

岩石节理粗糙系数 (JRC) 的分形估计 *

谢和平

(中国矿业大学数力系, 徐州 221008; 中国科学院力学研究所非线性连续介质力学开放实验室, 北京 100080)

W. G. Pariseau

(The University of Utah, S. L. C., Utah 84112)

摘 要

根据传统的 Koch 曲线, 我们建立了节理剖面的理论分形模型来模拟节理剖面的粗糙性. 由这个模型, 节理的分形维数 D 可以直接由两个统计参数 L^* 和 h^* (这里 L^* 和 h^* 分别为节理粗糙度的平均基长和平均高度) 来估计, 即

$$D = \log 4 / \log [2(1 + \text{costg}^{-1}(2h^*/L^*))].$$

这个分形维数很强烈地相关于岩石节理粗糙系数 (JRC) 值:

$$\text{JRC} = 85.2671(D - 1)^{0.5679}.$$

这样本文所提出的分形分析为岩石力学中 JRC 值的定量估计提供了一个新的方法.

关键词 岩石节理、分形维数、JRC 值、分形估计

1 引 言

岩石节理很强烈地影响岩体变形. 节理的特征主要包括它的方向、范围、粗糙性和节理壁强度等. 其中粗糙性影响岩体的摩擦角、膨胀和峰剪应力. 对于节理面粗糙性对变形和破坏的影响, 目前已有相当多的研究. 这些研究的目的在于去估计或计算节理岩体的膨胀特性和剪切强度. Barton 和 Choubey^[1] 提出了预测岩石节理峰剪强度 τ 的一个经验公式:

$$\tau = \sigma \text{tg}[\text{JRC} \log(\text{JCS}/\sigma) + \Phi_b] \quad (1)$$

这里 σ 为有效法向应力, Φ_b 是岩体的基本摩擦角, JCS 是节理壁压缩强度. 在 (1) 式中, JRC 是唯一的未知量, 需要人们去估计. Barton 定义了从 0—20 的 10 种 JRC 值的典型曲线^[2] (参见后面图 9), 并已被国际岩石力学学会接受为节理粗糙度的表示方法. 后来 Tse 和 Cruden^[3] 根据统计学发展了一个经验统计关系来估计这个 JRC 值.

实际上, JRC 是一个几何参数, 用来表征节理面的粗糙性. 而由 Mandelbrot^[4] 发展的分

1993-09-08 收稿.

* 国家自然科学基金、国家科委重大基础理论课题“非线性科学”项目和煤炭科学基金资助项目.

形几何中的分形维数也可以用来描述这种粗糙性. 将分形维数与 JRC 的自然结合来描述节理粗糙程度最近已有一些研究^[5]. Turk 等^[6], Carr^[7], Muralha 和 Charrua-Graca^[8] 以及 Lee 等人^[9] 使用分形几何的码尺方法^[5] 直接测量了节理剖面的分形维数. 特别地 Lee 等人^[9] 建立了 JRC 值与分形维数相关的经验关系. 然而这些研究大多数得出非常小的分形维数值. 这个问题可能是由分形维数的量测方法所导致. 在分形几何中, 分形曲线的长度定义为

$$L(\delta) = L_0 \delta^{1-D} \quad (2)$$

$L(\delta)$ 是码尺 δ 的函数. δ 越小, 所量测的粗糙性越丰富, 曲线的长度越长. 这也意味着仅当在分形维数量测中使用的 δ 足够小时, 一个真值 D 才能获得. 图 1 给出了对于传统 Koch 岛所量测的分形维数 $D_m(n)$ 与它的生成步 $n = -\log(\delta)/\log 3$

(或它的码尺 δ) 的相关性. 从图 1 可以看出存在一个临界码尺 δ_{\min} (或临界生成步数 n_{\max}), 仅当码尺 $\delta \leq \delta_{\min}$ (或 $n \geq n_{\max}$) 被用来量测分形物体时, 所量测出的分形维数才趋于它的真值. 例如图 1, 仅当 $n \geq 130$, $D_m(n)$ 才趋向于传统 Koch 岛分形维数的真值 1.26. 事实上由于不同阶的码尺被使用, 对同一分形物体人们量测出不同阶大小的分形维数值. 例如, 对 San Andreas 断层系统, Okubo 和 Aki^[10] 得到其分形维数范围是 1.12—1.43; 而 Aviles 和 Scholz^[11] 得到其分形维数范围是 1.00067—1.0081. 原因就是他们各自选用不同的量测码尺范围. 一般地说, 量测的码尺越小, 分形体的细节就能更多地被量测到, 这样更精确的分形维数值才能被获得^[5]. 所以节理剖面的分形维数量测是一个很艰难的工作.

