Interpretación de la Semántica de Conjuntos de Respuestas como Teorías No Monótonas Trivaluadas

Pablo R. Fillottrani* Guillermo R. Simari
Grupo de Investigación en Inteligencia Artificial
Instituto de Ciencias e Ingeniería de Computación
Departamento de Ciencias de la Computación
Universidad Nacional del Sur
e-mail: ccfillo@criba.edu.ar

Resumen

En este trabajo se estudia la semántica de conjuntos de respuestas para programas lógicos extendidos [5, 4, 3], bajo la interpretación de sistemas de razonamiento no monótono trivaluados. Esto permite establecer una relación entre esta semántica con variantes trivaluadas de la lógica autoepistémica y la circunscripción, fundamentando la introducción de nuevos patrones de razonamiento dentro de la semántica de programas lógicos. Luego en base a esta equivalencia se presenta una caracterización de la semántica de modelos bien fundados como conjuntos de respuestas, en oposición a la definiciones originales [15, 13] fundamentadas en puntos fijos de operadores definidos *ad-hoc*.

*Becario de Perfeccionamiento del CONICET.

Interpretación de la Semántica de Conjuntos de Respuestas como Teorías No Monótonas Trivaluadas

1 Introducción

La negación por falla ha sido tradicionalmente considerada como la semántica operacional más adecuada para la programación en lógica. Sin embargo algunos autores [5, 4, 3] advirtieron que no era suficiente para representar en forma natural las soluciones a varios problemas comunes. Introdujeron entonces un segundo tipo de negación denominado "negación fuerte" cuyo objetivo es representar a aquella información que se *conoce* que es negativa, a diferencia de la negación por falla que *supone* la información que es falsa. La semántica de esta negación fue definida sin referirse a ningún formalismo lógico en particular, basándose en ciertos conjuntos de literales llamados *conjuntos de respuestas.*

Los conjuntos de respuestas han sido luego estudiados por Pearce [10] desde el punto de vista de distintos sistemas lógicos no convencionales como lógica constructiva, lógica default y diversas lógicas modales no monótonas. Estos trabajos muestran una relación entre los programas con dos tipos de negaciones y semánticas declarativas para la negación por falla, como los modelos perfectos, localmente perfectos y estables. De esta manera es posible interpretar a las reglas de los programas lógicos como distintas fórmulas en donde existe una negación monótona, asociada a la negación fuerte, y una negación no monótona, asociada a la negación por falla.

Los modelos estables, y sus variantes particulares ya mencionadas, tienen un grave problema [12] cual es el que no definen una semántica para la totalidad de los programas lógicos, sino solamente para un determinado subconjunto. La semántica de los modelos bien fundados [15] es una semántica alternativa basada en una lógica trivaluada, que soluciona este problema. El objetivo de este trabajo es relacionar la semántica de conjuntos de respuestas con los modelos bien fundados, extendiendo los resultados ya descriptos para los modelos estables. Ello se realiza de una manera análoga a la presentada por Pearce en [10]: se describen formalismos lógicos asociados a los conjuntos de respuestas, para luego expresar los modelos bien fundados en base a estos formalismos. En particular en este trabajo se utilizarán versiones trivaluadas de la lógica autoepistémica de Moore [9] y la circunscripción priorizada [8, 6].

2 Semántica de Conjuntos de Respuestas

La semántica de *conjuntos de respuestas* fue presentada por Gelfond y Lifschitz [4, 3] para definir el significado de un nuevo operador de negación "$\neg$", que ellos denominaron "negación clásica", cuya característica principal es que su inferencia es totalmente simétrica con respecto a la inferencia de información positiva en los programas definidos. Recordemos que un *programa extendido* es un conjunto de reglas de la forma:

$$L_0 \leftarrow L_1, \ldots, L_n \tag{1}$$

en donde cada $L_i, 0 \leq i \leq n$, es un literal de la forma A o $\neg A$, siendo A un átomo básico[1] del lenguaje. Se considerará a los programas con variables como una abreviatura del conjunto de todas sus instancias básicas.

Definición 2.1 Sea P un programa extendido y Lit_P el conjunto de literales básicos de su lenguaje. Entonces $S \subseteq Lit$ es el conjunto de respuestas de P si S es el mínimo (con respecto a la inclusión entre conjuntos) subconjunto de Lit que satisface:

1. si existe $L_0 \leftarrow L_1, \ldots, L_n$, en P tal que $L_i \in S$ para todo $i, 1 \leq i \leq n$, entonces $L_0 \in S$.
2. si existe $A \in Lit$ tal que $\{A, \neg A\} \subseteq S$ entonces $S = Lit$.

