkennbar, sodass wir hieraus den kritischen Exponenten

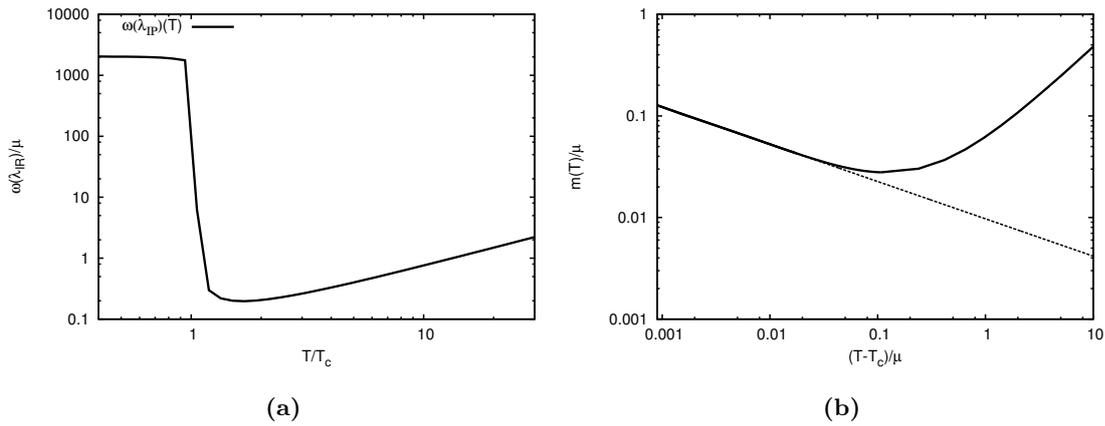
$$\kappa \approx 0.37 \quad (4.94)$$

bestimmen können. Für das kritische Verhalten des Ordnungsparameters  $M(T)$  wurde in [123] ein Wert von  $\kappa \approx 0.41$  bestimmt. Dort wurde ein Quasiteilchen-Bild für die Gluonen verwendet, um die Ergebnisse aus Gitterrechnungen für die Energiedichte und den Druck zu modellieren. Außerdem wurden die kritischen Exponenten aus dem  $d = 3$  Ising-Modell verwendet, welches in der gleichen Universalitätsklasse wie die  $SU(2)$ -Eichtheorie ist.

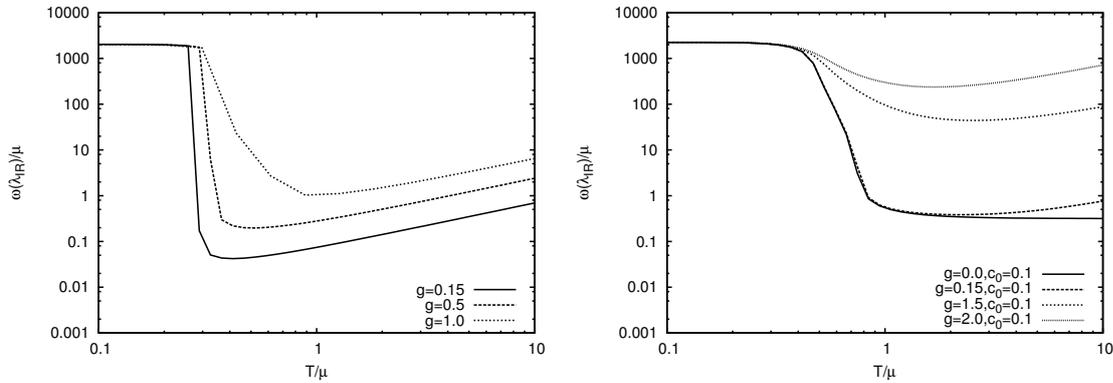
**Kritische Temperatur** Die scharfe Änderung der Infrarotexponenten [Abb. 4.4] oder der effektiven Gluonmasse  $M(T)$  [Abb. 4.5a] können benutzt werden, um die kritische Temperatur  $T_c$  zu bestimmen. Für die numerischen Lösungen folgt mit der Skala  $\mu$  aus Gl. (3.118)

$$T_c \sim 290 \text{ MeV} \quad (4.95)$$

<sup>4</sup>Dieses Verhalten haben wir bereits in der Infrarotanalyse bei hohen Temperaturen gesehen [Abschn. 4.7]. Für die Infrarotamplitude  $B$  des Geist-Formfaktors gilt entsprechend  $B(T) \sim T^{1/2}$ .



**Abbildung 4.5.:** In (a) zeigen wir die effektive Gluonmasse (4.92) als Funktion der Temperatur  $T/T_c$  und in (b) den kritischen Bereich für  $T \searrow T_c$  in doppelt-logarithmischer Darstellung zusammen mit dem Potenzgesetz (4.93).



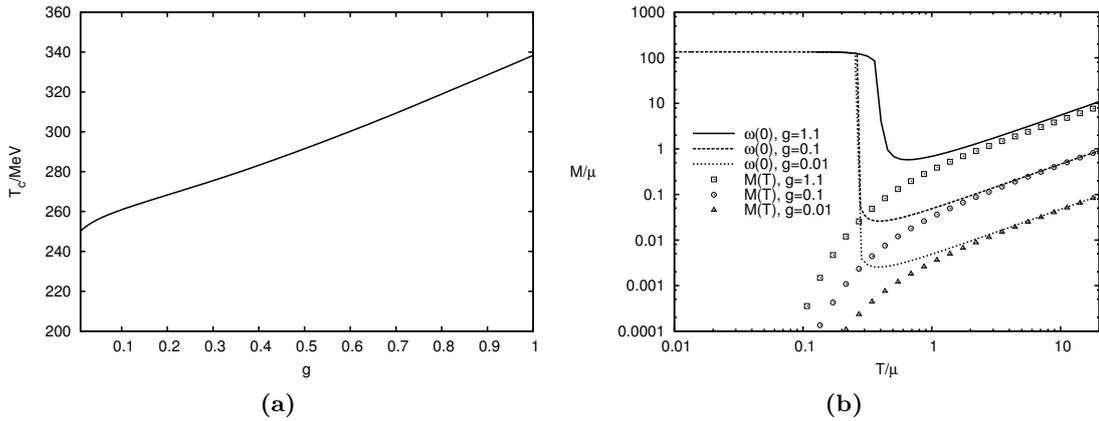
**Abbildung 4.6.:** Die effektive Gluonmasse  $M(T)$  für verschiedene Werte der Kopplungskonstanten  $g$  und  $c_0 = 0$  (linkes Bild) bzw.  $c_0 > 0$  (rechtes Bild)

oder ausgedrückt durch die Wilson-String-Tension  $\sigma_W$

$$\frac{T_c}{\sqrt{\sigma_W}} \approx 0.67 \quad (4.96)$$

für die Eichgruppe  $SU(2)$ . Dieser Wert ist nur etwas kleiner als die kritische Temperatur aus Gitterrechnungen von  $T_c/\sqrt{\sigma_W} \approx 0.70$  für die reine Yang-Mills-Theorie und die Eichgruppe  $SU(2)$  [124, 125]. Die hier bestimmte kritische Temperatur ist, mit Ausnahme der Kopplungskonstanten  $g$ , unabhängig von der Wahl der Renormierungskonstanten und numerischen Parametern.

**Tadpole-Term** Die Kopplungskonstante  $g$  geht explizit in den temperaturabhängigen Teil des Tadpole-Integrals  $\bar{I}_\omega^0[n]$  ein, der Teil der effektiven Masse in der Gap-Gleichung (4.72) ist. Dieser impulsunabhängige Term hat bei kleinen Temperaturen keinen Einfluss auf das Infrarotverhalten der für  $k \rightarrow \infty$  divergenten Lösungen. Bei den Deconfinement-Lösungen mit  $\alpha = 0$  oberhalb von  $T_c$  spielt hingegen der Wert der effektiven Masse eine Rolle. Daher erwarten wir, dass die kritische Temperatur  $T_c$  von der Kopplungskonstanten  $g$  abhängig ist. Die bisher dargestellten Lösungen wurden mit einer Kopplung von  $g = 0.5$



**Abbildung 4.7.:** In (a) ist die Abhängigkeit der kritischen Temperatur  $T_c$  von der Kopplungskonstanten  $g$  dargestellt. In (b) vergleichen wir die numerischen Ergebnisse der vollen Rechnung mit der effektive Masse bestimmt aus Gl. (4.99).

berechnet, wobei für diesen Wert das iterative Lösungsverfahren im Übergangsbereich am stabilsten ist. Durch eine Verbesserung des iterativen Lösungsverfahrens [Anh. B] können wir die kritische Temperatur als Funktion der Kopplungskonstanten  $g$  bestimmen, wobei die kritische Temperatur  $T_c$  durch den Wendepunkt von  $M(T)$  (oder alternativ von  $\beta(T)$ ) definiert ist. Wenn der Wert von  $g$  erhöht wird, wird der Phasenübergang verschmiert. Im Gegenzug bewirkt eine Verringerung einen schärferen Phasenübergang [Abb. 4.6]. Wie in Abb. 4.7a dargestellt, nimmt die kritische Temperatur für  $g \rightarrow 0$  den Wert  $T_c = 250$  MeV an. Dies ist niedriger als der zuvor bestimmte Wert ( $T_c = 290$  MeV), allerdings sind jetzt alle Parameterabhängigkeiten eliminiert.

Ohne Tadpole-Term, d.h. für  $g = 0$  (und  $c_0 = 0$ ), existiert bei hohen Temperaturen eine freie Lösung mit

$$\omega(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}| \quad (\alpha = -1, \quad \beta = 0), \quad (4.97)$$

sowie  $d(k) \approx 0$ . Für diese Lösung ( $g = 0$ ) lässt sich der Phasenübergangsbereich jedoch nicht darstellen, weshalb keine kritische Temperatur extrahiert werden kann.

Das Verhalten der effektiven Masse  $M(T)$  bei Temperaturen  $T > T_c$  lässt sich auch mit einer vereinfachten Gleichung studieren. Hierzu verwenden wir für die Gluonenergie den Ansatz

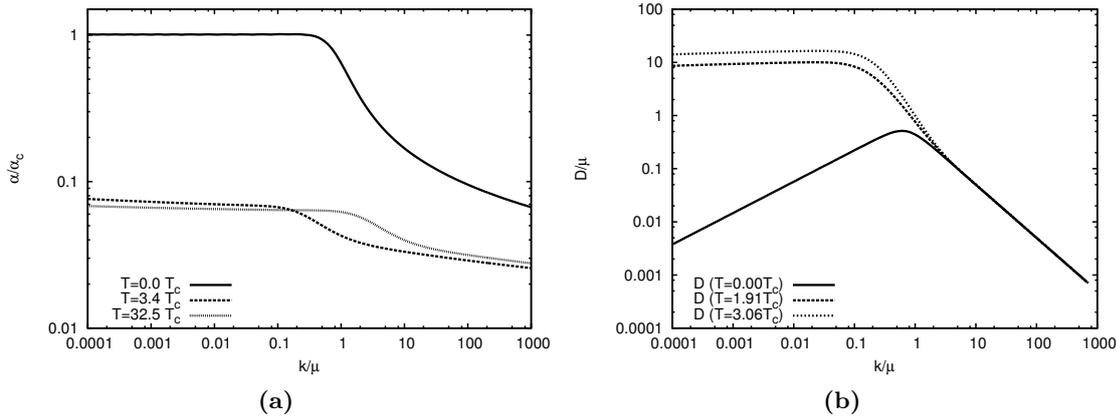
$$\omega_M(k, T) = \sqrt{\frac{1}{k^{2\alpha}} + M^2(T) + k^2} \quad (4.98)$$

womit die Gap-Gleichung (4.72) für  $k \rightarrow 0$  und infrarot-unterdrückter bzw. endlicher Krümmung  $\chi(\mathbf{k})$  (falls  $\beta \leq 0.5$ ) geschrieben werden kann als

$$M(T) = c_0 + \bar{T}_\omega^0[n] \quad (4.99)$$

$$= c_0 + \left( \frac{g^2}{4} \frac{8}{3} N_c \int \bar{d}^3 q \frac{2}{\omega_M(k, T)} \frac{1}{\exp(\omega_M(k, T))/T - 1} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.100)$$

Diese Gleichung erzeugt eine Masse  $M$  als Funktion von  $T$  mit den Parametern  $c_0$ ,  $g$  und  $N_c$ . Die numerische Lösung von Gl. (4.99) ist für  $\alpha = 0.6$  als Funktion der Temperatur zusammen mit der effektiven Gluonmasse aus den selbstkonsistenten Rechnungen in Abb. 4.7b dargestellt. Der Wert der Masse im Bereich des linearen Anstiegs bei großen



**Abbildung 4.8.:** Die laufende Kopplungskonstante normiert auf den Infrarot-Wert  $\alpha_c$  bei  $T = 0$  (linkes Bild) und der Gluon-Propagator  $D(\mathbf{k})$  (4.16) (rechtes Bild) für verschiedene Temperaturen.

Temperaturen (und für Kopplungskonstanten  $g \lesssim 1$ ) stimmt mit den selbst-konsistenten Rechnungen überein, sodass diese Gleichung die Erzeugung der effektiven Masse in diesem Bereich erklärt. Für kleine Temperaturen ist auch die Masse  $M(T)$  klein und verschwindet exponentiell für  $T \rightarrow 0$ . Ein Phasenübergang tritt in der Gl. (4.99) mit dem Ansatz (4.98) nicht auf.

**Laufende Kopplung** Die laufende Kopplungskonstante  $\alpha(k)$ , die sich aus dem Geist-Gluon-Vertex ergibt [47], ist in Abb. 4.8a oberhalb der kritischen Temperatur  $T > T_c$  sowie für  $T = 0$  dargestellt. In beiden Fällen ist  $\alpha(k)$  im Infraroten konstant, jedoch verringert sich der Plateauwert  $\alpha(k \rightarrow 0)$  um eine Größenordnung oberhalb des Deconfinement-Phasenübergangs. Unterhalb und oberhalb von  $T_c$  verändert sich der jeweilige Plateauwert bei Variation der Temperatur kaum. Der konstante Infrarotwert der laufenden Kopplung wird durch die Summenregel (4.74) der Infrarotexponenten für den Geist- und den Gluon-Propagator garantiert, die sowohl bei  $T = 0$ , als auch für  $T > T_c$  gilt.

**Gluon-Propagator** Der Gluon-Propagator [vgl. Gl. (4.16)]

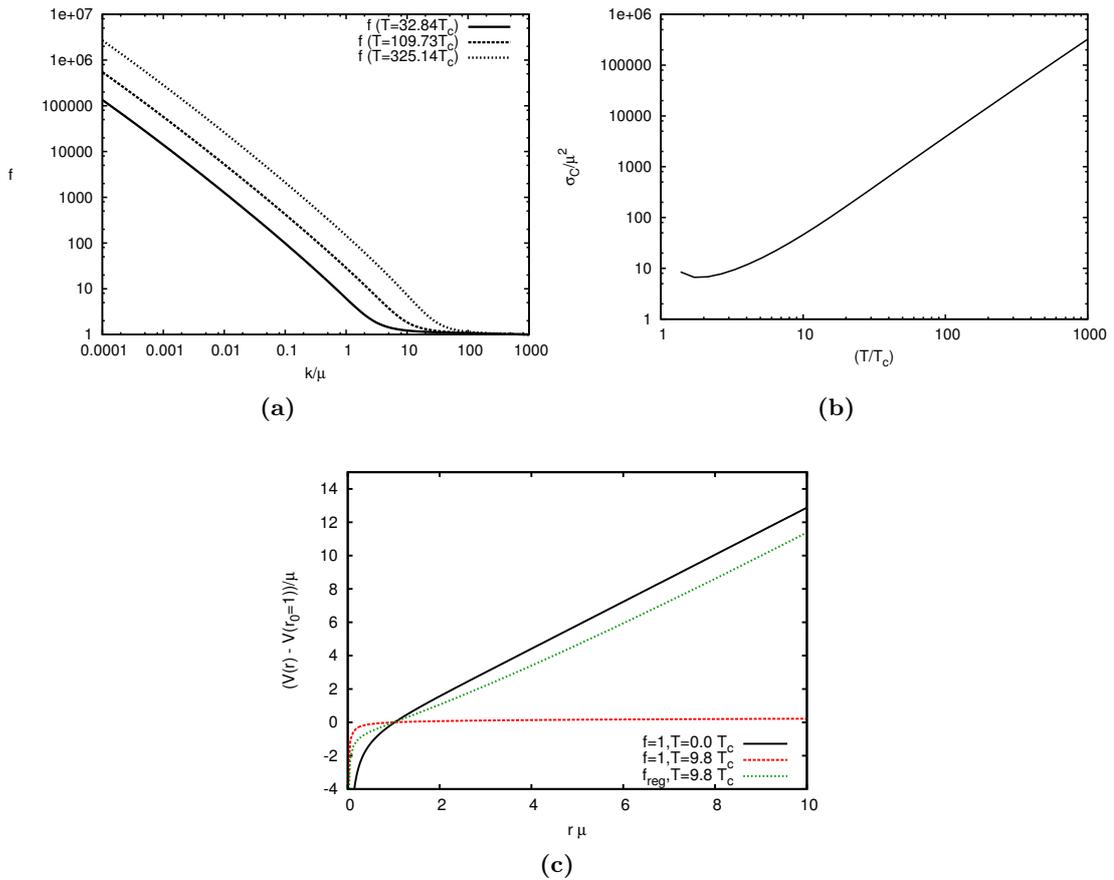
$$D(k) = \frac{1 + 2n(k)}{2\omega(k)} \quad (4.101)$$

ist bei endlichen Temperaturen oberhalb des Deconfinement-Phasenübergangs und bei  $T = 0$  in Abb. 4.8b dargestellt.

Unterhalb von  $T_c$  verschwindet der Gluon-Propagator im Infraroten und entspricht somit der Gribov-Formel [Gl. (3.91)]. Oberhalb des Phasenübergangs ist der Gluon-Propagator massiv, d.h. er nimmt für  $k \rightarrow 0$  einen konstanten Wert an. Die effektive Gluonmasse erhöht sich mit der Temperatur [Abb. 4.5a]. Das Verhalten im Ultraviolett, bzw. bei großen Impulsen, ist unabhängig von der Temperatur.

### 4.8.3. Coulomb-Formfaktor und Coulomb-Potential

Bei Verwendung der Gap-Gleichung ohne Coulomb-Term (4.72) entkoppelt die Dyson-Schwinger-Gleichung für den Coulomb-Formfaktor  $f(k)$  auch bei endlichen Temperaturen von den übrigen Gleichungen. Analog zu den Betrachtungen bei  $T = 0$  [Abschn. 3.6.4]



**Abbildung 4.9.:** In (a) sind die Lösungen für den regularisierten Coulomb-Formfaktor  $f$  für verschiedene Temperaturen  $T > T_c$  und (b) die Coulomb-String-Tension  $\sigma_C$  als Funktion der Temperatur oberhalb von  $T_c$  dargestellt. In (c) zeigen wir das nicht-abelsche Coulomb-Potential [(3.18)] berechnet mit dem perturbativen Coulomb-Formfaktor  $f = 1$  sowie mit dem modifizierten Coulomb-Formfaktor (4.90) bei  $T = 0$  und oberhalb von  $T_c$  im Ortsraum.

ist es daher möglich eine Lösung der linearen Integralgleichung für  $f(k)$  (4.69) explizit zu berechnen, nachdem  $\omega(k)$  und  $d(k)$  selbst-konsistent erzeugt wurden. Wie jedoch durch die Infrarotanalyse [Abschn. 4.7.1] vorhergesagt, existiert auch im Hochtemperaturlimes mit  $\beta \geq 1/2$  keine Lösung für  $f(\mathbf{k})$ . Um eine Lösung bei Temperaturen oberhalb von  $T_c$  zu erzeugen, verwenden wir für den Coulomb-Formfaktor die “regularisierte” Integralgleichung (4.90) und verringern den numerischen Koeffizienten vor dem Schleifenintegral  $I_f(k)$  (4.28) sukzessive bis eine stabile Lösung erzeugt wird. Ab einem Wert von  $\epsilon \approx 0.03$  existiert bei Temperaturen oberhalb des Deconfinement-Phasenübergangs ( $T > T_c$ ) infrarot-divergente Coulomb-Formfaktor  $f(\mathbf{k})$ . Dieser ist für verschiedene Temperaturen in Abb. 4.9a dargestellt.

Den Infrarotexponenten der numerischen Lösung für  $f(k)$  bestimmen wir zu

$$\eta = 1.0(1), \quad (4.102)$$

was den analytischen Wert aus der Infrarotanalyse [vgl. Abschn. 4.7.1] bestätigt. Zusammen mit dem Infrarotexponenten des Geist-Formfaktors  $\beta \approx 0.5$  ergibt sich mit dem re-

ularisierten Coulomb-Formfaktor(4.90) für das nicht-abelsche Coulomb-Potential [(3.18)] im Impulsraum

$$V_C(k) \sim \frac{1}{k^{2+2\beta+\eta}} = \frac{1}{k^4}, \quad (4.103)$$

welches somit auch oberhalb des Deconfinement-Phasenübergangs linear ist. Dieses Verhalten für das nicht-abelsche Coulomb-Potential, das nur eine Obergrenze für das physikalische Quark-Potential darstellt, wurde auch in Gitterrechnungen gefunden [69, 122].

Aus den numerischen Ergebnissen können wir die Temperaturabhängigkeit der Coulomb-String-Tension  $\sigma_C$  bestimmen [Abb. 4.9], die sich für große Temperaturen wie

$$\sigma_C(T \rightarrow \infty) \sim T \quad (4.104)$$

verhält. Das nicht-abelsche Coulomb-Potential im Ortsraum, berechnet mit den Lösungen der ursprünglichen (4.69) und der regularisierten (4.90) Gleichung für den Coulomb-Formfaktor, vergleichen wir bei endlichen Temperaturen in Abb. 4.9c. Für die Lösung mit der Ersetzung des Geist-Formfaktors durch seinen perturbativen Wert ( $d \equiv 1$ ) ist das Coulomb-Potential oberhalb von  $T_c$  konstant, während es für den regularisierten Coulomb-Formfaktor oberhalb von  $T_c$  linear bleibt, wie durch die Infrarotanalyse vorhergesagt wurde.

## 4.9. Zusammenfassung

In diesem Kapitel haben wir den Deconfinement-Phasenübergang der Yang-Mills-Theorie im Hamiltonformalismus in Coulomb-Eichung mit dem großkanonischen Ensemble untersucht. Hierzu haben wir für den Hamilton-Operator in der Dichtematrix einen Ansatz in Form eines Einteilchenoperators verwendet. Mit einer Quasiteilchen-Basis des gluonischen Fockraums, die auf einem gaußschen Wellenfunktional für das Vakuum aufbaut, haben wir den thermischen Erwartungswert des Hamilton-Operators und die freie Energie bestimmt. Durch Minimierung der freien Energie bei endlichen Temperaturen konnte der Ansatz für die Dichtematrix und der Variationskern im gaußschen Wellenfunktional optimiert werden. Dies resultiert in einer Gap-Gleichung für Gluonenergie, die an den Geist- und Coulomb-Formfaktor gekoppelt ist. Diese Gleichungen reduzieren sich bei verschwindender Temperatur auf die Gleichungen bei  $T = 0$ . Bei den nachfolgenden Untersuchungen in diesem Kapitel haben wir uns auf die kritischen Lösungen beschränkt, die die Horizont-Bedingung erfüllen und bei  $T = 0$  durch den Infrarotexponenten des Geist-Formfaktors ( $\beta \approx 0.8$  und  $\beta = 1$ ) charakterisiert sind.

Im Hochtemperaturlimes konnten wir mit der Infrarotanalyse eine neue Lösung mit dem Infrarotexponenten  $\beta = 1/2$  nachweisen, die zusammen mit dem Infrarotexponenten der Gluonenergie ( $\alpha = 0$ ) die  $T = 0$  Summenregel erfüllt.

Die Lösungen der Gap-Gleichung unter Vernachlässigung der Coulomb-Wechselwirkung und der Gleichung für den Geist-Formfaktor haben wir im gesamten Impulsbereich bei endlichen Temperaturen numerisch bestimmt. Dabei konnten wir zeigen, dass bis zu einer kritischen Temperatur  $T_c$  die beiden  $T = 0$ -Lösungen existieren. Am Deconfinement-Phasenübergang vereinen sich die beiden infrarot-divergenten  $T = 0$ -Lösungen zu einer einzigen Lösung mit dem Infrarotexponenten  $\beta \approx 0.5$ . In Übereinstimmung mit der Summenregel wird die Gluonenergie oberhalb der kritischen Temperatur infrarot-endlich ( $\alpha = 0$ ) und der Gluon-Propagator somit massiv. Die effektive Gluonmasse steigt linear mit der Temperatur und weist am Phasenübergang ein kritisches Verhalten auf, aus dem ein kritischer Exponent extrahiert werden konnte. Aus der Veränderung der Infrarotexponenten oder der Gluonmasse haben wir die kritische Temperatur  $T_c = 290$  MeV des Deconfinement-Phasenübergangs in der SU(2)-Eichtheorie bestimmt.

Durch eine geringfügige Modifikation eines Vorfaktors in der Integralgleichung für den Coulomb-Formfaktor konnten wir diesen in der deconfinierten Phase numerisch bestimmen, ohne auf die zuvor bei  $T = 0$  notwendigen Näherungen zurückzugreifen. Mit dieser infrarot-divergenten Lösung ist das nicht-abelsche Coulomb-Potential oberhalb der kritischen Temperatur für große Abstände  $r$  weiterhin linear, was in Übereinstimmung mit den Gitterrechnungen ist.

Für den in diesem Kapitel entwickelten Zugang zur Beschreibung des Deconfinement-Phasenübergangs im Hamiltonzugang mussten wir eine zusätzliche Näherung für die Dichtematrix machen. Außerdem zeigt insbesondere die kritische Temperatur eine Abhängigkeit von der Kopplungskonstanten  $g$ , die auf Ein-Loop-Niveau ein externer Parameter ist. Bei der Untersuchung des Deconfinement-Phasenübergangs mit dem effektiven Potential des Polyakov-Loops im übernächsten Kapitel entfallen diese beiden Punkte.



## 5. Endliche Temperaturen durch eine kompaktifizierte Raumdimension

In diesem Kapitel führen wir die Temperatur durch Kompaktifizierung einer räumlichen Dimension ein. Dadurch ist die gesamte Temperaturabhängigkeit im Grundzustand der Yang-Mills-Theorie auf der räumlichen Mannigfaltigkeit  $\mathbb{R}^2 \times S^1(L)$  enthalten, wobei die inverse Länge  $L^{-1}$  der kompaktifizierten Richtung der Temperatur entspricht. Dies hat gegenüber den Betrachtungen im vorherigen Kapitel den Vorteil, dass kein Ansatz für die Dichtematrix erforderlich ist. Zusätzlich wird durch die Kompaktifizierung einer räumlichen Richtung der Polyakov-Loop auch im Hamiltonzugang, der die Weyl-Eichung ( $A_0 = 0$ ) verwendet, als Ordnungsparameter zugänglich.

Um die Bewegungsgleichungen der Korrelationsfunktionen zu bestimmen erweitern wir in diesem Kapitel den Variationszugang zur Yang-Mills-Theorie auf die räumliche Mannigfaltigkeit  $\mathbb{R}^2 \times S^1(L)$ . In Abschn. 5.1 verwenden wir einen verallgemeinerten Ansatz für das Wellenfunktional des Grundzustandes, der die Freiheitsgrade parallel und orthogonal zu der kompaktifizierten Dimension unterscheidet, um die Energiedichte und die Bewegungsgleichungen der Yang-Mills-Theorie mit einer kompaktifizierten räumlichen Dimension zu bestimmen. Das Hoch- und Niedertemperaturverhalten der Bewegungsgleichungen untersuchen wir in Abschn. 5.2. Anschließend diskutieren wir das Infrarotverhalten der Lösungen in Abschn. 5.3 und die Renormierung des Integralgleichungssystems in Abschn. 5.4. Schließlich bestimmen wir die Lösungen für den Geist- und Gluon-Propagator im gesamten Impulsbereich in Abschn. 5.5 numerisch.

Die Ergebnisse dieses Kapitels sind in [126] veröffentlicht.

### 5.1. Hamiltonzugang zur Yang-Mills-Theorie auf $\mathbb{R}^2 \times S^1(L)$

In der hamiltonschen Formulierung der Yang-Mills-Theorie führen wir entsprechend der Diskussion in Abschn. 2.4.2 endliche Temperaturen durch Kompaktifizierung einer räumlichen Dimension ein, wobei wir die  $x_3$ -Achse wählen. Wir werden im Folgenden einen verallgemeinerten gaußschen Ansatz für den Grundzustand verwenden, um die Energiedichte auf Zwei-Loop-Niveau und die Bewegungsgleichungen auf Ein-Loop-Niveau zu bestimmen.

#### 5.1.1. Yang-Mills-Theorie in Coulomb-Eichung auf $\mathbb{R}^2 \times S^1(L)$

Auf der Mannigfaltigkeit  $\mathbb{R}^2 \times S^1(L)$  muss das Eichfeld  $\mathbf{A}$  in der kompaktifizierten Richtung  $x_3$  der periodischen Randbedingung

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_\perp, L/2) = \mathbf{A}(\mathbf{x}_\perp, -L/2) \quad (5.1)$$

genügen. Die zu der kompaktifizierten  $x_3$ -Richtung orthogonalen Komponenten des Ortsvektors  $\mathbf{x}$  bezeichnen wir mit  $\mathbf{x}_\perp$ . Mit der Coulomb-Eichbedingung auf  $\mathbb{R}^2 \times S^1(L)$

$$\partial \mathbf{A} = \partial_\perp \mathbf{A}_\perp + \partial_3 A_3 = 0 \quad (5.2)$$

lautet der Yang-Mills-Hamilton-Operator [vergl. (2.49)] [30]

$$H = \frac{1}{2} \int_L d^3x \left[ g^2 \mathcal{J}_A^{-1} \mathbf{\Pi} \mathcal{J}_A \mathbf{\Pi} + \frac{1}{g^2} \mathbf{B}^2 \right] + H_C. \quad (5.3)$$

Dies ist formal der gleiche Ausdruck wie in  $\mathbb{R}^3$ , mit der Ausnahme, dass die Integration über die räumliche Mannigfaltigkeit definiert ist durch

$$\int_L d^3x := \int d^2x_\perp \int_{-L/2}^{L/2} dx_3 \quad (5.4)$$

und wir in diesem Kapitel die Kopplungskonstante  $g$  in das Eichfeld  $gA \rightarrow A$  absorbiert haben. Hier ist  $\mathbf{\Pi}$  der Impulsoperator [Gl. (2.33)],  $\mathbf{B}$  das chromomagnetische Feld [Gl. (2.23)] und  $\mathcal{J}[A]$  die Faddeev-Popov-Determinante [Gl. (2.48b)]. Der Coulomb-Term  $H_C$ , der durch die Elimination der longitudinalen Komponenten des Impulsoperators mit dem gaußschen Gesetz entsteht, entspricht Gl. (2.50).

Um den Vakuumzustand zu bestimmen, verwenden wir das Variationsprinzip mit dem Test-Wellenfunktional [13]

$$\psi[A] = \mathcal{N} \mathcal{J}_A^{-1/2} \exp \left( -\frac{1}{2g^2} \int_L d^3x \int_L d^3y A_k^a(\mathbf{x}) \omega_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) A_l^a(\mathbf{y}) \right). \quad (5.5)$$

Dieser Ansatz ist identisch mit dem gaußschen Wellenfunktional, das wir in Coulomb-Eichung [Gl. (3.3)] verwendet haben. Insbesondere eliminiert die Normierung die Faddeev-Popov-Determinante aus dem Skalarprodukt [Gl. (2.38)]. Wegen der Verwendung der Coulomb-Eichung (5.2) kann der Variationskern  $\omega_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  als transversal angenommen werden. Auf der räumlichen Mannigfaltigkeit  $\mathbb{R}^3$  bedeutet dies aufgrund der  $O(3)$  Invarianz

$$\omega_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = t_{kl}(\mathbf{x}) \omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (5.6)$$

wobei  $t_{kl}(\mathbf{x})$  der transversale Projektionsoperator in  $\mathbb{R}^3$  [Gl. (2.44)] ist. Auf  $\mathbb{R}^2 \times S^1(L)$  ist die  $O(3)$  Symmetrie auf  $O(2)$  gebrochen und der Ansatz für den Variationskern  $\omega$  (5.6) muss verallgemeinert werden zu

$$\omega_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = t_{kl}^\perp(\mathbf{x}) \omega_\perp(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + t_{kl}^\parallel(\mathbf{x}) \omega_\parallel(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (5.7)$$

Hier ist

$$t_{kl}^\perp(\mathbf{x}) = (1 - \delta_{k3}) \left( \delta_{kl} - \frac{\partial_k^x \partial_l^x}{\Delta_\perp} \right) (1 - \delta_{l3}) \quad (5.8)$$

der transversale Projektor im Unterraum  $\mathbb{R}^2$  orthogonal zu der kompaktifizierten  $x_3$ -Richtung und mit  $\Delta_\perp = \partial_1^2 + \partial_2^2$ . Weiterhin ist

$$t_{kl}^\parallel(\mathbf{x}) = t_{kl}(\mathbf{x}) - t_{kl}^\perp(\mathbf{x}) \quad (5.9)$$

der transversale Projektor im orthogonalen Komplement von  $t_{kl}^\perp(\mathbf{x})$ . Es gibt somit auf  $\mathbb{R}^2 \times S^1(L)$  zwei unabhängige Variationskerne  $\omega_\parallel$  und  $\omega_\perp$ , die zu der kompaktifizierten Dimension bzw. dem orthogonalen Unterraum gehören. Damit im Folgenden die Notation vereinfacht wird, führen wir den Index  $Q \in \{\parallel, \perp\}$  ein, um die kompaktifizierte Richtung und ihr Komplement zu unterscheiden.

Die Projektionsoperatoren (5.8) und (5.9) haben die Eigenschaften

$$\begin{aligned} t_{kl}^Q(\mathbf{x}) t_{lm}^Q(\mathbf{x}) &= t_{km}^Q(\mathbf{x}), & t_{kl}^Q(\mathbf{x}) t_{lm}(\mathbf{x}) &= t_{km}^Q(\mathbf{x}), \\ t_{kk}(\mathbf{x}) &= 2, & t_{kk}^Q &= 1. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Mit dem Wellenfunktional (5.5) und den verallgemeinerten Variationskernen (5.7) ist der statische Gluon-Propagator gegeben durch

$$D_{kl}^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle A_k^a(\mathbf{x}) A_l^b(\mathbf{y}) \rangle = \delta^{ab} \left[ D_{kl}^\perp(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + D_{kl}^\parallel(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right], \quad (5.11)$$

wobei für die Komponenten  $D^Q$  des Gluon-Propagators

$$D_{kl}^Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} t_{kl}^Q(\mathbf{x}) \omega_Q^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (5.12)$$

gilt. Aufgrund der Translationsinvarianz sind die Kerne  $\omega_Q(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  nur eine Funktion der relativen Koordinaten  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ . Die Fouriertransformation in den Impulsraum definieren wir daher durch

$$\omega(\mathbf{x}) = \int_L \mathrm{d}^3 p e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} \omega(\mathbf{p}) := \int \mathrm{d}^2 p_\perp \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{p}_\perp \mathbf{x}_\perp} e^{i\omega_n x_3} \omega(\mathbf{p}_\perp, \omega_n), \quad (5.13)$$

wobei  $\mathrm{d}^2 p_\perp = \mathrm{d}^2 p_\perp / (2\pi)^2$  das Integrationsmaß im Impulsraum orthogonal zu der  $p_3$ -Achse ist und  $p_3 \equiv \omega_n = 2\pi n/L$  die Matsubara-Frequenzen sind. Der dreidimensionale Impuls  $\mathbf{p}$  hat somit die Zerlegung

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_\perp + \omega_n \mathbf{e}_3, \quad \omega_n = 2\pi n/L. \quad (5.14)$$

Aus der Darstellung (5.12) folgt, dass  $\omega_Q(\mathbf{p}_\perp, \omega_n)$  mit  $Q = \parallel$  und  $\perp$  die Energien der transversalen Gluon-Mode parallel und orthogonal zu der kompaktifizierten räumlichen Dimension sind. Im Impulsraum lauten die Projektionsoperatoren (5.8) und (5.9)

$$t_{kl}^\perp(\mathbf{p}) = (1 - \delta_{k3}) \left( \delta_{kl} - \frac{p_k p_l}{\mathbf{p}_\perp^2} \right) (1 - \delta_{l3}), \quad t_{kl}^\parallel(\mathbf{p}) = t_{kl}(\mathbf{p}) - t_{kl}^\perp(\mathbf{p}) \quad (5.15)$$

mit dem gewöhnlichen transversalen Projektor  $t_{kl}(\mathbf{p})$  [Gl. (2.45)].<sup>1</sup>

### 5.1.2. Bewegungsgleichungen auf $\mathbb{R}^2 \times S^1(L)$

Der Variationszugang zur Yang-Mills-Theorie in Coulomb-Eichung auf  $\mathbb{R}^2 \times S^1(L)$  kann auf gleiche Weise durchgeführt werden wie auf  $\mathbb{R}^3$  [vgl. Kap. 3] mit der Ausnahme, dass die transversalen Freiheitsgrade parallel und orthogonal zu der kompaktifizierten Dimension unterschieden werden. Daher bestimmen wir zwei Gap-Gleichungen für die unabhängigen Variationskerne  $\omega_\parallel, \omega_\perp$ . Der Coulomb-Term  $H_C$  hat keinen Einfluss auf das Infrarotverhalten im Gluon-Sektor [112] und wir vernachlässigen diesen Term im Folgenden.

Die Variation der Energie, die mit dem verallgemeinerten Ansatz (5.7) für das Vakuum-Wellenfunktional auf Zwei-Loop-Niveau berechnet wird, resultiert in den beiden Gap-Gleichungen

$$\omega_Q^2(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2 + \chi_Q^2(\mathbf{p}), \quad Q \in \{\parallel, \perp\}. \quad (5.17)$$

Hier ist  $\mathbf{p}^2 = \mathbf{p}_\perp^2 + \omega_n^2$  das Quadrat des dreidimensionalen Impulses (5.14) und

$$\chi_Q(\mathbf{p}) = \frac{g^2}{2} N_c t_{kl}^Q(\mathbf{p}) \int_L \mathrm{d}^3 q q_k q_l G(\mathbf{p} + \mathbf{q}) G(\mathbf{q}) \quad (5.18)$$

<sup>1</sup>Auch die hier eingeführten Projektoren sind nur abhängig von der Richtung des Vektors  $\mathbf{p}$  und nicht von seiner Länge. Deshalb gilt

$$t_{kl}^Q(\mathbf{p}) = t_{kl}^Q(\mathbf{p}') \quad \text{falls } \mathbf{p} \parallel \mathbf{p}'. \quad (5.16)$$

die Krümmung [vgl. (2.78)]. Der Geist-Propagator ist definiert als der Erwartungswert des Faddeev-Popov-Operators [vgl. (2.48a)]

$$G = \langle (-\hat{\mathbf{D}}\partial)^{-1} \rangle, \quad (5.19)$$

für den wir im Impulsraum den Formfaktor  $d(\mathbf{p}) = g\mathbf{p}^2 G(\mathbf{p})$  [(3.12)] definieren. Mit dem Wellenfunktional (5.5) und in der Rainbow-Ladder-Näherung kann für den Geist-Formfaktor die Dyson-Schwinger-Gleichung

$$d^{-1}(\mathbf{p}) = \frac{1}{g} - \left( I_d^{\parallel}(\mathbf{p}) + I_d^{\perp}(\mathbf{p}) \right) \quad (5.20)$$

abgeleitet werden, wobei hier die Selbstenergieintegrale

$$I_d^Q(\mathbf{p}) = N_c \int_L \bar{d}^3 q \frac{p_i t_{ij}^Q(\mathbf{q}) p_j}{\mathbf{p}^2} \frac{d(\mathbf{p} + \mathbf{q})}{(\mathbf{p} + \mathbf{q})^2} \frac{1}{2\omega_Q(\mathbf{q})} \quad (5.21)$$

jeweils an den Kern  $\omega_{\parallel}$  bzw.  $\omega_{\perp}$  gekoppelt sind. Die Formfaktoren  $d(\mathbf{p})$  und  $\omega^Q(\mathbf{p})$ , sowie die Schleifenintegrale  $\chi_Q(\mathbf{p})$  und  $I_d^Q(\mathbf{p})$  sind Funktionen des transversalen Impulses  $\mathbf{p}_{\perp}$  und der Matsubara-Frequenz  $\omega_n$

$$d(\mathbf{p}) \equiv d(\mathbf{p}_{\perp}, \omega_n), \quad \omega^Q(\mathbf{p}) \equiv \omega(\mathbf{p}_{\perp}, \omega_n), \quad \dots, \quad (5.22)$$

wobei aus der expliziten Darstellung der Integrale folgt, dass für die Abhängigkeiten angenommen werden kann

$$d(\mathbf{p}) \equiv d(|\mathbf{p}_{\perp}|, |\omega_n|), \quad \omega^Q(\mathbf{p}) \equiv \omega^Q(|\mathbf{p}_{\perp}|, |\omega_n|), \quad \dots \quad (5.23)$$

Für die Lösungen der Dyson-Schwinger-Gleichung des Geist-Formfaktors verwenden wir die Horizont-Bedingung, die auf der Mannigfaltigkeit  $\mathbb{R}^2 \times S^1(L)$  lautet

$$d^{-1}(\mathbf{p}_{\perp} = 0, \omega_n = 0) = 0. \quad (5.24)$$

Die gekoppelten Gleichungen für die Gluonenergien (5.17) und den Geist-Formfaktor (5.20) müssen selbst-konsistent gelöst werden. In Abschn. 5.5 werden wir dieses Gleichungssystem bei endlichen Temperaturen numerisch bestimmen. Zuvor betrachten wir die Lösungen im Hoch- und Niedertemperaturbereich.