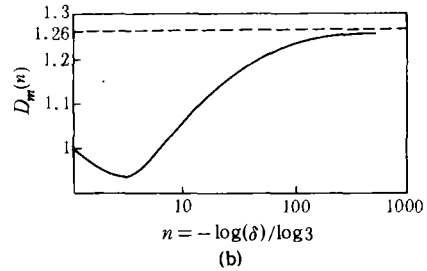
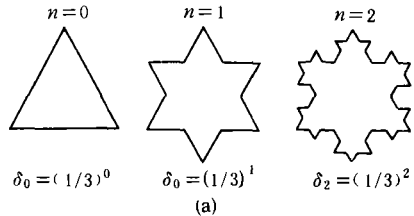


图 1 传统 Koch 岛 (a) 和量测的分形维数 $D_m(n)$ (b) 与生成步数 n 的关系曲线^[12]

本文建立了一个理论的分形模型来量测节理剖面的分形维数, 使得节理的分形维数量测变得容易和简单, 并且这个理论分形模型能导出一个节理粗糙系数 (JRC) 的分形估计.

2 节理粗糙性的分形模型

Mandelbrot^[4] 给出分形定义为“分形就是一个集合, 这个集合的 Hausdorff-Besicovitch 维数严格大于它的拓扑维数”. 为了描述分形中自相似性这一基本特性, Mandelbrot 于 1986 年又提出了另一分形定义“分形就是那些局部相似于它的整体的那些东西”. 对于工程师, 我们可以给出一个粗略的但更易理解的分形定义: 分形就是那些比经典几何中更不规则和更粗糙的物体. 一个分形物体被放大以后, 越来越小的粗糙性将会看到.

首先考察图 2 所示的传统 Koch 曲线的构造. 我们起始于 $n=0$ 的单位线段, 这个起始线段也称为 Koch 曲线的零阶生成 (或起始元). 图 2 所示的 $n=1$ 曲线就是 Koch 曲线的生成元, 也称为第一阶生成. 使第一阶生成中的每一线段再类似于生成元变形, 就得到 Koch 曲线的第二阶生成. 类似地无穷进行下去, 最后的曲线 ($n \rightarrow \infty$) 就称为传统 Koch 曲线, 其分形维数为 $D=1.26$. 这种具有无限生成步的分形称为“数学分形”.

岩石节理是相当粗糙的,是一种自然分形. 根据物理的观点,节理经历了从微观到宏观的一个断裂过程. 我们的研究^[13-16]已经表明这个断裂过程表征出分形结构. 节理在微观水平上的粗糙性可能由岩石的沿晶和穿晶断裂所造成^[5,17]. 这种粗糙尺规是晶粒尺寸,而节理宏观粗糙尺规可能是米或千米的量级^[5]. 图 3 给出了宏观尺度下的随机节理位形,可以看出它统计地相似于图 2 所示的传统 Koch 曲线,差别仅只是前者具有从晶粒尺寸到千米范围内有限生成,而后者是具有数学上的无限生成. 根据这一事实,我们假设节理剖面具有 Koch 曲线的相似结构. 为模拟自然中的随机节理,我们推广了传统 Koch 曲线的生成元如图 4 所示. 这里生成元角度 θ 可以从 0° (对应 $h=0$)变化到 90° (对应 $L=0$). 在这个理论模型中

$$N=4, 1/r=2[1+\text{costg}^{-1}(2h/L)], \quad (3)$$

这里 N 为生成元的折线数, r 为相似比. 由分形几何^[4,5], 可以决定其分形维数为

$$D=\log 4 / \log [2(1+\text{costg}^{-1} 2h/L)], \quad (4)$$

式中 h 和 L 分别为高阶粗糙性的统计高度和长度. 从方程 (4) 可以看出: 节理剖面的分形维数可从 1.0(对应 $h=0$)变化到 2.0(对应 $L=0$).

