

Proyecto Geogebra para Compartir Escenarios Geométricos de Exploración y Análisis Algebraico

Banco conceptual de pruebas para co diseño *wiki*, libre y plural

Liliana M. Saidon^{1,2}

(1) Centro de Investigación Babbage sec_admin@centrobabbage.com www.geogebra.org – IGI – GeoGebra Consulting Board and Development Team
Responsable del Foro Hispano-Parlante GeoGebra de cooperación inter-universitaria internacional
Titular del Seminario Taller de Pedagogía de la Maestría de Planeamiento (UBA)

(2) Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Matanza
liliana.saidon@centrobabbage.com.ar

Colaboración: Prof. Graciela Negro (Centro Babbage) - Omar Morel (UNaM) Julio Bertúa (UNLaM).

RESUMEN: Integrar dinámicamente geometría, álgebra y análisis en desafíos mediados por un sistema libre de convocatoria colaborativa (*wiki* organizada y extendida a la comunidad docente internacional), involucra un reto, disciplinar y didáctico, para profesores y estudiantes y una recíproca alternativa exploratoria-conceptual para la enseñanza y el aprendizaje de matemática. Para analizar cómo tal abordaje puede poner en juego competencias matemáticas y meta-matemáticas avanzadas y convoca al quehacer matemático en aplicaciones diversas, se ha seleccionado un ejemplo – caso, particularmente abierto. La propuesta es recorrerlo, detenerse en el potencial replanteo del escenario habitual de la clase a lo largo del tratamiento, que habilitan sus recursos en contexto, en la emergencia de cuestiones sucesivas que den razón de ser al estudio de obras matemáticas y a la distinción de sus prácticas. Para ir develando criterios plasmados y decisiones expresas e implícitas, en el revés de su diseño.

Ensayamos problemas para sustentar la reflexión sobre lo que simultáneamente se está creando y controlando. Configuramos un medio adecuado para propiciar competencias situadas de un tenor, que podría calificarse de «proyectual» en sentido amplio. El ejemplo que ilustra estas cuestiones, fue seleccionado del repertorio de lo producido en el recorrido de una investigación que lleva años, en Centro Babbage, y ha incluido aportes para el desarrollo de software libre, como GeoGebra, en intercambio inter-universitario internacional.

PALABRAS CLAVE: competencias situadas, exploración matemática, causalidad, Tic's GeoGebra

1 INTRODUCCIÓN

En este trabajo resumimos diseños de situaciones didácticas de matemática dinámica.

Para la organización disciplinar y didáctica de las cuestiones a estudiar, empleamos un software libre en cuyo desarrollo participamos. El utilitario da pie al tratamiento algebraico, analítico y geométrico, reuniendo dinámicamente estos tres marcos. Permite un abordaje tanto experimental cuanto conceptual respaldando el planteo, modelización y resolución en procesos que serán también objeto de estudio. Consideramos que tal integración, en proyectos concordantes, permite poner en juego competencias metamatemáticas y matemáticas avanzadas y poco indagadas.

Analizaremos el trayecto del diseño a la resolución en torno a un caso.

Secuenciamos esta comunicación, desarrollando al menos un boceto que dé

pie al análisis de acuerdo con el contexto y a la elaboración de algunas especulaciones que abran el panorama para proseguir la investigación.

1.0 La función del ejemplo-caso

Consideraremos un ejemplo, articulando a través de interrogantes lo descriptivo a lo explicativo, en un encuadre característico de la ingeniería didáctica¹:

El caso de estudio operará como hilo conductor para:

- Partir de una propuesta - *Un triángulo y/o Un lugar geométrico ampliado dinámicamente*- que permite...
- propiciar modelos, metodologías y cuestionamientos, cuyo alcance supera el contextual.
- plantear más de un problema
- adoptar distintas e incluso inesperadas perspectivas.

- Analizar la actividad emergente

Respecto de lo desencadenado, destacaremos que el docente más que desenvolver una actividad frente a los estudiantes, proyecta un modelo de prácticas que procura compartir con ellos, planteando una actitud de “convite abierto”.

