Universidad Nacional de Mar del Plata

Facultad de Ciencias Económicas y Sociales

Asignatura Matemática para Economistas II

ESTUDIO DE ECUACIONES DIFERENCIALES APLICADAS A UN MODELO DE CRECIMIENTO ECONÓMICO DE HAAVELMO
Parte II

Camila Roldán
Lizzie Marcel
Pía Acciarini
Beatriz Lupín

XVIII Jornadas de Tecnología Aplicada a la Educación Matemática

Departamento Pedagógico de Matemática (DPM)
Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía y a la Gestión (CMA/IADCOM)

FCE-UBA, CABA, 10-11 mayo 2018

INTRODUCCIÓN

Continuando con el estudio de ED aplicadas a los modelos de crecimiento económico desarrollados por el economista noruego Trygve Haavelmo y, tal como éste lo hace en su libro del año 1954, seguidamente, se complejiza el análisis.

En la edición 2017 de las Jornadas, se presentó la versión más simple de los modelos, la que asume que solamente el volumen de producción y el tamaño de la población son variables.

La actual propuesta supone que la acumulación de capital, también, varía, dejando constantes el nivel de educación y el *know-how*.

FUNDAMENTACIÓN CONCEPTUAL

ECONÓMICA

CRECIMIENTO ECONÓMICO

Expansión continuada de las posibilidades de producción, medida como el incremento del PBI real durante un período de tiempo determinado.

Se logra mediante el ↑ de los factores productivos -por ejemplo, mano de obra y capital- y el progreso tecnológico.

El capital se acumula mediante el ahorro y la inversión.

(Blanchard *et al.*, 2012; Dornbusch *et al.*, 2009)

MATEMÁTICA

ECUACIONES DIFERENCIALES

ANÁLISIS DINÁMICO

Describe la **TRAYECTORIA** -senda temporal o cronológica- de alguna variable en el tiempo

Una de las propiedades más importantes de una ED es si tiene estados de equilibrio, o sea, que la solución no cambie con el tiempo.

En Economía, es relevante saber si un estado de equilibrio es estable.

Un péndulo colgado de forma inmóvil tiene un estado de equilibrio estable pues al ser perturbado ligeramente, oscilará hasta llegar a la posición inicial nuevamente.

(Sydsaeter & Hammond, 2009: 627)

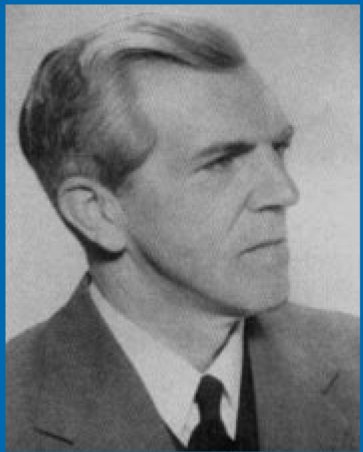
La solución de una EDO…

Es convergente si tiende a algún valor $\Re$ y definido, conforme "t" $\rightarrow \infty$.

El valor $\Re$ al que tiende la trayectoria es el estado **ESTACIONARIO**. Implica un equilibrio a largo plazo. La variable "y" permanece estática: $dy/dt = 0$.

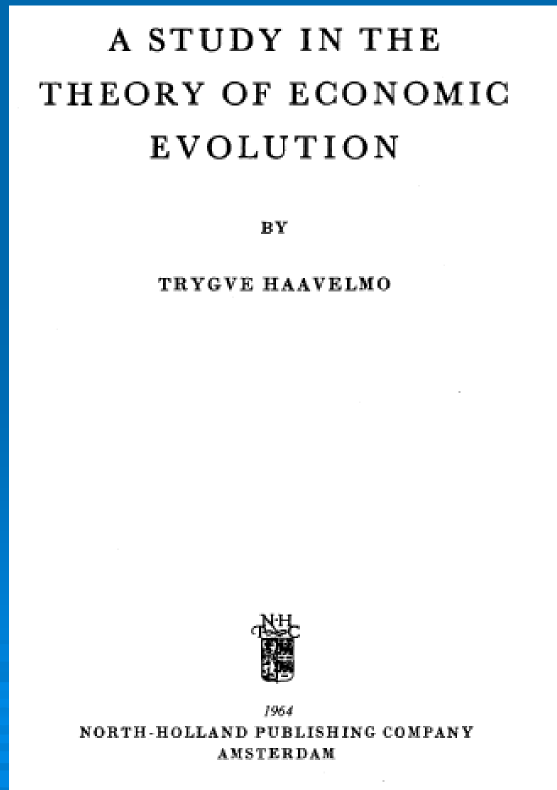
El estado estacionario es un caso particular del estado de equilibrio. En un estado de equilibrio, la variable "y" $\uparrow$ a una misma tasa. Particularmente, en un estado estacionario, la variable "y" $\uparrow$ a una tasa nula.