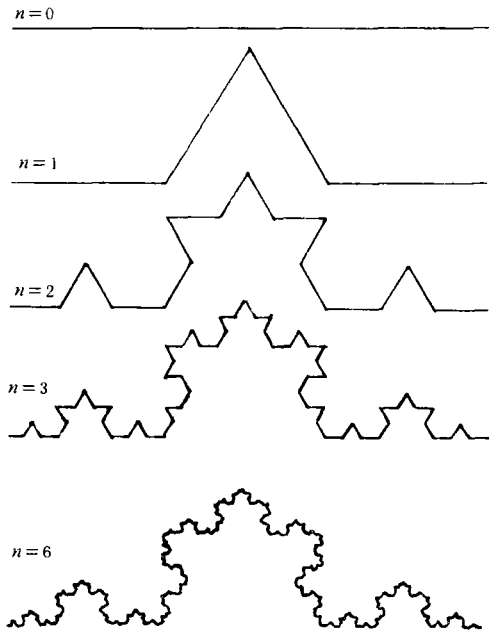


图 2 传统 Koch 曲线的构造



图 3 随机的节理剖面位形

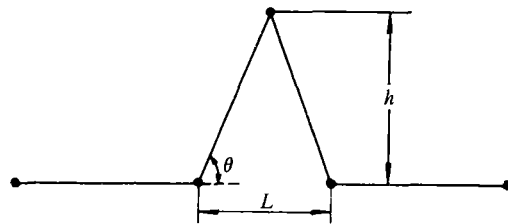


图 4 用来模拟节理粗糙性的广义 Koch 曲线的生成元

方程 (4) 已由计算机生成的分形布朗运动曲线(图 5)验证. 应当指出的是,对于自然节理,方程 (4) 中的 h 和 L 应当由节理高阶粗糙性的平均高度 h^* 和平均基长 L^* 所代替. h^* 和 L^* 定义为

$$h^* = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M h_i, \quad L^* = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M L_i, \quad (5)$$

其中 M 为高阶粗糙段数目. 其量测方法如图 6 所示.

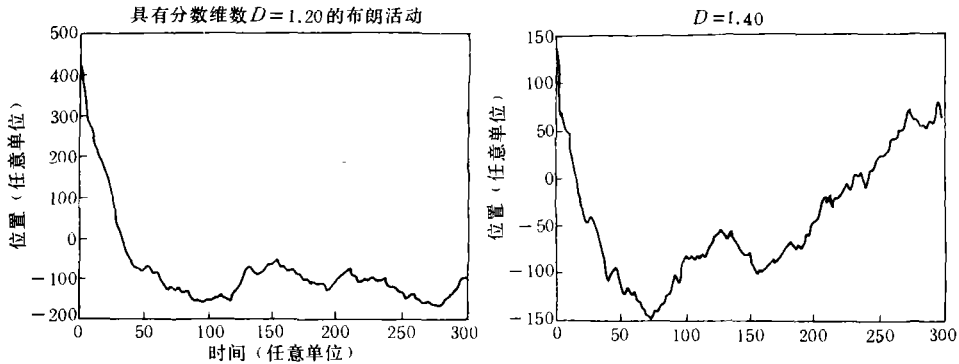


图 5 计算机生成的布朗运动

表 1 计算机生成的分形布朗曲线的 h^* 和 L^* 量测以及分形维数估计

理论分形维数	L^*	h^*	预测分形维数
1.20	6.0	3.971	1.119
1.40	6.0	8.550	1.369

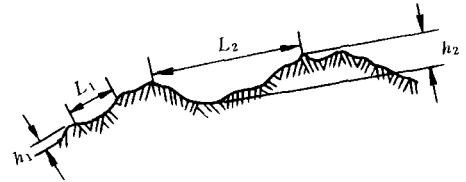


图 6 方程 (4) 中 L^* 和 h^* 的量测

表 1 列出了图 5 所示计算机生成的分形布朗曲线的 h^* 和 L^* 量测值以及相应的分形维数。由方程 (4) 决定的分形维数能很好地与其理论值一致。这可以说, 本节所建立的理论分形模型能用来模拟像岩石节理这样的自然分形曲线。