Es fácil demostrar que todos los programas extendidos tienen definido un único conjunto de respuestas, y se puede considerar por lo tanto como el conjunto de sus consecuencias.

Es posible relacionar esta semántica con varios sistemas lógicos. Si se interpreta cada regla de la forma (1) como un f.b.f.

$$L_1 \wedge \ldots \wedge L_n \supset L_0 \tag{2}$$

entonces Pearce demuestra en [10] que el conjunto de respuesta de un programa extendido coincide con el conjunto de literales que son sus consecuencias en la lógica contructiva con negación fuerte de Nelson. Gelfond y Lifschitz mostraron en [3] una traducción de las reglas de la forma (1) a cláusulas definidas de manera que el modelo de Herbrand mínimo del programa resultante conincida con el conjunto de respuestas del programa original.

Los programas extendidos son generalizados [3, 5] con el agregado del operador "*not*" de negación por falla. Los *programas extendidos no monótonos* tienen reglas de la forma:

$$L_0 \leftarrow L_1, \ldots, L_n, not\ L_{n+1}, \ldots, not\ L_m \tag{3}$$

que incluyen dos tipos de operadores de negación: la negación fuerte del operador "$\neg$" y la negación por falla del operador "*not*"; el primero es monótono mientras que el segundo no. La semántica correspondiente a estos programas se define extendiendo el concepto de modelos estables [4] a los conjuntos de respuestas.

[1]Traducción "ground" en inglés.

Definición 2.2 Sea P un programa extendido no monótono y $S \subseteq Lit$ un conjunto de literales de su lenguaje. Con P^S se notará al programa resultante de aplicar a P la transformación GL con respecto a S (ver [2, 4]). Si S es un conjunto de respuestas que satisface la equación

$$S = M_{P^S}$$

entonces S se denomina un *conjunto de respuesta estable.*

Como en el caso de los modelos estables para programas normales [2], se puede mostrar [11] que existen programas extendidos no monótonos que tienen uno, varios o ningún conjunto de respuestas estable. Por lo tanto, se toma a la intersección de todos los conjuntos de respuestas estables como su semántica y se hereda el problema de que ciertos programas no tienen una semántica definida.

También se ha demostrado que existe una correspondencia entre los conjuntos de respuestas estables y diversos sistemas lógicos, en este caso sistemas no monótonos. En el mismo trabajo de Gelfond y Lifschitz se analiza su equivalencia con las teorías default resultantes de traducir cada regla de la forma (3) a reglas default de la forma:

$$\frac{L_1 \wedge \ldots \wedge L_n : \mathbf{M}\neg L_{n+1}, \ldots, \mathbf{M}\neg L_m}{L_0} \tag{4}$$

Pearce [10] extendió estos resultados a una lógica default en donde se reemplaza el operador de consecuencia del cálculo proposicional clásico por el operador de consecuencia de una variante más debil de la lógica constructiva con negación fuerte de Nelson ya mencionada. En el mismo trabajo muestra que cada conjunto de respuesta estable coincide con las S4-expansiones del programa, considerados como lógica modal no monótona resultante de la interpretación de las reglas de la forma (3) como f.b.f. modales de la forma:

$$\mathbf{L}(\mathbf{L}L_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{L}L_n \wedge \neg\mathbf{L}L_{n+1} \wedge \ldots \wedge \neg\mathbf{L}L_m \supset \mathbf{L}L_0) \tag{5}$$

para programas consistentes. Esta traducción es similar a la inmersión conocida de la lógica constructiva de Nelson en la lógica modal S4.

Todas estas equivalencias permiten interpretar a los programas extendidos monótonos y no monótonos como fórmulas en diversos sistemas lógicos no clásicos. Sin embargo, ninguno de estos sistemas está directamente relacionados con otras semánticas para la negación en programas, como la de los modelos bien fundados. Considerando que la semántica de modelos bien fundados es más general que la semántica de modelos estables, es razonable buscar una correspondencia entre estos dos tipos de negación. Las siguientes secciones investigan este tema, usando como vínculo la lógica autoepistémica[2] y la circunscripción priorizada.

[2]La lógica autoepistémica es la lógica modal no monótona KD45, y por lo tanto diferente de la lógica modal no monótona S4 mencionada en el trabajo de Pearce.