## 5.2. Grenzfall hoher und verschwindender Temperatur

Zuerst werden wir die Bewegungsgleichungen im Hochtemperaturlimes und bei verschwindender Temperatur untersuchen.

### 5.2.1. Hochtemperaturlimes

Bei hohen Temperaturen  $T = L^{-1} \rightarrow \infty$  werden die Matsubara-Frequenzen  $\omega_n = 2\pi nT$  mit  $n \neq 0$  unendlich groß. Da für  $|\mathbf{p}| \equiv \sqrt{\mathbf{p}_{\perp}^2 + \omega_n^2} \rightarrow \infty$  der Geist- und der Gluon-Propagator unterdrückt sind, müssen wir in den Bewegungsgleichungen im Hochtemperaturlimes nur die niedrigste Matsubara-Frequenz  $p_3 \equiv \omega_n = 0$  berücksichtigen. Daher gilt für die Integration in Gl. (5.13)

$$\int_L \bar{d}^3 p \rightarrow T \int \bar{d}^2 p_{\perp}, \quad (5.25)$$

wobei wir die Summe über die Matsubara-Frequenzen durch die  $n = 0$  Mode ersetzt haben. Für  $p_3 = 0$  und  $q_3 = 0$  gilt außerdem

$$p_k t_{kl}^{\parallel}(q) p_l \Big|_{p_3=q_3=0} = 0, \quad (5.26)$$

sodass der longitudinale Teil der Geist-Selbstenergie verschwindet  $I_d^{\parallel}(\mathbf{p}_{\perp}, \omega_n = 0) = 0$  und sich die Dyson-Schwinger-Gleichung für den Geist-Formfaktor (5.20) reduziert auf

$$d^{-1}(\mathbf{p}_{\perp}, \omega_n = 0) = \frac{1}{g} - I_d^{\perp}(\mathbf{p}_{\perp}, \omega_n = 0) \quad (5.27)$$

mit

$$I_d^{\perp}(\mathbf{p}_{\perp}, \omega_n = 0) = N_c T \int \bar{d}^2 q_{\perp} \frac{p_i^{\perp} t_{ij}(\mathbf{q}_{\perp}, 0) p_j^{\perp}}{\mathbf{p}_{\perp}^2} \frac{d(\mathbf{p}_{\perp} + \mathbf{q}_{\perp}, 0)}{(\mathbf{p}_{\perp} + \mathbf{q}_{\perp})^2} \frac{1}{2\omega_{\perp}(\mathbf{q}_{\perp}, 0)}. \quad (5.28)$$

Dies entspricht der Geist-Gleichung in  $d = 2$  räumlichen Dimensionen [83], wenn wir  $\omega_{\perp}(\mathbf{q}_{\perp}, 0)$  mit der Gluonenergie identifizieren, sowie

$$g^{(2)} = g\sqrt{T}, \quad d^{(2)}(\mathbf{p}_{\perp}) = d(\mathbf{p}_{\perp}, 0)\sqrt{T} \quad (5.29)$$

mit der Kopplungskonstanten und dem Geist-Formfaktor jeweils in  $d = 2$ . Die Dimension der Yang-Mills-Kopplungskonstanten  $g$  ist abhängig von der Zahl der Raumdimensionen. In  $d = 3$  ist  $g$  dimensionslos, während sie in  $d = 2$  die Dimension  $[p]$  hat. Durch die Temperatur wird innerhalb der skalenfreien Yang-Mills-Theorie in  $d = 3$  räumlichen Dimensionen eine physikalische Skala eingeführt. Eine Relation wie Gl. (5.29) war daher zu erwarten.

Aus Gl. (5.26) folgt außerdem, dass die longitudinale Komponente der Krümmung (5.18) im Hochtemperaturlimes verschwindet  $\chi_{\parallel}(\mathbf{p}_{\perp}, \omega_n = 0) = 0$  und sich die longitudinale Gap-Gleichung (5.17) reduziert auf

$$\omega_{\parallel}^2(\mathbf{p}_{\perp}, \omega_n = 0) = \mathbf{p}_{\perp}^2. \quad (5.30)$$

Dies bedeutet, dass sich die gluonischen Freiheitsgrade parallel zu der kompaktifizierten Dimension für  $T \rightarrow \infty$  wie freie Teilchen verhalten. Mit Gl. (5.25) gilt für die transversale Krümmung  $\chi_{\perp}$  (5.18)

$$\chi_{\perp}(\mathbf{p}_{\perp}, \omega_n = 0) = \frac{g^2 T N_c}{2} \int \bar{d}^2 q_{\perp} \frac{q_i^{\perp} t_{ij}(\mathbf{p}_{\perp}, 0) q_j^{\perp}}{\mathbf{q}_{\perp}^2} \frac{d(\mathbf{p}_{\perp} + \mathbf{q}_{\perp}, 0) d(\mathbf{q}_{\perp}, 0)}{g^2 (\mathbf{p}_{\perp} + \mathbf{q}_{\perp})^2}, \quad (5.31)$$

welche mit Gl. (5.29) der Krümmung in  $d = 2$  räumlichen Dimensionen entspricht. Die transversale Gap-Gleichung (5.17) lautet

$$\omega_{\perp}^2(\mathbf{p}_{\perp}, \omega_n = 0) = \mathbf{p}_{\perp}^2 + \chi_{\perp}^2(\mathbf{p}_{\perp}, \omega_n = 0) \quad (5.32)$$

und entspricht daher ebenfalls der Gap-Gleichung in  $d = 2$  Dimensionen.

Die Gleichungen in  $3 + 1$  Dimensionen reduzieren sich somit für  $T \rightarrow \infty$  auf eine  $2 + 1$  dimensionale Theorie. Dies ist im Einklang mit *Dimensionaler-Reduktion* [127]: Die  $3 + 1$  dimensionale Yang-Mills-Theorie reduziert sich im Hochtemperaturlimes auf eine effektive  $2 + 1$  dimensionale Theorie mit einem zusätzlichen Higgs-Feld, das der zeitlichen Komponente des Eichfeldes  $A_0$  entspricht [128], wobei dieses Higgs-Feld im Hamiltonzugang in Weyl-Eichung  $A_0 = 0$  jedoch nicht sichtbar ist.

### 5.2.2. Nulltemperatur

Für kleine Temperaturen müssen in der Summe (5.13) viele Matsubara-Frequenzen  $\omega_n = 2\pi nT$  berücksichtigt werden. Außerdem wird der Abstand zwischen zwei benachbarten Matsubara-Frequenzen zunehmend kleiner. Im Limes  $T \rightarrow 0$  tragen alle  $\omega_n$  bei, sodass die Summe bis unendlich ausgeführt werden muss. Es ist daher vorteilhaft die Summe über die Matsubara-Frequenzen für kleine  $T$  mit Hilfe der Darstellung [57]

$$\frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\omega_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz f(z) \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikLz} \quad (5.33)$$

auszuführen. Diese Gleichung kann aus der Poissonschen Summenformel abgeleitet werden.<sup>2</sup>

Um den Limes  $T \rightarrow 0$  in den Bewegungsgleichungen aus Abschn. 5.1 auszuführen, betrachten wir zuvor ein verallgemeinertes Schleifenintegral, welches mit Gl. (5.33) geschrieben werden kann als

$$\frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^2 p_{\perp} f(\mathbf{p}_{\perp}, \omega_n) = \int d^3 p f(\mathbf{p}_{\perp}, p_3) \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikLp_3}, \quad (5.34)$$

wobei  $z = p_3$  ist und  $d^3 p = d^3 p / (2\pi)^3$  das gewöhnliche Integrationsmaß im dreidimensionalen Impulsraum ist. Für  $L \rightarrow \infty$  wird die O(3) Invarianz wieder hergestellt und alle Propagatoren, bzw. Formfaktoren sind eine Funktion des Betrages des dreidimensionalen Impulses

$$f(\mathbf{p}_{\perp}, p_3) = f\left(\sqrt{\mathbf{p}_{\perp}^2 + p_3^2}\right) \equiv f(p). \quad (5.35)$$

Es ist daher sinnvoll in Gl. (5.34) bei der Integration über den Impuls Kugelkoordinaten  $(p, \theta, \varphi)$  zu verwenden. Nach Ausführung der Integration über den Winkel  $\theta$  ergibt sich aus Gl. (5.34)

$$\frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^2 p_{\perp} f\left(\sqrt{p_{\perp}^2 + \omega_n^2}\right) = \int d^3 p f(p) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(kLp)}{kLp}, \quad (5.36)$$

wobei wir die rechte Seite wieder als dreidimensionales Integral mit einer trivialen Winkelintegration geschrieben haben.

Der  $k = 0$  Term in Gl. (5.36) entspricht dem Schleifenintegral bei  $T = 0$ . Alle anderen Terme verschwinden im Limes  $L \rightarrow \infty$ . Mit dieser Relation (5.36) reduzieren sich für  $L \rightarrow \infty$  alle Bewegungsgleichungen auf  $\mathbb{R}^2 \times S^1(L)$  zu den entsprechenden Ausdrücken bei  $T = 0$  [vgl. Kap. 3 und [13]].

### 5.3. Infrarotanalyse

Bevor wir die numerischen Lösungen bei endlichen Temperaturen betrachten, werden wir das Infrarotverhalten untersuchen. Die Infrarotanalyse der Bewegungsgleichungen bei  $T = 0$  [47] haben wir in Abschn. 3.5.2 besprochen. Mit den Potenzgesetzen

$$\omega(p) \sim p^{-\alpha}, \quad d(p) \sim p^{-\beta} \quad (5.37)$$

<sup>2</sup>Wenn Gl. (5.33) auf eine Funktion  $f(\omega_n)$  angewandt wird, die nur an diskreten Matsubara-Frequenzen  $\omega_n$  bekannt ist, dann ist  $f(z)$  als diejenige Funktion zu verstehen, die aus  $f(\omega_n)$  durch eine glatte Interpolation zwischen benachbarten Matsubara Frequenzen entsteht. Tatsächlich geht der Abstand von benachbarten Matsubara Frequenzen für  $L \rightarrow \infty$ , in dem Bereich in dem die Poissonsche Summenformel (5.33) verwendet wird, gegen null.

für  $p \rightarrow 0$  und der Horizont-Bedingung  $\beta > 0$  gilt in  $d$  räumlichen Dimensionen die Summenregel  $\alpha = 2\beta + 2 - d$  [(3.60)]. Aus der Konsistenz der Gleichungen für den Geist-Formfaktor und der Gap-Gleichung folgen aus der analytischen Infrarotanalyse in  $d = 3$  die beiden Lösungen  $\beta \in \{0.7952, 1\}$  und in  $d = 2$  die Lösung  $\beta = 2/5$ . Die Infrarotexponenten aus den numerischen Lösungen [13, 82, 83, 112] sind in sehr guter Übereinstimmung mit diesen Werten. Aus der vorangegangenen Diskussion in Abschn. 5.2 geht hervor, dass die  $n = 0$  Propagatoren auf  $\mathbb{R}^2 \times S^1(L)$  im Limes verschwindender Temperaturen die  $d = 3$  Infrarotexponenten und bei hohen Temperaturen den  $d = 2$  Infrarotexponent aufweisen.

Bei der Erweiterung des Hamiltonzugangs zur Yang-Mills-Theorie zu endlichen Temperaturen mit dem großkanonischen Ensemble [Abschn. 4] ergibt die analytische Infrarotanalyse im Hochtemperaturlimes einen Infrarotexponenten von  $\beta = 0.5$ . In den numerischen Untersuchungen des Deconfinement-Phasenübergang fanden wir ein markante Änderung des Infrarotexponenten von dem ( $T = 0, d = 3$ )-Werten zu dem Hochtemperaturverhalten mit  $\beta = 0.5$ , der nahe bei dem zweidimensionalen Wert  $\beta = 2/5$  ist.

## 5.4. Renormierung

Wie wir in Abschn. 5.2 gezeigt haben, reduzieren sich für  $L \rightarrow \infty$  ( $T \rightarrow 0$ ) die Bewegungsgleichungen auf der Mannigfaltigkeit mit einer kompaktifizierten Dimension zu den entsprechenden Gleichungen in Coulomb-Eichung [[13] und Kap. 3] bei verschwindender Temperatur auf  $\mathbb{R}^3$ . Durch die Kompaktifizierung einer räumlichen Dimension können keine zusätzlichen UV-Divergenzen eingeführt werden. Bei großen äußeren Impulsen  $p \gg T$  wird die Temperatur außerdem als Skala irrelevant. Daher haben die Bewegungsgleichungen auf  $\mathbb{R}^2 \times S^1(L)$  das gleiche Ultraviolettverhalten wie in  $\mathbb{R}^3$  bei verschwindender Temperatur und können mit den gleichen Countertermen renormiert werden.

Die Krümmung  $\chi(p)$  (5.18) ist für  $T = 0$  linear divergent, während die Selbstenergieintegrale  $I_d^Q(p)$  (5.21) in der Gleichung für den Geist-Formfaktor logarithmisch divergent sind. Um die Geist-Gleichung (5.20) zu renormieren, schreiben wir sie mit Gl. (5.9) in der Form

$$d^{-1}(\mathbf{p}) = \frac{1}{g} + I_d^{(1)}(\mathbf{p}) + I_d^{(2)}(\mathbf{p}) \quad (5.38)$$

mit den Selbstenergieintegralen

$$I_d^{(1)}(\mathbf{p}) = -N_c \int_L d^3q \left[ 1 - (\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{q}})^2 \right] \frac{d(\mathbf{p} + \mathbf{q})}{(\mathbf{p} + \mathbf{q})^2} \frac{1}{2\omega_\perp(\mathbf{q})} \quad (5.39)$$

$$I_d^{(2)}(\mathbf{p}) = N_c \int_L d^3q \frac{p_i t_{ij}^\parallel(\mathbf{q}) p_j}{\mathbf{p}^2} \frac{d(\mathbf{p} + \mathbf{q})}{(\mathbf{p} + \mathbf{q})^2} \left( \frac{1}{2\omega_\parallel(\mathbf{q})} - \frac{1}{2\omega_\perp(\mathbf{q})} \right). \quad (5.40)$$

Da  $\omega_\perp(\mathbf{p})$  und  $\omega_\parallel(\mathbf{p})$  das gleiche Ultraviolettverhalten haben, ist das Integral  $I_d^{(2)}(\mathbf{p})$  ultraviolett-endlich, da für  $|\mathbf{p}| = p \rightarrow \infty$   $1/\omega_\parallel(p) - 1/\omega_\perp(p) \sim 1/p^2$  gilt. Es ist daher ausreichend von dem Schleifenintegral  $I_d^{(1)}(\mathbf{p})$  (5.39) den entsprechenden Ausdruck bei  $T = 0$  an einer Renormierungsskala  $\mu_d$  abzuziehen, um die Geist-Gleichung zu renormieren. Bei Verwendung eines iterativen Lösungsverfahrens ist dieses Vorgehen jedoch nicht möglich, da sich immer numerische Unterschiede in den divergenten Beiträgen dieser Integrale ergeben, die sich nicht gegeneinander aufheben können. Deshalb subtrahieren wir das erste Schleifenintegral bei einer Skala  $\mu_d$  und mit den Lösungen bei endlichen Temperaturen, sodass die renormierte Geist-Gleichung Gl. (5.39) lautet

$$d^{-1}(\mathbf{p}) = c(\mu_d) + I_d^{(1)}(\mathbf{p}) - I_d^{(1)}(\mu_d) + I_d^{(2)}(\mathbf{p}) \quad (5.41)$$

mit der endlichen Differenz

$$\Delta I_d^{(1)}(\mathbf{p}) = N_c \int_L \bar{d}^3 q \left[ 1 - (\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{q}})^2 \right] \left( \frac{d(\mathbf{p} + \mathbf{q})}{(\mathbf{p} + \mathbf{q})^2} \frac{1}{2\omega_\perp(\mathbf{q})} - \frac{d(\boldsymbol{\mu}_d + \mathbf{q})}{(\boldsymbol{\mu}_d + \mathbf{q})^2} \frac{1}{2\omega_\perp(\mathbf{q})} \right). \quad (5.42)$$

Diese Vorgehensweise wurde auch bei der Untersuchung der endlichen Temperatur mit dem großkanonischen Ensemble angewendet [vergl. Kap. 4]. In Gl. (5.41) ist  $c(\boldsymbol{\mu}_d)$  eine temperaturabhängige Renormierungskonstante, die so gewählt werden muss, dass die Horizont-Bedingung  $d^{-1}(0) = 0$  erfüllt werden muss. Wir wählen den Renormierungspunkt  $\mu_d$  im Bereich des UV-Cutoffs. Hier sind die Lösungen praktisch temperaturunabhängig, sodass auch der Parameter  $c(\boldsymbol{\mu}_d)$  temperaturunabhängig gewählt werden kann. Dies ist nicht der Fall falls  $\mu_d < T$  ist. In diesem Fall wird der Parameter  $c(\boldsymbol{\mu}_d)$  durch die Forderung nach der Gültigkeit der Horizont-Bedingung festgelegt. Jedoch ist die Form der Lösung unabhängig von dem Renormierungspunkt  $\mu_d$ .

Nach Ausführung der Kontraktion der Krümmung (5.18) mit den Projektoren  $t^Q$  finden wir für die Komponenten

$$\chi^\perp(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} N_c \int_L \bar{d}^3 q \frac{q_3^2}{q} \left[ 1 - (\hat{\mathbf{q}}_\perp \hat{\mathbf{p}}_\perp)^2 \right] \frac{d(\mathbf{p} + \mathbf{q})}{(\mathbf{p} + \mathbf{q})^2} d(\mathbf{q}), \quad (5.43)$$

$$\chi^\parallel(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} N_c \int_L \bar{d}^3 q \left( \left[ 1 - (\hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{p}})^2 \right] - \frac{q_3^2}{q} \left[ 1 - (\hat{\mathbf{q}}_\perp \hat{\mathbf{p}}_\perp)^2 \right] \right) \frac{d(\mathbf{p} + \mathbf{q})}{(\mathbf{p} + \mathbf{q})^2} d(\mathbf{q}) \quad (5.44)$$

mit den Einheitsvektoren  $\hat{\mathbf{p}}_\perp \equiv \mathbf{p}_\perp / |\mathbf{p}_\perp|$ . Entsprechend renormieren wir die Krümmung  $\chi^Q(\mathbf{p})$  durch Subtrahieren bei einer Skala  $\mu_\chi$

$$\chi^Q(\mathbf{p}) \longrightarrow \chi^Q(\mathbf{p}) - \chi^Q(\boldsymbol{\mu}_\chi). \quad (5.45)$$

Wegen Gl. (5.16) kann die Differenz  $\bar{\chi}^Q(p)$  geschrieben werden als

$$\bar{\chi}^Q(\mathbf{p}) = \frac{g^2}{2} N_c \int_L \bar{d}^3 q t_{kl}^Q(p) \hat{q}_k \hat{q}_l \left( \frac{d(\mathbf{p} + \mathbf{q})}{(\mathbf{p} + \mathbf{q})^2} d(\mathbf{q}) - \frac{d(\boldsymbol{\mu}_\chi + \mathbf{q})}{(\boldsymbol{\mu}_\chi + \mathbf{q})^2} d(\mathbf{q}) \right). \quad (5.46)$$

Die Vektoren  $\boldsymbol{\mu}_d = (\mu_{d,\perp}, \mu_{d,n})$  und  $\boldsymbol{\mu}_\chi = (\mu_{\chi,\perp}, \mu_{\chi,n})$  wählen wir für gegebene Impulsskalen  $\mu_d = |\boldsymbol{\mu}_d|$ ,  $\mu_\chi = |\boldsymbol{\mu}_\chi|$  wie folgt

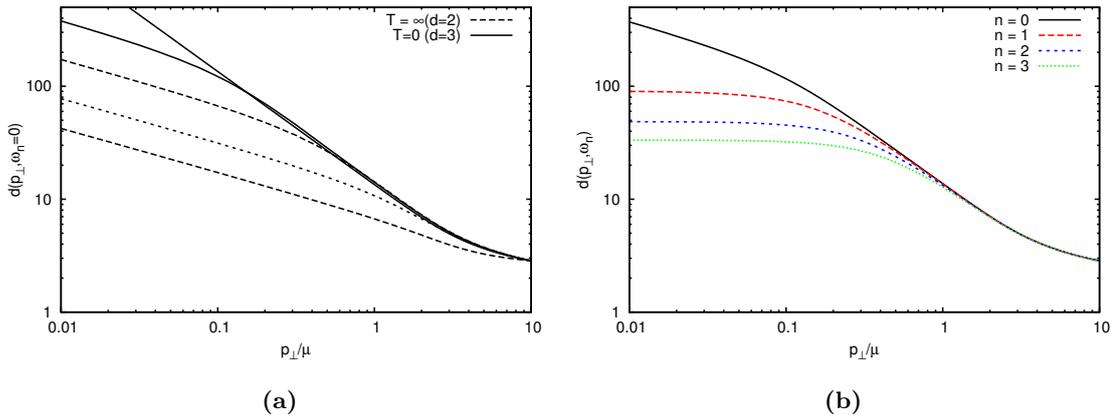
$$\boldsymbol{\mu}_d = \mu_d \hat{\mathbf{p}}, \quad \boldsymbol{\mu}_\chi = \mu_\chi \hat{\mathbf{p}}, \quad \hat{\mathbf{p}} := \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \quad (5.47)$$

und somit parallel zu dem externen Impuls  $\mathbf{p}$ .

## 5.5. Numerische Ergebnisse

Die Bewegungsgleichungen (5.17) und (5.41) können als ein gekoppeltes Integralgleichungssystem für Funktionen des transversalen Impulses  $\mathbf{p}_\perp$  angesehen werden, die sich durch die externe Matsubara-Frequenz unterscheiden und mit den Standardmethoden numerisch berechnet werden können. Die Gleichungen zu verschiedenen Matsubara-Frequenzen sind durch die Schleifenintegrale miteinander gekoppelt. Bei kleinen Temperaturen müssen viele Matsubara-Frequenzen berücksichtigt werden und die Anzahl der zu berechnenden Integralgleichungen ist groß. Um den numerischen Aufwand zu reduzieren, berechnen wir die Integralgleichungen nur bis zu einer maximalen Matsubara Frequenz  $\omega_{N_{\max}}$  explizit. Für  $\omega_n > \omega_{N_{\max}}$  verwenden wir die Extrapolation

$$d(\mathbf{p}_\perp, \omega_n) = d(\sqrt{\mathbf{p}_\perp^2 + \omega_n^2 - \omega_{N_{\max}}^2}, \omega_{N_{\max}}) \quad (5.48)$$



**Abbildung 5.1.:** Der Geist-Formfaktor  $d(p_\perp, \omega_n)$  (a) als Funktion des transversalen Impulses  $p_\perp$  für die Matsubara Frequenz  $n = 0$  und für verschiedene Temperaturen abnehmend von unten nach oben, und (b) bei festgehaltener Temperatur für die ersten Matsubara Frequenzen  $n = 0, \dots, 3$ .

und entsprechend für  $\omega$ . Diese Relation ist exakt für  $O(3)$  invariante Lösungen, die von den Impulsen  $\mathbf{p}_\perp$  und  $\omega_n$  nur in der Kombination  $\sqrt{\mathbf{p}_\perp^2 + \omega_n^2}$  abhängig sind. Wie erwartet und durch einen numerischen Test mit  $N = 20$  Matsubara Frequenzen bestätigt, werden die Lösungen für Impulse, die groß gegenüber der Temperatur sind, quasi  $O(3)$  invariant. Dies gilt insbesondere für  $\omega_n \gg T$  oder  $2\pi n \gg 1$ . Tatsächlich funktioniert die Interpolation (5.48) sehr gut für  $N_{\max} \geq 4$ . In den folgenden numerischen Ergebnissen haben wir daher  $N_{\max} = 4$  gewählt, während wir die Summe über  $N = 100$  Matsubara Frequenzen ausführen.

Für die Integration über den transversalen Schleifenimpuls  $\mathbf{q}_\perp$  verwenden wir Polarkoordinaten  $\mathbf{q}_\perp = q_\perp \mathbf{e}_r$  mit dem Einheitsvektor  $\mathbf{e}_r = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)^T$  und  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Damit lautet der Schleifenimpuls  $\mathbf{q}$  wie folgt

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_\perp + \omega_n \mathbf{e}_3, \quad \omega_n = 2\pi n T. \quad (5.49)$$

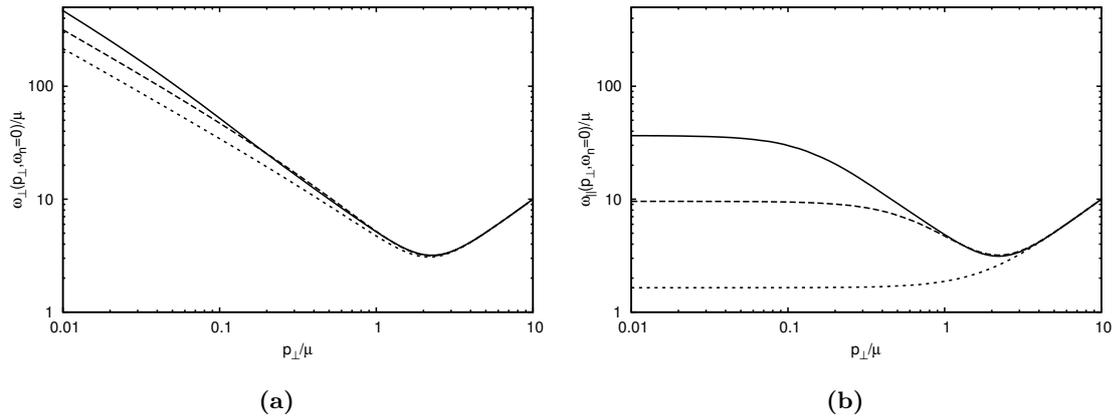
Das Integral und in Summe in  $\int_L$  berechnen wir somit durch

$$\int_L d^3 q \rightarrow \int_0^\Lambda dq_\perp q_\perp \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{L} \sum_{n=-N}^N. \quad (5.50)$$

Die vollständigen Ausdrücke für die Integralgleichungen auf der Mannigfaltigkeit  $\mathbb{R}^2 \times S^1(L)$  sind in Anh. C.2 zusammengefasst.

Um der Horizont-Bedingung  $d^{-1}(0) = 0$  für den Geist-Formfaktor zu genügen, verfahren wir wie in Abschn. 3.6 beschrieben. Die Skala  $\mu_d$  wählen wir im ultravioletten Impulsbereich und passen  $c^{-1}(\mu_d)$  so an, dass die Horizont-Bedingung  $d^{-1}(0) = 0$  erfüllt wird. Es gibt zwei verschiedene Werte  $c^{-1}(\mu_d)$ , die bei  $T = 0$  zu infrarot-divergenten Lösungen mit  $\beta = 1$  oder  $\beta \approx 0.8$  führen. Wir beschränken uns hier auf die  $\beta = 1$  Lösung, die ein linear ansteigendes nicht-abelsches Coulomb Potential bei  $T = 0$  impliziert.

Abb. 5.1a zeigt den Geist-Formfaktor für die Matsubara-Frequenz  $n = 0$  als Funktion des transversalen Impulses  $p_\perp = |\mathbf{p}_\perp|$  und für verschiedene Temperaturen. Im Hochtemperaturlimes entspricht  $d(p_\perp, \omega_n = 0)$  der  $T = 0$ -Lösung in  $d = 2$  räumlichen Dimensionen und besitzt den Infrarotexponent ( $\beta \approx 0.4$ ) [Gl. (3.77)] dieser Lösung. Bei kleiner werdender Temperatur bildet sich im intermediären Bereich, zwischen mittleren und kleinen



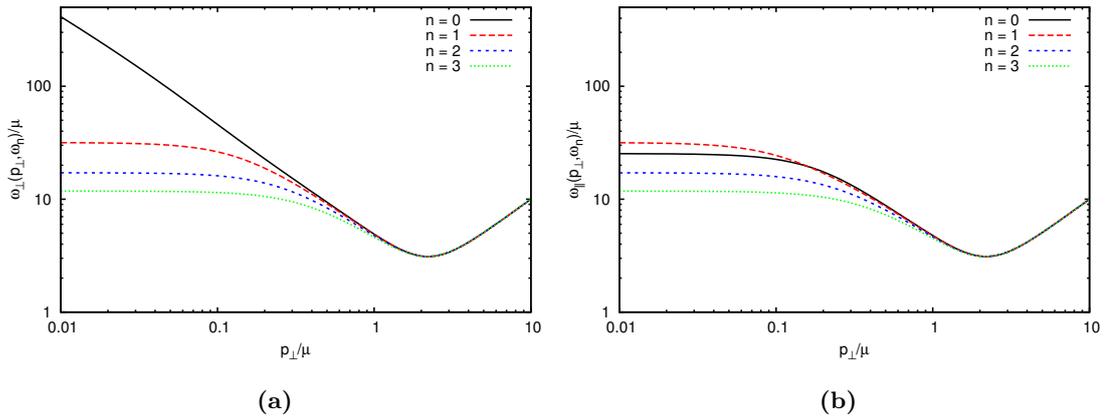
**Abbildung 5.2.:** (a) die transversale  $\omega_{\perp}(p_{\perp}, \omega_n)$  und (b) die longitudinale  $\omega_{\parallel}(p_{\perp}, \omega_n)$  Gluonenergien für die Matsubara Frequenz  $n = 0$  als Funktion des transversalen Impulses  $p_{\perp}$  und für verschiedene Temperaturen ansteigend von unten nach oben.

Impulsen, ein zweites Potenzgesetz aus, das den Infrarotexponent [Gl. (3.76)]  $\beta = 1$  der  $T = 0$  Lösung in  $d = 3$  Dimensionen hat. Dieses Verhalten breitet sich zu kleineren Impulsen aus, wenn die Temperatur weiter verringert wird. Im tief infraroten Bereich bleibt jedoch bei jeder endlichen Temperatur der Infrarotexponent der ( $T = 0$ ,  $d = 2$ )-Lösung bestehen und verschwindet erst im Limes gegen  $T \rightarrow 0$  ( $L \rightarrow \infty$ ).

Ein ähnliches Verhalten für die Temperaturabhängigkeit beobachten wir bei der transversalen und der longitudinalen Gluonenergien  $\omega_{\perp}$ ,  $\omega_{\parallel}$ , die in Abb. 5.2 dargestellt sind. Bei hohen Temperaturen nähert sich  $\omega_{\perp}(p_{\perp}, \omega_n = 0)$  der ( $T = 0$ ,  $d = 2$ )-Lösung an, während  $\omega_{\parallel}(p_{\perp}, \omega_n = 0)$  eine effektive Masse hat und infrarot endlich ist. Wenn die Temperatur verringert wird, bildet sich im intermediären Impulsbereich in beiden Gluonenergien  $\omega_{\perp}(p_{\perp}, \omega_n = 0)$  und  $\omega_{\parallel}(p_{\perp}, \omega_n = 0)$  ein Potenzverhalten  $\omega_Q(p_{\perp}, \omega_n = 0) \sim p_{\perp}^{\alpha}$  mit dem  $d = 3$  ( $T = 0$ ) Infrarotexponent  $\alpha = 1$  aus. Für transversale Impulse, die kleiner als die Temperatur sind, verhalten sich  $\omega_Q(p_{\perp}, \omega_n = 0)$  wie bei hohen Temperaturen. D.h.  $\omega_{\perp}(p_{\perp}, \omega_n = 0)$  hat ein Potenzverhalten mit dem  $d = 2$  Infrarotexponenten  $\alpha = 0.8$ , während  $\omega_{\parallel}(p_{\perp}, \omega_n = 0)$  konstant ist für  $p_{\perp} \rightarrow 0$ . Mit sinkender Temperatur nimmt, in Übereinstimmung mit der Analyse bei  $T = 0$  in Abschn. 5.2, das  $d = 3$ -Potenzverhalten einen immer größer werdenden Teil des infrarot Bereiches ein und für  $T \rightarrow 0$  vereinen sich beide Gluonenergien  $\omega_{\perp}(p_{\perp}, \omega_n = 0)$  und  $\omega_{\parallel}(p_{\perp}, \omega_n = 0)$  zu der  $O(3)$  invarianten ( $T = 0$ ,  $d = 3$ )-Lösung. Schließlich zeigt Abb. 5.3 die Gluonenergien  $\omega_{\perp}$  und  $\omega_{\parallel}$  bei endlichen Temperaturen und für die ersten Matsubara-Frequenzen  $n = 0, \dots, 3$ . Für  $n > 0$  sind die Gluonenergien und der Geist-Formfaktor [Abb. 5.1b] infrarot endlich.

## 5.6. Zusammenfassung

In diesem Kapitel haben wir die Yang-Mills-Theorie bei endlichen Temperaturen untersucht, indem wir eine räumliche Dimension zu einem Kreis  $S^1(L)$  kompaktifiziert und den Umfang  $L$  als die inverse Temperatur interpretiert haben. Dadurch ist Temperaturabhängigkeit vollständig in dem Vakuumzustand auf der räumlichen Mannigfaltigkeit  $\mathbb{R}^2 \times S^1(L)$  enthalten. Das Vakuum-Wellenfunktional auf  $\mathbb{R}^2 \times S^1(L)$  wurde mit dem Variationsprinzip durch einen verallgemeinerten gaußschen Ansatz bestimmt, der verschiedene Variations-



**Abbildung 5.3.:** (a) die transversale  $\omega_{\perp}(p_{\perp}, \omega_n)$  und (b) die longitudinale  $\omega_{\parallel}(p_{\perp}, \omega_n)$  Gluonenergien bei endlicher Temperatur als Funktion des transversalen Impulses  $p_{\perp}$  und für die ersten Matsubara-Frequenzen  $n = 0, \dots, 3$ .

kerne für die Freiheitsgrade parallel und orthogonal zu der kompaktifizierten Dimension hat. Daraus ergeben sich zwei Gap-Gleichungen, die an die Bewegungsgleichungen für den Geist-Formfaktor gekoppelt sind.

Wir haben analytisch gezeigt, dass diese Gleichungen das korrekte  $T = 0$  Verhalten haben und sich für unendlich große Temperaturen auf die  $2 + 1$  dimensionale Theorie reduzieren – in Übereinstimmung mit der Dimensionalen-Reduktion. Im gesamten Impulsbereich konnten wir die Lösungen bei endlichen Temperaturen als Funktion des transversalen Impulses und der Matsubara-Frequenz numerisch bestimmen. Die Horizont-Bedingung wurde dabei für die nullte Matsubara-Frequenz implementiert. Bei hohen Temperaturen  $T \rightarrow \infty$  entsprechen die selbst-konsistenten Lösungen denen der  $d = 2$  dimensionalen Theorie bei  $T = 0$ . Für kleinere Temperaturen zeigen die Lösungen in einem Bereich zwischen kleinen und mittleren Impulsen ein Potenzverhalten mit dem Infrarotexponenten der  $(T = 0, d = 3)$ -Lösung, während bei noch kleineren Impulsen das  $(T = 0, d = 2)$ -Verhalten mit dem  $T = 0$ -Infrarotexponenten bestehen bleibt. Dieses Verhalten verschwindet erst im Limes  $T \rightarrow 0$ .

Dieser Zugang zur Einführung von endlichen Temperaturen einer Quantenfeldtheorie im Hamiltonformalismus hat den Vorteil, dass im Gegensatz zum großkanonischen Ensemble kein Ansatz für die Dichtematrix erforderlich ist.



## 6. Effektives Potential des Polyakov-Loops

Ein Ordnungsparameter für den Deconfinement-Phasenübergang in der reinen Yang-Mills-Theorie ist der Erwartungswert des Polyakov-Loops. Dieser kann aus dem effektiven Potential in Anwesenheit eines Hintergrundfeldes bestimmt werden.

Dieses Potential wurde bereits in [62] mit perturbativen Methoden bestimmt. Da hierdurch eine Beziehung zwischen den eichabhängigen Korrelationsfunktionen und dem Ordnungsparameter für Confinement hergestellt werden kann [129], wurde dieser Zugang in den letzten Jahren auch für nicht-perturbative Methoden entwickelt. In unterschiedlichen Eichungen wurde mit dieser Methode der Phasenübergang der Yang-Mills-Theorie [129–131] und der QCD [60, 64] untersucht. Auch das Phasendiagramm der QCD kann hiermit bei endlichen Dichten [37, 132] analysiert werden. In diesem Kapitel bestimmen wir das effektive Potential des Polyakov-Loops im Hamiltonzugang.

Das effektive Potential ist durch die Energiedichte des Grundzustands in Anwesenheit eines Hintergrundfeldes gegeben [133]. Um die Energiedichte zu bestimmen, erweitern wir in Abschn. 6.1 die hamiltonsche Formulierung, wobei wir die Hintergrund-Eichung verwenden, die sich für ein verschwindendes Hintergrundfeld auf die Coulomb-Eichung reduziert und ein explizites Auflösen des gaußschen Gesetzes ermöglicht. Wir diskutieren unseren Ansatz für das Wellenfunktional, das einen nicht verschwindenden Erwartungswert für das Eichfeld festlegt. Die Energiedichte des Grundzustands bei vorgegebenen Hintergrundfeld und die Bewegungsgleichungen der Korrelationsfunktionen bestimmen wir in Abschn. 6.2. In Abschn. 6.3 leiten wir für ein konstantes Hintergrundfeld, das aus der Cartan-Subalgebra gewählt wird, eine Relation zu den Ergebnissen in Coulomb-Eichung her. Durch Kompaktifizierung einer räumlichen Dimension berechnen wir in Abschn. 6.4 das effektive Potential bei endlichen Temperaturen. Aus dessen Minimum bestimmen wir den Erwartungswert des Polyakov-Loops und extrahieren sowohl die kritische Temperatur, als auch die Ordnung des Deconfinement-Phasenübergangs der Yang-Mills-Theorie.

Die wesentlichen hier dargestellten Ergebnisse wurden für die Eichgruppe  $SU(2)$  in [134] und für  $SU(3)$  in [57] veröffentlicht.

### 6.1. Hamiltonzugang mit Hintergrundfeld

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir den Variationszugang zur Yang-Mills-Theorie im Hamiltonformalismus bei Anwesenheit eines externen Hintergrundfeldes  $a$ . Dies ist eine Erweiterung des Variationszugangs in Coulomb-Eichung [vgl. Kap. 3].

Wie im vorangegangenen Kapiteln absorbieren wir die Kopplungskonstante  $g$  in das Eichfeld  $gA \rightarrow A$ , die dadurch aus der kovarianten Ableitung [Gl. (2.14)] entfällt. Der Hamilton-Operator der Yang-Mills-Theorie in Weyl-Eichung ( $A_0 = 0$ ) [vgl. (2.49)] lautet in dieser Konvention

$$H[A] = \frac{1}{2} \left( g^2 \Pi(1) \Pi(1) + \frac{1}{g^2} B(1) B(1) \right) \quad (6.1)$$

mit dem Impulsoperator  $\Pi$  gegeben durch Gl. (2.33) und dem chromomagnetischen Feld  $\mathbf{B}[A]$  definiert in Gl. (2.23). Wegen der Verwendung der Weyl-Eichung muss das gaußsche

Gesetz als die Nebenbedingung

$$\hat{\mathbf{D}}\Pi\psi[A] = \rho_{\text{ext}}\psi[A] \quad (6.2)$$

an das Wellenfunktional  $\psi[A] = \langle A | \psi \rangle$  implementiert werden [vgl. (2.37)]. Hier ist  $\rho_{\text{ext}}$  die externe Ladungsdichte.