3 分形 JRC 近似

众所周知, 进行节理剪切模拟需要先对节理粗糙性进行定量估计。目前, 人们普遍接受 Tse 和 Cruden^[3] 给出的经验公式来计算 JRC 值。这个经验公式为

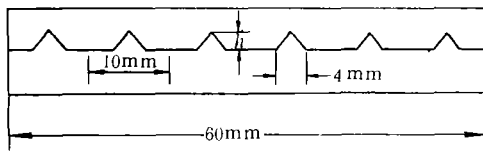
$$Z_2 = [1/(MD_x^2) \sum_{i=1}^M (y_{i+1} - y_i)]^{1/2}, \quad (6)$$

$$JRC = 32.20 + 32.47 \log Z_2, \quad (7)$$

式中 M 是被量测的粗糙区间数目, D_x 是量测样本区间长度, y_i 和 y_{i+1} 是第 i 和 $(i+1)$ 个粗糙高度。Venkatachalam^[18] 介绍了他在节理强度模拟方面的研究。在他模拟中的节理剖面几何如图 7 所示, 由方程 (7) 计算的 JRC 值也列在图 7 中。使用前节建立的分形模型, 直接由方程 (4) 我们计算了图 7 所示的 6 种位形的分形维数, 其结果见表 2。再由计算机回归, 我们获得了分形维数和 JRC 值之间的相关关系如图 8 所示。JRC 值关于分形维数经验公式可归纳为

$$JRC = 85.2671(D - 1)^{0.5679}, \quad (8)$$

这意味着分形维数 D 确实是节理粗糙系数的一个量测。 D 越大, JRC 值也越大。这就使得由



$h(\text{mm})$	JRC
0.0	0
0.5	6
1.0	16
1.5	22
2.0	26
2.5	29

图 7 由 Venkatachalam 用于模拟节理剪切强度的节理剖面几何

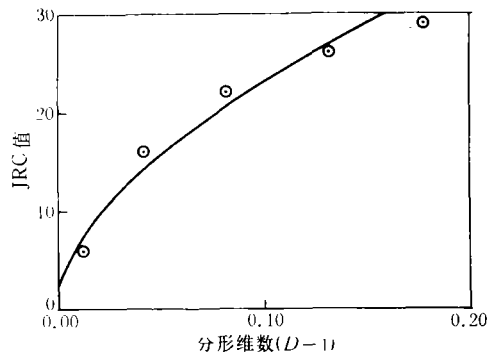


图 8 JRC 值与其分形维数的相关曲线

表 2 由 Venkatachalam^[18] 模拟剪切强度所使用的 6 种节理剖面的分形维数

$h(\text{mm}) (L=4\text{ mm})$	JRC	分形维数
0.0	0	1.00
0.5	6	1.0110
1.0	16	1.0407
1.5	22	1.0823
2.0	26	1.1290
2.5	29	1.1764

节理剖面的分形维数来预测 JRC 值成为可能。

4 JRC 的分形估计

图 9 给出了 Barton^[2] 提出的典型 JRC 范围曲线。我们使用这些曲线来检验由方程 (8) 定义的 JRC 近似。 h^* 和 L^* 直接在这些曲线的高阶粗糙性上量测, 而分形维数由方程 (4) 计算。从所得结果 (表 3) 可以看出所有的分形维数都大于 Lee 等^[9] 由码尺方法直接量测的分形维数值。但是 JRC 范围 (18—20) 的分形维数 $D=1.0694$, 几乎与 Muralha 和 Charrua-Graca^[8] 由分形量测的网格覆盖法所得分形维数 $D=1.0632$ 一致。