MODELO DE CRECIMIENTO ECONÓMICO DE HAAVELMO
Parte II



Trygve HAAVELMO
(economista noruego, 1911-1999. Premio Nobel 1989)

"A Study in the Theory of Economic Evolution" (1954)


A STUDY IN THE
THEORY OF ECONOMIC
EVOLUTION

BY

TRYGVE HAAVELMO

1964
NORTH-HOLLAND PUBLISHING COMPANY
AMSTERDAM

VARIABLES
- Volumen de producción
- Tamaño de la población

Jornadas 2017
Cap. 5

VARIABLES
- Volumen de producción
- Tamaño de la población
- **Acumulación de capital**

Jornadas 2018
Cap. 6

Supuesto $\rightarrow$ población estacionaria ($dN / dt = 0$)

I. Modelo de producción lineal y acumulación de capital

I.1.

Función de Producción

$$X = A + \chi K$$

Función de Acumulación de Capital

$$\dot{K} = \gamma X + \gamma_0$$

Modelos válidos si $K \geq 0$

Dónde:

X = producción por unidad de tiempo (t)

K = existencia de capital

A, χ, γ = constantes > 0

γ_0 = constante < 0

• = diferencial respecto al tiempo

Del modelo anterior:

$$X = (K_0 - \bar{K})e^{\gamma\chi t} + \chi\bar{K} + A$$

$$K = (K_0 - \bar{K})e^{\gamma\chi t} + \bar{K}$$

$t \to \infty$

Solución estacionaria

$$\bar{K} = -\frac{\gamma A + \gamma_0}{\gamma\chi}$$

Dónde:

K_0 = constante arbitraria

Si $K_0 > \bar{K} \Rightarrow X$ y $K \to \infty$, cuando $t \to \infty$

Si $K_0 < \bar{K} \Rightarrow X \to A$ y $K \to 0$, para un valor finito de t

SOLUCIÓN INESTABLE

I.2.

Alternativamente…

La Función de Acumulación de Capital recibe la influencia de "K" (existencia de capital), conformada por dos componentes:

- **Uno refleja la mejor oportunidad de planear para el futuro cuando hay capital disponible**
- **Otro refleja el "efecto saturación", es negativo.**

$$\dot{K} = \gamma_1 X + \gamma_2 K + \gamma_0$$

Dónde:

$\gamma_1 > 0$; γ_2 ± (dependiendo de qué influencia es más fuerte); $\gamma_0 < 0$

Del modelo anterior:

Solución estacionaria

$$X = \chi(K_0 - \bar{K})e^{(\gamma_1\chi+\gamma_2)t} + \chi\bar{K} + A$$

$$K = (K_0 - \bar{K})e^{(\gamma_1\chi+\gamma_2)t} + \bar{K}$$

$t \rightarrow \infty$

$$\bar{K} = -\frac{\gamma_1 A + \gamma_0}{\gamma_1\chi + \gamma_2}$$

<u>Dónde</u>:

K_0 = constante arbitraria

Si $K_0 > \bar{K}$ y $(\gamma_1\chi + \gamma_2) > 0 \Rightarrow X$ y $K \rightarrow \infty$, cuando $t \rightarrow \infty$

Si γ_2 es negativo y suficientemente pequeño $\Rightarrow (\gamma_1\chi + \gamma_2) < 0 \Rightarrow K \rightarrow \bar{K}$ y $X \rightarrow (A + \chi\bar{K})$

II. Modelo de producción no lineal y acumulación de capital

II.1.