In den folgenden Abschnitten wird der Grundzustand der Yang-Mills-Theorie und dessen Energiedichte in Anwesenheit eines externen Vektorfeldes  $a$  bestimmt. Sei  $|\psi_a\rangle$  das entsprechende Wellenfunktional, dann definieren wir mit

$$\langle \dots \rangle_a := \langle \psi_a | \dots | \psi_a \rangle$$

den Erwartungswert bei Anwesenheit des Hintergrundfeldes. Wir nehmen an, dass die Zustände  $|\psi_a\rangle$  auf  $\langle \psi_a | \psi_a \rangle = 1$  normiert sind. Das Hintergrundfeld  $a$  legt für das Eichfeld einen nicht-verschwindenden Erwartungswert

$$\langle A \rangle_a = a \quad (6.3)$$

fest. Ohne externes Feld  $a$  garantiert die Eichinvarianz des Vakuumwellenfunktions  $\psi_0[A] = \langle A | \psi_0 \rangle$ , dass die Erwartungswerte eichabhängiger Größen verschwinden. Dies gilt insbesondere für das Eichfeld

$$\langle \psi_0 | A | \psi_0 \rangle = 0.$$

In Anwesenheit des Hintergrundfeldes bestimmen wir mit dem Variationszugang das Wellenfunktional  $|\psi_a\rangle$ , das die Energie  $\langle H \rangle_a$  minimiert und die Nebenbedingung (6.3) erfüllt, d.h.<sup>1</sup>

$$\langle H \rangle_a \rightarrow \min, \quad \langle A \rangle_a = a. \quad (6.4)$$

Um nicht mit eichinvarianten Wellenfunktionen arbeiten zu müssen, ist es auch in Anwesenheit eines Hintergrundfeldes sinnvoll die Eichung zu fixieren.

### 6.1.1. Fixierung der Hintergrundeichung

In diesem Kapitel verwenden wir die *Hintergrundeichung* [135, 136]

$$\tilde{f}[A] \equiv [\mathbf{d}, \mathbf{A} - \mathbf{a}] = 0 \quad (6.5)$$

mit der kovarianten Ableitung

$$d := \partial + a \quad (6.6)$$

bezüglich des Hintergrundfeldes. Diese Eichung fixiert das fluktuierende Feld  $\mathcal{A} := A - a$  in Bezug auf das Hintergrundfeld  $a$  und ist das 3-dimensionale, räumliche Analogon zur Landau-deWitt Eichung. Sie ermöglicht ein explizites Auflösen des gaußschen Gesetzes (6.2) und erweist sich in Anwesenheit eines Hintergrundfeldes als geeigneter wie die Coulomb-Eichung [Gl. (2.43)]. Mit der kovarianten Ableitung (6.6) in adjungierter Darstellung

$$\hat{d}_i^{ab} = \delta^{ab} \partial_i + \hat{a}_i^{ab}, \quad \hat{a}_i^{ab} = f^{acb} a_i^c, \quad (6.7)$$

kann die Bedingung (6.5) auch geschrieben werden als

$$\tilde{f}[A] = \hat{\mathbf{d}}(\mathbf{A} - \mathbf{a}). \quad (6.8)$$

---

<sup>1</sup>Das Vakuumwellenfunktional  $\psi_a[A] \equiv \psi_0[A - a]$  erfüllt zwar die Nebenbedingung  $\psi$  (6.3), minimiert jedoch im Allgemeinen nicht die Energie.

Der Faddeev-Popov-Operator für die Hintergrundgleichung ist [134]

$$\tilde{G}_A^{-1} := -\hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{d}}, \quad (6.9)$$

wobei  $\hat{D}$  die gewöhnliche kovariante Ableitung in adjungierter Darstellung [Gl. (2.14)] ist. Matrixelemente einer Observablen  $\mathcal{O}[A, \Pi]$  sind in der eichfixierten Theorie definiert durch das Skalarprodukt [vgl. (2.38)]

$$\langle \psi | \mathcal{O}[A, \Pi] | \phi \rangle := \int \mathcal{D}A \delta(\tilde{f}[A]) \mathcal{J}[A] \psi^*[A] \mathcal{O}[A, \Pi] \phi[A] \quad (6.10)$$

mit der Eichbedingung  $\tilde{f}[A]$  (6.5) und der Faddeev-Popov-Determinanten

$$\mathcal{J}[A] := \text{Det } \tilde{G}_A^{-1} \equiv \text{Det}(-\hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{d}}). \quad (6.11)$$

Zum Auflösen des gaußschen Gesetzes (6.2) in der Hintergrundgleichung (6.5) führen wir, mit der kovarianten Ableitung bezüglich des Hintergrundfeldes  $\hat{d}$  (6.7), die verallgemeinerten Projektionsoperatoren

$$\hat{l}_{ij}(x) = \hat{d}_i (\hat{\mathbf{d}}\hat{\mathbf{d}})^{-1} \hat{d}_j, \quad \hat{t}_{ij} = \hat{\delta}_{ij} - \hat{l}_{ij}, \quad \hat{\delta}_{ij}^{ab} = \delta^{ab} \delta_{ij} \quad (6.12)$$

ein. Diese Projektoren haben für ein konstantes Hintergrundfeld die gleichen Eigenschaften wie die gewöhnlichen Projektionsoperatoren, die wir in Coulomb-Eichung verwendet haben [vgl. (2.44)]. Aufgrund der Anwesenheit des Hintergrundfeldes sind sie jedoch nicht-triviale Matrizen im Farbraum.

Mit den Projektionsoperatoren (6.12) teilen wir das Eichfeld  $A$  und den Impulsoperator  $\Pi$  in eine (formal) longitudinale und eine (formal) transversale Komponente auf:

$$A = A^{\parallel} + A^{\perp}, \quad A_i^{\parallel} = \hat{l}_{ij} A_j, \quad A_i^{\perp} = \hat{t}_{ij} A_j \quad (6.13a)$$

$$\Pi = \Pi^{\parallel} + \Pi^{\perp}, \quad \Pi_i^{\parallel} = \hat{l}_{ij} \Pi_j, \quad \Pi_i^{\perp} = \hat{t}_{ij} \Pi_j. \quad (6.13b)$$

Das longitudinale Eichfeld  $A^{\parallel}$  wird später im Skalarprodukt (6.10) durch die Eichbedingung (6.5) eliminiert werden. Im Folgenden zeigen wir, dass in Hintergrundgleichung der longitudinale Teil des Impulsoperators  $\Pi^{\parallel}$  durch das gaußsche Gesetz (6.2) ausgedrückt werden kann. Hierzu verwenden wir die Aufteilung (6.13b) und erhalten durch Auflösen nach dem longitudinalen Impulsoperator

$$\Pi^{\parallel} \psi[A] = -\hat{d} \left( -\hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{d}} \right)^{-1} \rho \psi[A] \quad (6.14)$$

mit der *totalen* Farbladungsdichte

$$\rho = \rho_{\text{ext}} + \rho_{\text{dyn}}[A]. \quad (6.15)$$

Diese enthält neben der externen Farbladung  $\rho_{\text{ext}}$  auch die dynamische Ladung der Eichbosonen in Hintergrundgleichung

$$\rho_{\text{dyn}}[A] = -\hat{\mathbf{D}}\Pi^{\perp}. \quad (6.16)$$

Durch Umschreiben der kovarianten Ableitung (2.14) zu

$$\hat{D} = \hat{d} + (\hat{A} - \hat{a}) \quad (6.17)$$

und mit  $\hat{\mathbf{d}}\mathbf{\Pi}^\perp = 0$  kann die dynamische Farbladung (6.16) dargestellt werden als

$$\rho_{\text{dyn}}[A] = - \left( \hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{a}} \right) \mathbf{\Pi}^\perp. \quad (6.18)$$

Diese hängt von dem Eichfeld  $A$  und von dem Hintergrundfeld  $a$  nur in der Kombination  $A - a$  ab. Da die Projektoren  $\hat{l}$ ,  $\hat{t}$  (6.12) orthogonal sind, gilt insbesondere

$$\mathbf{\Pi}^2 = \mathbf{\Pi}^{\parallel 2} + \mathbf{\Pi}^{\perp 2}. \quad (6.19)$$

Mit dieser Aufteilung und Gl. (6.14) können wir den eichfixierten Yang-Mills-Hamiltonian schreiben als

$$H = \frac{1}{2} \left( g^2 \mathcal{J}^{-1}[A] \mathbf{\Pi}^\perp(1) \mathcal{J}[A] \mathbf{\Pi}^\perp(1) + \frac{1}{g^2} B(1) B(1) \right) + H_C \quad (6.20)$$

mit der Faddeev-Popov-Determinante  $\mathcal{J}[A]$  (6.11), dem chromomagnetischen Feld  $B$  (2.23) und dem Coulomb-Term

$$H_C = \frac{g^2}{2} \mathcal{J}^{-1}[A] \rho(1) \mathcal{J}[A] F_A(1, 2) \rho(2), \quad (6.21)$$

der durch die Auflösung der longitudinalen Komponente  $\mathbf{\Pi}^\parallel$  des Impulsoperators mit dem gaußschen Gesetz (6.2) entstanden ist. Dieser Term beschreibt die Wechselwirkung der totalen Farbladung (6.15) über den Coulomb-Kern

$$F_A = \left( -\hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{d}} \right)^{-1} \left( -\hat{\mathbf{d}}\hat{\mathbf{d}} \right) \left( -\hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{d}} \right)^{-1} \quad (6.22)$$

in Hintergrundeichung (6.5). Für ein verschwindendes Hintergrundfeld  $a = 0$  reduziert sich die kovariante Ableitung bezüglich des Hintergrundfeldes  $\hat{d}_i = \partial_i + \hat{a}_i$  auf die partielle Ableitung  $\partial_i$  und der Operator (6.22) auf den gewöhnlichen Coulomb-Kern [Gl. (2.69)].

### 6.1.2. Wellenfunktional in Hintergrundeichung

Im Variationszugang benötigen wir einen geeigneten Ansatz für den Zustand  $|\psi_a\rangle$ . Für den Vakuumzustand (bei  $a = 0$ ) wurde in Coulomb-Eichung das gaußsche Wellenfunktional [13]

$$\psi_0[A] = \mathcal{J}[A]^{-1/2} \tilde{\psi}[A], \quad \tilde{\psi}[A] := \mathcal{N} \exp \left[ -\frac{1}{2g^2} A(1) \omega(1, 2) A(2) \right] \quad (6.23)$$

mit dem Variationskern  $\omega$  und der Normierungskonstanten  $\mathcal{N}$  verwendet. Dieser Ansatz hat den Vorteil, dass die Faddeev-Popov-Determinante  $\mathcal{J}[A]$  aus dem Skalarprodukt (6.10) entfernt wird. Um der Nebenbedingung  $\langle A \rangle_a = a$  zu genügen, verwenden wir für den Grundzustand in Anwesenheit des Hintergrundfeldes den Ansatz

$$\psi_a[A] := \mathcal{J}^{-1/2}[A] \tilde{\psi}[A - a] \quad (6.24)$$

mit der Faddeev-Popov-Determinante  $\mathcal{J}[A]$  der Hintergrundeichung (6.11). Für  $a = 0$  geht  $\psi_a[A]$  wieder in das Vakuumwellenfunktional  $\psi_0[A]$  (6.23) über. Da sich auch die Eichbedingung (6.5) und die Nebenbedingung (6.3) für  $a \rightarrow 0$  auf die entsprechenden Gleichungen in Coulomb-Eichung reduzieren, gilt dies auch für die Bewegungsgleichungen, die wir mit dem Ansatz (6.24) ableiten werden. Dieser erfüllt bereits die Nebenbedingung (6.3), sodass noch die Energiedichte minimiert werden muss.

Der Erwartungswert eines Operators  $\mathcal{O}[A, \Pi]$  ist mit dem Ansatz (6.24) für das Wellenfunktional und dem in (6.10) definierten Skalarprodukt gegeben durch

$$\langle \mathcal{O}[\Pi, A] \rangle_a := \langle \psi_a | \mathcal{O}[A, \Pi] | \psi_a \rangle = \int \mathcal{D}A \delta(\tilde{f}[A]) \tilde{\psi}^*[A - a] \tilde{\mathcal{O}}[A, \Pi] \tilde{\psi}[A - a]. \quad (6.25)$$

Hier haben wir analog zu Gl. (3.5) den transformierten Operator

$$\tilde{\mathcal{O}}[A, \Pi] = \mathcal{J}^{1/2}[A] \mathcal{O}[A, \Pi] \mathcal{J}^{-1/2}[A] \quad (6.26)$$

eingeführt. Nach einer Verschiebung der Integrationsvariable  $A \rightarrow A + a$  gilt<sup>2</sup>

$$\langle \mathcal{O}[A, \Pi] \rangle_a = \int \mathcal{D}A \delta(\tilde{f}[A + a]) \tilde{\psi}^*[A] \tilde{\mathcal{O}}[A + a, \Pi] \tilde{\psi}[A] =: \langle \mathcal{O}[A + a, \Pi] \rangle_0, \quad (6.27)$$

sodass die Berechnung von Erwartungswerten in Anwesenheit des Hintergrundfeldes mit dem Vakuumzustand (6.23) durchgeführt werden kann, wobei das Feldargument des Operators  $\mathcal{O}[A + a, \Pi]$  um  $a$  verschoben ist. Die Eichbedingung (6.8) lautet nach der Verschiebung des Eichfeldes

$$\tilde{f}[A + a] = \hat{\mathbf{d}}\mathbf{A} = 0 \quad (6.28)$$

und eliminiert das durch Gl. (6.13a) definierte longitudinale Eichfeld  $A^{\parallel}$ . Daher verwenden wir im Folgenden nur noch das transversale Eichfeld  $A \equiv A^{\perp}$  und den transversalen Impulsoperator  $\Pi \equiv \Pi^{\perp}$ .

Gl. (6.27) gilt auch für den Erwartungswert des eichfixierten Hamilton-Operators  $H$  (6.20). Die dynamische Farbladung (6.16) lautet nach der Verschiebung des Eichfeldes

$$\rho_{\text{dyn}}[A + a] = -\hat{\mathbf{A}}\Pi. \quad (6.29)$$

Dies ist formal der gleiche Ausdruck wie in Coulomb-Eichung [13, 30], nur dass die Transversalität jetzt durch die Eichbedingung (6.28) definiert ist und die Farbladung deshalb von der kovarianten Ableitung  $d$  abhängt.

Im Hamilton-Operator (6.20) tritt das Eichfeld nur in Einheit mit der kovarianten Ableitung  $D[A] = \partial + A$  auf [vergleiche dazu auch die Definition des chromomagnetischen Feldes (2.23)]. Nach der Verschiebung  $A \rightarrow A + a$  gilt

$$D[A + a] = d + A, \quad (6.30)$$

weshalb der Hamilton-Operator  $H[A + a, \Pi]$  vom Hintergrundfeld  $a$  nur in Kombination mit der kovarianten Ableitung  $d = \partial + a$  (6.6) abhängig ist. Dies gilt auch für die Faddeev-Popov-Determinante (6.11)

$$\mathcal{J}[A + a] = \text{Det} \left( - \left( \hat{\mathbf{d}} + \hat{\mathbf{A}} \right) \hat{\mathbf{d}} \right) \quad (6.31)$$

und somit auch für den nach (6.26) transformierten Hamiltonian  $\tilde{H}[A + a, \Pi]$ .

In den nächsten Schritten werden wir die Bewegungsgleichungen mit dem Ansatz (6.24) für das Wellenfunktional in Anwesenheit des Hintergrundfeldes herleiten, die Energie  $\langle H \rangle_a$  im Zustand  $|\psi_a\rangle$  bestimmen und mit dem Variationsprinzip eine Gap-Gleichung für den Kern  $\omega$  ableiten. Dabei hat  $\omega$  im Gegensatz zu den Betrachtungen in Coulomb-Eichung aufgrund der Anwesenheit des Hintergrundfeldes eine nicht-triviale Farbstruktur.

<sup>2</sup>Der Impulsoperator  $\Pi$  bleibt von der Transformation  $A \rightarrow A + a$  unberührt.

## 6.2. Bewegungsgleichungen im Hintergrundfeld

In diesem Abschnitt präsentieren wir Bewegungsgleichungen für den Geist- und Gluon-Propagator, die wir mit dem Variationszugang aus dem Ansatz (6.24) für das Wellenfunktional in Hintergrundeichung (6.28) ableiten. Diese Gleichungen sind eine Verallgemeinerung der Bewegungsgleichungen in Coulomb-Eichung [13] [siehe auch Kap. 3] und reduzieren sich für ein verschwindendes Hintergrundfeld wieder auf diese.

Da wir später an dem effektiven Potential des Polyakov-Loops interessiert sein werden, ist es ausreichend von nun an ein konstantes Hintergrundfeld  $\mathbf{a} = \text{konst}$  anzunehmen. Die Farbstruktur des Hintergrundfeldes bleibt mit  $a = a^b T_b$  weiterhin beliebig.

### 6.2.1. Geist- und Gluon-Propagator

**Gluon-Propagator** Da sich alle Erwartungswerte  $\langle \dots \rangle_a$  im Zustand  $|\psi\rangle_a$  mit Gl. (6.27) durch den Vakuumerwartungswert  $\langle \dots \rangle_0$  ausdrücken lassen, definieren wir den Gluon-Propagator als

$$D(1, 2) := \langle A(1)A(2) \rangle_0. \quad (6.32)$$

Für das Wellenfunktional (6.23) folgt der Zusammenhang

$$D(1, 2) = \frac{g^2}{2} \omega^{-1}(1, 2) \quad (6.33)$$

mit dem Variationskern  $\omega$ . Wegen des gaußschen Wellenfunktionals  $\psi_0[A]$  (6.23) können alle Erwartungswerte  $\langle \dots \rangle_a$  durch den Gluon-Propagator  $D$  oder den Kern  $\omega$  ausgedrückt werden. Wie in Coulomb-Eichung führen wir dennoch den Geist-Propagator ein, um die Beiträge zur Energiedichte, die die Faddeev-Popov Determinate enthalten, einfacher berechnen zu können.

**Geist-Propagator** Der Geist-Propagator ist mit dem Skalarprodukt (6.25) definiert als der Erwartungswert

$$G := \langle \tilde{G}_A[A] \rangle_a \quad (6.34)$$

des Faddeev-Popov-Operators (6.9). Mit Gl. (6.27) kann der Geist-Propagator geschrieben werden als der Vakuumerwartungswert

$$G = \langle \tilde{G}_A[A + a] \rangle_0 = \left\langle \left( -(\hat{\mathbf{d}} + \hat{\mathbf{A}}) \hat{\mathbf{d}} \right)^{-1} \right\rangle_0. \quad (6.35)$$

Wie in Coulomb-Eichung [vgl. [13] und Kap. 3] kann die Dyson-Schwinger-Gleichung

$$G^{-1} = G_0^{-1} - \Sigma \quad (6.36)$$

für den Geist-Propagator  $G$  (6.35) abgeleitet werden, wobei der nackte Geist-Propagator

$$G_0 = \left( -\hat{\mathbf{d}}\hat{\mathbf{d}} \right)^{-1} \quad (6.37)$$

aus Gl. (6.35) mit  $A = 0$  folgt. Für die Selbstenergie gilt

$$\Sigma(1, 2) = \Gamma_0(1, 3; 4)G(3, 3')\Gamma(3', 2; 4')D(4', 4) \quad (6.38)$$

mit dem Gluon-Propagator  $D(1, 2)$  (6.32), sowie dem nackten Vertex [vgl. (2.73)]

$$\Gamma_0(1, 2; 3) := \frac{\delta \tilde{G}_A[A + a](1, 2)}{\delta A(3)} \quad (6.39)$$

und dem vollen Geist-Gluon-Vertex  $\Gamma$  definiert durch

$$G\Gamma G := \left\langle \tilde{G}_A [A + a] \Gamma_0 \tilde{G}_A [A + a] \right\rangle_0. \quad (6.40)$$

Wir verwenden auch in der Hintergrundeichung die Rainbow-Ladder-Näherung und ersetzen den vollen Geist-Gluon-Vertex  $\Gamma$  in der Selbstenergie (6.38) durch den nackten Vertex  $\Gamma_0$ . Dies ist unter der Annahme gerechtfertigt, dass das Dressing des Geist-Gluon-Vertex auch in Anwesenheit des Hintergrundfeldes gering ist. Diese Annahme ist in Coulomb-Eichung korrekt [vgl. Abschn. 2.3.3], auf welche sich die Hintergrundeichung für  $a \rightarrow 0$  reduziert.

Der nackte Vertex  $\Gamma_0$  (6.39) lautet für den Faddeev-Popov-Operator  $\tilde{G}_A$  (6.9)

$$\Gamma_{0,k}^a(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_3) = \left( \hat{T}_b t_{lk}^{ba}(\mathbf{x}_1) \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3) \right) \hat{d}_l(\mathbf{x}_1) \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2), \quad (6.41)$$

sodass für die Selbstenergie (6.38) mit der Ersetzung  $\Gamma \rightarrow \Gamma_0$  gilt

$$\Sigma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \left[ t_{kk'}^{aa'}(\mathbf{x}_1) t_{ll'}^{bb'}(\mathbf{x}_3) D_{l'k'}^{b'a'}(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_1) \right] \hat{T}_a \left( \hat{d}_k(\mathbf{x}_1) G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3) \right) \hat{T}_b \left( \hat{d}_l(\mathbf{x}_3) \delta(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_2) \right). \quad (6.42)$$

Der Geist-Propagator in Rainbow-Ladder-Näherung wird somit durch die Gleichung (6.36) mit der Selbstenergie (6.42) bestimmt.

### 6.2.2. Energie und Gap-Gleichung

**Erwartungswert des Hamilton-Operators** Die Berechnung der Energie  $E = \langle H \rangle_a$  reduziert sich mit Gl. (6.25) auf die Berechnung des Vakuumerwartungswertes

$$E = \langle H[\Pi, A + a] \rangle_0. \quad (6.43)$$

Mit dem gaußschen Wellenfunktional  $\tilde{\psi}[A]$  (6.23) kann die Energie durch das Wick-Theorem als Funktional des Gluon-Propagators  $D$  (6.32) ausgedrückt werden. Für den abelschen Teil der magnetischen Energie gilt

$$\left\langle H_B^A \right\rangle_a = -\frac{1}{2g^2} \left( \hat{\mathbf{d}} \hat{\mathbf{d}} \right) (1, 2) D(2, 1) \quad (6.44)$$

und für den nicht-abelschen Teil ergibt sich

$$\begin{aligned} \left\langle H_B^{\text{NA}} \right\rangle_a = \frac{1}{4g^2} f^{abc} f^{ab'c'} \int d^d x \left[ D_{ll'}^{bb'}(x, x) D_{mm}^{cc'}(x, x) \right. \\ \left. + D_{lm}^{bc}(x, x) D_{lm}^{b'c'}(x, x) + D_{lm}^{bc'}(x, x) D_{lm}^{b'c}(x, x) \right]. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Der kinetische Term  $\tilde{H}_K$  des transformierten Hamilton-Operators (6.26) kann geschrieben werden als

$$\tilde{H}_K[A + a] = \frac{g^2}{2} \left\{ \Pi(1)\Pi(1) + \frac{1}{2} \left( \frac{\delta^2 \ln \mathcal{J}[A + a]}{\delta A(1)\delta A(1)} \right) + \frac{1}{4} \frac{\delta \ln \mathcal{J}[A + a]}{\delta A(1)} \frac{\delta \ln \mathcal{J}[A + a]}{\delta A(1)} \right\}. \quad (6.46)$$

Analog zur Coulomb-Eichung (2.78) definieren wir die Krümmung  $\chi$  durch

$$\chi(1, 2) := -\frac{1}{2} \left\langle \frac{\delta^2 \ln \mathcal{J}[A + a]}{\delta A(1)\delta A(2)} \right\rangle_0, \quad (6.47)$$

wobei das Argument der Faddeev-Popov-Determinante um das Hintergrundfeld  $a$  verschoben ist. Mit der Krümmung  $\chi$  gilt für die kinetische Energie

$$\langle H_K \rangle_a = \frac{g^2}{2} \left\{ \frac{D^{-1}(1,1)}{4} - \chi(1,1) + \chi(1,2)D(2,3)\chi(3,1) \right\}. \quad (6.48)$$

Wie in [112] gezeigt, hat der Coulomb-Term wenig Einfluss auf den Gluon-Sektor und der nicht-abelsche Teil der magnetischen Energie (6.45) erzeugt eine divergente Konstante, die in eine Renormierungskonstante [in Kap. 3 mit  $c_0$  bezeichnet] absorbiert werden kann. Daher vernachlässigen wir für die Berechnung der Gap-Gleichung sowohl die Coulomb-Energie  $\langle H_C \rangle$ , als auch den nicht-abelschen Teil der magnetischen Energie  $\langle H_B^{\text{NA}} \rangle_a$ . Somit lautet die Energie

$$\begin{aligned} E &= \langle H_B^{\text{A}} + H_K \rangle_a \\ &= \frac{g^2}{2} \left[ -(\hat{\mathbf{d}}\hat{\mathbf{d}})(1,2)D(2,1) + \frac{D^{-1}(1,1)}{4} - \chi(1,1) + \chi(1,2)D(2,3)\chi(3,1) \right]. \end{aligned} \quad (6.49)$$

**Gap-Gleichung** Die Gap-Gleichung folgt aus einer Variation der Energie (6.49) nach dem Gluon-Propagator  $D$ . Wie in Coulomb-Eichung [Abschn. 3.3] werden wir diese Bewegungsgleichung auf Ein-Loop-Niveau ableiten. Aus der Extremalbedingung für die Energie [Gl. (3.28)]

$$\frac{\delta \langle H_K + H_B^{\text{A}} \rangle_a}{\delta D(1,2)} \stackrel{!}{=} 0$$

folgt die Gap-Gleichung

$$\frac{g^4}{4} D^{-1}(2,3)D^{-1}(3,1) = (-\hat{t}\hat{\mathbf{d}}\hat{\mathbf{d}}\hat{t})(2,1) + g^4 \chi(2,3)\chi(3,1). \quad (6.50)$$

Dabei haben wir die Ableitungen  $\delta\chi/\delta D$  vernachlässigt, da diese Terme das Ein-Loop-Niveau verlassen.

Die Gap-Gleichung (6.50) lässt sich nutzen, um den Ausdruck (6.49) für die Energie zu vereinfachen. Hierzu ersetzen wir den Term  $-(\hat{\mathbf{d}}\hat{\mathbf{d}})$  durch  $D$  und  $\chi$ , sodass wir die kompakte Darstellung

$$E = \frac{g^2}{2} \left[ \frac{1}{2} D^{-1}(1,1) - \chi(1,1) \right] \quad (6.51)$$

erhalten. Diese Form der Energie gilt für selbstkonsistente Lösungen und ist der Ausgangspunkt für die Berechnung des effektiven Potentials.

### 6.3. Hintergrundfeld in der Cartan-Subalgebra

Bisher sind alle Überlegungen für ein beliebiges, konstantes Hintergrundfeld  $a$  gültig. Wenn das Hintergrundfeld  $a$  Element der von  $\text{SU}(N_c)$  induzierten Cartan-Subalgebra  $\mathfrak{su}(N_c)$  ist, lässt sich der Polyakov-Loop besonders einfach studieren [61].<sup>3</sup> Die Bewegungsgleichungen sind außerdem bisher nicht triviale Matrizen im Farbraum. Durch den Übergang in die Basis der Cartan-Subalgebra werden wir diese vereinfachen und eine Verbindung zu den Ergebnissen in Coulomb-Eichung herstellen.

<sup>3</sup>Dies kann ggf. durch eine globale Rotation im Farbraum erreicht werden.

### 6.3.1. Wahl des Hintergrundfeldes

Das konstante Hintergrundfeld  $\mathbf{a}$  kann unter Ausnutzung der Isotropie des Raumes ohne Beschränkung der Allgemeinheit in die räumliche  $x_3$ -Richtung gelegt werden, d.h.

$$\mathbf{a} = a \mathbf{e}_3, \quad a = \text{konst.} \quad (6.52)$$

Das Feld  $a$  in der Cartan-Subalgebra  $\mathfrak{su}(N_c)$  kann mit den zugehörigen (antihermiteschen) Generatoren  $H_k \in \{T_a\}$  geschrieben werden als

$$a = \sum_{k=1}^r a_k H_k, \quad (6.53)$$

wobei  $r = N - 1$  die Dimension oder der *Rang* der Cartan-Subalgebra ist.

Die Generatoren  $H_k$  vertauschen, weshalb sie gleichzeitig diagonalisiert werden können. Im Hamiltonzugang tritt das Hintergrundfeld  $a$  in der adjungierten Darstellung auf. Die Eigenwerte  $-i\sigma_k$  der Generatoren  $\hat{H}_k$  in der adjungierten Darstellung

$$\hat{H}_k |\sigma\rangle = -i\sigma_k |\sigma\rangle, \quad k = 1, \dots, r \quad (6.54)$$

werden zu einer *Wurzel* zusammengefasst

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_r). \quad (6.55)$$

Hier bezeichnen wir mit  $|\sigma\rangle$  die Eigenvektoren der adjungierten Darstellung. Die Algebra  $\mathfrak{su}(N_c)$  hat  $N_c(N_c - 1)$  nicht verschwindende Wurzeln  $\boldsymbol{\sigma}$ , die paarweise  $\pm\boldsymbol{\sigma}$  auftreten.<sup>4</sup> Zu jedem dieser Paare gehört eine Einbettung der Eichgruppe  $SU(2)$  in  $SU(N_c)$ . Die Basis  $|\sigma\rangle$ , in der die Erzeuger  $\hat{H}_k$  der Cartan-Subalgebra in der adjungierten Darstellung diagonal sind, ist eine *Cartan-Weyl Basis* der Lie-Algebra  $\mathfrak{su}(N_c)$ . Die  $N_c^2 - 1$ -Basisvektoren ( $N_c(N_c - 1)$  davon mit nicht verschwindender Wurzel) und deren Indizes werden wir im Folgenden mit griechischen Buchstaben  $\sigma, \tau, \dots$  bezeichnen, während wir für Farbstrukturen in den kartesischen Koordinaten weiterhin lateinische Buchstaben  $a, b, \dots$  verwenden.

Eine beliebige Matrix in der adjungierten Darstellung kann wie folgt transformiert werden

$$M^{ab} = \sum_{\sigma, \tau} \langle a | \sigma \rangle M^{\sigma\tau} \langle \tau | b \rangle \quad (6.56)$$

mit den kartesischen Basisvektoren  $|a\rangle$  im Farbraum. In der Basis  $|\sigma\rangle$  ist das Hintergrundfeld (6.53) in der adjungierten Darstellung  $\hat{a} = \sum_{k=1}^r a_k \hat{H}_k$  diagonal und es gilt

$$\hat{a} |\sigma\rangle = -i\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma} |\sigma\rangle \quad (6.57)$$

mit  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_r)$  und dem Skalarprodukt

$$\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma} = \sum_{k=1}^r a_k \sigma_k. \quad (6.58)$$

Für die weiteren Betrachtungen halten wir außerdem fest, dass die Eigenwerte  $-i\mu_k$  der Erzeuger  $H_k$  in der fundamentalen Darstellung zu den *Gewichten*

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_r) \quad (6.59)$$

<sup>4</sup>Die verschwindenden Eigenwerte, die der Richtung der Generatoren  $H_k$  entsprechen, werden nicht als Wurzeln gezählt.

zusammengefasst werden.

Wir beschränken uns bei der Berechnung des effektiven Potentials auf die Fälle  $N_c = 2, 3$ . Daher erinnern wir an die Wurzeln und Gewichte für diese Eichgruppen. Die Cartan-Subalgebra von  $SU(2)$  hat den Rang  $r = 1$  und besteht aus dem Erzeuger  $H_1 = T_3$ , mit den Wurzeln

$$\sigma = \pm 1. \quad (6.60)$$

Für das Hintergrundfeld  $a = a_3 T_3$  gilt in der Cartan-Weyl Basis<sup>5</sup>

$$\hat{a}|\sigma\rangle = -ia_3\sigma|\sigma\rangle, \quad \sigma = \pm 1. \quad (6.62)$$

Die Gewichte der fundamentalen Darstellung von  $SU(2)$  sind gegeben durch  $\mu = \pm \frac{1}{2}$  und es gilt  $\mu\sigma = \pm \frac{1}{2}$ .

Im zweiten wichtigen Fall der Eichgruppe  $SU(3)$  ist der Rang der Cartan-Subalgebra  $r = 2$ , mit den Erzeugern  $H_1 = T_3$  und  $H_2 = T_8$ , die 6 nicht verschwindende Wurzeln haben. Es ist ausreichend nur die positiven Wurzeln

$$\sigma = (1, 0), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right), \quad \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \quad (6.63)$$

zu betrachten.<sup>6</sup> Die positiven Gewichte der adjungierten Darstellung sind

$$\mu = \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right), \quad \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}\right). \quad (6.64)$$

Das Produkt einer Wurzel mit einem Gewicht ist für  $SU(3)$  gegeben durch

$$\sigma\mu \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\}. \quad (6.65)$$

Schließlich kann ein nicht-triviales Zentrumselement [vgl. (2.94)] mit den Gewichten geschrieben werden als [57]

$$e^{-4\pi\mu_k H_k} = z, \quad (6.66)$$

wobei die Generatoren  $H_k$  der Cartan-Subalgebra in der fundamentalen Darstellung auf  $\text{tr}(H_a H_b) = -\frac{1}{2}\delta_{ab}$  normiert sind. Aufgrund der Zentrumssymmetrie ist das effektive Potential [Gl. (2.102)] invariant unter einer Verschiebung des Hintergrundfeldes

$$\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a} + \frac{4\pi}{L}\boldsymbol{\mu}, \quad (6.67)$$

wobei  $\boldsymbol{\mu}$  ein Gewicht ist.

---

<sup>5</sup>Die Eigenvektoren von  $\hat{T}_3$  bilden die  $s = 1$  Spinbasis, deren Basisvektoren bezogen auf kartesische Koordinaten im Farbraum gegeben sind durch

$$\mathbf{e}_{\sigma=1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{\sigma=-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{\sigma=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6.61)$$

<sup>6</sup>Für die negativen Wurzeln gilt  $\sigma \rightarrow -\sigma$ . Das effektive Potential ist unabhängig von diesem Vorzeichen.

### 6.3.2. Propagatoren in Cartan-Weyl Basis

Für ein konstantes Hintergrundfeld  $a$  sind die Korrelationsfunktionen nur von der Koordinatendifferenz  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$  abhängig und die Fouriertransformation kann in der Form Gl. (1.8) angewendet werden. Durch das Hintergrundfeld (6.52) wird jedoch eine Richtung im Raum ausgezeichnet und die Propagatoren hängen nicht nur vom Betrag  $|\mathbf{p}|$  sondern auch von der Richtung des Impulses  $\mathbf{p}$  ab. Wegen der Anwesenheit des Hintergrundfeldes haben der Geist- und der Gluon-Propagator außerdem eine nicht-triviale Farbstruktur.

Da das Hintergrundfeld  $a$  in der Cartan-Weyl-Basis diagonal ist, erwarten wir, dass in dieser Basis auch der Geist- und der Gluon-Propagator diagonal sind. In der Tat kann gezeigt werden [57], dass die Integralgleichung für den Geist-Propagator (6.36) und die Gap-Gleichung (6.50) in dieser Basis durch die *diagonalen* Propagatoren

$$D_{kl}^{\sigma\tau}(\mathbf{p}) = \delta^{\sigma\tau} t_{kl}^{\sigma}(\mathbf{p}) D^{\sigma}(\mathbf{p}), \quad G^{\sigma\tau}(\mathbf{p}) = \delta^{\sigma\tau} G^{\sigma}(\mathbf{p}) \quad (6.68)$$

gelöst werden können, wodurch sich die Bewegungsgleichungen erheblich vereinfachen.

Nach der Basistransformation (6.56) sind die kovariante Ableitung  $\hat{d}_k$  (6.7) und der transversale Projektionsoperator  $\hat{t}_{kl}$  (6.12) im Impulsraum diagonal [57]

$$d_k^{\sigma\tau} = \delta^{\sigma\tau} d_k^{\sigma}, \quad d_k^{\sigma}(\mathbf{p}) = i(\mathbf{p} - \sigma \mathbf{a} \mathbf{e}_3)_k = i(p_k - \sigma \mathbf{a} \delta_{k3}), \quad (6.69)$$

$$t_{kl}^{\sigma\tau} = \delta^{\sigma\tau} t_{kl}^{\sigma}, \quad t_{kl}^{\sigma}(\mathbf{p}) = \delta_{kl} - \frac{d_k^{\sigma}(\mathbf{p}) d_l^{\sigma}(\mathbf{p})}{\mathbf{d}^{\sigma}(\mathbf{p}) \mathbf{d}^{\sigma}(\mathbf{p})}. \quad (6.70)$$

Damit kann die Dyson-Schwinger Gleichung für den Geist-Propagator (6.36) mit den diagonalen Propagatoren (6.68) reduziert werden auf [57]

$$G^{\sigma}(\mathbf{p})^{-1} = G_0^{\sigma}(\mathbf{p})^{-1} - \Sigma^{\sigma}(\mathbf{p}) \quad (6.71)$$

mit dem freien (diagonale) Geist-Propagator (6.37)

$$G_0^{\sigma}(\mathbf{p})^{-1} = -\mathbf{d}^{\sigma}(\mathbf{p}) \mathbf{d}^{\sigma}(\mathbf{p}) = (\mathbf{p} - (\sigma \mathbf{a}) \mathbf{e}_3)^2 \quad (6.72)$$

und der Selbstenergie (6.42)

$$\Sigma^{\sigma}(\mathbf{p}) = - \sum_{\tau} \int \hat{\mathbf{d}}^d q \, d_l^{\sigma}(\mathbf{p}) t_{lk}^{\tau}(\mathbf{q}) d_k^{\sigma}(\mathbf{p}) D^{\tau}(\mathbf{q}) G^{\sigma+\tau}(\mathbf{p} + \mathbf{q}), \quad (6.73)$$

wobei der Index  $\tau + \sigma$  modulo  $N_c^2 - 1$  zu verstehen ist. Die Gap-Gleichung (6.50) vereinfacht sich für die diagonalen Propagatoren (6.68) nach der Kontraktion der transversalen Projektoren zu [57]

$$\frac{g^4}{4} D^{\sigma}(\mathbf{p})^{-2} = -\mathbf{d}^{\sigma}(\mathbf{p}) \mathbf{d}^{\sigma}(\mathbf{p}) + \chi^{\sigma}(\mathbf{p})^2. \quad (6.74)$$

Hier ist die diagonale, skalare Krümmung [vgl. (3.14)] gegeben durch [57]

$$\chi^{\sigma}(\mathbf{p}) = -\frac{g^2}{2(d-1)} \sum_{\tau} \int \hat{\mathbf{d}}^d q \, d_k^{\tau}(\mathbf{q}) t_{kl}^{\sigma}(\mathbf{p}) d_l^{\tau}(\mathbf{q}) G^{\tau}(\mathbf{q}) G^{\sigma+\tau}(\mathbf{p} + \mathbf{q}). \quad (6.75)$$

Für den fouriertransformierten Gluon-Propagator (6.33) gilt in der Cartan-Weyl Basis

$$D^{\sigma}(\mathbf{p}) = \frac{g^2}{2\omega^{\sigma}(\mathbf{p})} \quad (6.76)$$

mit der  $\sigma$ -Komponente der Gluonenergie  $\omega^{\sigma}(\mathbf{p})$ . Damit lässt sich die Gap-Gleichung (6.74) in der Form

$$\omega^{\sigma}(\mathbf{p})^2 = (\mathbf{p} - (\sigma \mathbf{a}) \mathbf{e}_3)^2 + \chi^{\sigma}(\mathbf{p})^2 \quad (6.77)$$

darstellen, die sich von der Gap-Gleichung in Coulomb-Eichung [Gl. (3.42)] durch das Auftreten des Hintergrundfeldes im ersten Term auf der rechten Seite und durch den Index  $\sigma$  unterscheidet, der die verschiedenen Wurzeln  $\sigma$  von  $SU(N_c)$  kennzeichnet. Die Bewegungsgleichungen für den Geist- und Gluon-Propagator lassen sich somit durch im Farbraum diagonale und in jeder Komponente skalare Funktionen lösen. Aufgrund der Anwesenheit des Hintergrundfeldes müssen diese Komponenten jedoch durch den Farbindex  $\sigma$  unterschieden werden.