3 Lógica Trivaluada Asociada a los Conjuntos de Respuestas

La semántica de conjuntos de respuestas para programas extendidos ha sido definida sin hacer uso de ningún formalismo lógico. Su extensión a programas extendidos no monótonos se formaliza a través de la resolución de una ecuación, también sin referenciar a alguna lógica en particular. En esta sección se introducirá una lógica de primer orden trivaluada que ofrece una alternativa para este problema, y se demostrará que el conjunto de respuestas de un programa extendido tiene una estrecha relación con los modelos del programa en esta lógica.

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden, y *Lit* el conjunto de sus literales básicos. Una interpretación I es un par $\langle D, \mathcal{V}_I \rangle$ en donde D es un conjunto isomorfo con el conjunto de términos básicos de $\mathcal{L}$ (asumiendo la UNA[3] y la DCA[4]) y $\mathcal{V}_I$ es una función que asigna para cada átomo básico de $\mathcal{L}$ uno de los valores de verdad del conjunto: $\{\texttt{verdadero}, \texttt{falso}, \texttt{indefinido}\}$. La valuación $\mathcal{V}_I$ se extiende de la forma usual al conjunto de todas las f.b.f. de $\mathcal{L}$, según las tablas de verdad de la lógica $Ł_3$ de Łukasiewicz, excepto para el caso de la implicación. En este caso se define:

$$\mathcal{V}_I(F \supset G) = \begin{cases} \texttt{falso} & \text{si } \mathcal{V}_I(F) = \texttt{verdadero} \text{ y } \mathcal{V}_I(G) \neq \texttt{verdadero} \\ \texttt{verdadero} & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

siendo F, G dos f.b.f. cualesquiera. Esta asignación de valor de verdad para la implicación es más débil que aquella de Łukasiewicz, y también es distinta de aquella hasta ahora usada para las semánticas de los programas lógicos (ver [14]). Coincide con la tabla de verdad del operador de implicación externa de Bochvar, pero la misma no ha sido estudiada en conjunto con los significados tradicionales de los restantes conectivos. El valor de verdad de las f.b.f. cuantificadas se define elemento a elemento:

$$\mathcal{V}_I(\forall x F) = \min\{\mathcal{V}_I(F\{x \backslash t\} : t \text{ es un término básico de } \mathcal{L}\}$$

$$\mathcal{V}_I(\exists x F) = \max\{\mathcal{V}_I(F\{x \backslash t\} : t \text{ es un término básico de } \mathcal{L}\}$$

con el siguiente ordenamiento $\texttt{falso} < \texttt{indefinido} < \texttt{verdadero}$ entre los valores de verdad. Denominaremos a esta lógica $\mathfrak{L}_3$.

A continuación se mostrará la conexión entre esta versión trivaluada del cálculo de predicados con la semántica de conjuntos de respuestas. Para ello se introducirá un nuevo concepto que generaliza los conjuntos de respuestas.

Definición 3.1 Sea P un programa extendido en un lenguaje $\mathcal{L}$ y *Lit* su conjunto de literales básicos. Entonces un subconjunto $S \subseteq Lit$ se denomina un *pre-conjunto de respuestas* de P si cumple:

[3] "Unique Name Assumption".
[4] "Domain Closure Axiom".

1. si existe $L_0 \leftarrow L_1, \ldots, L_n$, en P tal que $L_i \in S$ para todo $i, 1 \leq i \leq n$, entonces $L_0 \in S$.
2. si existe $A \in Lit$ tal que $\{A, \neg A\} \subseteq S$ entonces $S = Lit$.

Es claro que el conjunto de respuestas de P es el mínimo entre sus pre-conjuntos de respuestas, o equivalentemente es la intersección de todos sus pre-conjuntos de respuestas.

Los pre-conjuntos de respuestas proporcionan para los programas extendidos una semántica equivalente a aquella que los modelos de Herbrand proporcionan a los programas definidos. En este caso, la información positiva y negativa del programa extendido es tratada en forma totalmente simétrica. La siguiente proposición generaliza levemente resultados presentados en [10] y demuestra la relación entre la lógica trivaluada presentada y los conjuntos de respuestas.

Proposición 3.2 *Sea P un programa extendido, $\mathcal{L}$ su lenguaje de primer orden asociado y P' la traducción de P según el esquema* (2). *Entonces todo pre-conjunto de respuestas de P determina un único modelo trivaluado de P' en $\mathfrak{L}_3$; y análogamente todo modelo trivaluado de P' en $\mathfrak{L}_3$ determina un único pre-conjunto de respuestas de P.*

Esto demuestra que es posible interpretar los pre-conjuntos de respuestas como modelos de P en $\mathfrak{L}_3$, y además que la semántica de conjuntos de respuestas de P coincide con su conjunto de consecuencias en $\mathfrak{L}_3$.