Lo meta-comunica en el contexto del desarrollo del que es guía y responsable: enfrentar el planteo, discutir su interpretación, contrastar posibles representaciones que supeditan diversos grados de dificultad en la resolución correspondiente. Organiza las prácticas competentes a las tareas, técnicas, tecnologías y teorías propias de lo «proyectual» -. En el sentido que al término le da ampliamente Herbert Simon cuando se propone dotar a las técnicas / tecnologías, a la ingeniería y a otras profesiones de una sustancia teórica distinta de la índole de las ciencias que les sirve de base, como la matemática: plantear problemas que incluyan el tratamiento de lo contingente. Problemas, planteos y resoluciones que no sólo se ocupen de lo necesario, al procurar modelos pertinentes para estudiar no cómo son las cosas sino cómo podrían ser. En resumen, que articulen diseño y proyecto. Articulación que, al priorizar el “cómo”, convoca a quien se suele excluir de antemano a expensas de cierta sobresimbolización anticipada de propuestas matemáticas escolares frecuentes. Para identificar el estilo al que nos referimos., indicaría que es el del diestro en la acción, nutrida del sustento de una racionalidad que supera, implícita, sus prácticas, con una lógica y metodología cuya explicitación requiere. Una institucionalización que difícilmente se le brinde, que debiera recuperar su quehacer desde quien puede interpretarlo al adjudicarle intencionalidad lúcida a lo que se desencadena cuando “proyecta”.

Vamos a ir describiendo e interpretando este recorrido para destacar el tenor de las competencias situadas cuya emergencia se procura.

2. DESARROLLO

2.0 El planteo de un caso

Cada desafío se presenta en los siguientes términos: «¿Cómo harías para...?»

En particular, por ejemplo, “¿... para encontrar triángulos de un perímetro

dado, que tengan un área k veces la máxima?” si queremos darle al problema un cariz más propio del proyecto o modelo acorde a lo que podríamos llamar *requerimientos técnicos* asociados a herramientas matemáticas o, “¿... para encontrar el lugar geométrico de los puntos que disten de un punto llamado foco k veces su distancia a una recta llamada directriz?” si quisiéramos operar en un proyecto que podríamos considerar más convencional en cuanto a objetos matemáticos.

Problemas de Diseño / Diseño de Problemas

Es característico de diversos tipos de problemas que el sistema consista en elementos cuyas relaciones y pautas de actuación se conocen: la dificultad la entraña predecir cómo se comportará el conjunto dinámico y relacionado de sus componentes.

Sin agotar las derivaciones del problema, pasamos a estudiarlo como ejemplo de un tipo de situación didáctica y organización disciplinar, vinculada a lo que denominaremos provisionalmente, *matemática «proyectual»*.

Rasgos del Caso: Matemática Proyectual

Un utilitario que habilita la modelización dinámica desde el planteo, la representación y el análisis, abre demasiadas puertas simultáneamente. Tanto para la resolución cuanto para el diseño de problemas.

Establece un replanteo disciplinar por el alcance de lo que nos podemos cuestionar / preguntar, antes que por el modo de resolver lo planteado.

En un recorrido habitual, los primeros planteos con tal herramienta, suelen dinamizar explicaciones para que los estudiantes las exploren, corroborando lo que se estudia.

Es representación usual que una capacitación docente procure un modo de enseñar, con nuevos medios, lo mismo.

Sin desmedro del innegable valor involucrado, las tecnologías integradas a la práctica profesional, docente y disciplinar, las TICs en particular, pueden aspirar a ser más que un recurso didáctico privilegiado.

Al avanzar en producciones colaborativas, prospera el empleo del banco de pruebas conceptual dinámico.

Se perfilan problemas que, como el ilustrado en el caso desplegado, ponen en juego competencias «metamatemáticas», tan avanzadas como tácitas.

Son propuestas que llevan, por ejemplo, a indagar cómo **funciona** una construcción. Pasando de:

1 **experiencias simples** para *ver lo que sucede*. Mover y ver qué pasa, en búsqueda de significaciones relativas a comportamientos generales y otras, más ocasionales, respecto de móviles sucesivos.

Se registra simultáneamente, comprensión de lo que habría que hacer e incompreensión de las relaciones que permitirían hacerlo.

2 **nivel de exploración intermedio** en que están más claros los fines a alcanzar pero el empleo de los medios permanece vinculado a ensayos con logros parciales o fracasos no siempre comprendidos.

En este nivel, pueden contestarse algunas preguntas del orden del: **¿Cómo...?** y empiezan a formularse otras: “Si lo *desbaratara a propósito*, ¿podría volver a conseguirlo?”; “¿Sólo de este modo?”; “¿Siempre así?”; “Puedo explicarle a un compañero cómo lograrlo sin operar el mouse directamente?”.

Interrogantes de este tipo pueden jalonarse en intervenciones docentes. Las del orden de “¿Cómo saber si se está cerca o no, de cada logro?”, abren el siguiente nivel.

3 **nivel de experimentación**

3.1 **instrumental** en que aparecen anticipaciones y programas de acción.

3.2 **de modelización** en que es necesario planificar e implementar indicadores para el control.

Los rasgos «proyectuales» se distinguen en este proceso que se recorre operando y analizando el resultado de cada intento.