Función de Producción

$$X = a + b K^{\chi}$$

Función de Acumulación de Capital

$$\dot{K} = \gamma_1 (X - a) + \gamma_2 K$$

Combinando las expresiones anteriores:

$$\dot{K} = \gamma_1 b K^{\chi} + \gamma_2 K$$

Solución

$$X = \frac{b}{\left[\left(B + \frac{\gamma_1 b}{\gamma_2}\right) e^{(1-\chi)\gamma_2 t} - \frac{\gamma_1 b}{\gamma_2}\right]^{\frac{1}{\chi - 1}}} + a$$

$$K = \frac{1}{\left[\left(B + \frac{\gamma_1 b}{\gamma_2}\right) e^{(1-\chi)\gamma_2 t} - \frac{\gamma_1 b}{\gamma_2}\right]^{\frac{1}{\chi - 1}}}$$

Dónde:

a = nivel de ingreso mínimo generado sin capital

$a, b, \chi, \gamma_1, \gamma_2$ = constantes > 0

B = constante arbitraria

Si $\chi < 1$ y $\gamma_2 < 0$

y

$$B > \left(-\frac{\gamma_1 b}{\gamma_2}\right) \Rightarrow \left[\left(B + \frac{\gamma_1 b}{\gamma_2}\right) e^{(1-\chi)\gamma_2 t} - \frac{\gamma_1 b}{\gamma_2}\right]^{\frac{1}{\chi-1}}$$ es positiva y $\downarrow$, cuando $t \to \infty$

Como el exponente $\left(\frac{1}{\chi - 1}\right) < 0 \Rightarrow K \downarrow$

Se obtiene:

$$K \to \left[-\frac{\gamma_1 b}{\gamma_2}\right]^{\frac{1}{\chi-1}}$$

ÚNICA OPCIÓN QUE CONDUCE A UNA ESTABILIDAD SIGNIFCATIVA

II.2.

Alternativamente…

Función de Producción

$$X = A + \chi_1 K + \chi_2 K^2$$

Función de Acumulación de Capital

$$\dot{K} = \gamma_1 X + \gamma_2 K + \gamma_0$$

Combinando las expresiones anteriores:

$$\dot{K} = \underbrace{\gamma_1 \chi_2}_{A_2} K^2 + \underbrace{(\gamma_1 \chi_1 + \gamma_2)}_{A_1} K + \underbrace{\chi_1 A + \gamma_0}_{A_0}$$

Solución estacionaria

$$\bar{K} = \frac{A_1 \pm \sqrt{A_1^2 - 4A_1A_0}}{2A_2}$$

La solución estacionaria del sistema es posible si el radicando es ≥ 0

<u>Dónde</u>:

A, γ_1 = constantes > 0

γ_0 = constante < 0

χ_1, χ_2, γ_2 = constantes ± o nulas

A_0, A_1, A_2 = constantes > 0,< 0 o nulas

Re-escribiendo $\dot{K}$:

$$\dot{K} = A_2 \left[(K - \alpha)^2 - \beta^2 \right]$$

$$-\frac{A_1}{2A_2}$$

$$\frac{\sqrt{A_1^2 - 4A_1A_0}}{2\left|A_2\right|}$$

Si $\beta^2 > 0$:

$$\frac{dK}{(K-\alpha)^2-\beta^2} = A_2 dt$$

Se arriba a la siguiente forma general de resolución:

$$K = \frac{(\alpha-\beta)+B(\alpha+\beta)e^{-2\beta A_2 t}}{1+Be^{-2\beta A_2 t}}$$

Que la solución se aproxime al estado estacionario depende del valor del parámetro B -condición inicial del sistema- y que el denominador de la expresión anterior no cambie de signo cuanto $t \longrightarrow \infty$.

Si K tiene nivel estacionario, X también dependiendo del signo de χ^2.