根据方程 (4) 所决定的分形维数, 我们由方程 (8) 对 10 种典型 JRC 范围曲线进行了 JRC 预测, 其结果见表 3。图 10 给出了预测的 JRC 值和典型 JRC 范围的中心值与分形维数的关系曲线, 可以看出, 其结果是令人满意的。

为进一步检验方程 (8) 给出 JRC 近似的可

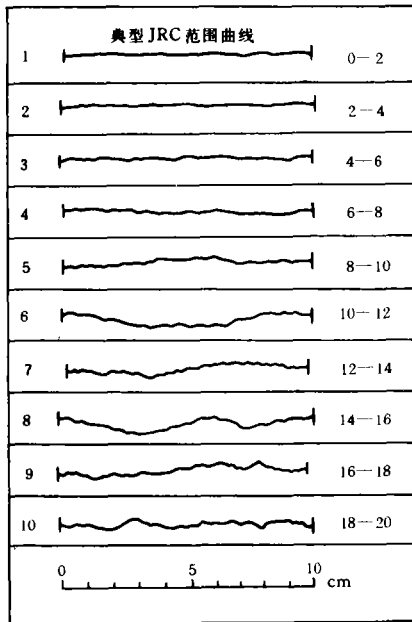


图 9 典型 JRC 范围曲线^[2]

表 3 对典型 10 种 JRC 范围的分形 JRC 估计

典型 JRC 范围	L^*	h^*	分形维数	预测 JRC 值
0—2	84.0	4.50	1.00206	2.500
2—4	25.0	2.00	1.00456	3.995
4—6	19.2	2.40	1.01097	6.573
6—8	18.5	3.00	1.01813	8.745
8—10	15.2	2.92	1.02501	10.498
10—12	11.5	2.68	1.03590	12.889
12—14	14.5	3.75	1.04328	14.333
14—16	13.0	3.67	1.05053	15.651
16—18	14.7	4.67	1.06238	17.639
18—20	15.5	5.25	1.06940	18.740

行性, 我们收集了由 Barton^[19] 和 Barla 等^[20] 使用的 6 种典型节理剖面 (图 11). 它们的 h^* 和 L^* 及分形维数由前节给出的方法获得. 由方程 (8) 预测的 JRC 值见表 4. 从表 4 可以计算出预测 JRC 值相对其标准 JRC 值的最大误差是 1.4%, 最小误差是 0.34%. 图 12 给出了预测 JRC 值与标准 JRC 值之间的比较曲线. 从图 10 和图 12 可以看到: 本文给出的分形 JRC 近似完全可以用于对岩石节理剖面的 JRC 估计.

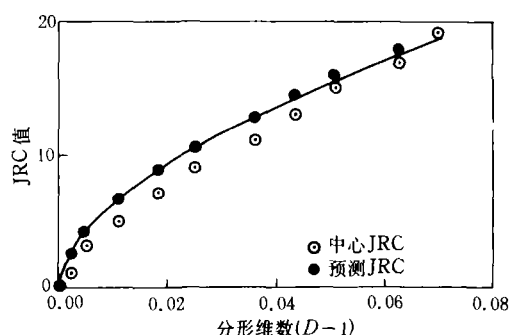


图 10 典型 JRC 中心值和预测 JRC 值与分形维数之间的关系曲线

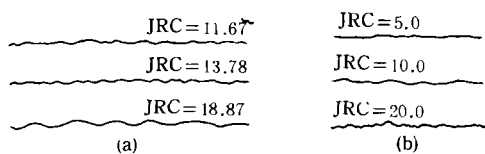


图 11 标准 JRC 值的节理位形
(a) 取自 Barla 等^[20]; (b) 取自 Barton^[19]

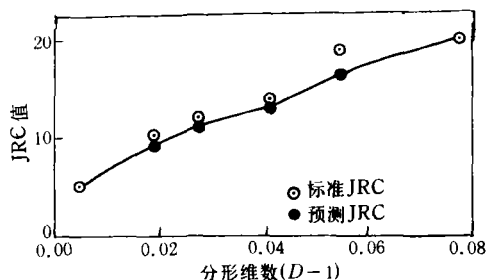


图 12 预测 JRC 值和标准 JRC 值与分形维数的关系曲线

表 4 对 Barton 和 Barla 等使用的 6 种标准 JRC 值节理曲线的分形 JRC 估计

标准 JRC 值	L^*	h^*	分形维数 D	预测 JRC 值
5	26.0	2.4	1.00477	4.6908
10	18.0	3.0	1.01911	9.0093
20	7.8	2.8	1.07734	19.9302
11.67	10.3	2.1	1.02739	11.0525
13.78	9.5	2.4	1.04097	13.8933
18.87	21.4	5.3	1.05450	16.3366