Die Energie (6.51) kann schließlich mit dem diagonalen Gluon-Propagator  $D^\sigma(\mathbf{p})$  (6.76) und der Krümmung  $\chi^\sigma(\mathbf{p})$  (6.75) geschrieben werden als

$$\langle H_K + H_B^A \rangle_a = (d-1)V \sum_\sigma \int \mathrm{d}^d q \left( \frac{g^2}{2} D^\sigma(\mathbf{q})^{-1} - \chi^\sigma(\mathbf{q}) \right), \quad (6.78)$$

oder mit Gl. (6.76) durch

$$\langle H_K + H_B^A \rangle_a = (d-1)V \sum_\sigma \int \mathrm{d}^d q (\omega^\sigma(\mathbf{p}) - \chi^\sigma(\mathbf{p})) \quad (6.79)$$

als Funktions des Variationskerns  $\omega^\sigma$ .

### 6.3.3. Zusammenhang mit den Propagatoren in Coulomb-Eichung

Für die Berechnung der Energie (6.78) bzw. (6.79) sind die Lösungen der gekoppelten Gleichungen für den Geist-Propagator (6.71) und der Gap-Gleichung (6.77) nötig. Es ist jedoch nicht erforderlich diese Gleichungen zu lösen, da es eine einfache Relation zu den Lösungen in Coulomb-Eichung gibt [57]. Um dies zu zeigen, führen wir die Abkürzung

$$\mathbf{p}_\sigma := \mathbf{p} - (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{a})\mathbf{e}_3 \quad (6.80)$$

für den um das Hintergrundfeld verschobenen Impuls  $\mathbf{p}_\sigma$  ein. Hier ist  $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{a}$  das Skalarprodukt in der Cartan-Subalgebra (6.58). Die Gap-Gleichung (6.77) kann mit  $\mathbf{p}_\sigma$  geschrieben werden als

$$\omega^\sigma(\mathbf{p})^2 = \mathbf{p}_\sigma^2 + \chi^\sigma(\mathbf{p})^2. \quad (6.81)$$

Wenn für die Krümmung (6.75) gilt

$$\chi^\sigma(\mathbf{p}) = \chi(\mathbf{p}_\sigma). \quad (6.82)$$

erlaubt die Gap-Gleichung (6.81) Lösungen der Form

$$\omega^\sigma(\mathbf{p}) = \omega(\mathbf{p}_\sigma) \quad (6.83)$$

mit den bereits bekannten Lösungen für  $\omega(\mathbf{p})$  in Abwesenheit des Hintergrundfeldes ( $a = 0$ ) in Coulomb-Eichung. Das gleiche gilt auch für die Geist-Dyson-Schwinger-Gleichung (6.36) mit der Selbstenergie  $\Sigma^\sigma(\mathbf{p})$  (6.73). Wir müssen also zeigen, dass Schleifenintegrale  $\chi^\sigma(\mathbf{p})$ ,  $\Sigma^\sigma(\mathbf{p})$  durch Lösungen der Form

$$D^\sigma(\mathbf{p}) = D(\mathbf{p}_\sigma) = \frac{g^2}{2\omega(\mathbf{p}_\sigma)}, \quad G^\sigma(\mathbf{p}) = G(\mathbf{p}_\sigma) \quad (6.84)$$

erfüllt werden, wobei  $D(\mathbf{p})$  und  $G(\mathbf{p}_\sigma)$  die Propagatoren aus dem Variationszugang in Coulomb-Eichung bei  $a = 0$  sind.

Dazu beachten wir, dass die kovariante Ableitung bezüglich des Hintergrundfeldes  $d^\sigma(\mathbf{p})$  (6.69) und der transversale Projektionsoperator  $t^\sigma(\mathbf{p})$  (6.70) als Funktionen

$$d^\sigma(\mathbf{p}) = i\mathbf{p}_\sigma =: d(\mathbf{p}_\sigma), \quad t^\sigma(\mathbf{p}) = t(\mathbf{p}_\sigma) \quad (6.85)$$

des verschobenen Impulses (6.80) geschrieben werden können. Falls die Propagatoren Gl. (6.84) genügen, gilt mit Gl. (6.85) und

$$(\mathbf{p} + \mathbf{q})_{\sigma+\tau} = \mathbf{p}_\sigma + \mathbf{q}_\tau \quad (6.86)$$

für die Geist-Selbstenergie (6.73)

$$\Sigma^\sigma(\mathbf{p}) = \Sigma(\mathbf{p}_\sigma). \quad (6.87)$$

Unter der gleichen Annahme (6.84) gilt ebenso für die Krümmung

$$\chi^\sigma(\mathbf{p}) = \chi(\mathbf{p}_\sigma). \quad (6.88)$$

Damit ist gezeigt, dass sich die Gap-Gleichung (6.77) und die Geist-Gleichung (6.71) selbstkonsistent mit Propagatoren der Form (6.84) lösen lassen. Da damit die gekoppelten Gleichungen des Variationsproblems unter der Nebenbedingung (6.3) in Hintergrundeichung (6.28) bis auf den verschobenen Impuls (6.80) identisch zu den Gleichungen in Coulomb-Eichung sind, können wir die bereits in Kap. 3.6 diskutierten Lösungen verwenden. Mit den Lösungen des Variationsproblems in Coulomb-Eichung aus Kap. 3.6 bestimmen wir im nächsten Abschnitt die Energiedichte.

## 6.4. Das effektive Potential des Polyakov-Loops

In diesem Abschnitt berechnen wir das effektive Potential bei endlichen Temperaturen als Funktion des Hintergrundfeldes. Dabei verwenden wir die parametrisierten Lösungen des Variationszugangs in Coulomb-Eichung aus Abschn. 3.6.8. Entsprechend der Diskussion in [134] und Abschn. 2.4.2 führen wir endliche Temperaturen durch Kompaktifizierung der  $x_3$ -Richtung ein. Dadurch ist die inverse Länge  $L^{-1}$  der kompaktifizierten Richtung mit der Temperatur  $T = L^{-1}$  zu identifizieren.

Als Ordnungsparameter für den Deconfinement-Phasenübergang berechnen wir aus dem Minima des effektiven Potentials den Polyakov-Loop bei endlichen Temperaturen und bestimmen die kritische Temperatur  $T_c$ .

### 6.4.1. Polyakov-Loop bei konstantem Hintergrundfeld

Nach Kompaktifizierung der räumlichen  $x_3$  Richtung kann der Wert des Polyakov-Loops  $P[\langle A \rangle = a]$  (2.95) für das konstante Hintergrundfeld  $a$  bei der Temperatur  $T = L^{-1}$  geschrieben werden als

$$P[a] = \frac{1}{N_c} \text{tr} e^{iLa} \quad (6.89)$$

mit der Zahl der Farben  $N_c$  und der Spur  $\text{tr}$  über die fundamentale Darstellung.

Für die Eichgruppe  $SU(2)$  ist der Erzeuger  $H_3$  der Cartan-Subalgebra in der fundamentalen Darstellung gegeben durch

$$H_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (6.90)$$

Aus Gl. (6.89) folgt mit  $a \equiv a_3 H_3$  für den Wert des Polyakov-Loops

$$P[a_3] = \cos(La_3). \quad (6.91)$$

Somit gilt  $P[a_3] = 1$ , sowohl für ein verschwindendes Hintergrundfeld  $a_3 = 0$ , als auch in der deconfinierten Phase bei  $T = L^{-1} \rightarrow \infty$ .

Die Generatoren der Cartan-Subalgebra der Eichgruppe  $SU(3)$  sind in der fundamentalen Darstellung

$$H_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (6.92)$$

Für das Hintergrundfeld  $a = a_3 H_3 + a_8 H_8$  gilt für den Wert des Polyakov-Loops

$$P[a_3, a_8] = \frac{1}{3} \left[ 2 \cos\left(\frac{a_3}{2}L\right) e^{i\frac{a_8}{2\sqrt{3}}L} + e^{-i\frac{a_8}{\sqrt{3}}L} \right]. \quad (6.93)$$

Dieser ist für  $a_8 \neq 0$  komplexwertig. Für  $a_8 = 0$  gilt

$$P[a_3, a_8 = 0] = \frac{1}{3} \left[ 2 \cos\left(\frac{a_3}{2}L\right) + 1 \right]. \quad (6.94)$$

Im Folgenden werden wir das effektive Potential für die Eichgruppen  $SU(2)$  und  $SU(3)$  bei endlichen Temperaturen und als Funktion eines konstanten Hintergrundfeldes  $a$  bestimmen. Aus dem Minima  $a_{\min}$  des effektiven Potentials kann mit Gl. (6.91) bzw. Gl. (6.93) der Wert des Polyakov-Loops berechnet werden.

### 6.4.2. Energiedichte

Im Hamiltonzugang ist das effektive Potential als Funktion eines konstanten, räumlichen Hintergrundfeldes  $\mathbf{a}$  gegeben durch die Energiedichte [133]<sup>7</sup>

$$e(\mathbf{a}, L) = \frac{\langle H \rangle_a}{V(d-1)} \quad (6.95)$$

mit dem räumlichen Volumen  $V$  und der Zahl der räumlichen Dimensionen  $d = 3$ . Der Erwartungswert  $\langle H \rangle_a$  des Hamilton-Operators ist durch das Variationsproblem (6.4) definiert und in unserem Zugang durch Gl. (6.79) gegeben.

Da wir durch die Kompaktifizierung der  $x_3$ -Richtung endliche Temperaturen einführen, muss die  $O(3)$  invariante Integration im Ortsraum in den vorangegangenen Gleichungen ersetzt werden durch

$$\int d^3x f(\mathbf{x}) = \int d^2x_\perp \int_0^L dx_3 f(\mathbf{x}_\perp, x_3). \quad (6.96)$$

Hier ist  $\mathbf{x}_\perp$  die Projektion der Ortskoordinate  $\mathbf{x}$  auf die  $x_1$ - $x_2$ -Ebene. Für die Integration im Impulsraum gilt entsprechend

$$\int_L d^3p f(\mathbf{p}) := \int d^2p_\perp \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\mathbf{p}_\perp, \omega_n) \quad (6.97)$$

---

<sup>7</sup>Die Normierung der Energiedichte verzichtet im Gegensatz zu Kap. 3 und Kap. 4 auf die Berücksichtigung der gluonischen Freiheitsgrade im Farbraum  $(N_c^2 - 1)$ .

mit der Summe über die (bosonischen) Matsubara-Frequenzen

$$\omega_n := \frac{2\pi n}{L} \quad (6.98)$$

und dem transversalen Impuls  $\mathbf{p}_\perp$ , der Projektion von  $\mathbf{p}$  auf die  $p_1$ - $p_2$  Ebene. Mit dieser Aufspaltung des dreidimensionalen Impulses  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_\perp + \omega_n \mathbf{e}_3$  gilt für den um das Hintergrundfeld  $\mathbf{a}$  verschobenen Impuls (6.80) <sup>8</sup>

$$\mathbf{p}_\sigma = \mathbf{p}_\perp + (\omega_n - \sigma \mathbf{a}) \mathbf{e}_3. \quad (6.99)$$

Das effektive Potential (6.95) kann mit Gl. (6.79) und Gl. (6.97), sowie den Lösungen für die Gluonenergie  $\omega(p)$  und die Krümmung  $\chi(p)$  in Coulomb-Eichung geschrieben werden als

$$e(\mathbf{a}, L) = \sum_\sigma \int_L \mathrm{d}^3 p [\omega(p_\sigma) - \chi(p_\sigma)]. \quad (6.100)$$

Der Betrag des verschobenen Impulses (6.99)  $p_\sigma \equiv |\mathbf{p}_\sigma|$  ist von dem Hintergrundfeld  $\mathbf{a}$ , den Wurzeln  $\sigma$ , dem transversalen Impuls  $\mathbf{p}_\perp$  und der Matsubara-Frequenz  $\omega_n$  abhängig.

Die Gleichung (6.100), die die Energiedichte und damit das effektive Potential im Hamiltonzugang als Integral über eine Quasiteilchen-Dispersionsrelation  $\Omega(p) \equiv \omega(p) - \chi(p)$  darstellt, ist der weitere Ausgangspunkt für die Berechnung des effektiven Potentials. Das Impulsintegral ist in diesem Ausdruck divergent. In führender Ordnung gilt

$$e(\mathbf{a}, L) \sim \Lambda^4. \quad (6.101)$$

In allen Zwischenschritten werden wir daher implizit eine UV-Regulierung annehmen. Durch das Bilden der Differenz

$$\Delta e(\mathbf{a}, L) := e(\mathbf{a}, L) - e(\mathbf{a} = 0, L) \quad (6.102)$$

werden die vom Hintergrundfeld  $a$  unabhängigen Divergenzen aus der Energiedichte entfernt. Außerdem verwenden wir bei den analytischen Rechnungen eine Proper-Time Darstellung [vgl. (C.1)] für das Energieintegral (6.100), die für die Differenz (6.102) endlich ist [57].

Durch Verschiebung des Summation-Indexes  $n$  ist leicht zu erkennen, dass das effektive Potential Gl. (6.100) mit Gl. (6.65) die Periode

$$e(\mathbf{a} + 4\pi/L\boldsymbol{\mu}, L) = e(\mathbf{a}, L) \quad (6.103)$$

hat, mit einem Gewicht  $\boldsymbol{\mu}$  der Eichgruppe  $SU(N_c)$ . Dies ist eine Folge der Zentrumssymmetrie [vgl. (6.67)].

In der Differenz (6.102) tragen nur noch die nicht verschwindenden Wurzeln bei. Da diese außerdem immer paarweise ( $\pm\sigma$ ) auftreten und beide Wurzeln eines Paares bei Berücksichtigung aller Matsubara-Frequenz den gleichen Beitrag zum effektiven Potential liefern [vgl.(6.99)], ist es ausreichend nur über die positiven Wurzeln zu summieren. Jedes Wurzelpaar entspricht einer Einbettung der Eichgruppe  $SU(2)$  in  $SU(N_c)$ , daher kann das effektive Potential für  $SU(N_c)$  aus Überlagerungen von  $SU(2)$  Potentialen dargestellt werden. Diese Eigenschaft wurde auch in [129] genutzt und wird in unserem Ausdruck für das effektive Potential verwirklicht sein.

<sup>8</sup>Für das Hintergrundfeld in der Cartan-Subalgebra verwenden wir die Schreibweise  $\mathbf{a}$ , wobei  $\mathbf{a} \in \{a_3, (a_3, a_8)\}$  für die Eichgruppen  $SU(2)$  und  $SU(3)$ .

In den natürlichen Einheiten hat die Energiedichte die Dimension  $[e] = [p]^4$ , die Temperatur  $[T] = [p]$  und die Länge  $[L] = [p]^{-1}$ . Das effektive Potential multipliziert mit  $L^4$  und die Kombination  $\mathbf{a}L$  sind dimensionslos. Um die Gleichungen übersichtlicher zu gestalten und um die Periodizität bei endlichen Temperaturen darzustellen, definieren wir mit

$$\bar{e}(\bar{\mathbf{a}}, L) := L^4 e(2\pi\bar{\mathbf{a}}/L, L), \quad \bar{\mathbf{a}} := \frac{\mathbf{a}L}{2\pi} \quad (6.104)$$

das dimensionslose effektive Potential  $\bar{e}$  sowie das dimensionslose Hintergrundfeld  $\bar{\mathbf{a}}$ .

### 6.4.3. Analytische Berechnung des effektiven Potentials

Um das effektive Potential (6.100) analytisch zu berechnen, verwenden wir in der Energiedichte die verallgemeinerte Dispersionsrelation<sup>9</sup>

$$\Omega(p) = M^{1+\alpha} (p^2 + \lambda)^{-\alpha/2}, \quad (6.105)$$

die für  $\lambda > 0$  auch einen massiven Fall berücksichtigt.<sup>10</sup> Für diese Dispersionsrelation gilt für Gl. (6.100)

$$e_\alpha(\mathbf{a}, L, \lambda) := \sum_{\sigma} M^{1+\alpha} \int_L \bar{d}^3 p (p_\sigma^2 + \lambda)^{-\alpha/2}. \quad (6.106)$$

Durch die Verwendung der Proper-Time Darstellung [Gl. (C.1)] für den Integranden ist die Differenz

$$\Delta e_\alpha(\mathbf{a}, L, \lambda) := e_\alpha(\mathbf{a}, L, \lambda) - e_\alpha(0, L, \lambda) \quad (6.107)$$

endlich. Diese kann mit der Benutzung der Poissonschen Summenformel (C.2) und nach Ausführung des Impulsintegrals geschrieben werden als [57]

$$\Delta e_\alpha(\bar{\mathbf{a}}, L, \lambda) = -\frac{8M^{1+\alpha}}{(4\pi)^{3/2}\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \sum_{\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{nL}\right)^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{2}} \sin^2(\pi n\sigma\bar{\mathbf{a}}) K_{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{2}}(nL\sqrt{\lambda}) \quad (6.108)$$

wobei wir die modifizierte Bessel-Funktion  $K_l(z)$  [vgl. (C.7)] verwendet haben. Dieses effektive Potential für die Dispersionsrelation (6.105) vereinfacht sich für  $\lambda \rightarrow 0$  zu<sup>11</sup>

$$\Delta \bar{e}_\alpha(\bar{\mathbf{a}}, L) = -\frac{2^{6-\alpha}(LM)^{1+\alpha} \Gamma(\frac{3}{2} - \frac{\alpha}{2})}{(4\pi)^{3/2} \Gamma(\frac{\alpha}{2})} \sum_{\sigma>0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi n\sigma\bar{\mathbf{a}})}{n^{3-\alpha}}, \quad (6.109)$$

wobei hier nur noch die Summe über die positiven Wurzeln  $\sigma$  zu nehmen ist und wir die dimensionslose Form aus Gl. (6.104) verwendet haben.

Das Impulsintegral (6.97) kann mit Hilfe der Poissonschen Summenformel (C.2) auch geschrieben werden als

$$\int \bar{d}^2 p_\perp \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\mathbf{p}_\perp, \omega_n) = \int \bar{d}^3 p f(\mathbf{p}_\perp, p_3) \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikLp_3}, \quad (6.110)$$

<sup>9</sup>Die hier verwendete Konvention weicht im Vergleich zu [57] durch die Ersetzung  $\alpha \rightarrow -\alpha$  ab. Dadurch kann  $\alpha$  direkt mit dem Infrarotexponent der Gluonenergie  $\omega$  identifiziert werden.

<sup>10</sup>Der Vorfaktor  $M^{1+\alpha}$  stellt die korrekte physikalische Dimension sicher.

<sup>11</sup>Die modifizierte Bessel-Funktion  $K_\mu(x)$  hat das asymptotische Verhalten:

$$K_\mu(x \rightarrow 0) = \frac{\Gamma(\mu)}{2} \left(\frac{2}{x}\right)^\mu, \quad \mu > 0.$$

wobei  $\mathrm{d}^3p$  das gewöhnliche Maß im dreidimensionalen Impulsraum ist. Durch eine Verschiebung der Integrationsvariable  $p_3 \rightarrow p_3 + \sigma \mathbf{a}$  kann mit dieser Gleichung das effektive Potential (6.100) in der Form

$$e(\mathbf{a}, L) = \sum_{\sigma} \int \mathrm{d}^3p \Omega(p) \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikL(p_3 + \sigma \mathbf{a})} \quad (6.111)$$

dargestellt werden. Nach Einführung von Kugelkoordinaten  $(p, \theta, \phi)$  und Integration über den Winkel  $\theta$  gilt

$$\Delta e(\bar{\mathbf{a}}, L) = -4 \sum_{\sigma} \int \mathrm{d}^3p \Omega(p) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sin(np)}{np} \sin^2(\pi n \sigma \bar{\mathbf{a}}) \right). \quad (6.112)$$

In dieser Darstellung sind insbesondere die Symmetrieeigenschaften (z.B. (6.67)) sichtbar. Für die folgenden Rechnungen verwenden wir jedoch Gl. (6.100).

#### 6.4.4. Asymptotisches Verhalten des effektiven Potentials

Das effektive Potential für den Polyakov-Loop (6.100) wird durch das Integral über die Differenz der Gluonenergie und der Krümmung,  $\omega(p) - \chi(p)$ , bestimmt. Die Eigenschaften von  $\omega(p)$  und  $\chi(p)$  wurden in Abschn. 3.5 und Abschn. 3.6 besprochen. Um das effektive Potential analytisch zu berechnen, werden wir zuerst die Krümmung vernachlässigen und das Hoch-, bzw. Niederenergieverhalten der Gluonenergie  $\omega(p)$  verwenden. Die Krümmung ist im ultravioletten Impulsbereich in erster Ordnung vernachlässigbar, hat jedoch das gleiche Infrarotverhalten wie die Gluonenergie. Daher ist durch die Vernachlässigung der Krümmung ein erheblicher Einfluss auf das effektive Potential und die Beschreibung des Deconfinement-Phasenübergangs zu erwarten.

**Ultraviolett-Potential** Die Gluonenergie  $\omega(p)$  verhält sich für große Impulse  $p \rightarrow \infty$  wie

$$\omega_{\text{UV}}(p) = p. \quad (6.113)$$

Wegen der Vernachlässigung der Krümmung  $\chi(p)$  lautet die Dispersionsrelation im Integranden der Energiedichte (6.100) daher  $\Omega(p) = p$ . Aus Gl. (6.109) folgt mit der Wahl  $\alpha = -1$ ,  $\lambda = 0$  das *Ultraviolett-Potential*

$$\Delta e_{\text{UV}}(\bar{\mathbf{a}}, L) := \frac{8}{\pi^2} \frac{1}{L^4} \sum_{\sigma > 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi n \bar{\mathbf{a}} \sigma)}{n^4}. \quad (6.114)$$

Dieses kann nach Ausführung der Summe über  $n$  mit Gl. (C.5) für  $0 \leq \bar{\mathbf{a}} \sigma \leq 1$  geschrieben werden als

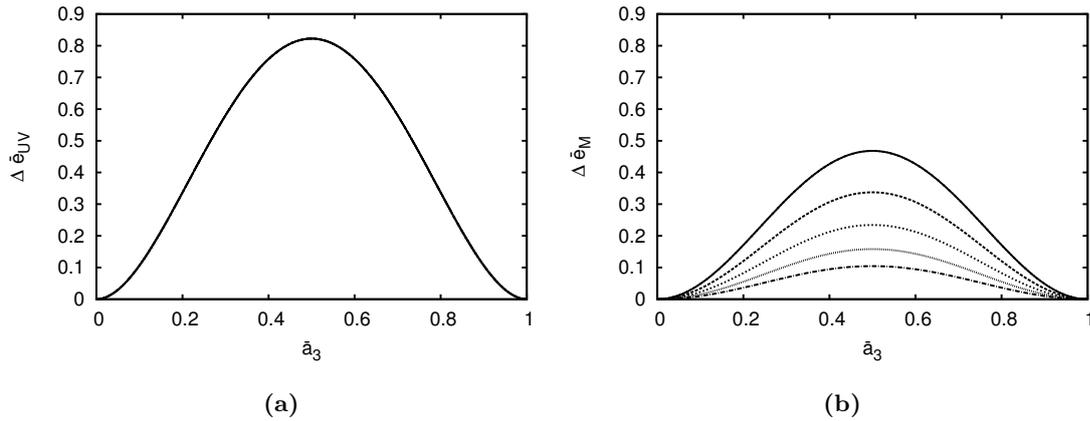
$$\Delta e_{\text{UV}}(\bar{\mathbf{a}}, L) = \frac{4}{3} \frac{\pi^2}{L^4} \sum_{\sigma > 0} (\sigma \bar{\mathbf{a}})^2 [\sigma \bar{\mathbf{a}} - 1]^2. \quad (6.115)$$

Es ist möglich diesen Ausdruck, unter Verwendung der Periodizität des Quadrats der Sinusfunktion in Gl. (6.114), auf beliebig große Felder  $\bar{\mathbf{a}} \sigma$  zu erweitern.<sup>12</sup>

<sup>12</sup>Gl. (6.115) lautet für beliebige Felder  $\mathbf{a}$

$$\Delta e_{\text{UV}}(\bar{\mathbf{a}}, L) = \frac{4}{3} \frac{\pi^2}{L^4} \sum_{\sigma > 0} (\text{mod}(\sigma \bar{\mathbf{a}}, 1))^2 [\text{mod}(\sigma \bar{\mathbf{a}}, 1) - 1]^2$$

mit  $\text{mod}(x, y) := x - y \lfloor \frac{x}{y} \rfloor$ .



**Abbildung 6.1.:** In (a) ist das dimensionslose und temperaturunabhängige Weiss-Potential (6.117)  $\bar{e}(a, L)$  für die Eichgruppe  $SU(2)$  als Funktion des dimensionslosen Feldes  $\bar{a}_3$  (6.104) dargestellt. In (b) ist das effektive Potential für die massive Dispersionsrelation (6.121)  $\Omega(p) = \sqrt{M^2 + p^2}$  bei verschiedenen Temperaturen  $L^{-1}$  zu sehen.

Für die Eichgruppe  $SU(2)$  gilt  $\bar{\mathbf{a}}\sigma = \bar{a}_3$ . Das UV-Potential (6.115) hat somit die Periode

$$\Delta e_{\text{UV}}^{\text{SU}(2)}(\bar{a}_3, L) = \Delta e_{\text{UV}}^{\text{SU}(2)}(\bar{a}_3 + n, L), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (6.116)$$

und kann im Inverall  $\bar{a}_3 \in [0, 1]$  dargestellt werden als

$$\Delta e_{\text{UV}}^{\text{SU}(2)}(\bar{a}_3, L) = \frac{4}{3} \frac{\pi^2}{L^4} (\bar{a}_3)^2 [\bar{a}_3 - 1]^2, \quad \bar{a}_3 \in [0, 1]. \quad (6.117)$$

Das dimensionslose UV-Potential  $\Delta \bar{e}_{\text{UV}}$  (6.117) ist unabhängig von der Temperatur und in Abb. 6.1a dargestellt. Es entspricht dem Weiss-Potential, das in Störungstheorie und Landau-Eichung auf Ein-Loop-Niveau bestimmt werden kann [62]. Das Quasiteilchen-Bild mit dem Hochenergiegrenzfall  $\omega_{\text{UV}}(p) = p$  ist somit äquivalent zu diesen perturbativen Rechnungen.

Die Minima des UV-Potentials (6.117) sind bei  $\bar{a}_{3,\text{min}} = 0, 1$  ( $a_{3,\text{min}} = 0, 2\pi/L$ ) und entsprechend der Periodizität bei  $\bar{a}_3 \in \mathbb{Z}$  ( $a_{3,\text{min}} \in 2\pi/L\mathbb{Z}$ ). Für diese Feldkonfigurationen erzeugt die Polyakovlinie (6.89) ein Zentrumsэлемент  $z$

$$e^{-La_{3,\text{min}}} = e^{-2\pi\bar{a}_{3,\text{min}}} = z \in Z(N) \quad (6.118)$$

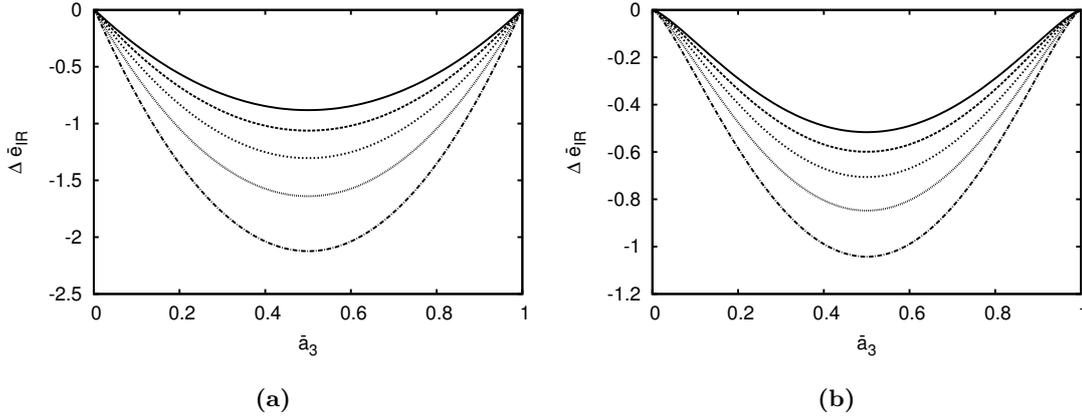
und der Wert des Polyakov-Loops (6.91) ist

$$\langle P[a_3] \rangle \simeq P[a_3 = a_{3,\text{min}}] = \cos(\pi\bar{a}_{3,\text{min}}) = 1. \quad (6.119)$$

Da dieser nicht verschwindet, ist das perturbative UV-Potential (6.115) in der deconfinierten Phase, wie zu erwarten war.

**Massive Dispersionsrelation** Wir können auch eine massive Dispersionsrelation

$$\Omega(p) = \sqrt{M^2 + p^2} \quad (6.120)$$



**Abbildung 6.2.:** Das dimensionslose Infrarot-Potential  $\bar{e}_{\text{IR}}(a, L)$  (6.124) als Funktion der dimensionslosen Variablen  $\bar{a}_3$  (6.104) bei verschiedenen Temperaturen  $L^{-1}$  im Bereich von 425 MeV bis 660 MeV (von unten nach oben) für die Lösungen mit  $\alpha = 1$  (a) und  $\alpha \approx 0.6$  (b)

betrachten. Diese entspricht den Lösungen für die Gluonenergie, die wir mit dem großkanonischen Ensemble im Variationszugang [13] [vgl. Kap. 4] oberhalb der kritischen Temperaturen des Deconfinement-Phasenübergangs erhalten haben. Aus Gl. (6.108) folgt mit  $\alpha = -1$  und  $\lambda = M^2$  das effektive Potential der im massiven Fall (6.120)

$$\Delta e_M(a, L, M^2) := \frac{2M^2}{\pi^2} \frac{1}{L^2} \sum_{\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\bar{a}\sigma)}{n^2} K_2(nLM), \quad (6.121)$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass die modifizierten Bessel-Funktionen  $K_l$  symmetrisch in  $l$  sind. Dieses Potential ist für SU(2) in Abb. 6.1b dargestellt. Durch die Skala  $M$  ist das Potential temperaturabhängig. Für  $M \rightarrow 0$  geht es wieder in das Weiss-Potential (6.115) über. Die Minima dieses Potentials sind für alle Werte von  $M$  ebenfalls bei  $\bar{a}_{3,\text{min}} = 0, 1$  ( $a_{3,\text{min}} = 0, 2\pi/L$ ). Somit ist auch die massive Dispersionsrelation (6.120) in der deconfinierten Phase.

**Infrarot-Potential** Das Quasiteilchen-Bild in der Energiedichte ist nicht notwendigerweise perturbativ. Die im Hamiltonzugang in Coulomb-Eichung bestimmte Gluonenergie  $\omega(p)$  hat ein Infrarotverhalten, das die confinerenden Eigenschaften der Gluonen reproduziert. Für kleine Impulse  $p \rightarrow 0$  verhält sich  $\omega(p)$  wie [vgl. Abschn. 3.6.8]

$$\omega_{\text{IR}}(p) = \frac{M^{1+\alpha}}{p^\alpha}, \quad (6.122)$$

wobei es zwei kritische Lösungen mit den Infrarotexponenten  $\alpha \in \{0.6, 1\}$  gibt. Die Krümmung  $\chi(p)$  hat in erster Ordnung das gleiche Infrarotverhalten ( $\chi_{\text{IR}} \simeq \omega_{\text{IR}}$ ), dennoch vernachlässigen wir sie bis auf Weiteres.

Für die Lösung mit linearem Coulomb-Potential ( $\alpha = 1$ ) können wir das *Infrarot-Potential* für die Dispersionsrelation (6.122) aus der Darstellung (6.109) mit  $\alpha = 1$  und  $\lambda = 0$  analytisch berechnen und erhalten

$$\Delta e_{\text{IR}}(\bar{\mathbf{a}}, L) = -\frac{4}{\pi^2} \frac{M^2}{L^2} \sum_{\sigma > 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\bar{\mathbf{a}}\sigma)}{n^2}. \quad (6.123)$$

Nach der Summation über  $n$  mit Gl. (C.4) gilt für  $0 \leq \bar{\mathbf{a}}\boldsymbol{\sigma} \leq 1$

$$\Delta e_{\text{IR}}(\bar{\mathbf{a}}, L) = 2 \frac{M^2}{L^2} \sum_{\boldsymbol{\sigma} > 0} (\bar{\mathbf{a}}\boldsymbol{\sigma}) [(\bar{\mathbf{a}}\boldsymbol{\sigma}) - 1], \quad (6.124)$$

wobei auch dieser Ausdruck auf beliebige Werte von  $\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}$  erweitert werden kann.

Das Infrarot-Potential ist für die Eichgruppe SU(2) wegen  $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{a} = a_3$

$$\Delta e_{\text{IR}}^{\text{SU}(2)}(\bar{a}_3, L) = 2 \frac{M^2}{L^2} \bar{a}_3 [\bar{a}_3 - 1], \quad \bar{a}_3 \in [0, 1] \quad (6.125)$$

und in Abb. 6.2a dargestellt. Zum Vergleich zeigen wir in Abb. 6.2b das Potential für die Lösung mit dem Infrarotexponenten  $\alpha \approx 0.6$ , das aus Gl. (6.109) numerisch berechnet werden kann. Beide Infrarot-Potentiale unterscheiden sich deutlich von dem Weiss-Potential [Abb. 6.1a], das wir aus dem UV-Verhalten der Gluonenergie  $\omega(p)$  bestimmt haben. Sie besitzen die gleiche Periodizität, sind jedoch im gesamten Intervall  $\bar{a}_3 \in [0, 1]$  negativ und haben eine nicht-triviale Temperaturabhängigkeit. Das Minimum beider Infrarot-Potentiale ist für alle Temperaturen bei  $\bar{a}_{3,\text{min}} = 1/2$  ( $a_{3,\text{min}} = \pi/L$ ). Dies entspricht einem zentrumsymmetrischen Zustand, weshalb der Wert des Polyakov-Loops (6.91) verschwindet,

$$\langle P[a_3] \rangle \simeq P[a_3 = a_{3,\text{min}}] = \cos(\pi \bar{a}_{3,\text{min}}) = 0. \quad (6.126)$$

Somit beschreibt die Dispersionsrelation (6.122) mit dem Infrarotverhalten der Gluonenergie die confinierte Phase.

Das Infrarot-Potential mit  $\alpha \approx 0.6$  ist, bei gleicher Temperatur  $L^{-1}$ , größer als das Potential mit  $\alpha = 1$ , wodurch es weniger confinierend wirkt. Beide Potentiale haben im Gegensatz zum Weiss-Potential (6.115) bei  $\bar{a}_3 = 0$  und  $\bar{a}_3 = 1$  eine nicht verschwindende Ableitung. Für den Fall  $\alpha = 1$  folgt die Ableitung aus Gl. (6.125) analytisch zu

$$\frac{\partial}{\partial \bar{a}_3} e^{\text{SU}(2)}(\bar{a}_3, L)|_{\bar{a}_3=0,1} = \mp 2 \frac{M^2}{L^2}. \quad (6.127)$$

Die numerisch berechnete Ableitung an den Nullstellen für das Infrarot-Potential mit  $\alpha \approx 0.6$  ist etwas kleiner. In den weiteren Betrachtungen beschränken wir uns auf die stärker infrarot-divergente Lösung mit  $\alpha = 1$ . Den Einfluss des Infrarotexponenten der Gluonenergie und der nicht verschwindenden Ableitung auf die kritische Temperatur diskutieren wir in Abschn. 6.4.7.

Schließlich stellen wir fest, dass für das SU(2) Infrarot-Potential der Zusammenhang

$$\Delta e_{\text{UV}}^{\text{SU}(2)}(\bar{a}_3, L) = \frac{2}{3} \frac{\pi^2}{(ML)^2} \left( \Delta e_{\text{IR}}^{\text{SU}(2)}(\bar{a}_3, L) \right)^2 \quad (6.128)$$

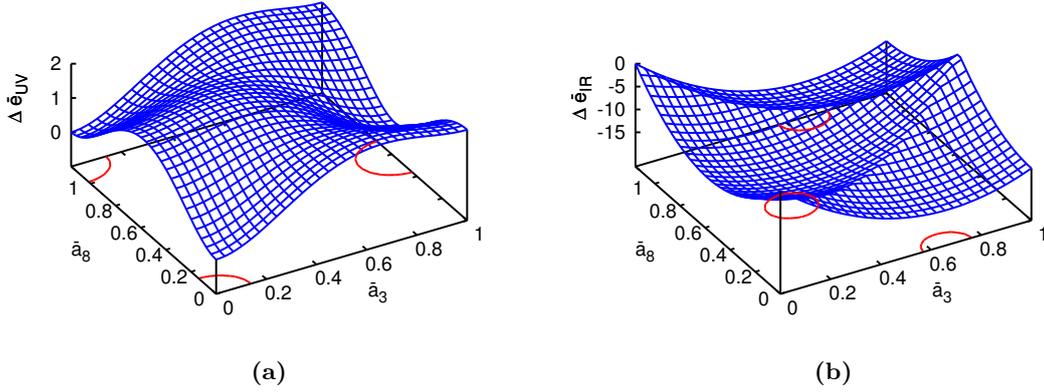
mit dem Weiss-Potential (6.115) gilt.

**SU(3)** Wir wiederholen die vorherigen Betrachtungen für die Eichgruppe SU(3). Das effektive Potential ist in diesem Fall eine Funktion der beiden (dimensionslosen) Felder

$$\bar{a}_3 \equiv \frac{a_3 L}{2\pi}, \quad \bar{a}_8 \equiv \frac{a_8 L}{2\pi}. \quad (6.129)$$

Aufgrund der Periodizität des effektiven Potentials beschränken wir die Felder  $\bar{a}_3$  und  $\bar{a}_8$  auf die Intervalle

$$0 \leq \bar{a}_3 \leq 1, \quad 0 \leq \bar{a}_8 \leq \frac{2}{\sqrt{3}}. \quad (6.130)$$



**Abbildung 6.3.:** In (a) ist das dimensionslose Weiss-Potential (6.115) und in (b) das dimensionslose Infrarot-Potential (6.124) für die Eichgruppe SU(3) bei der Temperatur  $L^{-1} = 290$  MeV als Funktion der dimensionslosen Variablen  $\bar{a}_3$  und  $\bar{a}_8$  (6.129) dargestellt. Die lokalen Minima sind in beiden Graphen durch Konturen in der  $\bar{a}_3 - \bar{a}_8$ -Ebene angedeutet.

Das effektive Potential für SU(3) ist eine Überlagerung der entsprechenden SU(2) Potentiale. Da die Abhängigkeit von dem Hintergrundfeld  $\mathbf{a}$  nur in der Kombination  $\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}$  auftritt, gilt

$$\Delta e^{\text{SU}(3)}(\bar{\mathbf{a}}, L) = \sum_{\boldsymbol{\sigma}} \Delta e^{\text{SU}(2)}(\bar{\mathbf{a}}\boldsymbol{\sigma}, L), \quad (6.131)$$

wobei das Skalarprodukt  $\bar{\mathbf{a}}\boldsymbol{\sigma}$  mit den positiven Wurzeln der Eichgruppe SU(3) (6.63) und Gl. (6.58) die Werte

$$\bar{\mathbf{a}}\boldsymbol{\sigma} \in \left\{ \bar{a}_3, \frac{1}{2}\bar{a}_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{a}_8, \frac{1}{2}\bar{a}_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{a}_8 \right\} \quad (6.132)$$

annimmt.

Die dimensionslosen Ultraviolett- und Infrarot-Potentiale (6.115) bzw. (6.124) sind in Abb. 6.3 als Funktion der Variablen  $\bar{a}_3$  und  $\bar{a}_8$  dargestellt. Während das dimensionslose Weiss-Potential [Abb. 6.3a] unabhängig von der Temperatur  $L^{-1}$  ist, wurde das Infrarot-Potential [Abb. 6.3b] für die Temperatur  $L^{-1} = 290$  MeV bestimmt.