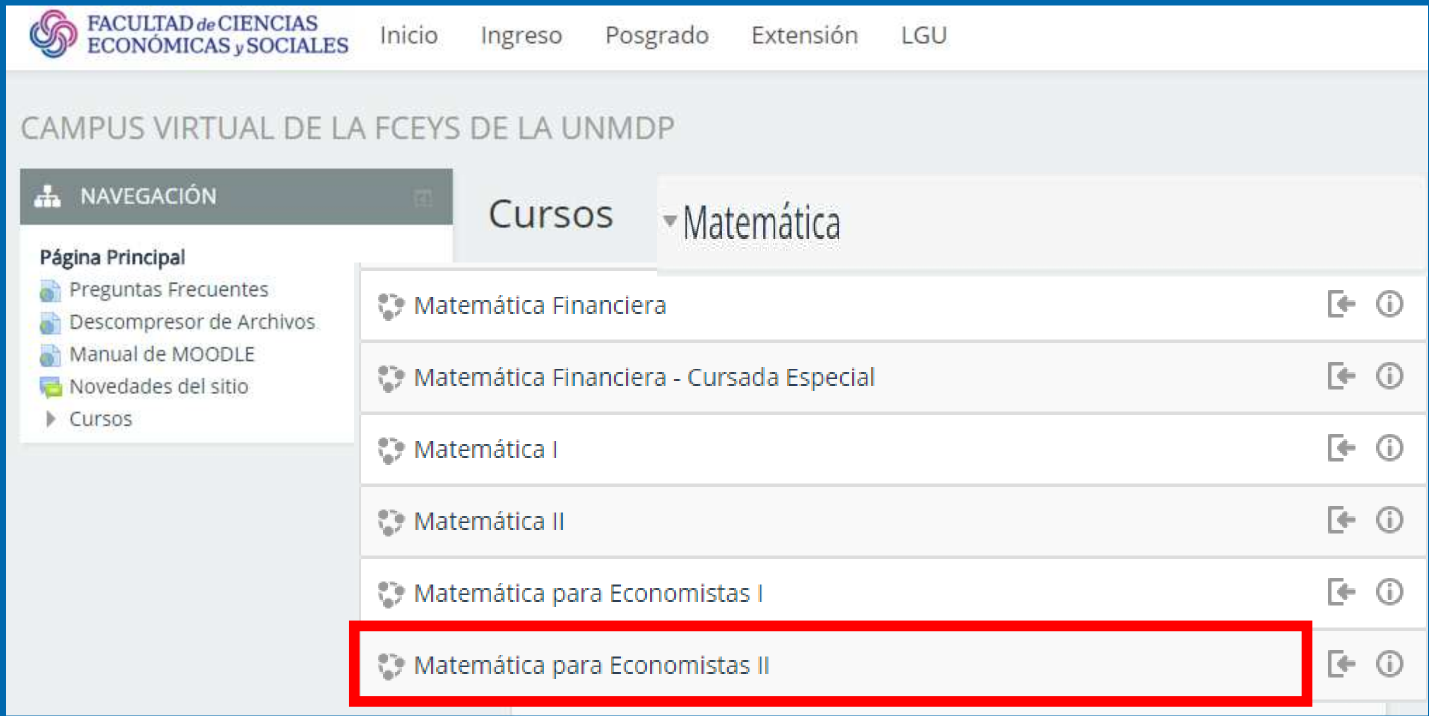
INTERVENCIÓN PEDAGÓGICA

Haavelmo, T. (1964). A study in the Theory of Economic Evolution. In J. Tinbergen, P. J. Verdoorn & H. J. Witeveen (Ed.) *Contributions to Economic Analysis*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam-Netherlands. Pages 24 -29. Disponible en:
http://www.sv.uio.no/econ/english/research/networks/haavelmo-network/publications/files/TH1954a.pdf

Trabajo áulico

Técnica 1-2-4

Análisis de los primeros modelos con funciones lineales y no lineales de producción (I1. y I.2.)



Campus virtual institucional

Análisis de los modelos alternativos con funciones lineales y no lineales de producción (**II.1.** y **II.2.**)

Trabajo extra-áulico

CONSIDERACIONES FINALES

El Modelo con función de producción no lineal, analizado el año pasado, concluye que el valor del coeficiente de productividad es el que determina si el sistema es estable independientemente de la TN y de la TM.

En esta oportunidad, el Modelo con función de producción no lineal y acumulación de capital revela la importancia de las condiciones iniciales en la estabilidad del sistema bajo estudio.

Si bien los modelos recientemente expuestos son sencillos desde la perspectiva económica , aunque más complejos que los presentados en la edición anterior de las Jornadas, permiten a los estudiantes relacionar ED con el análisis económico dinámico. Precisamente, el énfasis está puesto en la aplicación y no en la dificultad de la resolución matemática.

Gracias por su atención

Camila Roldán: camila.anto.roldan@gmail.com
Lizzie Marcel: lizziemarcel@gmail.com
Pía Acciarini: pia.accia@gmail.com
Beatriz Lupín: beatrizlupin@gmail.com