5 结 语

岩体中的不连续面(如节理)的表面粗糙性在峰剪强度研究中是一个重要的因素,这个表面粗糙性能由本文提出的理论分析模型——广义 Koch 曲线来模拟,由这个理论分形模型获得的分形维数随节理粗糙性增加而增加,表面越粗糙,其分形维数就越大. 分形维数能定量地刻画节理的粗糙程度.

根据本文建立的理论分形模型,我们得到了 JRC 值与分形维数之间的经验公式,并且已成功地应用于对一些节理剖面的 JRC 值的估计.

在本文的分形分析中,当给定一个节理剖面,仅需要测定两个统计参数 L^* 和 h^* (节理高阶粗糙性的平均基长和平均高度)就可以计算其分形维数和估计 JRC 值. 这使得岩石节理的分形分析比已报道的其他分形量测方法^[6-8]更加简单和容易. 研究结果也表明本文提出的分形分析方法提供了岩石节理 JRC 值定量估计的一个新方法.

参 考 文 献

- [1] Barton, N., Choubey, V., *Rock Mechanics*, 1977, **10**: 1—65.
- [2] Bamford, W. E. et al., *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 1978, **15**: 319—368.
- [3] Tse, R., Cruden, D. M., *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 1979, **16**: 303—307.
- [4] Mandelbrot, B. B., *The Fractal Geometry of Nature*, New York, Freeman, 1982.
- [5] Xie, H., *Fractals in Rock Mechanics, as Geomechanics Research Series*, Rotterdam, Balkema Publishers, 1993.
- [6] Turk, N., Greig, M. J., *28th U. S. Symp. on Rock Mech.*, Tucson, Balkema Publishers, 1987, 1223—1236.
- [7] Carr, J. R., *30th U. S. Symp. on Rock Mech.*, Rotterdam, Balkema Publishers, 1989, 73—80.
- [8] Muralha, J., Charrua-Grace, J. G., in *Rock Joints* (eds Barton & Stephansson), Rotterdam, Balkema Publishers, 1990: 667—671.
- [9] Lee, Y. H., Carr, J. R., Bars, D. J. et al., *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 1990, **27**: 453—464.
- [10] Okubo, P. G., Aki, K., *J. of Geophys. Res.*, 1987, **92(B1)**: 345—355.
- [11] Aviles, C. A., Scholz, C. H., Boatwright, J., *J. of Geophys. Res.*, 1987, **92(B1)**: 331—344.
- [12] Lung, C. W., Zhang, S. Z., *Physics D*, 1989, **38**: 242—245.
- [13] Xie, H., Chen, Z. D., *Acta Mechanica Sinica*, 1988, **4(3)**: 255—264.
- [14] Xie, H., *Chinese Science Bulletin*, 1989, **34**: 1292—1296.
- [15] Xie, H., *Int. J. of Fracture*, 1989, **41**: 267—274.
- [16] Xie, H., *Proc. of 2nd Int. Symp. of Min. Tech. & Sci.*, Xuzhou, China, 1992, **2**: 697—704.
- [17] Xie, H., *Fractals-Rock Mechanics*, Lecture Notes Given at the University of Utah, 1990.
- [18] Venkatachalam, G., *Proc. of Int. Symp. on Fundamentals of Rock Joints*, Bjorkliden, 1985, 453—459.
- [19] Barton, N. R., *Engineering Geology*, 1973, **7**: 287—332.
- [20] Barla, G., Forlati, F., Zaninetti, A., *Proc. of Int. Symp. on Fundamentals of Rock Joints*, Bjorkliden, 1985, 163—172.