Die Minima  $\mathbf{a}_{\min}$  des Weiss-Potentials für SU(3) sind bei den Feldkonfigurationen

$$(\bar{a}_{3,\min}, \bar{a}_{8,\min}) \in \left\{ (0, 0), \left(0, \frac{2}{\sqrt{3}}\right), \left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right\}. \quad (6.133)$$

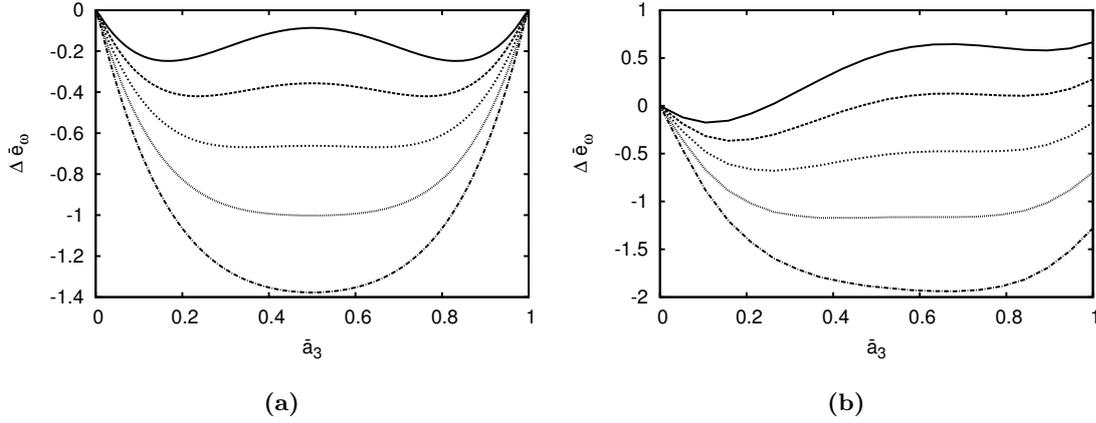
Für diese erzeugt die Polyakov-Linie ein Zentrums-element  $z$

$$e^{-2\pi\bar{\mathbf{a}}_{\min}} \in \left\{ \mathbb{1}, e^{i\frac{2\pi}{3}}\mathbb{1}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}\mathbb{1} \right\} \quad (6.134)$$

und der Polyakov-Loop  $P[a_{\min}] \neq 0$  verschwindet *nicht*, was in der deconfinierten Phase zu erwarten war.

Die Minima des Infrarot-Potentials treten bei zentrumssymmetrischen Konfigurationen auf. Diese sind für SU(3) bei [vgl. Abb. 6.3b]

$$(\bar{a}_{3,\min}, \bar{a}_{8,\min}) \in \left\{ \left(\frac{2}{3}, 0\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right\} \quad (6.135)$$



**Abbildung 6.4.:** Das dimensionslose effektive Potential  $\Delta\bar{e}_\omega(a, L)$  (6.138) für die Eichgruppe SU(2) (a) und der  $\bar{a}_8 = 0$  ( $a_8 = 0$ ) Schnitt für SU(3) (b) als Funktion von  $\bar{a}_3$  (6.129) für verschiedene Temperaturen  $L^{-1}$  im Bereich von 400 bis 600 MeV in (a) und von 484 bis 880 MeV in (b) (jeweils von unten nach oben). Die kritische Temperatur ist  $T_c \approx 485$  MeV für SU(2) und  $T_c \approx 597$  MeV für SU(3).

und die Polyakov-Linie erzeugt die Elemente

$$e^{-2\pi\bar{a}_{\min}} \in \left\{ \text{diag} \left( e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}, 1 \right), \text{diag} \left( e^{-i\frac{2\pi}{3}}, 1, e^{i\frac{2\pi}{3}} \right), \text{diag} \left( e^{i\frac{2\pi}{3}}, 1, e^{-i\frac{2\pi}{3}} \right) \right\} \quad (6.136)$$

für die der Polyakov-Loop verschwindet,  $P[a_{\min}] = 0$ .

#### 6.4.5. Deconfinement-Phasenübergang

Der Deconfinement-Phasenübergang wird durch einen Übergang zwischen dem Infrarotverhalten (6.124) und dem Ultraviolettverhalten (6.115) des effektiven Potentials verursacht. In den folgenden analytischen Untersuchungen ersetzen wir die Gribov-Formel (3.91), als Parametrisierung für die Gluonenergie  $\omega(p)$ , durch

$$\omega(p) = \sqrt{p^2 + \frac{M^4}{p^2}} \longrightarrow p + \frac{M^2}{p} \quad (6.137)$$

und vernachlässigen weiterhin die Krümmung  $\chi(p)$ .

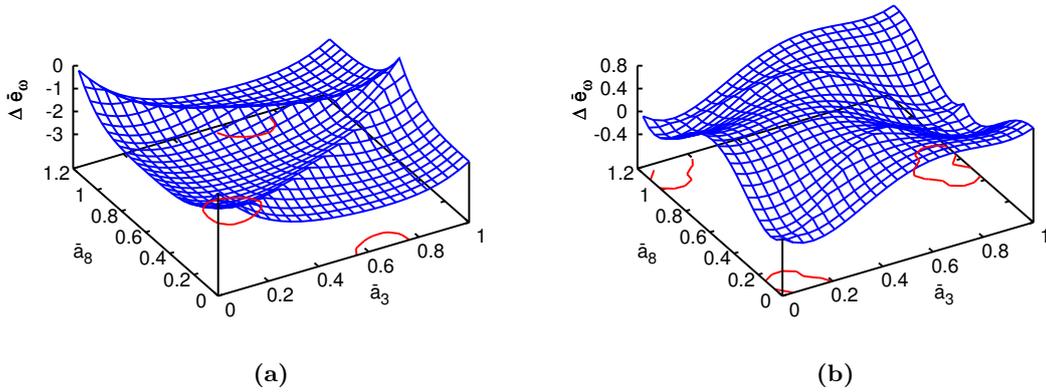
Das effektive Potential (6.100) ist mit dieser Näherung (6.137) und  $\chi(p) = 0$  gegeben durch die Summe

$$\begin{aligned} \Delta e_\omega(\mathbf{a}, L) &:= \Delta e_{\text{IR}}(\mathbf{a}, L) + \Delta e_{\text{UV}}(\mathbf{a}, L) \\ &= \sum_{\sigma > 0} \left( \frac{4}{3} \frac{\pi^2}{L^4} (\bar{\mathbf{a}}\sigma)^2 [\bar{\mathbf{a}}\sigma - 1]^2 + 2 \frac{M^2}{L^2} (\bar{\mathbf{a}}\sigma) [(\bar{\mathbf{a}}\sigma) - 1] \right) \end{aligned} \quad (6.138)$$

der Potentiale  $\Delta e_{\text{UV}}$  (6.115) und  $\Delta e_{\text{IR}}$  (6.124).

**SU(2)** Mit der (positiven) Wurzel  $\sigma = 1$  der Eichgruppe SU(2) lautet das Potential (6.138) in dimensionsloser Form

$$\Delta\bar{e}_\omega(\bar{a}_3, L) = \bar{a}_3(\bar{a}_3 - 1) \left( \frac{4}{3} \pi^2 \bar{a}_3(\bar{a}_3 - 1) + 2(LM)^2 \right), \quad \bar{a}_3 \in [0, 1]. \quad (6.139)$$



**Abbildung 6.5.:** Das dimensionslose effektive Potential  $\Delta\bar{e}_\omega(a, L)$  (6.138) für die Eichgruppe  $SU(3)$  als Funktion der dimensionslosen Variablen (6.129)  $\bar{a}_3$  und  $\bar{a}_8$  für die Temperaturen 270 MeV (a) und 630 MeV (b). In beiden Graphen sind die lokalen Minima durch Konturen in der  $\bar{a}_3 - \bar{a}_8$ -Ebene angedeutet.

Für kleine Temperaturen  $L^{-1} \ll M$  ist dieses Potential negativ und besitzt im Intervall  $\bar{a}_3 \in [0, 1]$  ein Minimum bei  $\bar{a}_3 = 1/2$ . Es ist damit in der confinierten Phase. Bei steigenden Temperaturen vergrößert sich der Einfluss des UV-Potentials, sodass bei der kritischen Temperatur  $T_c$  das Minimum zu zwei lokalen Minima, sowie einem Maximum bei  $\bar{a}_3 = 1/2$  entartet. Das System durchläuft einen Phasenübergang zur deconfinierten Phase [Abb. 6.4a]. Für weiter steigende Temperaturen laufen die degenerierten Minima schließlich auf die Ränder des Intervalls  $[0, 1]$ . Die kritische Temperatur definieren wir bei derjenigen Temperatur bei der die Nullstellen der Ableitung des effektiven Potentials degenerieren. Dies geschieht bei

$$T_c = \sqrt{3} \frac{M}{\pi}. \quad (6.140)$$

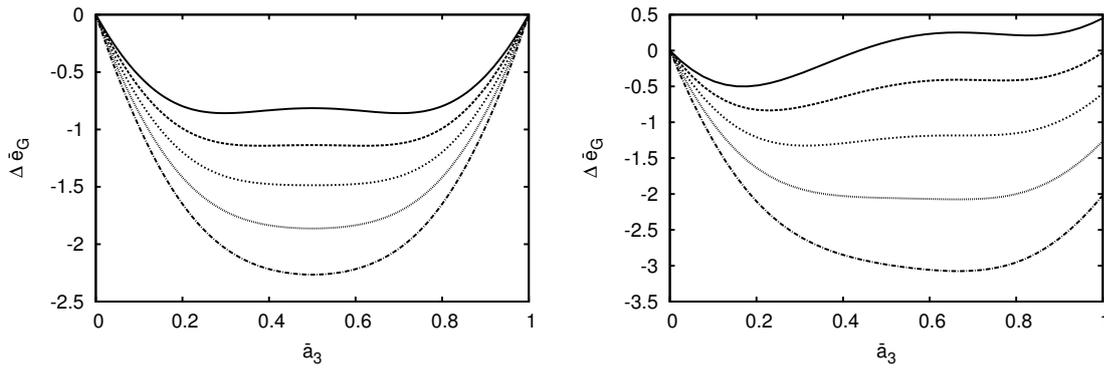
Mit der Gribov-Masse  $M_G = 880$  MeV [vgl. Abschn. 3.6.9] folgt eine kritische Temperatur von  $T_c \approx 485$  MeV. Der Phasenübergang ist für  $SU(2)$  kontinuierlich, d.h. von zweiter Ordnung.

**SU(3)** Für  $SU(3)$  ist das effektive Potential (6.138) eine Funktion der beiden Felder  $\bar{a}_3$  und  $\bar{a}_8$ . Es ist in Abb. 6.5 für zwei verschiedene Temperaturen unterhalb und oberhalb der kritischen Temperatur dargestellt. Um den Phasenübergang zu untersuchen, schneiden wir den dreidimensionalen Graphen entlang einer Linie in der  $\bar{a}_3 - \bar{a}_8$ -Ebene, die in beiden Phasen ein Minimum enthält. Mit der praktischen Wahl  $a_8 = 0$  und den positiven Wurzeln  $\sigma$  von  $SU(3)$  [vgl. Gl. (6.63)] gilt<sup>13</sup>

$$\Delta e^{\text{SU}(3)}(a_3, L) = \Delta e^{\text{SU}(2)}(a_3, L) + 2\Delta e^{\text{SU}(2)}(a_3/2, L). \quad (6.141)$$

Abb. 6.4b zeigt diesen Schnitt durch dieses effektive Potential. Für niedrige Temperaturen  $L^{-1}$  entspricht das Minimum bei  $\bar{a}_3 = 2/3$  ( $\bar{a}_8 = 0$ ) einer zentrumssymmetrischen Konfiguration. Bei der kritischen Temperatur  $T_c$  bildet sich ein weiteres Minimum bei einem kleineren Wert von  $\bar{a}_3$ , das für Temperaturen oberhalb von  $T_c$  zum absoluten Minimum

<sup>13</sup>Andere Möglichkeiten sind  $\bar{a}_8 = 2/\sqrt{3}$  und  $\bar{a}_8 = 1/\sqrt{3}$ .



**Abbildung 6.6.:** Das dimensionslose effektive Potential  $\Delta\bar{e}_G(a, L)$  (6.145) für die Eichgruppe SU(2) (a) und der  $\bar{a}_8 = 0$  ( $a_8 = 0$ ) Schnitt für SU(3) (b) als Funktion von  $\bar{a}_3$  (6.129) für verschiedene Temperaturen  $L^{-1}$  im Bereich von 360 bis 480 MeV in (a) und von 440 bis 700 MeV in (b) (jeweils von unten nach oben). Die kritische Temperatur ist  $T_c \approx 432$  MeV für SU(2) und  $T_c \approx 516$  MeV für SU(3).

wird. Es vereint sich für große Temperaturen mit dem Rand bei  $a_3 = a_8 = 0$ , für den die Polyakov-Linie dem trivialen Zentrumselement  $z = \mathbb{1}$  entspricht, während das ursprüngliche Minimum bei  $\bar{a}_3 = 2/3$  ( $\bar{a}_8 = 0$ ) zum Maximum wird. Aus der Temperatur, ab der im effektiven Potential (6.141) im Intervall  $[0, 1]$  zwei degenerierte Minima existieren, bestimmen wir

$$T_c = 2 \frac{M}{\pi}. \quad (6.142)$$

Mit der Gribov-Masse  $M_G \approx 900$  MeV für SU(3) ergibt sich eine kritische Temperatur von  $T_c \approx 572$  MeV. Da sich die Position des absoluten Minimums un stetig ändert, liegt für SU(3) ein Phasenübergang erster Ordnung vor.

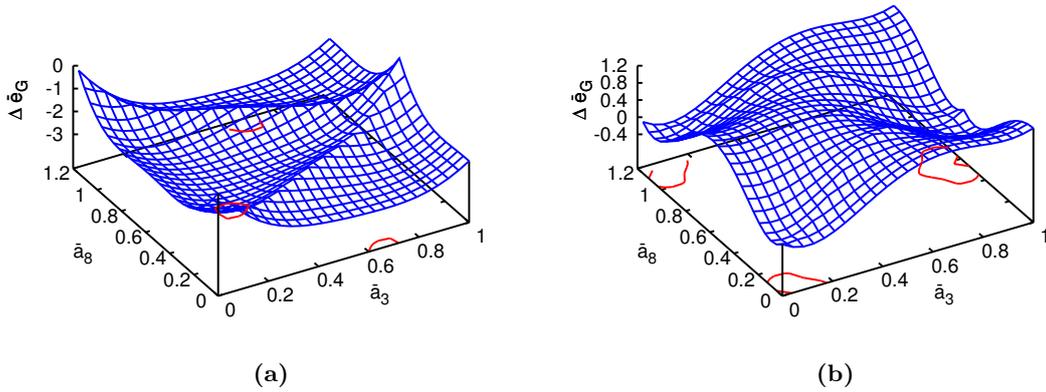
Die Ordnung des Phasenübergangs der Yang-Mills-Theorie wird durch die einfachen, analytischen Betrachtungen korrekt reproduziert, jedoch sind die kritischen Temperaturen für beide Eichgruppen viel größer als diejenige, die durch Gitterrechnungen bestimmt werden. Dies ist nicht verwunderlich, da wir durch Vernachlässigung der Krümmung und Verwendung der Näherung (3.91) für die Gribov-Formel keine akkurate Beschreibung erwarten konnten. Wie wir jetzt explizit zeigen, reduziert die Verwendung der tatsächlichen Gribov-Formel  $T_c$  nur geringfügig.

**Gribov-Formel** Mit der Gribov-Formel  $\omega_G(p)$  (3.91) als Parametrisierung für die Gluonenergie, aber ohne die Krümmung  $\chi(p)$ , lautet das effektive Potential (6.100)

$$e_G(\mathbf{a}, L) := \sum_{\sigma} \int_L \bar{d}^3 p \omega_G(p_{\sigma}). \quad (6.143)$$

In diesem Fall kann das Integral über den transversalen Impuls  $p_{\perp}$  und die Summe über die Matsubara Frequenzen  $\omega_n$  nicht mehr analytisch ausgeführt werden. Um die Energiedichte numerisch zu berechnen, muss das Integral (6.143) außerdem in einer Weise dargestellt werden, in der keine UV-Divergenzen mehr auftreten. Hierzu schreiben wir die Differenz der Energiedichte

$$\Delta e_G(\mathbf{a}, L) := e_G(\mathbf{a}, L) - e_G(\mathbf{a} = 0, L) \quad (6.144)$$



**Abbildung 6.7.:** Das dimensionslose effektive Potential  $\bar{e}G(a, L)$  (6.145) für die Eichgruppe SU(3) als Funktion von  $\bar{a}_8$  und  $\bar{a}_3$  (6.129) für die Temperaturen 270 MeV (a) und 630 MeV (b). In beiden Graphen sind die lokalen Minima durch Konturen in der  $\bar{a}_8 - \bar{a}_3$ -Ebene angedeutet.

in der Form

$$\Delta e_G(\mathbf{a}, L) = [\Delta e_G(\mathbf{a}, L) - \Delta e_{UV}(\mathbf{a}, L)] + \Delta e_{UV}(\mathbf{a}, L), \quad (6.145)$$

wobei der letzte Term  $\Delta e_{UV}(\mathbf{a}, L)$  durch den analytischen Ausdruck (6.115) gegeben ist, während der Term in eckigen Klammern dem Integral

$$[\Delta e_G(\mathbf{a}, L) - \Delta e_{UV}(\mathbf{a}, L)] = \sum_{\sigma} \int_L \bar{d}^3 p \{ \omega_G(\mathbf{p}_{\sigma}) - p_{\sigma} - [\omega_G(\mathbf{p}_{\sigma=0}) - |\mathbf{p}_{\sigma=0}|] \} \quad (6.146)$$

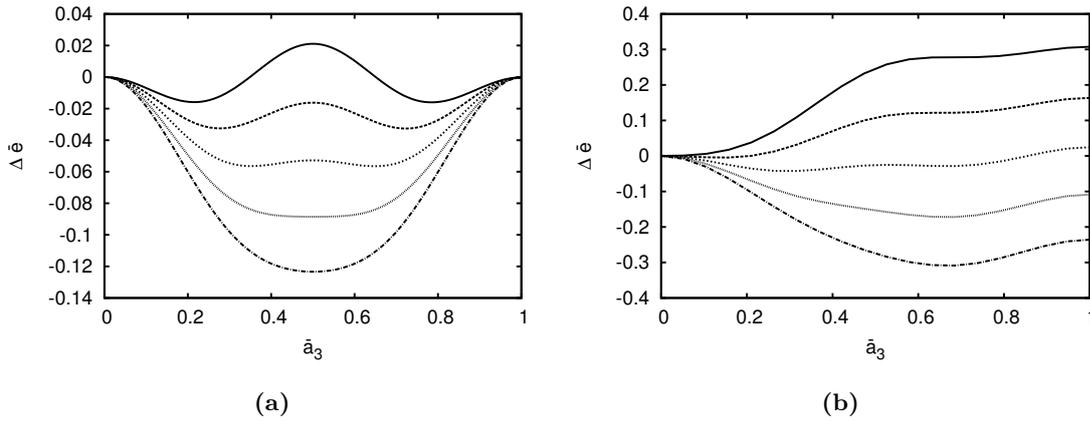
entspricht. Bei Verwendung der Gribov-Formel (3.91) ist dieses Integral endlich und kann numerisch berechnet werden. Das aus Gl. (6.145) bestimmte effektive Potential ist in Abb. 6.6 für die Eichgruppe SU(2) und in Abb. 6.7 für die Eichgruppe SU(3) bei verschiedenen Temperaturen  $L^{-1}$  dargestellt. Die kritischen Temperaturen des Deconfinement-Phasenübergangs bestimmen wir numerisch zu  $T_c \approx 432$  MeV für SU(2) und zu  $T_c \approx 516$  MeV für SU(3), was nur geringfügig weniger ist, als bei Verwendung der einfachen Näherung (6.137).

#### 6.4.6. Das effektive Potential mit Krümmung

Wir werden jetzt das effektive Potential (6.100) unter Berücksichtigung der Krümmung  $\chi(p)$  berechnen. Es ist die Vernachlässigung der Krümmung, die die Temperatur des Phasenübergangs zu höheren Temperaturen verschiebt. Dies lässt sich wie folgt verstehen: Die Krümmung  $\chi(p)$  ist im Ultravioletten gegenüber der Gluonenergie unterdrückt, d.h.

$$\chi(p)/\omega(p) \sim 1/\sqrt{\ln(p/\mu)}. \quad (6.147)$$

Da  $\chi(p)$  ein negatives Vorzeichen besitzt, bedeutet aber die Vernachlässigung der Krümmung, dass der Einfluss des deconfinierenden UV-Potentials (6.115) vermindert wird. Im Infraroten stimmt die Krümmung  $\chi(p)$  in erster Ordnung mit der Gluonenergie  $\omega(p)$  überein. Daher verstärkt die Vernachlässigung der Krümmung den Einfluss des confinierenden Infrarot-Potentials (6.124). Insgesamt wird durch das Fehlen der Krümmung der deconfinierende UV-Teil reduziert und der confinierende IR-Teil vergrößert. Wie die folgenden



**Abbildung 6.8.:** Das dimensionslose effektive Potential  $\Delta\bar{e}(a, L)$  (6.149) für die Eichgruppe SU(2) (a) und der  $\bar{a}_8 = 0$  ( $a_8 = 0$ ) Schnitt für SU(3) (b) als Funktion von  $\bar{a}_3$  (6.129) für verschiedene Temperaturen  $L^{-1}$  im Bereich von 260 bis 290 MeV in (a) und von 260 bis 300 MeV in (b) (jeweils von unten nach oben). Die kritische Temperatur ist  $T_c \approx 267$  MeV für SU(2) und  $T_c \approx 278$  MeV für SU(3).

Ergebnisse zeigen, reduziert sich die kritische Temperatur deutlich, wenn das Infrarotverhalten der Krümmung berücksichtigt wird. Das logarithmische Ultraviolettverhalten der Krümmung hat jedoch nur einen geringen Einfluss, wie die Rechnungen in Abschn. 6.4.6 zeigen.

Um die numerischen Lösungen für die Gluonenergie  $\omega(p)$  und die Krümmung  $\chi(p)$  konsistent zu parametrisieren, gibt es die Möglichkeit  $\omega(p)$  durch die Gribov-Formel darzustellen und die Krümmung  $\chi(p)$  aus der Gap-Gleichung ohne Coulomb-Term (3.42) zu bestimmen. Umgekehrt kann auch die Krümmung parametrisiert und die Gluonenergie aus der Gap-Gleichung (3.42) berechnet werden.

**Parametrisierung durch die Gap-Gleichung** Mit der Gribov-Formel (3.91) als Parametrisierung für die Gluonenergie  $\omega(p) = \omega_G(p)$  folgt aus der Gap-Gleichung (3.42) für  $\chi(p)$

$$\chi(p) = \frac{M^2}{k} =: \chi_{\text{IR}}(p) \quad (6.148)$$

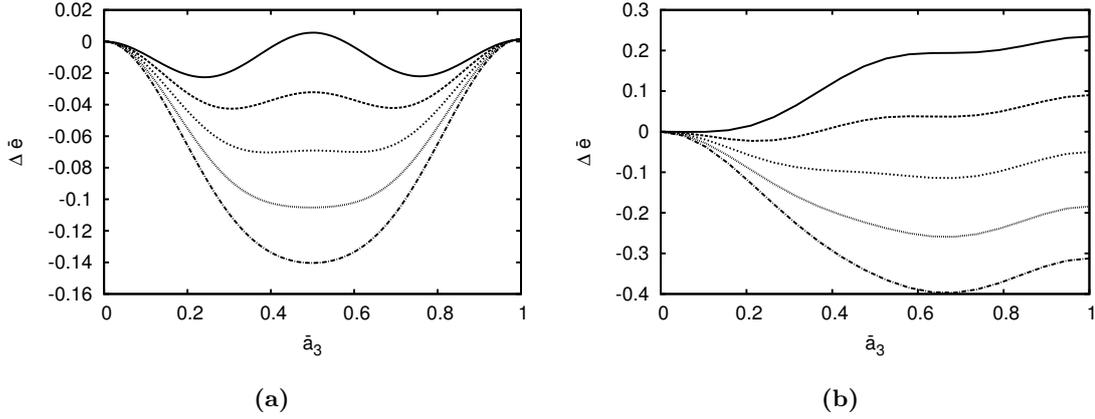
und die Energiedichte (6.100) ist gegeben durch

$$e(\mathbf{a}, L) = \sum_{\sigma} \int_L \bar{d}^3 p [\omega_G(\mathbf{p}_{\sigma}) - \chi_{\text{IR}}(\mathbf{p}_{\sigma})]. \quad (6.149)$$

Für das bei  $a = 0$  abgezogene Potential gilt da  $\chi_{\text{IR}} = \omega_{\text{IR}}$

$$\Delta e(\mathbf{a}, L) = e(\mathbf{a}, L) - e(\mathbf{a}, L = 0) = \Delta e_G(\mathbf{a}, L) - \Delta e_{\text{IR}}(\mathbf{a}, L), \quad (6.150)$$

wobei  $\Delta e_G(\mathbf{a}, L)$  und  $\Delta e_{\text{IR}}(\mathbf{a}, L)$  durch die Gleichungen (6.145), bzw. (6.124) bestimmt sind. Das Potential (6.149) ist für die Eichgruppe SU(2) in Abb. 6.8a und der Schnitt bei  $\bar{a}_8 = 0$  ( $a_8 = 0$ ) für die Eichgruppe SU(3) in Abb. 6.8b für verschiedene Temperaturen dargestellt. In beiden Fällen tritt ein Phasenübergang auf, der für SU(2) von zweiter Ordnung und für SU(3) von erster Ordnung ist. Durch die Hinzunahme des Infrarotteils  $\chi_{\text{IR}}(p)$  der Krümmung  $\chi(p)$  verringern sich die kritischen Temperaturen zu  $T_c \approx 267$  MeV für SU(2) und  $T_c \approx 277$  MeV für SU(3).



**Abbildung 6.9.:** Das dimensionslose effektive Potential  $\Delta\bar{e}(a, L)$  (6.153) für die Eichgruppe SU(2) (a) und der  $\bar{a}_8 = 0$  ( $a_8 = 0$ ) Schnitt für SU(3) (b) als Funktion von  $\bar{a}_3$  (6.129) für verschiedene Temperaturen  $L^{-1}$  im Bereich von 260 bis 290 MeV in (a) und von 260 bis 300 MeV in Bild (b) (jeweils von unten nach oben). Die kritische Temperatur ist  $T_c \approx 269$  MeV für SU(2) und 283 MeV für SU(3).

**Parametrisierung durch die Krümmung** Mit der durch [vgl. Gl. (3.109)]

$$\chi_{\text{para}}(p) = u(p)\chi_{\text{IR}}(p) + v(p)\chi_{\text{UV}}(p) \quad (6.151)$$

parametrisierten Krümmung berechnen wir die Gluonenergie  $\omega(p)$  aus der Gap-Gleichung ohne Coulomb-Term (3.42). Dadurch wird auch das Ultraviolettverhalten der Krümmung berücksichtigt. Das effektive Potential ist jetzt gegeben durch

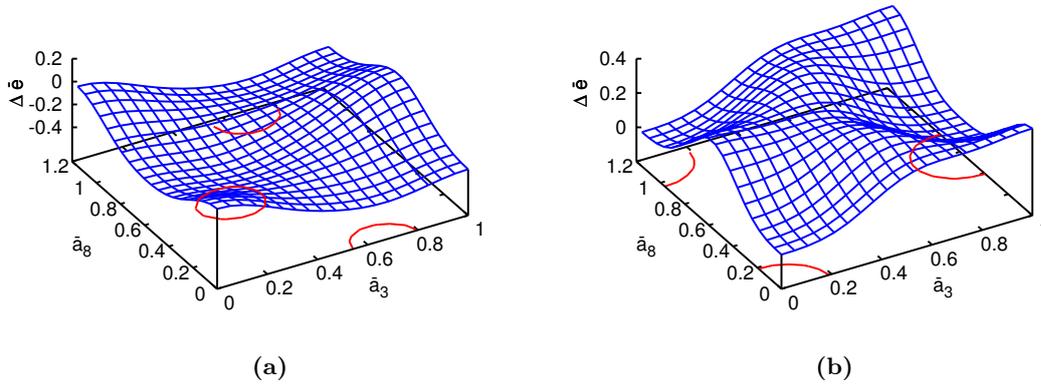
$$e(\mathbf{a}, L) = \sum_{\sigma} \int_L \bar{d}^3p [\omega(\mathbf{p}_{\sigma}) - \chi_{\text{para}}(\mathbf{p}_{\sigma})], \quad \omega(\mathbf{p}_{\sigma}) = \sqrt{\chi_{\text{para}}(\mathbf{p}_{\sigma})^2 + \mathbf{p}_{\sigma}^2}. \quad (6.152)$$

Um dieses Integral numerisch berechnen zu können, stellen wir das Potential (6.152) wie folgt dar

$$\begin{aligned} e(\mathbf{a}, L) &= \sum_{\sigma} \int_L \bar{d}^3p [\omega(\mathbf{p}_{\sigma}) - p_{\sigma} - u(\mathbf{p}_{\sigma})\chi_{\text{IR}}(\mathbf{p}_{\sigma})] + e_{\text{UV}}(a, L) \\ &\quad - \sum_{\sigma} \int_L \bar{d}^3p v(\mathbf{p}_{\sigma})\chi_{\text{UV}}(\mathbf{p}_{\sigma}). \end{aligned} \quad (6.153)$$

Das erste Integral in (6.153) ist nach Bilden der Differenz  $\Delta e(\mathbf{a}, L)$  endlich und kann numerisch bestimmt werden. Das Weiss-Potential  $e_{\text{UV}}(a, L)$  ist durch den analytischen Ausdruck (6.115) gegeben. Mit dem asymptotischen UV-Verhalten der Krümmung  $\chi_{\text{UV}}(p)$  [Gl. (3.108)] und der Parametrisierungsfunktion  $v(p)$  [Gl. (3.110)], folgt für den letzten Term in (6.153)

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma} \int_L \bar{d}^3p v(\mathbf{p}_{\sigma})\chi_{\text{UV}}(\mathbf{p}_{\sigma}) &= \sum_{\sigma} \left[ \int_L \bar{d}^3p \chi_{\text{UV}}(\mathbf{p}_{\sigma}) - \lambda^n \int_L \bar{d}^3p \frac{\chi_{\text{UV}}(\mathbf{p}_{\sigma})}{(\mathbf{p}_{\sigma}^2 + \lambda)^n} \right] \\ &= e_{\text{UV}}^{\chi}(\mathbf{a}, L) - \left( \frac{\lambda}{M^2} \right)^n \int_0^{\infty} dt e_{\alpha=2t+2n-1}(\mathbf{a}, L, \lambda), \end{aligned} \quad (6.154)$$



**Abbildung 6.10.:** Das effektive Potential (6.149) für die Eichgruppe SU(3) als Funktion der dimensionslosen Variablen (6.129)  $\bar{a}_3$  und  $\bar{a}_8$  (a) unterhalb und (b) oberhalb der Phasenübergangstemperatur. In beiden Graphen sind die lokalen Minima durch Konturen in der  $\bar{a}_8 - \bar{a}_3$ -Ebene angedeutet.

wobei  $e_{\text{UV}}^x$  durch Gl. (C.11) dargestellt werden kann und  $e_\alpha(a, L, \lambda)$  in Gl. (6.108) definiert ist. Durch die Verwendung der poissonschen Summenformel in dem analytischen Ausdruck  $e_\alpha(a, L, \lambda)$  (6.108) sind diese Integrale endlich und können numerisch bestimmt werden.

Das effektive Potential  $\Delta e(a, L)$  (6.153) ist in Abb. 6.9a für die Eichgruppe SU(2) und in Abb. 6.9b (der Schnitt bei  $\bar{a}_8 = 0$  ( $a_8 = 0$ )) für die Eichgruppe SU(3) dargestellt. Die kritischen Temperaturen, die wir aus diesen Potentials bestimmen, sind  $T_c \approx 269$  MeV für SU(2) und  $T_c \approx 283$  MeV für SU(3). Diese Werte unterscheiden sich nur geringfügig von den vorangegangenen, die mit der Gribov-Formel (6.149) bestimmt wurden.

Aus den effektiven Potentials mit Berücksichtigung der Krümmung, Gl. (6.149) oder Gl. (6.153), bestimmen wir für SU(2) eine vergleichbare kritische Temperatur wie durch den Variationszugang bei endlichen Temperaturen mit dem großkanonischen Ensemble der Yang-Mills-Theorie in Coulomb-Eichung [112]. Die Verwendung des effektiven Potentials hat jedoch den Vorteil, dass zur Untersuchung des Phasenübergangs kein zusätzlicher Ansatz für die Dichtematrix erforderlich war.

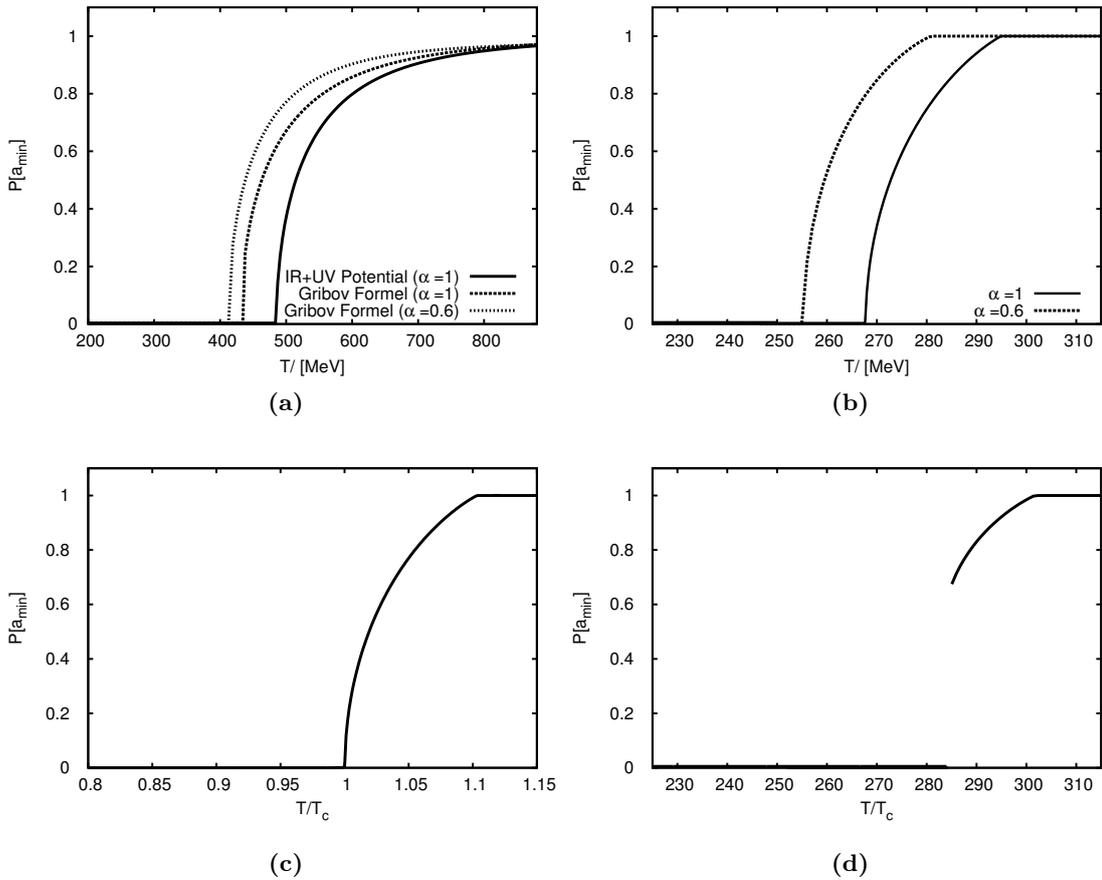
Die Hinzunahme der Krümmung verändert das Verhalten der Potentials an der Nullstelle bei  $\bar{a}_3 = 0$  [Abb. 6.8, Abb. 6.9]. Dies kann wie folgt verstanden werden: Da das effektive Potential nur durch den verschobenen Impuls (6.99) vom Hintergrundfeld abhängt, ist das Verhalten bei kleinen Feldern bzw. bei der Nullstelle  $\bar{a}_3 = 0$  durch das Verhalten des Integranden bei kleinen Impulsen bestimmt. Mit der Krümmung in der Dispersionrelation für die vollen Potentials Abb. 6.8 und Abb. 6.9 gilt für  $p \rightarrow 0$

$$\omega_{\text{IR}}(p) - \chi_{\text{IR}}(p) \sim \frac{1}{2} \frac{p^3}{M^2}. \quad (6.155)$$

Deshalb haben diese ein ähnliches Verhalten wie das Weiss-Potential [Abb. 6.1a], bei dem der Integrand ebenfalls für  $p \rightarrow 0$  verschwindet. Dadurch verändert sich der Temperaturverlauf des Polyakov-Loops, den wir im nächsten Abschnitt bestimmen.

#### 6.4.7. Temperaturabhängigkeit des Polyakov-Loops

In Abb. 6.11a ist die Temperaturabhängigkeit des Polyakov-Loops für das analytische effektive Potential (6.138), sowie für das Potential (6.145) mit der Gribov-Formel und den



**Abbildung 6.11.:** Der Polyakov-Loop  $P[a]$  ausgewertet an dem Minimum  $a = a_{\min}$  des effektiven Potentials als Funktion von  $T$  für die Eichgruppe SU(2): In (a) für das analytische Potential (6.138) und für das numerische Potential (6.145) mit den Infrarotexponenten  $\alpha = 1$  und  $\alpha = 0.6$ . In (b) für das volle Potential (6.149) und  $\alpha = 0.6$  und  $\alpha = 1$ . (6.153) als Funktion von  $T/T_c$  für die Eichgruppe SU(2) (a) und SU(3) (b).

beiden Infrarotexponenten  $\alpha = 1$  und  $\alpha \approx 0.6$ , beide ohne Berücksichtigung der Krümmung, für SU(2) dargestellt. Hierzu wurde das Minimum  $a_{\min}$  des Potentials als Funktion der Temperatur bestimmt und mit Gl. (6.91), bzw. Gl. (6.93) der Wert des Polyakov-Loops  $P[a = a_{\min}]$  berechnet. Die kritischen Temperaturen dieses Potentials entsprechen den zuvor bestimmten Werten. Durch Verwendung der Gribov-Formel (3.91) als Parametrisierung für die Gluonenergie verringert sich die kritische Temperatur geringfügig. Ebenso ist der Phasenübergang der  $\alpha \approx 0.6$  Lösung zu etwas kleineren Temperaturen verschoben. Dies ist zu erwarten gewesen, da der confinierende Einfluss des Infrarot-Potentials durch den kleineren Infrarotexponenten reduziert wird. Der Polyakov-Loop dieser Potentiale nimmt den Wert  $P[a] = 1$  erst für  $T \rightarrow \infty$  an.

Für das volle effektive Potential (6.149) mit Berücksichtigung des Infrarotteils der Krümmung ist der Polyakov-Loop für die Eichgruppe SU(2) und für die Lösung mit  $\alpha = 1$  sowie mit  $\alpha \approx 0.6$  in Abb. 6.11b dargestellt. Durch die Krümmung wird die kritische Temperatur zu deutlich niedrigeren Temperaturen verschoben. Ebenso verändert sich das Verhalten des Polyakov-Loops für  $T \rightarrow \infty$ , da dieser schon bei endlichen Temperaturen  $T > T_c$  den Wert  $P[a] = 1$  annimmt und sich damit von den Funktionen in Abb. 6.11a unterscheidet.

Mit der durch die  $\alpha = 1$ -Lösung bestimmten Skala [vgl. Abschn. 3.6.9] ergibt sich für die  $\alpha \approx 0.6$  Lösung eine etwas niedrigere kritische Temperatur von  $T_c \approx 256$  MeV für SU(2).

Den Polyakov-Loop für das effektive Potential (6.153), das auch das Ultraviolettverhalten der Krümmung einschließt, ist für SU(2) in Abb. 6.11c und für SU(3) in Abb. 6.11d abgebildet. Aus dieser Darstellung ist besonders deutlich zu erkennen, dass der Phasenübergang für SU(2) von zweiter Ordnung und für SU(3) von erster Ordnung ist.