Inicialmente es frecuente el ensayo y error. Paulatinamente, se gana en responsabilidad sobre el resultado de cada intento, a medida que se distinguen relaciones causales entre *lo que se hace y lo que sucede*.

En la actividad «proyectual» se integran también las tareas y técnicas que permiten delimitar lo que no resulta y devienen progresivamente observables las relaciones funcionales en juego.

Metodologías en el Recorrido

En cada uno de los *momentos* del recorrido, pueden distinguirse tareas que ponen en juego ciertas conjeturas (las preliminares pueden circular en acción). Descartar una conjetura, habilita el surgimiento de otra, enriquecida por lo que acaba de construirse. Enfatizamos que rescatar sistemáticamente lo que no resulta, es constructivo. Sobre todo, cuando en lugar de obnubilar (impidiendo que se vuelva a intentar una cierta tarea o técnica, en otro caso), abre paso a una explicación, al menos tentativa, de las condiciones de alcance y límites de lo involucrado.

Cuestionar, buscar indicios para elaborar una respuesta acorde y decidir en consecuencia es una actividad que permite tanto poner en juego propiedades, condiciones y correlaciones presentes cuanto distinguir propiedades excluidas, requerimientos que no se cumplen, condiciones que no se verifican. Se institucionaliza también el control y registro de lo que no corresponde o tiene relación con lo intentado, dando entidad a este modo de extender resoluciones más allá de este contexto.

Tanto en tareas propias de este problema, como en las que, eventualmente, encontremos en otros contextos y/o resulten del mismo tipo.

Este tipo de evaluación positiva, no ya del «error del que se aprende» sino de las tareas, técnicas y metodologías para delimitar alcances y descartar conjeturas, tiene poca tradición escolar pese a su reconocimiento, implícito, en prácticas académicas, profesionales y disciplinares.

Entre modelos y simulaciones

Para pasar a dominar el modo de funcionar de la construcción, se hace preciso identificar indicadores de diagnóstico. Precisos, de buen grado de generalidad y que lleven a establecer mejores procedimientos y guíen los ensayos. Por ejemplo, medir y controlar el área del triángulo construido. En una registro que mantendrá su carácter causal, integrando otras representaciones.

Cuando se evidencia que es preciso indagar los cambios (incrementos, decrementos, anulación, registro de valores máximos, etc.), se asume otro tenor de tareas. Evaluar el régimen de cambios de una medida, es el tipo de tarea por excelencia, del análisis.

Los estudiantes pueden encontrar sorpresa esta demanda: el proceso hacia dar con el resultado del problema, no involucra un valor –correcto, preciso–, ni siquiera una operación algebraica, sino la indagación del modo en que se registran modificaciones.

Es, hasta cierto punto, inicialmente una tarea de orden cualitativo si la comparamos con las de otro tipo de problemas.

Es más, en la medida en que estamos considerando cómo funciona el modelo producido, estamos recurriendo a una simulación «intramatemática».

Experimentando hacia la formulación

Para resolver el problema, es preciso relacionar las proporciones entre los lados y la consecución del área máxima. Hay una, casi observable, para cada base. Pero es preciso encontrar qué ejemplar de la familia de bases-elipses nos ofrece la mayor de las mayores áreas.

Entre lo que habilita el gráfico de estas correlaciones –que se aprecia en la Figura 2–, el registro de datos y rescate de fórmulas –como la de Herón–, nos acercamos desde distintos frentes a cierta convicción, que se puede terminar de corroborar recurriendo al cálculo.

La variedad de ejemplares de las distintas familias de triángulos que cumplen con la consigna, pueden contemplarse aún sin contar con una formulación precisa.

Esta respuesta abierta se dirige a nuevos interrogantes de orden cualitativa y matemáticamente más avanzados. Los dejamos a su cargo en la continuidad de colaboraciones que abre este intercambio.

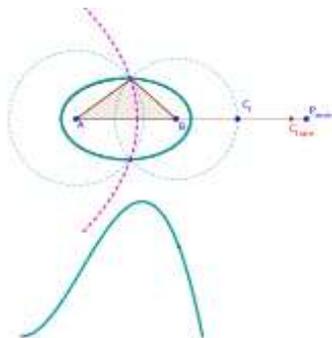


Figura 2. Esbozo del modelo

Conclusiones

Recapitulamos para compartir finalmente, lo que acorde con nuestra experiencia resulta singular:

- partimos de un planteo que parecía simple.
- su esclarecimiento fue tarea cooperativa
- lo interpretamos en intercambios propios del debate científica en clase.
- trazamos un boceto representativo
- exploramos el comportamiento dinámico del boceto en registro inicialmente causal
- renovamos las tareas del análisis al considerar dinámicamente la formulación algebraica y la representación gráfica
- examinamos el boceto como modelo en términos de simulación dinámica, soporte de inferencias y ensayos
- estudiamos el modelo aplicando aportes cruzados de los diversos marcos matemáticos
- reformulamos la generalidad del modelo al validar sus límites y alcance

- establecimos sucesivas conjeturas en etapas de progresiva inteligibilidad
- distinguimos respuestas del conjunto de las diversas pero no arbitrarias posibilidades de resoluciones que quedaron abiertas.