#### 6.4.8. Kritischer Exponent des Ordnungsparameters

Für  $T \searrow T_c$  erwarten wir beim Phasenübergang zweiter Ordnung der Eichgruppe SU(2), dass der Polyakov-Loop als Ordnungsparameter  $P(T)$  ein Verhalten der Form

$$P(T) \sim A (T - T_c)^{\beta_c} \quad (6.156)$$

mit dem kritischen Exponenten  $\beta_c$  hat. Für das Potential (6.138) können wir diesen Exponenten analytisch berechnen. Im Fall der Eichgruppe SU(2) existieren oberhalb der kritischen Temperatur  $T_c = \sqrt{3} \frac{M}{\pi}$  zwei entartete Minima bei

$$\bar{a}_3 = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{\pi^2 - 3(LM)^2}}{2\pi}. \quad (6.157)$$

Für die weitere Betrachtung ist es ausreichend sich auf das Minimum zu beschränken, das sich für große Temperaturen mit der Nullstelle bei  $\bar{a}_3 = 0$  vereint. Mit (6.157) gilt für das Minimum als Funktion der Temperatur

$$\bar{a}_{\min}(T) := \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}M}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{T_c^2} - \frac{1}{T^2}}, \quad (T \geq T_c), \quad (6.158)$$

wobei wir hier die kritische Temperatur  $T_c$  identifiziert haben. Damit gilt für den temperaturabhängigen Polyakov-Loop (6.91)

$$P(T) := P[\bar{a}_{\min}(T)] = \sin \left( \frac{\sqrt{3}M}{2} \sqrt{\frac{1}{T_c^2} - \frac{1}{T^2}} \right), \quad T \geq T_c. \quad (6.159)$$

Im kritischen Bereich  $T \simeq T_c$  kann der Sinus entwickelt werden und es folgt

$$P(T) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{M}{T_c^{3/2}} (T - T_c)^{1/2}. \quad (6.160)$$

Hieraus lesen wir den kritische Exponenten

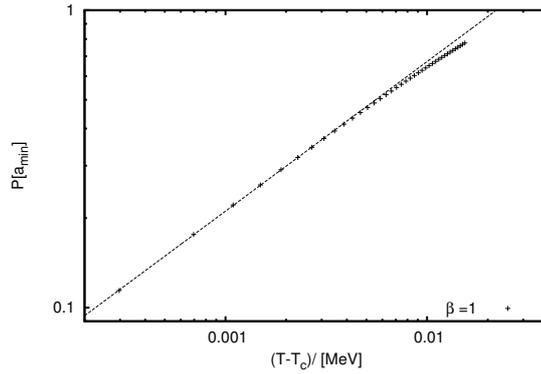
$$\beta_c = \frac{1}{2} \quad (6.161)$$

ab, der einem Mean-Field-Exponent entspricht.

Der kritische Exponent kann für das volle effektive Potential aus den numerischen Ergebnissen bestimmt werden. Wir extrahieren für das volle Potential (6.149) aus der doppellogarithmischen Darstellung in Abb. 6.12 den kritischen Exponenten

$$\beta_c \approx 0.5, \quad (6.162)$$

was wir auch für das analytische Potential (6.138) bestimmt haben.



**Abbildung 6.12.:** Kritischer Exponent des Polyakov-Loops für  $T \searrow T_c$  und das effektive Potential (6.149).

## 6.5. Ausblick: Druck

Der Druck  $P$  kann mit der Definition (2.83) und der Zustandssumme (2.92) dargestellt werden als

$$P = -\frac{1}{L}e(L) \quad (6.163)$$

mit der Energiedichte  $e(L)$  der Theorie auf der kompaktifizierten Mannigfaltigkeit  $\mathbb{R}^2 \times S^1(L)$ . Mit der Poissonschen Summenformel (6.111) und den parametrisierten  $T = 0$  Lösungen [vgl. Abschn. 3.6.8] gilt

$$e(L) = \frac{1}{L^3\pi^2} \int_0^\infty d\bar{p} \bar{p} [\omega(\bar{p}/L) - \chi_{\text{IR}}(\bar{p}/L) - \bar{p}/L] \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin(n\bar{p})}{n}, \quad (6.164)$$

wobei die Integrationsvariable  $\bar{p}$  in dimensionslose Einheiten skaliert wurde und wir das führende Ultraviolettverhalten  $\omega_{\text{UV}}(p) = p$  sowie den  $n = 0$  Term zum Zweck der Renormierung im Integranden abgezogen haben. Die Gluonenergie ist durch

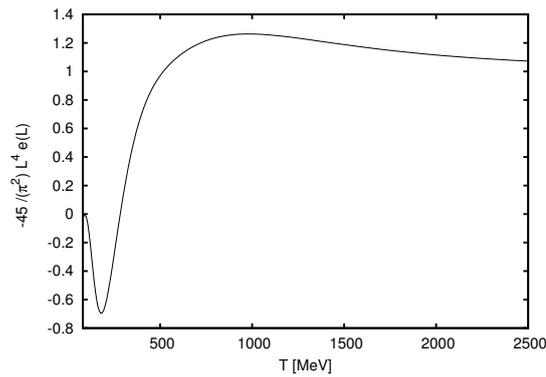
$$\omega(p) = \sqrt{\chi(p)^2 + p^2}, \quad \chi(p) = \chi_{\text{IR}}(p)u(p) \quad (6.165)$$

mit dem asymptotischen Verhalten  $\chi_{\text{IR}}(p) = \frac{M^2}{p}$  und der Abschneidefunktion  $u(p) = 1/(1 + (\frac{p}{\xi})^m)$  parametrisiert.

Für die numerische Berechnung des Integrals (6.164) ist es ausreichend in der Summe, die der Fourier-Reihe der Sägezahn-Funktion entspricht,  $n = 10$  ‘‘Matsubara-Frequenz’’ zu berücksichtigen. Mit dem Stefan-Boltzmann Gesetz  $P_{\text{UV}}(L) = \frac{\pi^2}{45}(1/L)^4$  kann der Druck aus

$$\frac{P(L)}{P_{\text{UV}}(L)} = -\frac{45}{\pi^2}L^4e(L) + 1 \quad (6.166)$$

bestimmt werden, wobei wir den in Gl. (6.164) abgezogenen Stefan-Boltzmann-Limes wieder dazu addiert haben. Der resultierende Druck ist in Abb. 6.13 dargestellt. Dieser weist sowohl einen unphysikalischen, negativen Bereich auf, als auch einen Bereich in dem der Stefan-Boltzmann-Limes, den  $P(L)$  für große Temperaturen langsam erreicht, überschritten wird. Der Druck  $P(L)$  hat außerdem einen Bereich der maximalen Steigung bei  $T_c \approx 285$  MeV, der konsistent mit dem aus dem Polyakov-Loop bestimmten Wert für die kritische Temperatur ist.



**Abbildung 6.13.:** Der Druck (6.166) als Funktion der Temperatur  $T = L^{-1}$  berechnet auf der kompaktifizierten Mannigfaltigkeit  $\mathbb{R}^2 \times S^1(L)$ .

Die Berechnung des Drucks erfolgte auf der Mannigfaltigkeit  $\mathbb{R}^2 \times S^1(L)$  jedoch mit den  $O(3)$  invarianten Lösungen. Um den Druck konsistent zu bestimmen, sollten die (parametrisierten) numerischen Lösungen bei endlichen Temperaturen verwendet werden, die wir zuvor in Kap. 5 bestimmt haben.

## 6.6. Zusammenfassung

In diesem Kapitel haben wir den Deconfinement-Phasenübergang der Yang-Mills-Theorie mit dem effektiven Potential des Polyakov-Loops studiert. Hierzu wurde der Hamiltonzugang in Coulomb-Eichung auf die Anwesenheit eines externen Hintergrundfeldes erweitert. Mit einem gaußschen Wellenfunktional haben wir durch Minimierung der Energiedichte die Bewegungsgleichungen der Korrelationsfunktionen abgeleitet, wobei wir sichergestellt haben, dass der Erwartungswert des Eichfeldes dem Hintergrundfeld entspricht. Wir konnten für die Korrelationsfunktionen eine Beziehung zu den Lösungen in Coulomb-Eichung in Abwesenheit des Hintergrundfeldes herstellen.

Durch die Verwendung der zuvor in Coulomb-Eichung (bei  $T = 0$ ) bestimmten Gluonenergie sowie des Geist-Formfaktors wurde aus der Energiedichte das effektive Potential als Funktion des konstanten Hintergrundfeldes berechnet. Endliche Temperaturen haben wir durch Kompaktifizierung einer räumlichen Dimension eingeführt, sodass die inverse Länge  $T = L^{-1}$  der kompaktifizierten Richtung der Temperatur entspricht. Den Erwartungswert des Polyakov-Loops haben wir durch das Minimum des effektiven Potentials bestimmt. Mit diesem konnten wir die kritischen Temperaturen  $T_c \approx 269$  MeV SU(2) und  $T_c \approx 283$  MeV SU(3) des Deconfinement-Phasenübergangs für die entsprechenden Eichgruppen bestimmen. Darüber hinaus haben wir die Ordnung – erste Ordnung für SU(3) und zweite Ordnung für SU(2) – der Phasenübergänge ermitteln.

Die Werte für die kritischen Temperaturen sind in guter Übereinstimmung mit den vorherigen Ergebnissen in Kap. 4, bei denen das großkanonische Ensemble der Yang-Mills-Theorie in Coulomb-Eichung untersucht wurde. Im Gegensatz dazu ist mit dem hier dargestellten Zugang durch das effektive Potential kein Ansatz für die Dichtematrix notwendig. Darüber hinaus stellen wir dadurch eine Verbindung zwischen dem Deconfinement-Phasenübergang und den eichabhängigen Propagatoren, bzw. Formfaktoren her.

In diesem Kapitel wurde der Phasenübergang ausschließlich durch die Propagatoren bei  $T = 0$  bestimmt. Durch die Kompaktifizierung einer räumlichen Dimension auf die Länge  $L$  zur Einführung von endlichen Temperaturen ist jedoch die  $O(3)$ -Invarianz gebrochen

und die Bewegungsgleichungen für die Gluonenergie und den Geist-Propagator müssten auf der Mannigfaltigkeit  $\mathbb{R}^2 \times S^1(L)$  betrachtet werden. Daher ist die Verwendung der  $O(3)$  invarianten  $T = 0$  Lösungen in diesem Kapitel als eine zusätzliche Näherung anzusehen. Für eine konsistente Berechnung des Polyakov-Loops aus Energiedichte bei endlichen Temperaturen können die in Kap. 5 bestimmten Lösungen der Yang-Mills-Theorie auf  $\mathbb{R}^2 \times S^1(L)$  verwendet werden. Dies ist, ebenso wie die Bestimmung weiterer thermodynamischer Größen, eine Aufgabe für ein zukünftiges Projekt.



## 7. Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde der Deconfinement-Phasenübergang der Yang-Mills-Theorie in einem Variationszugang [13, 115] zur hamiltonschen Formulierung in Coulomb-Eichung untersucht.

Zunächst haben wir die wesentlichen Ergebnisse dieses Zugangs bei verschwindender Temperatur in Kap. 3 zusammengefasst. Mit einem gaußschen Ansatz für das Vakuum-Wellenfunktional der Yang-Mills-Theorie werden durch das Variationsprinzip Bewegungsgleichungen für die Korrelationsfunktionen abgeleitet. Dies sind gekoppelte Integralgleichungen für die Gluonenergie, die dem inversen Gluon-Propagator entspricht, für den Geist- und Coulomb-Formfaktor. Die analytischen Eigenschaften der Lösungen dieser Gleichungen bei asymptotisch großen und kleinen Energien haben wir ebenso wie die numerischen Lösungen [13, 82, 83, 88, 115] ausführlich dargestellt. Dabei unterscheiden wir zwischen subkritischen (infrarot-endlichen) und kritischen (infrarot-divergenten) Lösungen. Letztere sind im Einklang mit dem Gribov-Zwanziger-Confinement-Szenario, da sie die Horizont-Bedingung erfüllen und ein linear ansteigendes nicht-abelsches Coulomb-Potential erzeugen können. Wir sind auf die Wahl der Renormierungskonstanten des Geist-Formfaktors als wesentliche Randbedingung des Integralgleichungssystems eingegangen. Diese legt fest, welche der – von der analytischen Infrarotanalyse vorhergesagten – Lösungen, realisiert wird.

Endliche Temperaturen haben wir auf zwei unterschiedliche Weisen eingeführt. In Kap. 4 geschah dies durch die Untersuchung des großkanonischen Ensembles der Yang-Mills-Theorie im Hamiltonzugang. Hierbei haben wir für den Yang-Mills-Hamilton-Operator in der Dichtematrix einen Ansatz in Form eines Einteilchenoperators verwendet. Der thermische Erwartungswert der Energie wurde mit einer Quasiteilchen-Basis des gluonischen Fockraums berechnet, die auf einem gaußschen Wellenfunktional für den Vakuumzustand aufbaut. Den Ansatz für die Dichtematrix und für das Wellenfunktional haben wir durch die Verwendung des Variationsprinzips für die freie Energie optimiert. Die sich hieraus ergebenden Bewegungsgleichungen, die für verschwindende Temperatur die vorangegangenen Ergebnisse reproduzieren, haben wir sowohl analytisch im Hochtemperaturlimes, als auch numerisch bei endlichen Temperaturen untersucht. Dabei konnten wir zeigen, dass oberhalb einer kritischen Temperatur eine neue Lösung des gekoppelten Integralgleichungssystems für den Geist-Formfaktor und die Gluonenergie existiert. Diese Lösung ist gekennzeichnet von einer infrarot-endlichen Gluonenergie, deren effektive Masse mit steigender Temperatur zunimmt, und einem infrarot-divergenten Geist-Formfaktor, der gegenüber der  $T = 0$  Lösungen einen verringerten Infrarotexponenten aufweist. In den numerischen Rechnungen zeigt sich ein markanter Übergang des Infrarotverhaltens der Korrelationsfunktionen von den  $T = 0$  Lösungen zu dem Hochtemperaturverhalten. Diese Änderung haben wir mit dem Deconfinement-Phasenübergang identifiziert und eine kritische Temperatur von  $T_c = 290$  MeV für die Eichgruppe  $SU(2)$  bestimmt.

Alternativ zur Betrachtung des großkanonischen Ensembles haben wir in Kap. 5 endliche Temperaturen durch Kompaktifizierung einer räumlichen Dimension eingeführt. Dadurch ist die gesamte Temperaturabhängigkeit in dem Grundzustand der Yang-Mills-Theorie auf der räumlichen Mannigfaltigkeit  $\mathbb{R}^2 \times S^1(L)$  enthalten, wobei die inverse Länge der kompaktifizierten Dimension der Temperatur entspricht. Das zugehörige Wellenfunktional

des Grundzustandes haben wir durch das Variationsprinzip mit einem verallgemeinerten gaußschen Ansatz, der zwei verschiedene Variationskerne für die Freiheitsgrade parallel und orthogonal zu der kompaktifizierten Dimension berücksichtigt, bestimmt. Wir konnten analytisch zeigen, dass die entsprechenden Bewegungsgleichungen für die Gluonenergien und den Geist-Formfaktor das korrekte Null-Temperaturverhalten besitzen und sich für unendlich große Temperaturen – in Übereinstimmung mit der Dimensionalen-Reduktion – auf die Gleichungen einer  $2 + 1$  dimensionalen Theorie reduzieren. Die numerischen Lösungen dieser Gleichungen zeigen einen kontinuierlichen Übergang von dem Hochtemperaturverhalten mit dem Infrarotverhalten der  $d = 2$  dimensionalen Theorie bei  $T = 0$  und dem Potenzverhalten mit dem Infrarotexponenten der dreidimensionalen Lösung bei  $T = 0$ .

Mit dem effektiven Potential des Polyakov-Loops haben wir in Kap. 6 einen Ordnungsparameter des Deconfinement-Phasenübergangs im Hamiltonzugang untersucht. Hierfür haben wir die Energiedichte durch eine Verallgemeinerung des Variationszugangs in Anwesenheit eines Hintergrundfeldes abgeleitet. Das effektive Potential bei endlichen Temperaturen haben wir aus der Energiedichte durch Kompaktifizierung einer räumlichen Dimension und mit Hilfe der zuvor bestimmten Vakuumlösungen für die Gluonenergie und den Geist-Formfaktor berechnet. Aus dem Temperaturverlauf des Minimums des effektiven Potentials und dem Wert des Polyakov-Loops ergaben sich sowohl die kritischen Temperaturen  $T_c \approx 269$  MeV und  $T_c \approx 283$  MeV für die Eichgruppen SU(2) und SU(3), als auch die korrekten Ordnungen der Phasenübergänge. Diese Betrachtungen ermöglichen einen Einblick in die qualitativen Vorgänge beim Phasenübergang und verknüpfen die eichabhängigen Korrelationsfunktionen mit einem Ordnungsparameter.

Sowohl die Untersuchungen mit dem großkanonischen Ensemble, als auch mit einer kompaktifizierten räumlichen Dimension haben gezeigt, dass im Hamiltonzugang erfolgreich endliche Temperaturen eingeführt werden können und ein Deconfinement-Phasenübergang auftritt. Die kritischen Temperaturen sind untereinander und mit den Ergebnissen aus Gitterrechnungen vergleichbar. Der Zugang mit einer kompaktifizierten Dimension ist konzeptionell vorteilhaft, da keine Näherung für die Dichtematrix erforderlich ist. Jedoch ist die numerische Bestimmung der Bewegungsgleichungen auf der räumliche Mannigfaltigkeit  $\mathbb{R}^2 \times S^1(L)$  aufgrund der gebrochenen O(3) Symmetrie aufwändiger.

Es gibt zahlreiche Ansatzpunkte für bereits laufende bzw. zukünftige Projekte. Die Lösungen der Bewegungsgleichungen des Hamiltonzugangs auf der kompaktifizierten räumlichen Mannigfaltigkeit  $\mathbb{R}^2 \times S^1(L)$  sind die Basis für eine vollständig konsistente Berechnung des effektiven Potentials des Polyakov-Loops. Ausgehend hiervon können thermodynamische Größen, wie der Druck der Yang-Mills-Theorie, bestimmt werden. Das effektive Potential des Polyakov-Loops stellt außerdem einen vielversprechenden Zugang zum Phasendiagramm der *vollen* QCD – unter Berücksichtigung von Quarks – bei endlichen Dichten und Temperaturen dar [137]. Im Hamiltonzugang zur reinen Yang-Mills-Theorie fehlen noch Ergebnisse für die elementaren Propagatoren, die das Niveau der Rainbow-Ladder-Näherung verlassen. Um diese Aufgabe zu bewältigen, wurden bereits die Vertex-Gleichungen des Hamiltonzugangs analytisch und numerisch untersucht [47–49, 89]. Eine selbstkonsistente Hinzunahme dieser Bewegungsgleichungen zu den Gleichungen für die Korrelationsfunktionen fehlt bisher, ist aber für die Überprüfung des Einflusses der getätigten Näherungen wünschenswert. Welche Effekte bei endlichen Temperaturen in den Korrelationsfunktionen in Coulomb-Eichung auf dem Gitter beobachtet werden, ist Gegenstand aktueller Projekte [138].

Entscheidende Schritte für eine Erweiterung des Variationszugangs zur hamiltonschen Formulierung der QCD sind bereits getätigt [139–141]. Jedoch steht die Berechnung der

---

nicht-perturbativen Quark-Eigenschaften mit der Rückkopplung an den gluonischen Sektor – auf den wir in dieser Arbeit den Fokus gelegt haben – aus. In [79] wurde der Variationszugang für die Untersuchung der Korrelationsfunktionen der  $SU(N)$  Yang-Mills-Theorie in Landau-Eichung verwendet. Ausgehend von der effektiven Wirkung wurden hierzu Integralgleichungen für den Geist-Formfaktor und die Gluonenergie abgeleitet. Nach Renormierung und Durchführung der Infrarotanalyse konnten diese Gleichungen, basierend auf den hier beschriebenen Methoden, numerisch gelöst und mit Gitterrechnungen in Landau-Eichung verglichen werden. Auch dieser kovariante Variationszugang wurde bereits auf endliche Temperaturen erweitert [142].

Schließlich wollen wir festhalten, dass die Berechnung von Integralgleichungssystemen, wie sie im Rahmen des Hamiltonzugangs auftreten, eine numerische Aufgabe ist, die häufig bei den Kontinuumsmethoden der Quantenfeldtheorie vorkommt. Dies gilt beispielsweise auch für die Zugänge basierend auf den Dyson-Schwinger- und Renormierungsgruppen-Gleichungen in den verschiedenen Eichungen. Während die Problemstellung vergleichsweise einfach ist, ist der Weg zur numerischen Lösung oft beschwerlich. Dies hängt unter anderem mit der komplizierten analytischen Form der Gleichungen, aber auch mit den zahlreichen technischen Parametern zusammen, die bei den Lösungsroutinen, die wir im Anh. B exemplarisch darstellen, eine Rolle spielen. Um bei der Untersuchung derartiger Gleichungen den Schwerpunkt nicht auf die Numerik legen zu müssen, gibt es bereits Programmiergerüste, um die notwendigen Schritte möglichst zu automatisieren [108, 143]. Daran anknüpfend wäre ein noch universelleres und leichter zugängliches Werkzeug wünschenswert, das einen Teil der immer wiederkehrenden numerischen Arbeit standardisiert.



# A. Numerische Methoden

In diesem Anhang präsentieren wir grundlegende numerische Methoden zur Interpolation und Integration von Funktionen. Diese finden insbesondere Anwendung bei der Lösungsmethode für die Dyson-Schwinger-Gleichungen, die wir in Anh. B besprechen.

## A.1. Interpolation mit Tschebyschow-Polynomen

Um eine analytisch unbekannt Funktion  $f(x)$  numerisch darzustellen, ist es notwendig diese Funktion auf eine endliche Anzahl diskreter Funktionswerte  $\{f(x_i)\}$  an Stützstellen  $\{x_i\}$  zu beschränken. Aus diesen diskreten Werten kann mittels einer Interpolationsmethode wieder eine kontinuierliche Funktion  $\tilde{f}(x) \approx f(x)$  erzeugt werden, die die ursprüngliche Funktion approximiert. In diesem Abschnitt fassen wir die wichtigsten Gleichungen für die Tschebyschow-Interpolation<sup>1</sup> zusammen.

### A.1.1. Tschebyschow-Polynome

Die *Tschebyschow-Polynome erster Art*  $T_n(x)$  sind definiert durch [144]

$$T_n(x) := \cos(n\theta), \quad x = \cos(\theta) \in [-1, 1], \quad \theta \in [0, \pi]. \quad (\text{A.1})$$

Sie erfüllen die Rekursionsbeziehung

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (\text{A.2})$$

mit der Anfangsbedingung  $T_0(x) = 1$  und  $T_1(x) = x$ . Aus der Beziehung (A.2) folgt, dass  $T_n(x)$  ein Polynom der Ordnung  $n$  ist. Diese Polynome haben vielfältige Anwendungen in der Numerik und der Mathematik, siehe z.B. [144, 145].

Ein Tschebyschow-Polynom  $T_n(x)$  hat im Intervall  $[-1, 1]$   $n$ -Nullstellen bei

$$x_i = \cos\left(\frac{i + 1/2}{n}\pi\right), \quad i = 0, \dots, n - 1. \quad (\text{A.3})$$

Diese Nullstellen werden auch *Tschebyschow-Knoten* genannt und sind beliebte Stützstellen für Interpolationspolynome, da sie Runges-Phänomen minimieren [144].

Im offenen Intervall  $(-1, 1)$  besitzt  $T_n(x)$   $n - 1$  Extrema (mit waagrechter Tangente) bei

$$x_i = \cos\left(\frac{i + 1}{n}\pi\right), \quad i = 0, \dots, n - 2. \quad (\text{A.4})$$

Da auch die Randwerte  $x = \pm 1$  extremal sind, hat  $T_n$  in  $[-1, 1]$   $n + 1$ -Extrema bei

$$x_i = \cos\left(\frac{i}{n}\pi\right), \quad i = 0, \dots, n. \quad (\text{A.5})$$

Eine besondere Eigenschaft der Tschebyschow-Polynome ist, dass alle Extrema den Wert  $T_n(x_i) = \pm 1$  haben.

---

<sup>1</sup>Alternative Schreibweisen sind: Tschebyscheff, Tschebyshev oder Chebychev.

### A.1.2. Tschebyschow-Interpolation

Die Tschebyschow-Polynome bilden mit der Gewichtsfunktion  $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$  auf dem Intervall  $[-1, 1]$  ein orthogonales Funktionensystem. Daher kann eine Funktion  $f(x)$  auf  $[-1, 1]$  wie folgt entwickelt werden

$$f(x) = \sum'_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x), \quad (\text{A.6})$$

wobei  $\sum'$  kennzeichnet, dass der  $n = 0$  Term in der Summe halbiert werden muss. Die Entwicklungskoeffizienten  $a_n$  sind mit der Gewichtsfunktion  $w(x)$  gegeben durch das innere Produkt

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 dx \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) T_n(x) \equiv \frac{2}{\pi} \int_0^\pi d\theta f(\cos(\theta)) T_n(\cos(\theta)). \quad (\text{A.7})$$

Die  $N$ te-Partialsumme der Reihe (A.6) ist ein Interpolationspolynom

$$\tilde{f}(x) = \sum'_{n=0}^{N-1} a_n T_n(x) \quad (\text{A.8})$$

für die Funktion  $f(x)$ . Die Entwicklungskoeffizienten  $a_n$  können berechnet werden durch

$$a_n = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k) T_n(x_k) \quad (\text{A.9})$$

mit den Funktionswerten  $f(x_k)$  an den Tschebyschow-Knoten  $x_k$  (A.3).<sup>2</sup> [144, 146] Die Summe (A.8) kann für beliebige  $x \in [-1, 1]$  effektiv mit dem Clenshaw-Algorithmus ausgewertet werden [146]. An den Knoten  $x_i$  (A.3) ist das Interpolationspolynom (A.8) exakt [144]. Gl. (A.9) und Gl. (A.8) sind die Grundlage für eine Darstellung der Funktion  $f(x)$  durch Tschebyschow-Polynome.

## A.2. Numerische Integration

In diesem Abschnitt werden wir eine Übersicht über grundlegende Methoden der numerischen Integration geben, die dazu dienen den Wert des Integrals

$$I[f] := \int_a^b dx f(x) \quad (\text{A.10})$$

zu berechnen. Der *Integrand*  $f(x)$  sei eine beliebige, Riemann-integrierbare Funktion und das Intervall  $[a, b]$  endlich. Alle hier dargestellten *Quadraturregeln* ersetzen das analytische Integral (A.10) durch eine endliche Summe

$$\int_a^b dx f(x) \approx \sum_{i=0}^{N-1} w_i f(x_i), \quad x_i \in [a, b] \quad (\text{A.11})$$

über gewichtete Funktionswerte  $f(x_i)$ . Die *Gewichte*  $\{w_i\}$  und *Knoten*  $\{x_i\}$  unterscheiden sich je nach Quadraturregel. Wenn die Endpunkte des Intervalls  $[a, b]$  als Knoten verwendet werden, wird die Quadraturregel *geschlossen* und andernfalls *offen* genannt. Wir

---

<sup>2</sup>Diese Formel für das Integral (A.7) entspricht einer diskrete Kosinustransformation (DCT-II), bzw. kann auch durch die Verwendung der Trapezregel abgeleitet werden.

diskutieren für die Wahl der Gewichte  $w_i$  und für die Verteilung der Knoten  $x_i$  drei Verfahren: *Newton-Cotes*-, *Gauß*- und *Fejér-Clenshaw-Curtis*-Integration. Dabei ist zu beachten, dass die beiden zuletzt genannten Methoden nur auf dem Intervall  $[-1, 1]$  definiert sind und das Integral (A.10) deshalb vor Anwendung der Quadraturregeln ggf. transformiert werden muss. Dies kann z.B. durch die affine Variablentransformation

$$s(x) = \frac{2x}{b-a} - \frac{a+b}{b-a}, \quad s(x) \in [-1, 1] \quad (\text{A.12})$$

geschehen.

Der Fehler, der durch die Diskretisierung (A.11) des analytischen Integrals entsteht, ist

$$E[f](N) := \int_a^b dx f(x) - \sum_{i=0}^{N-1} w_i f(x_i). \quad (\text{A.13})$$

Das Verhalten des Fehlers  $E[f](N)$ , als Funktion der Stützstellen  $N$ , ist für  $N \rightarrow \infty$  von der Quadraturregel und dem Integranden abhängig. Wie das Folgende zeigt, kann eine Methode gewählt werden, die bereits bei endlichem  $N$  das Integral exakt bestimmt. Für weitere Details zu den Integrationsmethoden und deren theoretischem Fehlerverhalten verweisen wir auf [147, 148].

**Newton-Cotes** Methoden mit einer äquidistanten Verteilung der Stützstellen  $x_i$  im Intervall  $[a, b]$  werden Newton-Cotes-Quadraturregeln genannt. Geschlossene Regeln der Ordnung  $N$  haben  $N + 1$  Knoten bei

$$x_i = a + hi, \quad h := \frac{b-a}{N}, \quad i = 0, \dots, N \quad (\text{A.14})$$

mit der Schrittweite  $h$ . Für die Berechnung der Gewichte  $w_i$  wird der Integrand  $f(x)$  durch Lagrange-Polynome  $l_i(x)$  approximiert

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^N l_i(x) f(x_i), \quad (\text{A.15})$$

wobei die äquidistanten Knoten  $x_i$  als Stützstellen der Polynome verwendet werden. Mit der Darstellung (A.15) für den Integranden  $f(x)$  gilt für das Integral (A.10) die folgende Näherung

$$\int_a^b dx f(x) \approx \sum_{i=0}^N f(x_i) \int_a^b dx l_i(x) = \sum_{i=0}^N f(x_i) w_i, \quad (\text{A.16})$$

wobei die Gewichte definiert sind durch

$$w_i := \int_a^b dx l_i(x). \quad (\text{A.17})$$

Für die Ordnung  $N = 1$  folgt aus (A.16) die bekannte Trapezregel

$$\int_a^b dx f(x) = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]. \quad (\text{A.18})$$

Die Trapezregel approximiert den Integranden linear im Intervall  $[a, b]$  und ist somit exakt für Polynome der Ordnung 1. Allgemein ist die Newton-Cotes-Quadratur der Ordnung  $N$  exakt für Polynome  $N$ ter Ordnung. Weitere bekannte geschlossene Regeln sind zum Beispiel *Simpson's* ( $N = 2$ ) und *Boole's* ( $N = 3$ ), welche exakt für quadratische, bzw. kubische Integranden sind. Die einfachste offene Newton-Cotes-Methode ist die Mittelpunkts-Regel.

Für hohe Ordnungen  $N$  sind die Gewichte  $w_i$  nicht länger positiv. Dies ist eine Folge von Runge-Phänomenen, d.h. die Interpolation (A.15) beginnt an den Rändern stark zu oszillieren und die Summation über die mit  $w_i$  gewichteten Funktionswerte ist numerisch instabil. Für die Integration von Funktionen, bei der eine große Zahl von Knoten  $x_i$  erforderlich ist, werden daher *zusammengesetzte Newton-Cotes-Regeln* verwendet. Hierbei wird  $[a, b]$  in  $M$  Intervalle unterteilt und in jeder Unterteilung die gleiche Newton-Cotes-Regel einer niedrigeren Ordnung  $N$  verwendet.<sup>3</sup> Dadurch bleiben die Gewichte auch bei einer großen Anzahl von Stützstellen positiv. Die wichtigste Variante ist die zusammengesetzte Trapezregel

$$\int_a^b dx f(x) = \sum_{i=0}^{N_z-1} w_i f(x_i), \quad w_i = h - \frac{1}{2} (\delta_{0i} - \delta_{(N_z-1)i}), \quad x_i = a + hi, \quad h = \frac{b-a}{N_z-1} \quad (\text{A.19})$$

mit  $MN + 1 = N_z$  Knoten im Intervall  $[a, b]$ .

Newton-Cotes-Regeln haben bei gleicher Knotenanzahl eine geringerer Genauigkeit wie die nächsten beiden Methoden. Sie sind aber für alle (Riemann-integrierbare) Integranden  $f(x)$  einsetzbar und eignen sich, wegen der Gleichverteilung der Stützstellen, besonders für adaptive Intergrationverfahren. In dieser Arbeit sind einige Integrationen mit einer adaptiven Simpson-Regel oder Mittelpunkts-Regel durchgeführt worden.

**Gauß-Quadratur** Bei der Gauß-Quadratur betrachten wir das verallgemeinerte Integral

$$I[f] = \int_{-1}^1 dx f(x)w(x) \quad (\text{A.20})$$

mit der Gewichtsfunktion  $w(x)$ .<sup>4</sup> Für die Integration wird die Funktion  $f(x)$  in bezüglich  $w(x)$  orthogonale Polynome  $\Theta_n(x)$  entwickelt. Die Position der Knoten  $x_i$  und die Gewichte  $w_i$  werden dahingehend optimiert, dass eine Quadraturregel der Ordnung  $N$  für Polynome der Ordnung  $2N - 1$  exakt ist [147]. Nach dem Fundamental Satz der Gauß-Integration [146] sind diejenigen Knoten optimal, die den Nullstellen der orthogonalen Polynome  $\Theta_n(x)$  entsprechen. Knoten und Gewichte sind somit von der Gewichtsfunktion  $w(x)$  abhängig. Die Stützstellen  $\{x_i\}$  der Gauß-Integration sind nicht äquidistant im Intervall  $[-1, 1]$  verteilt und in jeder Ordnung  $N$  verschieden. Im Gegensatz zur Newton-Cotes-Intergration sind die Gewichte  $w_i$  jedoch positiv.

Die *Gauß-Legendre* Integration ist die bekannteste Variante der Gauß-Quadratur. Sie ergibt sich für  $w(x) = 1$ , womit die Legendre-Polynome  $P_n(x)$  die orthogonalen Polynome sind. Die Knoten  $x_i$  sind die Nullstellen von  $P_n(x)$  und die Gewichte  $w_i$  ergeben sich aus [148]

$$w_i = \frac{2}{(1-x_i^2)P_n'(x_i)}. \quad (\text{A.21})$$

Für ein numerisches Verfahren zur (näherungsweise) Bestimmung der Knoten und Gewichte verweisen wir auf [146].

Andere Gauß-Quadraturregeln sind z.B. die Gauß-Tschebyschow ( $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ ) oder die Gauß-Laguerre Quadratur ( $w(x) = e^{-x}$ ). Erstere verwendet die Tschebyschow-Polynome als orthogonale Polynome, letztere die Laguerre-Polynome (auf  $[0, \infty)$ ). Durch die Wahl einer bestimmten Gewichtsfunktion können zum Beispiel integrable Singularitäten des Integranden aufgenommen werden und eine bessere Genauigkeit mit weniger Stützstellen erreicht werden.

---

<sup>3</sup>Werden verschiedene Newton-Cotes "Basis"-Regeln verwendet, ist die Genauigkeit durch die Methode mit der schlechtesten Ordnung beschränkt [146].

<sup>4</sup>Jeder Integrand  $f(x)$  kann aufgeteilt werden in  $f(x) \equiv g(x)w(x)$ .

**Fejér-Clenshaw-Curtis-Quadratur** Eine weitere Möglichkeit zur numerischen Integration ist die Fejér-Clenshaw-Curtis-Quadratur [149], die auf den Tschebyschow-Polynomen basiert und in den letzten Jahren neue Entwicklungen beschritten hat [150]. In der Praxis haben diese Methoden ein mit der Gauß-Quadratur vergleichbares Konvergenzverhalten [151].

Ausgangspunkt der Fejér-Clenshaw-Curtis-Quadratur ist die Darstellung des Integranden  $f(x)$  im Intervall  $[-1, 1]$  in Tschebyschow-Polynome  $T_n(x)$ . Ist diese Entwicklung bekannt, dann ist das Integral der Funktion  $f(x)$  gegeben durch

$$\int_{-1}^1 dx f(x) = \int_{-1}^1 dx \sum_{i=0}^{\infty} a_i T_i(x) = a_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2a_{2i}}{(1-4i^2)}. \quad (\text{A.22})$$

Die Koeffizienten  $a_n$  der Tschebyschow-Entwicklung sind ihrerseits durch das Integral (A.7) bestimmt. Mit Hilfe der Darstellung (A.9) für  $a_n$  kann (A.22) in Form einer Quadraturregel

$$\int_{-1}^1 dx f(x) \approx \sum_{i=0}^{N-1} w_i f(x_i) \quad (\text{A.23})$$

geschrieben werden. Die drei wichtigsten Varianten der Fejér-Clenshaw-Curtis-Quadratur unterscheiden wir anhand der Knoten  $x_i$ :

- **Clenshaw-Curtis-Regel**

Die Clenshaw-Curtis-Regel ergibt sich für die Wahl der Knoten an den  $N$ -Extrema

$$x_i = \cos(\theta_i), \quad \theta_i = \frac{i}{N-1}\pi, \quad i = 0, \dots, N-1 \quad (\text{A.24})$$

des Tschebyschow-Polynoms  $T_{N-1}(x)$  mit Randpunkten bei  $x = \pm 1$ . Die Gewichte  $w_i$  sind gegeben durch [148, 150]

$$w_i = \frac{2}{N-1} \sum_{j=0}^{(N-1)/2} \prime \frac{1}{1-4j^2} \cos\left(\frac{2ji}{N-1}\pi\right). \quad (\text{A.25})$$

Hier bedeutet  $\prime$ , dass der erste und letzte Term in der Summe halbiert werden muss. Die Clenshaw-Curtis-Methode ist eine geschlossene Intergrationsregel.

- **Fejérs erste Regel**

Mit den  $N$  Nullstellen des Tschebyschow-Polynoms  $T_N$  [vergl. (A.3)]

$$x_i = \cos(\theta_i), \quad \theta_i = \frac{i+1/2}{N}\pi, \quad i = 0, \dots, N-1 \quad (\text{A.26})$$

als Stützstellen ergeben sich die Gewichte [147, 150]

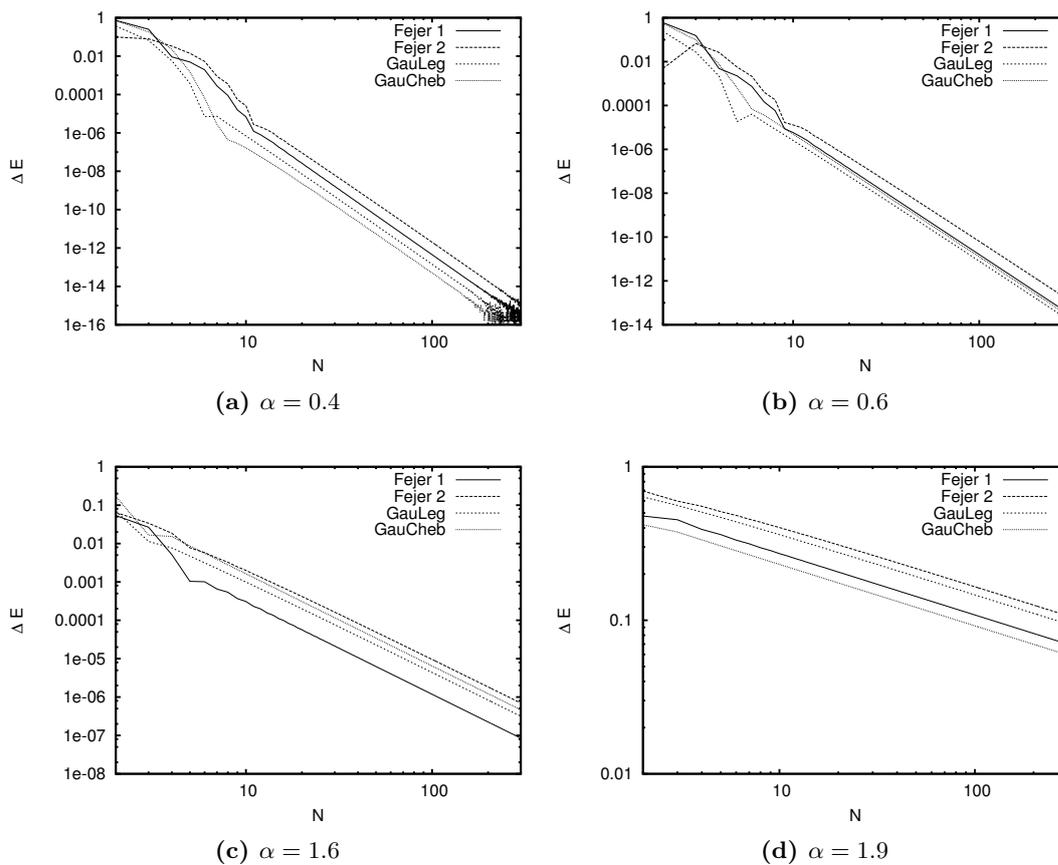
$$w_i = \frac{4}{N} \sum_{j=0}^{N/2} \prime \frac{1}{1-4j^2} \cos(2j\theta_i). \quad (\text{A.27})$$

Diese Wahl wird Fejérs erste Regel genannt und ist eine offene Quadraturmethode.

- **Fejérs zweite Regel**

Schließlich folgt Fejérs zweite Regel mit den Stützstellen an den  $N$  Extrema von  $T_{N+1}(x)$  im Intervall  $(-1, 1)$

$$x_i = \cos(\theta_i), \quad \theta_i = \frac{i+1}{N+1}\pi, \quad i = 0, \dots, N-1 \quad (\text{A.28})$$



**Abbildung A.1.:** Der relative Fehler  $\Delta E[f](N)$  der verschiedenen Integrationsregeln als Funktion der Zahl der Stützstellen  $N$  für das Winkelintegral (A.30) und für die Fälle  $\alpha \in \{0.3, 0.6, 1., 1.9\}$  im doppel-logarithmischen Plot.

mit den Gewichten [147, 150]

$$w_i = \frac{4 \sin(\theta_i)}{N+1} \sum_{j=0}^{(N-1)/2} \frac{1}{2j+1} \sin((2j+1)\theta_i). \quad (\text{A.29})$$

Auch dies ist eine offene Quadraturregel.

Diese Quadraturregeln sind zusammen mit der Darstellung von numerischen Funktionen durch eine Tschebyschow-Interpolation besonders interessant, da die Funktionswerte an den Stützstellen bereits bekannt sind.

### A.2.1. Numerischer Test der Integrationsmethoden

Für einen numerischen Test der Integrationsregel verwenden wir ein Winkelintegral der Form

$$I = \int_0^\pi d\theta \sin(\theta)^3 \left( \frac{1}{1 + \cos \theta} \right)^\alpha. \quad (\text{A.30})$$

Es existiert für  $\alpha < 2$  und hat den analytischen Wert  $I = 2^{3-\alpha}/(6 - 5\alpha + \alpha^2)$ . Für  $1 < \alpha < 2$  hat der Integrand an der oberen Grenze des Integrationsbereiches eine integrierbare Singularität, da er sich dort wie  $1/(\pi - \theta)^{2\alpha-3}$  verhält. In Abb. A.1 ist der relative

Fehler  $\Delta E(N) = E[f](N)/I[f]$  des numerisch ausgewerteten Integrals für die Methoden Fejérs erste Regel, Fejérs zweite Regel, Gauss-Legendre und Gauss-Tschebyschow dargestellt. Diese Ergebnisse, wie auch detaillierte Untersuchungen [152], zeigen, dass Fejérs zweite Regel das schlechteste Konvergenzverhalten hat, während Fejérs erste Regel mit der Genauigkeit der Gauß-Legendre und Gauß-Tschebyschow-Quadratur vergleichbare Resultate liefert. Insbesondere wenn an dem Rand des Intergrationsgebietes eine integrable Singularität vorhanden ist, erweist sich Fejérs erste Regel als robuste Alternative zur Gauss-Legendre-Quadratur.



## B. Rezepte für Integralgleichungen

In diesem Anhang besprechen wir eine Methode zur numerischen Lösung von Integralgleichungen. Diese Methode [82, 95, 103–106] gehört seit einigen Jahren zum Handwerkszeug beim Umgang mit Dyson-Schwinger-Gleichungen wie sie in dieser Arbeit auftreten. Sie kann auf ein *iteratives Nyström* Verfahren [153] zurückgeführt werden. Eine umfassende mathematische und numerische Aufarbeitung dieser Vorgehensweise bei Dyson-Schwinger Gleichung hat jedoch nicht stattgefunden. Wir fassen in diesem Anhang die “Zutaten” dieser Lösungsprozedur zusammen und gehen konkret auf deren Anwendung bei einer Dyson-Schwinger Gleichung ein.

Allgemeine Lösungsverfahren für lineare und nicht-lineare Integralgleichungen sind z.B. in [154, 155] zu finden.

### B.1. Form der Integralgleichungssysteme

Alle Integralgleichungen in dieser Arbeit lassen sich zurückführen auf die Form

$$F(x) = g(x) + \int_a^b dy K(x, y, F), \quad (\text{B.1})$$

wobei  $F(x)$  unbekannt ist, während  $K(x, y, F)$  und  $g(x)$  vorgegebene Funktionen sind. Der *Kern*  $K$  kann von der externen Variable  $x$ , der Integrationsvariable  $y$  und der unbekannt Funktion  $F$  abhängig sein. Diese Form der Integralgleichung wird *Fredholm Integralgleichung der 2. Art* genannt. Falls der Kern  $K$  linear von der Funktion  $F$  abhängt

$$K(x, y, F) \equiv K(x, y)F(y), \quad (\text{B.2})$$

heißt die Integralgleichung *linear*.

Für Gl. (B.1) werden wir auch in Kurzform

$$F(x) = \mathcal{I}[F](x) \quad (\text{B.3})$$

verwenden, wobei  $\mathcal{I}[F]$  die gesamte rechte Seite der Gleichung repräsentiert. Die numerische Aufgabenstellung ist das Auffinden einer Lösung  $F(x)$  für gegebene Funktionen  $K$  und  $g$ .

Die in dieser Arbeit vorkommenden Dyson-Schwinger-Gleichungen sind durch ihre Konstruktion hochgradig gekoppelte Gleichungen und in der Regel *nicht-linear*. Entsprechend gilt dies auch für die hier zu behandelnden Integralgleichungen. Als Beispiel sei ein System

$$\begin{aligned} F_1(x) &= g_1(x) + \int_a^b dy K_1(x, y, F_1, F_2), \\ F_2(x) &= g_2(x) + \int_a^b dy K_2(x, y, F_1, F_2) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

von zwei unbekannt Funktionen  $F_1, F_2$  gegeben. Die Kopplung wird in diesem Fall durch die Kerne  $K_1$  und  $K_2$  induziert, die von beiden Funktionen abhängig sind.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Oft ist die Abhängigkeit bezüglich einer Funktion linear, sodass wir schreiben können

$$K_1(x, y, F_1, F_2) \equiv K_1(x, y, F_1)F_2(y). \quad (\text{B.5})$$

Formal können wir jedes System der Form (B.4) mit  $M$  verschiedenen, unbekannt Funktionen  $F_i(x)$  in die Form

$$\mathcal{F}(x) := \begin{pmatrix} F_1(x) \\ \vdots \\ F_M(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_M(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^\infty dy K_1(x, y, \mathcal{F}) \\ \vdots \\ \int_0^\infty dy K_M(x, y, \mathcal{F}) \end{pmatrix} \quad (\text{B.6})$$

überführen und diese wieder kompakt schreiben als

$$\mathcal{F}(x) = \mathcal{I}[\mathcal{F}](x). \quad (\text{B.7})$$

Für die folgenden Betrachtungen können wir daher von dieser Form der Gleichung ausgehen und die Kopplung formal außer Acht lassen.

## B.2. Darstellung der Integralgleichung

In diesem Abschnitt stellen wir die Integralgleichung (B.1) bzw. das Integralgleichungssystem (B.7) auf eine für numerische Verfahren geeignete Weise dar. Hierfür diskretisieren wir das auftretende Integral sowie die unbekannt Funktion.

### B.2.1. Diskretisierung des Integrals

Wir verwenden die *Nyström* Methode [153] und ersetzen das Integral in Gl. (B.1) durch eine numerische Quadraturregel [Abschn. A.2]<sup>2</sup>

$$\int_a^b dy K(x, y, F) \approx \sum_{j=0}^{N_x-1} w_j K(x, y_j, F) \quad (\text{B.8})$$

mit  $N_x$  Gewichten  $\{w_j\}$  und Knoten  $\{y_j\}$ . Wir vernachlässigen hier den Fehler, der durch die Verwendung einer diskreten Integrationsmethode entsteht. Die Integralgleichung lautet jetzt

$$F(x) = g(x) + \sum_{j=0}^{N_x-1} w_j K(x, y_j, F). \quad (\text{B.9})$$

Im nächsten Schritt fordern wir die Gültigkeit dieser Gleichung an  $N$  äußeren Stützstellen  $\{x_i\} \subset [A, B]$

$$F(x_i) = g(x_i) + \sum_{j=0}^{N_x-1} w_j K(x_i, y_j, F), \quad (\text{B.10})$$

wobei das Intervall  $[A, B]$  nicht mit dem Intervall der Integration übereinstimmen muss. Gl. (B.10) ist ein Gleichungssystem für  $N$  diskrete Werte  $F_i \equiv F(x_i)$  der gesuchten Funktion. Insbesondere für nicht-lineare Kerne ist dieses System nicht geschlossen, da die Funktion  $F(x)$  auf der rechten Seite von Gl. (B.10) an Punkten ausgewertet wird, die auf der linken Seite nicht vorkommen. Dies kann auch nicht durch geeignete Wahl der Stützstellen  $x_i$  bzw. der Integrationsknoten  $y_i$  oder zusätzliches Tabellieren von Funktionswerte von  $F$  umgangen werden. Mit einer geeigneten Darstellung der Funktion  $F$  außerhalb der Stützstellen  $\{x_i\}$  muss das System (B.10) vervollständigt werden.

---

<sup>2</sup>Dies erweitert die Möglichkeiten der Lösungsalgorithmen.

<sup>2</sup>Ggf. nach einer geeigneten Variablentransformation des Intervalls  $[a, b]$  [vergl. (A.12)].

### B.2.2. Darstellung der unbekanntem Funktion

Die unbekanntem Funktion  $F(x)$  kann auf dem Intervall  $[A, B]$  in ein bekanntem Funktionensystem entwickelt werden. Häufig wird hierfür eine Tschebyschow-Entwicklung

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 'a_n T_n(s(x)) \quad (\text{B.11})$$

verwendet [vgl. Anh. A], wobei  $T_n(x)$  die Tschebyschow-Polynome sind und die Funktion  $s(x)$  das Intervall  $[A, B]$  auf  $[-1, 1]$  [vergl. (A.12)] transformiert. Mit dieser Darstellung von  $F(x)$  lässt sich die Integralgleichung (B.10) schreiben als

$$\sum_{n=0}^{N-1} a_n T_n(s(x_i)) = g(x_i) + \sum_{j=0}^{N_x-1} w_j K \left( x_i, y_j, \sum_{n=0}^{N-1} a_n T_n(s(y_j)) \right). \quad (\text{B.12})$$

Diese Methode überführt die Integralgleichung in ein Gleichungssystem für die  $N$  Entwicklungskoeffizienten  $a_n$ , statt für die Funktionswerte  $F_i$ .

Eine Darstellung wie in Gl. (B.11) kann aber auch ausschließlich als Interpolationsmethode verwendet werden, um die Funktion außerhalb der Stützstellen  $\{x_i\}$  fortzusetzen und um das ursprüngliche Gleichungssystem (B.10) zu vervollständigen. In diesem Fall werden die Koeffizienten  $a_n$  durch die  $N$  Funktionswerte  $F_i$  an den (auf das Intervall  $[A, B]$  transformierten) Tschebyschow-Knoten (A.3) bestimmt.

Eine nicht-differenzierbare Alternative zur Verwendung von Tschebyschow-Polynomen ist eine stückweise lineare Interpolation

$$F(x) = F(x_{i+1}) + \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i), \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \quad (\text{B.13})$$

zwischen zwei tabellierten Funktionswerten  $F_i$  und  $F_{i+1}$ .

Der Vorteil eines solchen Verfahrens ist, dass die Stützstellen  $x_i$  der Funktion  $F$  im Intervall  $[A, B]$  frei gewählt werden können. Insbesondere können für im Intervall  $[A, B] = [a, b]$  die Gleichen Stützstellen wie bei der Quadraturregel verwendet werden. Ein solches Vorgehen kann durch die Verwendung eines Spline-Verfahrens [146], das die Differenzierbarkeit des Interpolationspolynoms an den Knoten  $x_i$  gewährleistet, verbessert werden.

Bisher beschränkt sich die Darstellung der Funktion  $F(x)$  auf das Intervall  $[A, B]$ , indem Funktionswerte  $F_i$  durch die Integralgleichung (B.10) bestimmt werden. Es ist unter Umständen unvermeidbar, dass die rechte Seite der Integralgleichung diesen Darstellungsbereich verlässt und die Funktion in Bereiche außerhalb von  $[A, B]$  extrapoliert werden muss.

Eine triviale sowie stetige, aber nicht differenzierbare Extrapolation ist

$$F(x) = \begin{cases} F(x_0) & x \leq x_0 \\ F(x_{N-1}) & x \geq x_{N-1}, \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

wobei  $x_0$  und  $x_{N-1}$  jeweils die letzten Stützstellen vor dem Ende des Intervalls  $[A, B]$  sind. Wenn das asymptotische Verhalten  $F^{<,>}(x)$  der Funktion  $F(x)$  bekannt ist, kann die Fortsetzung

$$F(x) = \begin{cases} F^{<}(x) & x \leq x_0 \\ F^{>}(x) & x \geq x_{N-1} \end{cases} \quad (\text{B.15})$$

verwendet werden. Die asymptotischen Funktionen  $F^{<,>}(x)$  können Parameter enthalten, die von den Stützstellen der Funktion im Intervall  $[A, B]$  bestimmt werden. Diese beiden Methoden der Extrapolation erzeugen in der Regel Funktionen, die an den Punkten  $x_0$  und  $x_{N-1}$  nicht differenzierbar sind.

### B.3. Lösungsmethoden

In diesem Abschnitt besprechen wir Lösungsmethoden für die Integralgleichung, die zusammen mit einer Interpolation- und Extrapolationsmethode (z. B. Gl. (B.13) und Gl. (B.14)) geschlossen ist.

#### B.3.1. Lineare Kerne

Für lineare Integralgleichungen der Form (B.2) kann durch Verwendung der gleichen Stützstellen für die Integration und die Darstellung der unbekanntenen Funktion  $F(x)$ ,

$$x_i = y_i, \quad N = N_x, \quad (\text{B.16})$$

ein geschlossenes Gleichungssystem aufgestellt werden. Dies überführt die Integralgleichung (B.10) in

$$F_i = g_i + \sum_{j=0}^{N-1} w_j K_{ij} F_j, \quad i = 0, \dots, N-1 \quad (\text{B.17})$$

mit den Definitionen  $F_i := F(x_i)$ ,  $g_i := g(x_i)$  und  $K_{ij} := K(x_i, y_j)$ . Dieses System *linearer* Gleichungen kann in Matrixnotation geschrieben werden als

$$\mathbf{F} = \mathbf{g} + \tilde{K}\mathbf{F}, \quad \tilde{K}_{ij} := w_j K_{ij}. \quad (\text{B.18})$$

Eine Lösung der Integralgleichung folgt für einen beliebigen Vektor  $\mathbf{g}$  durch Invertieren der Matrix  $(\mathbb{1} - \tilde{K})$

$$\mathbf{F} = (\mathbb{1} - \tilde{K})^{-1} \mathbf{g}. \quad (\text{B.19})$$

Entsprechende Methoden werden in [146, 154, 155] besprochen.

#### B.3.2. Iterative Lösungsverfahren

Bei nicht-linearen Integralgleichungen gibt es die Möglichkeit iterative Verfahren zu verwenden. Diese Methoden benötigen einen initialen Startwert, den wir mit  $\mathcal{F}_0(x)$  bezeichnen.

Als Konvergenzkriterium für den Abbruch der Iteration verwenden wir die Norm

$$\|\mathcal{F}^{n+1} - \mathcal{F}^n\|_{\max} := \max_{i,j} \{|F_j^{n+1}(x_i) - F_j^n(x_i)|\}, \quad (\text{B.20})$$

die an die Maximumsnorm angelehnt ist. Diese kann auch modifiziert werden zu

$$\|\mathcal{F}^{n+1} - \mathcal{F}^n\| = \max_{i,j} \{|F_j^{n+1}(x_i) - F_j^n(x_i)| / |F_j^n(x_i)|\}, \quad (\text{B.21})$$

um den unterschiedlichen Größenordnungen in den gesuchten Lösungsfunktionen Rechnung zu tragen. Bei Unterschreitung einer Änderung  $\|\mathcal{F}^{n+1} - \mathcal{F}^n\| < \Delta E$  beenden wir die Iteration und betrachten das Ergebnis des letzten Iterationsschrittes als Lösung.

**Relaxierte Fixpunktiteration** Die Lösung ist ein Fixpunkt der Gl. (B.7). Daher kann durch die *Fixpunktiteration*

$$\mathcal{F}^{n+1} = \mathcal{I}[\mathcal{F}^n] \quad (\text{B.22})$$

versucht werden eine Lösung zu erzeugen.

Die Fixpunktiteration hat ein lineares Konvergenzverhalten, das unabhängig vom Startwert  $\mathcal{F}_0$  ist, ist jedoch insbesondere bei gekoppelten Gleichungen nicht stabil. Durch die Verwendung einer *Relaxation*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{n+1} &= (1-r)\mathcal{F}^n + r\mathcal{I}[\mathcal{F}^n] \\ &= r(\mathcal{I}[\mathcal{F}^n] - \mathcal{F}^n) + \mathcal{F}^n\end{aligned}\tag{B.23}$$

mit einem Parameter  $0 < r \leq 1$  kann die Fixpunktiteration stabilisiert werden. Typische Werte für  $r$  sind  $0.1 \leq r \leq 0.6$ .

**Newton-Verfahren** Das *Newton-Verfahren* für das Auffinden einer Lösung  $x_S$  der Gleichung  $0 = f(x) - x$  ist definiert durch die Iteration

$$x^{n+1} = x^n - \frac{f(x^n)}{f'(x^n)}.\tag{B.24}$$

Das quadratische Konvergenzverhalten des Newton-Verfahrens ist nur dann realisiert, wenn der Startwert  $x^0$  hinreichend nahe an der Lösung gewählt wird,  $f'(x_S) \neq 0$  gilt, sowie  $f''(x_S)$  beschränkt ist. Bei einem schlecht gewählten Startwert ist es möglich, dass die Iteration nicht konvergiert oder divergiert.

Die Verallgemeinerung von Gl. (B.24) für mehrdimensionale Gleichungen lautet  $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - J(\mathbf{x}_n)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}^n)$ , mit der Jacobi-Matrix  $J$ . Diese Gleichung lässt sich umformulieren zu

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \Delta\mathbf{x}_n\tag{B.25a}$$

$$J(\mathbf{x}_n)\Delta\mathbf{x}_n = \mathbf{f}(\mathbf{x}^n),\tag{B.25b}$$

wobei der Newton-Schritt  $\Delta\mathbf{x}_n$  aus der Lösung der linearen Gleichung (B.25b) bestimmt wird.

Die mehrdimensionale Newton-Iteration kann für die Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten  $a_n$  in Gl. (B.12) verwendet werden [105, 106]. Dabei wird eine Lösung der Gleichung  $0 = \mathcal{I}[\mathcal{F}] - \mathcal{F}$  gesucht. Die Jacobi Matrix besteht aus den Ableitungen  $J_{ij} = \frac{\partial \mathcal{I}[\mathcal{F}](x_i)}{\partial a_j}$ , wobei  $x_i$  die Tschebyschow-Knoten<sup>3</sup> sind.

Es ist zu beachten, dass für die Newton-Iteration die Ableitung der Funktion  $f(x)$  bestimmt werden muss und dies bei mehrdimensionalen Problemen aufwendig sein kann.<sup>4</sup> Das Newton-Verfahren kann durch Einführung einer Relaxation auf ‘‘schlechtere’’ Startwerte erweitert werden [106].

**Steffensen’s Methode** *Steffensen’s Methode* [156] ist dem Newton-Verfahren ähnlich, kommt jedoch ohne Ableitungen aus, indem diese durch einen Differenzenquotient ersetzt werden. Das Konvergenzverhalten dieser Methode ist ebenfalls quadratisch, jedoch an ähnliche Bedingungen bezüglich des Startpunktes geknüpft wie beim Newton-Verfahren. Für die Verwendung bei Dyson-Schwinger-Gleichungen schlagen wir eine relaxierte Variante

$$\mathcal{F}^{n+1} = \mathcal{F}^n + \frac{(\mathcal{I}[\mathcal{F}^n] - \mathcal{F}^n)^2}{2\mathcal{I}[\mathcal{F}^n] - \mathcal{I}[r(\mathcal{I}[\mathcal{F}^n] - \mathcal{F}^n) + \mathcal{F}^n] - \mathcal{F}^n}\tag{B.26}$$

mit einem Parameter  $0 < r \leq 1$  vor. Für dieses Verfahren muss eine vorangegangene Iteration zusätzlich gespeichert werden. Vergleichbares ist bereits in der Literatur beschrieben [157].

<sup>3</sup>Oder die Knoten einer anderen geeigneten Entwicklung in ein Funktionensystem.

<sup>4</sup>Die Ableitungen der durch die Tschebyschow-Interpolation dargestellten Funktionen  $F$  nach den Entwicklungskoeffizienten kann jedoch analytisch berechnet werden:  $\frac{\partial F(x)}{\partial a_n} = T_n(x)$ , ( $0 \leq n \leq N-1$ ).

## B.4. Dyson-Schwinger-Gleichung in $d$ Dimensionen

Die vorherigen Betrachtungen konkretisieren wir jetzt Anhand einer Dyson-Schwinger-Gleichung in  $d$  räumlichen Dimensionen. Dabei beschränken wir uns auf ein einfaches Einschleifenintegral im Impulsraum in der Form

$$F^{-1}(\mathbf{k}) = c + \int \bar{d}^d q f(\mathbf{k}, \mathbf{q}) F(\mathbf{q} + \mathbf{k}) F(\mathbf{q}), \quad (\text{B.27})$$

wobei  $F(\mathbf{k})$  eine Zweipunktfunktion und  $f(\mathbf{k}, \mathbf{q})$  eine Funktion der Impulsvektoren ist.

Das archetypische Beispiel für eine solche Integralgleichung ist die Dyson-Schwinger-Gleichung für den Geist-Propagator  $G(\mathbf{q})$  [vergl. (3.13)]

$$G^{-1}(\mathbf{k}) = \frac{1}{g^2} + I(\mathbf{k}), \quad I(\mathbf{k}) \sim \int \bar{d}^d q [1 - (\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{q}})^2] G(\mathbf{q} + \mathbf{k}) D(\mathbf{q}),$$

die zusätzlich an den Gluon-Propagator  $D(\mathbf{q})$  gekoppelt ist.

### B.4.1. Schleifenintegral in $d$ Dimensionen

In  $\mathbb{R}^d$  und bei räumlicher Homogenität können wir annehmen, dass die unbekannte Zweipunktfunktion nur vom Betrag des Arguments abhängt, sodass wir schreiben können<sup>5</sup>

$$F(\mathbf{k}) \equiv F(|\mathbf{k}|) =: F(k). \quad (\text{B.29})$$

Das Gleiche gilt auch für die Impulsabhängigkeit des Schleifenintegrals in Gl. (B.27), das wir mit der Abkürzung

$$s(k, q, \theta) := |\mathbf{q} + \mathbf{k}| = \sqrt{k^2 + q^2 + 2kq \cos \theta} \quad (\text{B.30})$$

für das Skalarprodukt schreiben können als

$$I(k) \equiv \int \bar{d}^d q f(k, |\mathbf{q}|, \theta) F(s(k, q, \theta)) F(|\mathbf{q}|), \quad (\text{B.31})$$

wobei  $\theta$  der Winkel zwischen dem externen Impuls  $\mathbf{k}$  und dem Schleifenimpuls  $\mathbf{q}$  ist.

Wir führen im Impulsraum  $d$  dimensionale Kugelkoordinaten ein. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir das Koordinatensystem so wählen, dass bis auf  $\theta$  alle anderen Winkel ausintegriert werden können. Somit kann das Integral (B.31) in Kugelkoordinaten geschrieben werden als

$$I(k) = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma[d/2]} \int_0^\infty dq q^{d-1} \int_0^{\pi(1+\delta_{d2})} d\theta \sin(\theta)^{d-2} f(k, q, \theta) F(s(k, q, \theta)) F(q). \quad (\text{B.32})$$

Die Schleifenintegrale sind im Allgemeinen divergent. Zur Regularisierung führen wir daher einen UV-Cutoff  $\Lambda$  und zusätzlich einen Infrarot-Cutoff  $\lambda$  ein.<sup>6</sup> Dadurch ist es möglich den Integrationsbereich auf eine logarithmische Skala zu transformieren<sup>7</sup>

$$x(q) := \log_{10}(q), \quad dq = \ln(10) 10^x dx, \quad (\text{B.33})$$

<sup>5</sup>Eine alternative Konvention, die Abhängigkeit vom Betrag zu definieren, ist Folgende:

$$F(|\mathbf{k}|) =: F(k^2). \quad (\text{B.28})$$

Verwendet man weiterhin für das Quadrat des Impulses die Definition  $x := q^2$ , lassen sich die auftretenden Wurzeln eliminieren. Wir verzichten auf ein Umschreiben in diese Form und belassen die Impulsabhängigkeit in ihrer natürlichen Form.

<sup>6</sup>Der Infrarot-Cutoff  $\lambda$  kann auch als Infrarot-Regulator bei eventuell vorhandenen infrarot Divergenz genutzt werden.

<sup>7</sup>Hier wird eine logarithmische Skala zur Basis 10 verwendet. Eine andere Wahl, wie z.B. der natürliche Logarithmus, ist auch möglich.

was insbesondere für infrarot-divergente Formfaktoren nützlich ist. Nach der Transformation (B.33) lautet das Schleifenintegral

$$I(k) = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma[d/2]} \ln(10) \int_{\log_{10} \lambda}^{\log_{10} \Lambda} dx 10^{xd} K(k, q(x), F) F(q(x)), \quad (\text{B.34})$$

wobei der Kern  $K(k, q(x), F)$  definiert ist als

$$K(k, q(x), F) := \int_0^{\pi(1+\delta_{d2})} d\theta \sin(\theta)^{d-2} f(k, q(x), \theta) F(s(k, q(x), \theta)) \quad (\text{B.35})$$

und die Integration über den Winkel  $\theta$  enthält.

Mit einer Quadraturregel [vergl. Abschn. A] für die Integration über den radialen Schleifenimpuls  $q$  folgt

$$I(k) = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma[d/2]} \ln(10) \sum_{j=0}^{N_x-1} w_{x,j} 10^{x_j d} K(k, q(x_j), F) F(q(x_j)), \quad (\text{B.36})$$

wobei  $w_{x,j}$  die Gewichte und  $x_j$  die Knoten sind. Auf gleiche Weise folgt für die Integration über  $\theta$  im Kern  $K$

$$K(k, q(x_j), F) = \sum_{n=0}^{N_\theta-1} w_{\theta,n} \sin(\theta_n)^{d-2} f(k, q(x_j), \theta_n) F(s(k, q(x_j), \theta_n)) \quad (\text{B.37})$$

mit  $N_\theta$  Gewichten  $w_{\theta,n}$  und Stützstellen  $\theta_n$  für die Winkelintegration. Die Diskretisierung des Schleifenintegrals ist mit den beiden Gleichungen (B.36) und (B.37) abgeschlossen.

An dieser Stelle sind einige Kommentare angebracht:

- Die Schleifenintegrale sind im Allgemeinen für  $\Lambda \rightarrow \infty$  divergent und müssen daher in ihrer renormierten Form verwendet werden. Dies bedeutet in der Regel, dass die Integrale bei einer Impulsskala  $\mu$  abgezogen werden. Da durch die Winkelintegration der Divergenzgrad der Gleichungen verringert wird [35], ist es in diesem Fall sinnvoll zuerst die Winkelintegration

$$\Delta K(k, q(x), F) := \int_0^{\pi(1+\delta_{d2})} d\theta \sin(\theta)^{d-2} \left[ f(k, q(x), \theta) F(s(k, q(x), \theta)) - f(\mu, q(x), \theta) F(s(\mu, q(x), \theta)) \right] \quad (\text{B.38})$$

und anschließend das Impulsintegral auszuführen.

- Die Gauss-Legendre-Integration [Abschn. A.2] ist die Quadraturregel der Wahl für alle Integrationen. Auch Fejér-Clenshaw-Curtis-Methoden haben sich als robust in einem iterativen Lösungsverfahren erwiesen. In vielen Fällen ergeben sich ab einer Stützstellenzahl in der Größenordnung von  $N_x \sim 100$  keine Vorteile durch eine spezielle Integrationsmethode.
- Für die Winkelintegration bietet sich die Transformation

$$t := \cos(\theta), \quad \int_0^\pi d\theta \sin(\theta)^{d-2} = \int_{-1}^1 dt (1-t^2)^{(d-3)/2} \quad (\text{B.39})$$

an. In dieser Form ist die Berechnung des Integrals mit einer Gauss-Tschebyschow-Quadratur naheliegend. Bei dem iterativen Lösungsverfahren hat sich jedoch das ursprüngliche Integral mit Integrationsmaß  $\sin(\theta)^{d-2}$  als stabiler erwiesen.

- Der Integrand kann für Schleifenimpulse an dem externen Impuls (also für  $q \rightarrow k$ ) eine integrable Singularität haben. Da die Gauß-Integration eine offene Quadraturregel ist und deshalb die Winkelvariable  $\theta_i$  die Randpunkte 0 und  $\pi$  nicht erreicht, ist  $\mathbf{q} \neq \mathbf{k}$  sichergestellt. Um den Bereich um die Singularität im Impulsintegral mit hoher Genauigkeit aufzulösen, ist es dennoch sinnvoll die Integration aufzuteilen in

$$\int_{\lambda}^{\Lambda} dq \equiv \int_{\lambda}^k dq + \int_k^{\Lambda} dq. \quad (\text{B.40})$$

Eine weitere Verbesserung der Genauigkeit kann durch einen zusätzlichen Schnitt am Subtraktionspunkt  $\mu$  erreicht werden. So dass wir schließlich die Zerlegung

$$\int_{\lambda}^{\Lambda} dq \equiv \int_{\lambda}^k dq + \int_k^{\mu} dq + \int_{\mu}^{\Lambda} dq \quad (\mu > k) \quad (\text{B.41})$$

verwenden. Dabei ist zu beachten, dass die verschiedenen Integrationsbereiche in der Regel verschieden große Fehler aufweisen. In Abb. B.1a sind beispielhaft zwei Integranden typischer Schleifenintegrale und die entsprechende Schnitte dargestellt.

- Falls das Schleifenintegral infrarot endlich und unabhängig vom Ultraviolett-Cutoff  $\Lambda$  ist, kann die logarithmische Skala erst nach einer Verschiebung der Integrationsvariable

$$q \rightarrow q + \lambda \quad \longrightarrow \quad \int_0^{\Lambda} dq f(q) = \int_{\lambda}^{\Lambda+\lambda} d\tilde{q} f(\tilde{q} - \lambda) \quad (\text{B.42})$$

eingeführt werden. De-facto wird so kein IR-Cutoff benötigt. Dieser “Trick” verbessert die IR-Auflösung um mindestens eine Größenordnung.

- Es ist beschrieben [35, 105], dass die Integration für ein infrarot-endliches Schleifenintegral in den asymptotischen Bereich  $q \rightarrow 0$  erweitert werden kann. Dies bedeutet eine Hinzunahme von

$$\int_0^{\lambda} dq \quad (\text{B.43})$$

zur Integration über den Impuls  $q$ , indem in diesem Bereich ein analytischer Ausdruck für den Integranden verwendet wird. Wir können bei den hier untersuchten Gleichungen keine Verbesserung durch dieses Vorgehen feststellen. Es ist außerdem schwierig, die verschiedenen Fehler der einzelnen Integrationsbereiche anzugleichen. Falls das Integrand bei  $q = 0$  jedoch gerade noch integrierbar ist, dann gilt

$$\int_0^{\lambda} dq \frac{1}{q^{\gamma}} \sim \lambda^{1-\gamma}, \quad \gamma \lesssim 1. \quad (\text{B.44})$$

Auch für kleine IR-Cutoffs wie z.B.  $\lambda = 10^{-5}$  ist dieses Integral *nicht* vernachlässigbar klein und muss berücksichtigt werden.

### B.4.2. Darstellung der Zweipunktfunktionen

Die unbekanntete Zweipunktfunktion  $F$  stellen wir in einem geeigneten Impulsintervall  $[A, B]$  durch ein Tschebyschow-Polynom dar. Für Funktionen die ein Potenzverhalten aufweisen kann das Intervall zuvor auf  $[\log_{10} A, \log_{10} B]$  transformiert werden. In diesem Fall ist es außerdem von Vorteil nicht die Funktion selbst, sondern ihren Logarithmus  $\log_{10} F$  darzustellen. Die Entwicklung von  $F$  in Tschebyschow-Polynome lautet daher

$$\log_{10} F(k) = \sum_{i=0}^{N-1} a_n T_n(s(x(k))), \quad (\text{B.45})$$

wobei die Funktionen  $x(k)$  (B.33) und  $s(x)$  [Gl. (A.12)] das ursprüngliche Intervall  $[A, B]$  wie folgt transformieren

$$k \in [A, B] \xrightarrow{x} [\log_{10} A, \log_{10} B] \xrightarrow{s} [-1, 1] \ni s. \quad (\text{B.46})$$

Im Intervall  $[-1, 1]$  wählen wir  $N - 1$  Stützstellen  $s_i$  an den Tschebyschow-Knoten (A.3). Entsprechend gilt für die eigentlichen Impulse-Stützstellen

$$k_i := 10^{\frac{1}{2}s_i(\log_{10}(B/A) + \log_{10}(AB))}, \quad i = 0, \dots, N - 1 \quad (\text{B.47})$$

Aus den tabellierten Funktionswerten  $\log F(k_i)$  bestimmen wir mit Gl. (A.9) die Koeffizienten  $a_n$  für die Entwicklung (B.45). Für einen beliebigen Impuls  $k \in [A, B]$  wird die Reihe (B.45) mit dem Clenshaw-Algorithmus ausgewertet [146].

In dem Schleifenintegral (B.36) und (B.37) wird die Funktion  $F$  innerhalb der Intervalle

$$s(k, q, \theta) \in \begin{cases} [0, \Lambda + B] & \lambda \leq A \\ [|\lambda - A|, \Lambda + B] & \lambda > A \end{cases}, \quad (\text{B.48})$$

ausgewertet, wobei  $\lambda$  der IR-Cutoff und  $\Lambda$  der UV-Cutoff des Impulsintegrals ist. Daher muss eine Extrapolation der Funktion  $F$  von  $[A, B]$  auf die Intervalle  $[0, A]$  und  $[B, B + \Lambda]$  durchgeführt werden ( $A \leq \lambda$ ). In diesen asymptotischen Bereichen verwenden wir einen Ansatz mit einem Potenzverhalten  $F^{<,>}(k) = F_0 k^\alpha$  für die Zweipunktfunction. Auf der logarithmischen Skala entspricht dieser der linearen Funktion

$$\log_{10} F^{<,>}(k) = \log_{10}(F_0) + \alpha x, \quad x = \log_{10}(k). \quad (\text{B.49})$$

Die Koeffizienten  $F_0$  und  $\alpha$  werden von den Funktionswerten im Intervall  $[A, B]$  bestimmt. Hierzu verwenden wir einen linearen Fit der Funktion (B.49) an die Werte im Intervall  $[A, A + \Delta A]$ , bzw.  $[B - \Delta B, B]$ , wobei  $\Delta A, \Delta B$  geeignet gewählt werden.<sup>8</sup> Anschließend kann die Funktion  $F$  beispielsweise im infraroten Bereich für  $k < k_0$  durch

$$F^{<}(k) = F_0 k^\alpha, \quad F_0 = F(x_0)/k_0^\alpha \quad (\text{B.50})$$

fortgesetzt werden, wobei  $k_0$  die kleinste Impuls-Stützstelle im Intervall  $[A, B]$  ist. Durch die Wahl von  $F_0$  ist sichergestellt, dass die Fortsetzung (B.50) stetig ist.<sup>9</sup> Das gleiche Vorgehen verwenden wir auch im ultravioletten Bereich  $[B, B + \Lambda]$ .

Es kann sinnvoll sein zusätzliche logarithmische Korrekturen (anomale Dimensionen) der Form

$$F^{<,>}(k) = F_0 k^\alpha \log_{10}(k/\mu)^\gamma \quad (\text{B.51})$$

$$\log_{10}(F^{<,>}(k)) = \log_{10}(F_0) + \alpha x + \gamma \log_{10}(x - \log_{10}(\mu)) \quad (\text{B.52})$$

in den asymptotischen Bereichen zuzulassen [vgl. (B.49)]. Die Parameter  $\gamma$  und  $\mu$  müssen in diesem Fall ebenfalls aus einer Fitprozedur bestimmt werden.

Auch an dieser Stelle sind einige Kommentare angebracht:

- Da die Lösungen der Formfaktoren häufig aus zwei Bereichen mit unterschiedlichem Potenzverhalten bestehen, ist eine lineare Interpolation

$$\log_{10} F(k) = \log_{10} F(k_i) + \frac{\log_{10}(F(k_{i+1})/F(k_i))}{\log_{10}(k_{i+1}/k_i)} \log_{10}(k/k_i), \quad k_i \leq k \leq k_{i+1} \quad (\text{B.53})$$

<sup>8</sup>Es kann ein zusätzlicher Offset bei  $A$  bzw.  $B$  verwendet werden um Randeffekte zu minimieren.

<sup>9</sup>Diese Fortsetzung ist jedoch in der Regel nicht differenzierbar.

zwischen zwei Funktionswerten auf einer doppelt-logarithmischen Skala sinnvoll. Dies kann die Tschebyschow-Darstellung (B.45) ersetzen, wodurch für  $F$  auch eine andere Stützstellenverteilung gewählt werden kann.

- Weniger aufwendig als die Verwendung einer Fit-Routine zur Bestimmung der Koeffizienten  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\mu$  ist das Extrahieren des asymptotischen Verhaltens aus zwei oder drei Stützstellen an den jeweiligen Enden des Intervalls  $[A, B]$ . Beispielsweise ergibt sich der Koeffizient  $\alpha$  in der Funktion (B.50) auch mittels

$$\alpha = \frac{\log_{10}(F(k_j)/F(k_i))}{\log_{10}(k_j/k_i)}, \quad (\text{B.54})$$

wobei  $j, i$  geeignet gewählt werden. Eine ähnliche Gleichung mit drei Punkten kann auch für die anomale Dimension  $\gamma$  abgeleitet werden. Dieses Vorgehen ist jedoch sensibel auf die Position einzelner Punkte.

- Die Kenntnis von analytischen Eigenschaften der Funktion  $F$  ist hilfreich. Wenn das grundlegende Verhalten  $F^0(k)$  der Funktion im Intervall  $[A, B]$  und in den asymptotischen Bereichen bekannt ist, kann  $F$  faktorisiert werden:

$$F(k) = \delta F(k)F^0(k). \quad (\text{B.55})$$

Die Korrektur  $\delta F(k)$  ist in diesem Fall die zu bestimmende unbekannt Funktion. Bereits die Zerlegung der Propagatoren in Formfaktoren erzeugt eine derartige Faktorisierung, die jedoch auch auf die Formfaktoren selbst angewandt werden kann. Die Funktion  $F^0(k)$  kann Parameter erhalten, die erst während der Lösungsprozedur bestimmt werden. Eine solche Zerlegung kann dabei helfen, die Differenzierbarkeit der Funktion  $F$  im gesamten Impulsbereich sicherzustellen [106].

## B.5. Lösungsalgorithmus

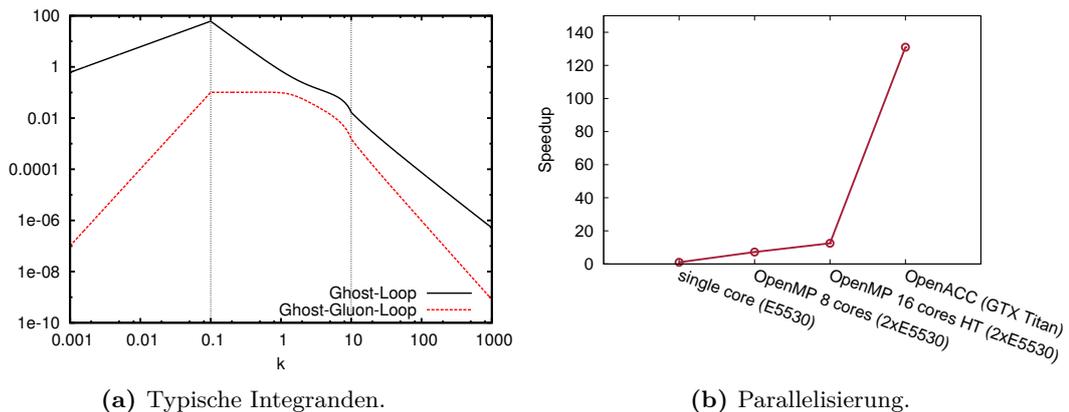
Wir fordern die Gültigkeit der Integralgleichung (B.27) an den Knoten  $k_i$  die in der Interpolationsmethode für die Funktion  $F(k)$  verwendet werden. Die vollständige, diskretisierte Integralgleichung lautet dann

$$F^{-1}(k_i) = c + \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma[d/2]} \ln(10) \sum_{j=0}^{N_x-1} w_{x,j} 10^{x_j d} K(k_i, q(x_j), F) F(q(x_j)) \quad (\text{B.56})$$

mit dem Kern  $K$  definiert in Gl. (B.37) und den Gewichten  $w_{x,j}$  einer geeigneten Quadraturregel. Die Lösung dieses nicht-linearen Gleichungssystems erzeugen wir mit einer der in Abschn. B.3 beschriebenen Iterationsmethoden.