En este recorrido, se actualizaron competencias matemática situadas y a nivel estrictamente disciplinar:

- operamos con inecuaciones para establecer extremos correspondientes a las condiciones de existencia del triángulo
- reencontramos las cónicas en el camino de exploración geométrica
- las formulamos en la experimentación con que corroboramos ese «pálpito elíptico».
- volvimos a estudiar ecuaciones y gráficas para darles precisión y versatilidad a los modelos.

Desde la perspectiva del diseño, consideramos central la organización disciplinar y didáctica de cuestiones a ser tratadas en el singular banco de pruebas que el utilitario habilita para su estudio dinámico concreto y, de forma paradójica, conceptualmente matemático.

Estudio concreto y conceptual en tanto lleva a relacionar y condicionar lo que se pretende hacer con lo que se logra.

En cuanto a la actividad que se desencadena, distinguimos el modelo de prácticas que proyecta el docente frente a sus alumnos durante la resolución, de la resolución, y su índole «proyectual».

Al contrastar lo proyectado con los resultados obtenidos, se apela al utilitario para resolver problemas con una metodología que permite plantear la reflexión.

Sobre algo que simultáneamente se está creando (en la interacción entre el sujeto y el objeto) y controlando.

El objeto se perfila, al establecerse como ente susceptible de exploración-control y al extenderse el campo de análisis, práctico antes que formal, se escala hacia conjeturas (causales) desde la acción resolutoria. Nos encontramos simulando sobre el modelo. Más aún, sobre el modelo de su comportamiento, desplegando, instrumental y conceptualmente, competencias matemáticas avanzadas de escasa distinción formal, que acaso queden a la espera de ámbitos de institucionalización “diestra”.

Referencias

Artigue, M. (1995), “Ingeniería didáctica en Educación Matemática”, en, Grupo Editorial Iberoamericano.

Bourdieu, Pierre (1972), "Estructuras, habitus y prácticas", en *Esquisse d'une théorie de la pratique*, L. Droz- París.

Brousseau, G. (2002), “Cobayes et microbes”. la traducción se toma del material de respaldo teórico a un Proyecto de Investigación (2003-2007) del Centro de Investigación Babbage.

Brousseau, G. (2004) “Introducción al estudio de enseñanza del razonamiento y prueba: paradojas” en “Proof./ Preuve International Newsletter Mathematical Teaching and Learning”

Brousseau, G (1994) "Perspectives pour la didactique des mathématiques". Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France. Hommage a Guy Brousseau et Gérard Vergnaud. La Pensée Sauvage

Brousseau, G. (1988a). "Le contrat didactique: le milieu". *Recherches en didactique des Mathématiques*.

Chevallard, Y, Bosch, M. et Gascon, J. (1997): “Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje”. Barcelona: ICE/Horsori.

Douady, R. (1986). “Jeux de cadres et dialectique outil-objet” *Recherches en Didactique des Mathématiques*. París

Filoux, Janine (1974). *Du contrat pédagogique ou comment faire aimer les mathématiques á une jeune fille qui aime l'ail*. Dunod. París.

García, Rolando (1996) “Sistemas Complejos” Editorial Gedisa.

ICME (1988). *L'enseignement des mathématiques au niveau universitaire* Compendio de la Comisión Inter IREM Université.

Legrand M. (1992) “Les compétences scientifiques des étudiants & la façon dont présentons la science” *Gazette des Mathématiciens*, - París.

Legrand M. (1993) .“Débat scientifique en cours de mathématiques”, *Repères IREM*..

Marbach. P; Saidon L.; Santaló L. (1998) “Haciendo Geometría I” Centro Babbage

Piaget, J; García “Hacia una lógica de las significaciones” (1989):. Barcelona. Gedisa.

Saidon. L. (2001-2007) “Manual Oficial del GeoGebra” -

Saidon, L “Enseñanza con Utilitarios” – Ficha de Cátedra de Centro Babbage del curso Resolución de Problemas con Utilitarios. – (2001)

Simon, Herbert (1973), “Las Ciencias de lo Artificial” del original “The Sciences of the Artificial” (1970) Barcelona: A.T.E.

Young, Robert (1993), “Teoría crítica de la educación y discurso en el aula”, Editorial Paidós

¹ Se detalla en Anexo