Die Implementation des Lösungsalgorithmus erfolgt als `C`, bzw. `C++` Code. Für ein Integralgleichungssystem mit mehreren unbekannt Funktionen  $\mathcal{F} = (F_1, \dots, F_M)$  stellen wir diesen schematisch wie folgt dar:

1. Initialisierung der Stützstellen, Integrationsgewichte und der Startfunktion(en)  $\mathcal{F}^0$
2. Iterationen: Schleife über  $n = 0, 1, \dots$ 
  - Bestimmung der Interpolation und Extrapolation der Funktionen  $\mathcal{F}^n$
  - Berechnung der rechten Seite des Integralgleichungssystems  $\mathcal{I}[\mathcal{F}^n]$
  - Berechnung des Iterationsschrittes  $\mathcal{F}^{n+1}$



(a) Typische Integranden.

(b) Parallelisierung.

**Abbildung B.1.:** Im linken Bild sind zwei typische Integranden, die in dem Geist-Loop  $\chi(k)$  und dem Geist-Gluon-Loop  $I_d(k)$  auftreten, als Funktion der Integrationsvariable  $q$  für einen externen Impuls  $k = 0.1$  und einen Subtraktionspunkt  $\mu = 10$  dargestellt. Das rechte Bild [158] zeigt den Geschwindigkeitszuwachs durch Parallelisierung mit `OpenMP` und `OpenACC` bei der Berechnung des Geist-Gluon-Systems [Kap. 3].

- Test auf Konvergenz

### 3. Speichern der Lösung und Berechnung abgeleiteter Größen

Die Art der Kopplung zwischen den verschiedenen Funktionen  $F_i(x)$  ermöglicht eine Reihe von Variationen bei der Iteration. So können einzelne Funktionen zwischenzeitlich aus der Iteration genommen werden oder bei fehlender Rückkopplung an die übrigen Funktionen separat berechnet werden. Auch die Verwendung von unterschiedlichen Relaxationsparametern  $r$  [Gl. (B.23)] ist insbesondere bei dem Geist-Gluon-System [Kap. 3] nützlich.

## B.6. Parallelisierung und Optimierung

Bei mehreren gekoppelten Gleichungen, wenn eine Vielzahl an Stützstellen erforderlich ist oder wenn Vertex-Gleichungen betrachtet werden, ist aufgrund der Rechenzeit für eine Iteration eine Parallelisierung erforderlich. Hierzu gibt es unter anderem die Standards `MPI` oder `OpenMP`. Letzterer arbeitet in Systemen mit geteiltem Arbeitsspeicher und kommt in der Regel ohne tiefgreifende Änderung am Programmcode aus. Eine weitere Möglichkeit der Parallelisierung ist die Verwendung von Grafikkartenprozessoren (GPUs). Hierzu gibt es bereits Anwendungen bei der Berechnung von Dyson-Schwinger-Gleichungen [107]. Ein verbreiteter Standard für die Grafikkartenprogrammierung ist `Cuda`, für den es erforderlich ist, die Speicherzugriffe manuell anzupassen. Bestehender Code kann sehr einfach mit dem neueren `OpenACC` Standard, der analog zu `OpenMP` auf Compiler-Anweisungen beruht, auf Grafikkartenprozessoren überführt werden. In Abb. B.1b vergleichen wir einige der oben genannten Verfahren bei der Berechnung des Geist-Gluon-Systems [vergl. Kap. 3]. Dies zeigt beispielhaft, dass schon auf Ebene von Propagator-Gleichungen der Einsatz von GPUs für Dyson-Schwinger-Gleichungen sinnvoll ist.

Da die Vorgehensweisen und die Strukturen der Dyson-Schwinger Gleichungen immer sehr ähnlich sind, bietet sich die Verwendung bzw. die Entwicklung eines vereinheitlich-

ten Frameworks an. Für komplexe Diagramme oder Formfaktoren ist außerdem ein automatisiertes Ableiten und Übersetzen der Gleichungen nach Programm-Code fast unverzichtbar. Eine solche Implementierung existiert bereits [108]. Die starke Strukturierung der Dyson–Schwinger Gleichungen in einzelne Objekte deutet darauf hin, dass es sinnvoll ist ein objektorientiertes Framework zu verwenden. Dank moderner Ansätze wie der `template`-Programmierung sind solche Implementierungen durch den Compiler sehr gut zu optimieren und nicht langsamer als sequenzielle Programme, jedoch leichter auf andere Anwendungen zu übertragen. Ein solches Framework ist derzeit nicht verfügbar. Dies ist ein Ansatz für zukünftige Projekte.

## C. Mathematische Formel

In diesem Anhang sind einige ergänzende mathematische Formeln zusammenfasst.

### C.1. Zum effektiven Potential des Polyakov-Loops

**Proper-Time-Darstellung** Zur Regularisierung von Integralen verwenden wir die *Proper-Time-Darstellung*

$$\left(Y^2\right)^{\alpha/2} = \frac{1}{\Gamma(-\alpha/2)} \int_{1/\Delta^2}^{\infty} d\tau \tau^{-1-\alpha/2} e^{-\tau Y^2}, \quad (\text{C.1})$$

wobei  $\Delta$  ggf. ein Ultraviolett-Cutoff darstellt.

**poissonsche Summenformel** Bei der Berechnung der Energiedichte und des effektiven Potentials nutzen wir die Relation

$$\frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(p_n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int dz f(z) e^{ik(zL)} \quad (\text{C.2})$$

Diese lässt sich aus der poissonschen Summenformel [159]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int dx f(x) e^{-2\pi i k x} \quad (\text{C.3})$$

ableiten.

**Summenformeln** Wir nutzen die Summenformeln [159]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi x}{2} + \frac{x^2}{4}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi \quad (\text{C.4})$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} - \frac{\pi^2 x^2}{12} + \frac{\pi x^3}{12} - \frac{x^4}{48}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi. \quad (\text{C.5})$$

**Bessel-Funktion** Mit der Darstellung der modifizierten Bessel-Funktion [159]

$$K_{\mu}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu} \int_0^{\infty} dt t^{-\mu-1} e^{-t-x^2/(4t)} \quad (\text{C.6})$$

folgt die Relation

$$\int_0^{\infty} ds s^{-1-\mu} e^{-s} \exp\left[-\frac{\lambda}{s} \left(\frac{nL}{2}\right)^2\right] = 2 \left(\frac{2}{Ln\sqrt{\lambda}}\right)^{\mu} K_{\mu}(nL\sqrt{\lambda}). \quad (\text{C.7})$$

**Darstellung der Krümmung** Um die Divergenzen in der Energiedichte, die durch das UV-Verhalten der Krümmung erzeugt werden zu isolieren, schreiben wir mit

$$\frac{1}{\ln \frac{p_\sigma^2 + \lambda}{M^2}} = \int_0^\infty dt \left( \frac{M^2}{p_\sigma^2 + \lambda} \right)^t, \quad p_\sigma^2 + \lambda > M^2 \quad (\text{C.8})$$

und mit der Definition von  $\Omega(p)$  (6.105)  $\chi_{\text{UV}}$  in der Form

$$\chi_{\text{UV}}(p) = \int_0^\infty dt \Omega(p) \Big|_{\alpha=2t-1}. \quad (\text{C.9})$$

Der Beitrag des UV-Verhaltens von  $\chi$  zur Energie ist

$$e_{\text{UV}}^\chi(a, L) := \sum_\sigma \int \mathrm{d}p \chi_{\text{UV}}(p_\sigma). \quad (\text{C.10})$$

Mit Gl. (C.9) und Gl. (6.108) gilt für die Differenz der Energiedichte bei  $a = 0$  die Darstellung

$$\begin{aligned} e_{\text{UV}}^\chi(\mathbf{a}, L) - e_{\text{UV}}^\chi(\mathbf{a} = 0, L) &= -\frac{16}{(4\pi)^{3/2}} \int_0^\infty dt \frac{M^{2t}}{\Gamma\left(t - \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{L}\right)^{2-t} \\ &\quad \times \sum_{\sigma > 0} \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{2}{n}\right)^{2-t} \sin^2\left(n\sigma \mathbf{a} \frac{L}{2}\right) K_{t-2}(nL\sqrt{\lambda}), \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

wobei wir ausschließlich über positive Wurzeln summieren.

## C.2. Bewegungsgleichungen auf $\mathbb{R}^2 \times S^1$

Nach Kontraktion der transversalen Projektoren lauten die Integrale  $I_d^\perp(\mathbf{p})$ ,  $I_d^\parallel(\mathbf{p})$  in der Dyson-Schwinger-Gleichung für den Geist-Formfaktor mit den kinematischen Faktoren wie folgt

$$\begin{aligned} \Delta I_d^\perp(\mathbf{p}) &= \frac{N_c}{4} \int_0^\Lambda \mathrm{d}q_\perp q_\perp \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \\ &\quad \times \frac{1}{L} \sum_{n=-N}^N \left[ 1 - \frac{(\omega_m)^2 + (\cos(\theta)p_\perp)^2}{p^2} \right] \frac{1}{\omega_\perp(\mathbf{q})} \left( \frac{d(\mathbf{p} + \mathbf{q})}{(\mathbf{p} + \mathbf{q})^2} - \frac{d(\boldsymbol{\mu}_d + \mathbf{q})}{(\boldsymbol{\mu}_d + \mathbf{q})^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

und

$$\begin{aligned} \Delta I_d^\parallel(\mathbf{p}) &= \frac{N_c}{4} \int_0^\Lambda \mathrm{d}q_\perp q_\perp \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \frac{1}{L} \sum_{n=-N}^N \left\{ \right. \\ &\quad \times \left. \left[ \frac{(\omega_m)^2 + (\cos(\theta)p_\perp)^2}{p^2} - \frac{(q_\perp p_\perp \cos(\theta) + \omega_m \omega_n)^2}{q^2 p^2} \right] \frac{1}{\omega_\parallel(\mathbf{q})} \left( \frac{d(\mathbf{p} + \mathbf{q})}{(\mathbf{p} + \mathbf{q})^2} - \frac{d(\boldsymbol{\mu}_D + \mathbf{q})}{(\boldsymbol{\mu}_D + \mathbf{q})^2} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

mit  $\mathbf{p} \equiv (\mathbf{p}_\perp, \omega_m)$ ,  $\omega_m = 2\pi m L$  sowie  $\mathbf{q} \equiv (\mathbf{q}_\perp, \omega_n)$ ,  $\omega_n = 2\pi n L$ .

Für die transversalen und orthogonalen Komponenten der Krümmung gilt

$$\bar{\chi}^\perp(\mathbf{p}) = \frac{N_c}{2} \int_0^\Lambda \mathrm{d}q_\perp q_\perp \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \frac{1}{L} \sum_{n=-N}^N \left[ q_\perp^2 (1 - \cos(\theta)^2) \right] \frac{d(\mathbf{q})}{q^2} \left( \frac{d(\mathbf{p} + \mathbf{q})}{(\mathbf{p} + \mathbf{q})^2} - \frac{d(\boldsymbol{\mu}_\chi + \mathbf{q})}{(\boldsymbol{\mu}_\chi + \mathbf{q})^2} \right) \quad (\text{C.14})$$

$$\begin{aligned} \bar{\chi}^{\parallel}(\mathbf{p}) &= \frac{N_c}{2} \int_0^\Lambda dq_\perp q_\perp \int_0^{2\pi} d\theta \\ &\times \frac{1}{L} \sum_{n=-N}^N \left[ \frac{(q_\perp \omega_m \cos(\theta) - \omega_n p_\perp)^2}{p^2} \right] \frac{d(\mathbf{q})}{q^2} \left( \frac{d(\mathbf{p} + \mathbf{q})}{(\mathbf{p} + \mathbf{q})^2} - \frac{d(\boldsymbol{\mu}_\chi + \mathbf{q})}{(\boldsymbol{\mu}_\chi + \mathbf{q})^2} \right) \quad (\text{C.15}) \end{aligned}$$

In dieser Darstellung lässt sich die Annahme  $I^Q(\mathbf{p}) \equiv I^Q(|\mathbf{p}_\perp|, |p_n|)$  bestätigen. Diese Eigenschaft wird insbesondere durch die Summation über alle (positiven und negativen) Matsubara Frequenzen und Integration über den Winkel  $\theta$  gewährleistet.



## D. Literaturverzeichnis

- [1] S.F. Novaes. Standard model: An Introduction. 1999.
- [2] Serguei Chatrchyan et al. Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC. *Phys.Lett.*, B716:30–61, 2012.
- [3] Georges Aad et al. Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC. *Phys.Lett.*, B716:1–29, 2012.
- [4] J. Greensite. *An Introduction to the Confinement Problem*. Lecture Notes in Physics. Springer, 2011.
- [5] Kenji Fukushima and Tetsuo Hatsuda. The phase diagram of dense QCD. *Rept.Prog.Phys.*, 74:014001, 2011.
- [6] Kenneth G. Wilson. Confinement of quarks. *Phys. Rev. D*, 10:2445–2459, Oct 1974.
- [7] Gunnar S. Bali. QCD forces and heavy quark bound states. *Phys.Rept.*, 343:1–136, 2001.
- [8] Philippe de Forcrand. Simulating QCD at finite density. *PoS*, LAT2009:010, 2009.
- [9] Heng-Tong Ding, Frithjof Karsch, and Swagato Mukherjee. Thermodynamics of strong-interaction matter from Lattice QCD. 2015.
- [10] Reinhard Alkofer and Lorenz von Smekal. The Infrared behavior of QCD Green’s functions: Confinement dynamical symmetry breaking, and hadrons as relativistic bound states. *Phys.Rept.*, 353:281, 2001.
- [11] Ph. Boucaud, J.P. Leroy, A. Le Yaouanc, J. Micheli, O. Pene, et al. The Infrared Behaviour of the Pure Yang-Mills Green Functions. *Few Body Syst.*, 53:387–436, 2012.
- [12] Adnan Bashir, Lei Chang, Ian C. Cloet, Bruno El-Bennich, Yu-Xin Liu, et al. Collective perspective on advances in Dyson-Schwinger Equation QCD. *Commun.Theor.Phys.*, 58:79–134, 2012.
- [13] C. Feuchter and H. Reinhardt. Variational solution of the Yang-Mills Schrodinger equation in Coulomb gauge. *Phys.Rev.*, D70:105021, 2004.
- [14] Chen-Ning Yang and Robert L. Mills. Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance. *Phys.Rev.*, 96:191–195, 1954.
- [15] M. Gell-Mann. A schematic model of baryons and mesons. *Physics Letters*, 8(3):214 – 215, 1964.  
G. Zweig. An SU(3) model for strong interaction symmetry and its breaking. Version 1. 1964.

- [16] David J. Gross and Frank Wilczek. Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories. *Phys.Rev.Lett.*, 30:1343–1346, 1973.  
H. David Politzer. Reliable Perturbative Results for Strong Interactions? *Phys.Rev.Lett.*, 30:1346–1349, 1973.
- [17] Lochlainn O’Raifeartaigh and Norbert Straumann. Gauge theory: Historical origins and some modern developments. *Rev. Mod. Phys.*, 72:1–23, Jan 2000.
- [18] John David Jackson and L.B. Okun. Historical roots of gauge invariance. *Rev.Mod.Phys.*, 73:663–680, 2001.
- [19] M. Daniel and C.M. Viallet. The Geometrical Setting of Gauge Theories of the Yang-Mills Type. *Rev.Mod.Phys.*, 52:175, 1980.
- [20] M. Böhm. *Lie-Gruppen und Lie-Algebren in der Physik: Eine Einführung in die mathematischen Grundlagen*. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg, 2011.
- [21] W. Schleifenbaum. *Nonperturbative aspects of Yang-Mills theory*. PhD thesis, Universität Tübingen, 2008.
- [22] R Jackiw. Analysis on infinite dimensional manifolds: Schrodinger representation for quantized fields. pages 78–143, 1989.
- [23] R. Jackiw. Introduction to the Yang-Mills Quantum Theory. *Rev.Mod.Phys.*, 52:661–673, 1980.
- [24] G.C. Rossi and M. Testa. Canonical Commutation Relations and Gauss’ Law in the Temporal Gauge. *Phys.Rev.*, D29:2997, 1984.
- [25] Oliver Schroeder and Hugo Reinhardt. Kamlah expansion and gauge theories. *Annals Phys.*, 312:319–353, 2004.  
Hilmar Forkel. Gauge-invariant and infrared-improved variational analysis of the Yang-Mills vacuum wave functional. *Phys.Rev.*, D81:085030, 2010.
- [26] L.D. Faddeev and V.N. Popov. Feynman Diagrams for the Yang-Mills Field. *Phys.Lett.*, B25:29–30, 1967.
- [27] Adam P. Szczepaniak and Eric S. Swanson. Coulomb gauge QCD, confinement, and the constituent representation. *Phys.Rev.*, D65:025012, 2002.
- [28] V.N. Gribov. Quantization of Nonabelian Gauge Theories. *Nucl.Phys.*, B139:1, 1978.
- [29] N. Vandersickel and Daniel Zwanziger. The Gribov problem and QCD dynamics. *Phys.Rept.*, 520:175–251, 2012.
- [30] N.H. Christ and T.D. Lee. Operator Ordering and Feynman Rules in Gauge Theories. *Phys.Rev.*, D22:939, 1980.
- [31] F.J. Dyson. The S matrix in quantum electrodynamics. *Phys.Rev.*, 75:1736–1755, 1949.  
Julian Schwinger. On the green’s functions of quantized fields. i. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 37(7):452–455, 1951.
- [32] R.J. Rivers. *Path Integral Methods in Quantum Field Theory*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1988.

- [33] Craig D. Roberts and Anthony G. Williams. Dyson-Schwinger equations and their application to hadronic physics. *Prog.Part.Nucl.Phys.*, 33:477–575, 1994.
- [34] Christian S. Fischer. Infrared properties of QCD from Dyson-Schwinger equations. *J.Phys.*, G32:R253–R291, 2006.
- [35] Axel Maas. Describing gauge bosons at zero and finite temperature. *Phys.Rept.*, 524:203–300, 2013.
- [36] Axel Maas, Jochen Wambach, and Reinhard Alkofer. The High-temperature phase of Landau-gauge Yang-Mills theory. *Eur.Phys.J.*, C42:93–107, 2005.
- [37] Christian S. Fischer, Jan Luecker, and Christian A. Welzbacher. Phase structure of three and four flavor QCD. *Phys.Rev.*, D90:034022, 2014.
- [38] D. Zwanziger. Renormalization in the Coulomb gauge and order parameter for confinement in QCD. *Nucl.Phys.*, B518:237–272, 1998.
- [39] Peter Watson and Hugo Reinhardt. Propagator Dyson-Schwinger Equations of Coulomb Gauge Yang-Mills Theory Within the First Order Formalism. *Phys.Rev.*, D75:045021, 2007.
- [40] Peter Watson and Hugo Reinhardt. Two-point functions of Coulomb gauge Yang-Mills theory. *Phys.Rev.*, D77:025030, 2008.
- [41] Peter Watson and Hugo Reinhardt. The Coulomb gauge ghost Dyson-Schwinger equation. *Phys.Rev.*, D82:125010, 2010.
- [42] Hugo Reinhardt and Peter Watson. Resolving temporal Gribov copies in Coulomb gauge Yang-Mills theory. *Phys.Rev.*, D79:045013, 2009.
- [43] C. Popovici, P. Watson, and H. Reinhardt. Quarks in Coulomb gauge perturbation theory. *Phys.Rev.*, D79:045006, 2009.
- [44] Davide R. Campagnari and Hugo Reinhardt. Variational Approach to Yang-Mills Theory with non-Gaussian Wave Functionals. *AIP Conf.Proc.*, 1343:209–211, 2011.
- [45] M. Leder. *Renormalization Group Flows of Hamiltonian QCD in Coulomb Gauge Nonperturbative aspects of Yang-Mills theory*. PhD thesis, Universität Tübingen, 2011.
- [46] J.C. Taylor. Ward Identities and Charge Renormalization of the Yang-Mills Field. *Nucl.Phys.*, B33:436–444, 1971.
- [47] W. Schleifenbaum, M. Leder, and H. Reinhardt. Infrared analysis of propagators and vertices of Yang-Mills theory in Landau and Coulomb gauge. *Phys.Rev.*, D73:125019, 2006.
- [48] Davide R. Campagnari and Hugo Reinhardt. The ghost-gluon vertex in Hamiltonian Yang-Mills theory in Coulomb gauge. *Phys.Lett.*, B707:216–220, 2012.
- [49] Markus Q. Huber, Davide R. Campagnari, and Hugo Reinhardt. Vertex functions of Coulomb gauge Yang-Mills theory. *Phys.Rev.*, D91(2):025014, 2015.
- [50] John C. Collins and M.J. Perry. Superdense Matter: Neutrons Or Asymptotically Free Quarks? *Phys.Rev.Lett.*, 34:1353, 1975.

- [51] N. Cabibbo and G. Parisi. Exponential Hadronic Spectrum and Quark Liberation. *Phys.Lett.*, B59:67–69, 1975.
- [52] J. Engels, F. Karsch, H. Satz, and I. Montvay. Gauge Field Thermodynamics for the SU(2) Yang-Mills System. *Nucl.Phys.*, B205:545, 1982.
- [53] F. Karsch. Lattice QCD at high temperature and density. *Lect.Notes Phys.*, 583:209–249, 2002.
- [54] Y. Aoki, G. Endrodi, Z. Fodor, S.D. Katz, and K.K. Szabo. The Order of the quantum chromodynamics transition predicted by the standard model of particle physics. *Nature*, 443:675–678, 2006.
- [55] G. Endrodi, Z. Fodor, S.D. Katz, and K.K. Szabo. The QCD phase diagram at nonzero quark density. *JHEP*, 1104:001, 2011.
- [56] J.I. Kapusta and C. Gale. *Finite-Temperature Field Theory: Principles and Applications*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2006.
- [57] Hugo Reinhardt and Jan Heffner. Effective potential of the confinement order parameter in the Hamiltonian approach. *Phys.Rev.*, D88(4):045024, 2013.
- [58] Alexander M. Polyakov. Thermal Properties of Gauge Fields and Quark Liberation. *Phys.Lett.*, B72:477–480, 1978.
- [59] Benjamin Svetitsky and Laurence G. Yaffe. Critical Behavior at Finite Temperature Confinement Transitions. *Nucl.Phys.*, B210:423, 1982.
- [60] Florian Marhauser and Jan M. Pawłowski. Confinement in Polyakov Gauge. 2008.
- [61] Jens Braun, Holger Gies, and Jan M. Pawłowski. Quark Confinement from Color Confinement. *Phys.Lett.*, B684:262–267, 2010.
- [62] Nathan Weiss. The Effective Potential for the Order Parameter of Gauge Theories at Finite Temperature. *Phys.Rev.*, D24:475, 1981.
- [63] Michael Engelhardt and Hugo Reinhardt. Effective potential for the order parameter of the SU(2) Yang-Mills deconfinement transition. *Phys.Lett.*, B430:161–167, 1998.
- [64] Leonard Fister and Jan M. Pawłowski. Confinement from Correlation Functions. *Phys.Rev.*, D88:045010, 2013.
- [65] Gerard 't Hooft. On the Phase Transition Towards Permanent Quark Confinement. *Nucl.Phys.*, B138:1, 1978.
- [66] L. Del Debbio, Manfred Faber, J. Greensite, and S. Olejnik. Center dominance and Z(2) vortices in SU(2) lattice gauge theory. *Phys.Rev.*, D55:2298–2306, 1997.
- [67] M. Engelhardt, K. Langfeld, H. Reinhardt, and O. Tennert. Deconfinement in SU(2) Yang-Mills theory as a center vortex percolation transition. *Phys.Rev.*, D61:054504, 2000.
- [68] Daniel Zwanziger. No confinement without Coulomb confinement. *Phys.Rev.Lett.*, 90:102001, 2003.

- [69] Jeff Greensite, Stefan Olejnik, and Daniel Zwanziger. Coulomb energy, remnant symmetry, and the phases of nonAbelian gauge theories. *Phys.Rev.*, D69:074506, 2004.
- [70] A. Voigt, E.-M. Ilgenfritz, M. Muller-Preussker, and A. Sternbeck. The Effective Coulomb potential in SU(3) lattice Yang-Mills theory. *Phys.Rev.*, D78:014501, 2008.
- [71] G. Burgio, M. Quandt, and H. Reinhardt. Ghost propagator and the Coulomb form factor from the lattice. *Phys.Rev.*, D86:045029, 2012.
- [72] Jeff Greensite and Adam P. Szczepaniak. Coulomb string tension, asymptotic string tension, and the gluon chain. *Phys.Rev.*, D91(3):034503, 2015.
- [73] D. Zwanziger. Vanishing of zero momentum lattice gluon propagator and color confinement. *Nucl.Phys.*, B364:127–161, 1991.
- [74] Jeff Greensite and Stefan Olejnik. Properties of the approximate Yang-Mills ground-state wave functional in 2+1 dimensions. *AIP Conf.Proc.*, 1343:203–205, 2011.
- [75] J. Greensite, H. Matevosyan, S. Olejnik, M. Quandt, H. Reinhardt, et al. Testing Proposals for the Yang-Mills Vacuum Wavefunctional by Measurement of the Vacuum. *Phys.Rev.*, D83:114509, 2011.
- [76] Jeff Greensite and Stefan Olejnik. Testing the Yang-Mills vacuum wave functional Ansatz in 3+1 dimensions. *PoS, ConfinementX:054*, 2012.
- [77] Jeff Greensite and Stefan Olejnik. Numerical study of the Yang-Mills vacuum wave functional in  $D = 3 + 1$  dimensions. *Phys.Rev.*, D89(3):034504, 2014.
- [78] Davide R. Campagnari, Hugo Reinhardt, and Axel Weber. Perturbation theory in the Hamiltonian approach to Yang-Mills theory in Coulomb gauge. *Phys.Rev.*, D80:025005, 2009.
- [79] Markus Quandt, Hugo Reinhardt, and Jan Heffner. A covariant variational approach to Yang-Mills Theory. *Phys.Rev.*, D89:065037, 2014.
- [80] D. Schutte. Nonperturbative many body techniques applied to a Yang-Mills field theory. *Phys.Rev.*, D31:810–821, 1985.
- [81] Adam P. Szczepaniak. Confinement and gluon propagator in Coulomb gauge QCD. *Phys.Rev.*, D69:074031, 2004.
- [82] D. Epple, H. Reinhardt, and W. Schleifenbaum. Confining Solution of the Dyson-Schwinger Equations in Coulomb Gauge. *Phys.Rev.*, D75:045011, 2007.
- [83] C. Feuchter and H. Reinhardt. The Yang-Mills vacuum in Coulomb gauge in D=2+1 dimensions. *Phys.Rev.*, D77:085023, 2008.
- [84] H. Reinhardt and D. Epple. The 't Hooft loop in the Hamiltonian approach to Yang-Mills theory in Coulomb gauge. *Phys.Rev.*, D76:065015, 2007.
- [85] M. Pak and H. Reinhardt. The Wilson loop from a Dyson equation. *Phys.Rev.*, D80:125022, 2009.
- [86] G. Burgio, M. Quandt, and H. Reinhardt. Coulomb gauge gluon propagator and the Gribov formula. *Phys.Rev.Lett.*, 102:032002, 2009.

- [87] Markus Leder, Jan M. Pawłowski, Hugo Reinhardt, and Axel Weber. Hamiltonian Flow in Coulomb Gauge Yang-Mills Theory. *Phys.Rev.*, D83:025010, 2011.
- [88] D. Epple, H. Reinhardt, W. Schleifenbaum, and A.P. Szczepaniak. Subcritical solution of the Yang-Mills Schroedinger equation in the Coulomb gauge. *Phys.Rev.*, D77:085007, 2008.
- [89] Davide R. Campagnari and Hugo Reinhardt. Non-Gaussian wave functionals in Coulomb gauge Yang-Mills theory. *Phys.Rev.*, D82:105021, 2010.
- [90] H. Reinhardt and C. Feuchter. On the Yang-Mills wave functional in Coulomb gauge. *Phys.Rev.*, D71:105002, 2005.
- [91] H. Reinhardt. The Dielectric function of the QCD vacuum. *Phys.Rev.Lett.*, 101:061602, 2008.
- [92] D. Campagnari, A. Weber, H. Reinhardt, F. Astorga, and W. Schleifenbaum. Equal-time two-point correlation functions in Coulomb gauge Yang-Mills theory. *Nucl.Phys.*, B842:501–528, 2011.
- [93] Daniel Zwanziger. Lattice Coulomb Hamiltonian and static color Coulomb field. *Nucl.Phys.*, B485:185–240, 1997.
- [94] Christian S. Fischer, Axel Maas, and Jan M. Pawłowski. On the infrared behavior of Landau gauge Yang-Mills theory. *Annals Phys.*, 324:2408–2437, 2009.
- [95] D. Atkinson and Jacques C.R. Bloch. Running coupling in nonperturbative QCD. 1. Bare vertices and y-max approximation. *Phys.Rev.*, D58:094036, 1998.
- [96] Lorenz von Smekal, Reinhard Alkofer, and Andreas Hauck. The Infrared behavior of gluon and ghost propagators in Landau gauge QCD. *Phys.Rev.Lett.*, 79:3591–3594, 1997.
- [97] Lorenz von Smekal, Andreas Hauck, and Reinhard Alkofer. A solution to coupled Dyson-Schwinger equations for gluons and ghosts in Landau gauge. *Annals Phys.*, 267:1, 1998.
- [98] Daniel Zwanziger. Nonperturbative Landau gauge and infrared critical exponents in QCD. *Phys.Rev.*, D65:094039, 2002.
- [99] Christoph Lerche and Lorenz von Smekal. On the infrared exponent for gluon and ghost propagation in Landau gauge QCD. *Phys.Rev.*, D65:125006, 2002.
- [100] Philippe Boucaud, J.P. Leroy, A. Le Yaouanc, J. Micheli, O. Pene, et al. On the IR behaviour of the Landau-gauge ghost propagator. *JHEP*, 0806:099, 2008.
- [101] Klaus Lichtenegger and Daniel Zwanziger. Infrared Critical Exponents in Finite-Temperature Coulomb Gauge QCD. 2009.
- [102] Markus Q. Huber, Reinhard Alkofer, Christian S. Fischer, and Kai Schwenzer. The Infrared behavior of Landau gauge Yang-Mills theory in d=2, d=3 and d=4 dimensions. *Phys.Lett.*, B659:434–440, 2008.
- [103] Jacques C.R. Bloch. *Numerical investigation of fermion mass generation in QED*. PhD thesis, University of Durham, 1995.

- 
- [104] C.S. Fischer and Reinhard Alkofer. Infrared exponents and running coupling of SU(N) Yang-Mills theories. *Phys.Lett.*, B536:177–184, 2002.
- [105] Jacques C.R. Bloch. Two loop improved truncation of the ghost gluon Dyson-Schwinger equations: Multiplicatively renormalizable propagators and nonperturbative running coupling. *Few Body Syst.*, 33:111–152, 2003.
- [106] Axel Maas. Solving a set of truncated Dyson-Schwinger equations with a globally converging method. *Comput.Phys.Commun.*, 175:167–179, 2006.
- [107] Markus Hopfer, Reinhard Alkofer, and Gundolf Haase. Solving the Ghost-Gluon System of Yang-Mills Theory on GPUs. *Comput.Phys.Commun.*, 184:1183–1190, 2013.
- [108] Markus Q. Huber and Mario Mitter. CrazyDSE: A Framework for solving Dyson-Schwinger equations. *Comput.Phys.Commun.*, 183:2441–2457, 2012.
- [109] Markus Q. Huber, Axel Maas, and Lorenz von Smekal. Two- and three-point functions in two-dimensional Landau-gauge Yang-Mills theory: Continuum results. *JHEP*, 1211:035, 2012.
- [110] Adrian Blum, Markus Q. Huber, Mario Mitter, and Lorenz von Smekal. Gluonic three-point correlations in pure Landau gauge QCD. *Phys.Rev.*, D89:061703, 2014.
- [111] Anton K. Cyrol, Markus Q. Huber, and Lorenz von Smekal. A Dyson-Schwinger study of the four-gluon vertex. 2014.
- [112] Jan Heffner, Hugo Reinhardt, and Davide R. Campagnari. The deconfinement phase transition in the Hamiltonian approach to Yang-Mills theory in Coulomb gauge. *Phys.Rev.*, D85:125029, 2012.
- [113] D. Epple. *Lösung der Dyson-Schwinger-Gleichungen des Hamilton-Zugangs zur Yang-Mills-Theorie in Coulomb-Eichung*. PhD thesis, Universität Tübingen, 2008.
- [114] G. Burgio, M. Quandt, and H. Reinhardt. BRST symmetry versus Horizon condition in Yang-Mills theory. *Phys.Rev.*, D81:074502, 2010.
- [115] C. Feuchter and H. Reinhardt. Quark and gluon confinement in Coulomb gauge. 2004.
- [116] Giuseppe Burgio, Markus Quandt, Hugo Reinhardt, and Mario Schrock. Lattice Coulomb propagators, effective energy and confinement. *PoS, ConfinementX:075*, 2012.
- [117] G. Burgio, Markus Quandt, Hugo Reinhardt, Mario Schröck, and H. Vogt. Confinement in Coulomb gauge. *PoS, LATTICE2013:365*, 2014.
- [118] Attilio Cucchieri and Tereza Mendes. What’s up with IR gluon and ghost propagators in Landau gauge? A puzzling answer from huge lattices. *PoS, LAT2007:297*, 2007.
- [119] A. Cucchieri and T. Mendes. Constraints on the IR behavior of the gluon propagator in Yang-Mills theories. *Phys.Rev.Lett.*, 100:241601, 2008.

- [120] I.L. Bogolubsky, E.M. Ilgenfritz, M. Muller-Preussker, and A. Sternbeck. Lattice gluodynamics computation of Landau gauge Green's functions in the deep infrared. *Phys.Lett.*, B676:69–73, 2009.
- [121] H. Reinhardt, D.R. Campagnari, and A.P. Szczepaniak. Variational approach to Yang-Mills theory at finite temperatures. *Phys.Rev.*, D84:045006, 2011.
- [122] Y. Nakagawa, A. Nakamura, T. Saito, H. Toki, and D. Zwanziger. Properties of color-Coulomb string tension. *Phys.Rev.*, D73:094504, 2006.
- [123] Paolo Castorina, David E. Miller, and Helmut Satz. Trace Anomaly and Quasi-Particles in Finite Temperature SU(N) Gauge Theory. *Eur.Phys.J.*, C71:1673, 2011.
- [124] J. Fingberg, Urs M. Heller, and F. Karsch. Scaling and asymptotic scaling in the SU(2) gauge theory. *Nucl.Phys.*, B392:493–517, 1993.
- [125] Biagio Lucini, Michael Teper, and Urs Wenger. The High temperature phase transition in SU(N) gauge theories. *JHEP*, 0401:061, 2004.
- [126] J. Heffner and H. Reinhardt. Finite-temperature Yang-Mills theory in the Hamiltonian approach in Coulomb gauge from a compactified spatial dimension. *Phys.Rev.*, D91(8):085022, 2015.
- [127] Thomas Appelquist and Robert D. Pisarski. High-Temperature Yang-Mills Theories and Three-Dimensional Quantum Chromodynamics. *Phys.Rev.*, D23:2305, 1981.
- [128] K. Kajantie, M. Laine, K. Rummukainen, and Mikhail E. Shaposhnikov. Generic rules for high temperature dimensional reduction and their application to the standard model. *Nucl.Phys.*, B458:90–136, 1996.
- [129] Jens Braun, Astrid Eichhorn, Holger Gies, and Jan M. Pawłowski. On the Nature of the Phase Transition in SU(N), Sp(2) and E(7) Yang-Mills theory. *Eur.Phys.J.*, C70:689–702, 2010.
- [130] U. Reinosa, J. Serreau, M. Tissier, and N. Wschebor. Deconfinement transition in SU(2) Yang-Mills theory: a two-loop study. 2014.
- [131] U. Reinosa, J. Serreau, M. Tissier, and N. Wschebor. Deconfinement transition in SU(N) theories from perturbation theory. *Physics Letters B*, 742(0):61 – 68, 2015.
- [132] Christian S. Fischer, Leonard Fister, Jan Luecker, and Jan M. Pawłowski. Polyakov loop potential at finite density. *Phys.Lett.*, B732:273–277, 2014.
- [133] Steven Weinberg. *The Quantum Theory of Fields: Volume 2, Modern Applications*. Cambridge University Press, 1996.
- [134] Hugo Reinhardt and Jan Heffner. The effective potential of the confinement order parameter in the Hamilton approach. *Phys.Lett.*, B718:672–677, 2012.
- [135] M.E. Peskin and D.V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Addison-Wesley Publishing Company, 1995.
- [136] L.F. Abbott. Introduction to the Background Field Method. *Acta Phys.Polon.*, B13:33, 1982.

- [137] Christian S. Fischer, Jan Luecker, and Jan M. Pawłowski. Phase structure of QCD for heavy quarks. *Phys.Rev.*, D91(1):014024, 2015.
- [138] Hannes Vogt, Giuseppe Burgio, Markus Quandt, and Hugo Reinhardt. Coulomb gauge on the lattice: From zero to finite temperature. *PoS, LATTICE2013*:363, 2014.
- [139] M. Pak and H. Reinhardt. Chiral Symmetry Breaking in Hamiltonian QCD in Coulomb Gauge. *Phys.Lett.*, B707:566–569, 2012.
- [140] M. Pak and H. Reinhardt. Quark Sector of the QCD Groundstate in Coulomb Gauge. *Phys.Rev.*, D88:125021, 2013.
- [141] Davide R. Campagnari and Hugo Reinhardt. Hamiltonian Approach to QCD in Coulomb Gauge: Perturbative Treatment of the Quark Sector. 2014.
- [142] Markus Quandt and Hugo Reinhardt. A covariant variational approach to Yang-Mills Theory at finite temperatures. 2015.
- [143] Reinhard Alkofer, Markus Q. Huber, and Kai Schwenzer. Algorithmic derivation of Dyson-Schwinger Equations. *Comput.Phys.Commun.*, 180:965–976, 2009.
- [144] J.C. Mason and D.C. Handscomb. *Chebyshev Polynomials*. Taylor & Francis, 2002.
- [145] T.J. Rivlin. *Chebyshev Polynomials: From Approximation Theory to Algebra and Number Theory*. Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley, 1990.
- [146] W.H. Press. *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 2007.
- [147] P.J. Davis and P. Rabinowitz. *Methods of numerical integration*. Computer science and applied mathematics : a series of monographs and textbooks. Academic Press, 1975.
- [148] P.K. Kythe and M.R. Schäferkötter. *Handbook of Computational Methods for Integration*. Taylor & Francis, 2004.
- [149] Charles W Clenshaw and Alan R Curtis. A method for numerical integration on an automatic computer. *Numerische Mathematik*, 2(1):197–205, 1960.
- [150] Jörg Waldvogel. Fast construction of the fejer and clenshaw–curtis quadrature rules. *BIT Numerical Mathematics*, 46(1):195–202, 2006.
- [151] Shuhuang Xiang, Guo He, and Haiyong Wang. On Fast and Stable Implementation of Clenshaw-Curtis and Fejér-Type Quadrature Rules. *Abstract and Applied Analysis*, vol. 2014:10, 2014.
- [152] Lloyd N Trefethen. Is gauss quadrature better than clenshaw-curtis? *SIAM review*, 50(1):67–87, 2008.
- [153] Kendall Atkinson. Iterative variants of the nyström method for the numerical solution of integral equations. *Numerische Mathematik*, 22(1):17–31, 1974.
- [154] Kendall E Atkinson et al. A survey of numerical methods for solving nonlinear integral equations. *Journal of integral equations and applications*, 4(1):15–46, 1992.

- [155] Kendall E Atkinson. *The numerical solution of integral equations of the second kind*. Number 4. Cambridge university press, 1997.
- [156] JF Steffensen. Remarks on iteration. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1933(1):64–72, 1933.
- [157] Sergio Amat, Sonia Busquier, and Vicente Candela. A class of quasi-newton generalized steffensen methods on banach spaces. *Journal of computational and applied mathematics*, 149(2):397–406, 2002.
- [158] Hannes Vogt. personal communication.
- [159] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series, and Products*. Elsevier Science, 2014.