4 Lógica Autoepistémica Trivaluada

La lógica autoepistémica [9] es una variante no monótona de las lógicas modales definida con el objetivo de modelar el razonamiento de un agente ideal sobre sus propias creencias. Su formalización se basa en el concepto de expansión estable, conjunto de f.b.f. modales que satisface la ecuación

$$E = Cn(P \cup \{\mathrm{L}S : E \models S\} \cup \{\neg \mathrm{L}S : E \not\models S\}) \tag{6}$$

siendo $Cn()$ el operador de consecuencia del cálculo de predicados y considerando las f.b.f. modales como nuevas proposiciones.

En esta sección presentaremos una extensión de la lógica autoepistémica a la lógica $\mathfrak{L}_3$, y para ello es necesario trasladar el concepto de expansión estable a $\mathfrak{L}_3$. El problema de la ecuación (6), al igual que la definición de modelos estables, es que para un mismo programa puede haber varias, una o ninguna solución. La principal ventaja de la lógica trivaluada es que para todo programa existe al menos una solución. Por lo tanto, es deseable extender esta propiedad para la caracterización en $\mathfrak{L}_3$ de las expansiones estables. Sin embargo, si se considera la ecuación

$$E = Cn_{\mathfrak{L}_3}(P \cup \{\mathrm{L}S : E \models_{\mathfrak{L}_3} S\} \cup \{\neg \mathrm{L}S : E \not\models_{\mathfrak{L}_3} S\}) \tag{7}$$

que es una traducción directa de la ecuación (6) reemplazando los operadores de consecuencias del cálculo de predicados por los de $\mathfrak{L}_3$, no cumple con esta propiedad según lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.1 Sea $P = \{\neg \mathrm{L}a \supset a\}$. Ninguna interpretación trivaluada E satisface la ecuación (7) debido a que si $\mathcal{V}_E(a) = \mathtt{verdadero}$ entonces $\mathcal{V}_E(\mathrm{L}a) = \mathtt{verdadero}$ y no satisface la f.b.f. de P; de lo contrario por la ecuación vale $\mathcal{V}_E(\neg\mathrm{L}a) = \mathtt{verdadero}$ y tampoco satisface la f.b.f. de P ya que $\mathcal{V}_E(a) \neq \mathtt{verdadero}$.

Es entonces necesario encontrar una variante más débil de (7) que tenga en cuenta estos problemas. Esto se logra diferenciando la política autoepistémica del agente para literales que tienen interpretación `falso` de los literales que son interpretados como `indefinido`, y caracterizando a aquellos literales que tienen en un modelo valor de verdad `indefinido` y cuya creencia puede asumirse como `falso` sin contradecir el modelo.

Definición 4.2 Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden, P una teoría en su extensión modal y I un modelo trivaluado de P según $\mathfrak{L}_3$. Una f.b.f. $F \in \mathcal{L}$ se dice *negativamente admisible* para P en I si existe un modelo I' de P tal que $\{\neg F, \neg \mathrm{L}F\} \in I'$ y $I \subseteq I'$.

De acuerdo a la proposición 3.2 puede considerarse a los modelos de P como pre-conjuntos de respuestas, o sea como subconjuntos de literales que satisfacen ciertas propiedades. Luego es posible agregar literales a ese subconjunto y considerar la relación de inclusión entre modelos de P en la lógica $\mathfrak{L}_3$. Esto permite probar que la definición anterior está bien definida, y caracterizar a todos las f.b.f. que son negativamente admisibles para un programa dado.

Definición 4.3 Sea P un programa extendido e I un modelo de P en $\mathfrak{L}_3$. Se notará con $Adm^{-}(I,P)$ al conjunto de f.b.f. que son negativamente admisibles en P para I.

Considerando entonces que un agente idealmente racional puede suponer que no cree en todas aquellas creencias que sean compatibles con sus premisas (es decir, aquellas que sean negativamente admisibles para su conjunto de creencias), entonces es posible extender la definición de conjunto estable a la lógica trivaluada según se hace a continuación.

Definición 4.4 Sea P una teoría en un lenguaje modal. Un modelo E de P en $\mathfrak{L}_3$ se denomina una $\mathfrak{L}_3$-*expansión estable* de P si satisface la ecuación:

$$E = Cn_{\mathfrak{L}_3}(P \cup \{\mathrm{L}S : E \models_{\mathfrak{L}_3} S\} \cup \{\neg\mathrm{L}S : E \not\models_{\mathfrak{L}_3} S\} \cup \{\neg\mathrm{L}S : S \in Adm^{-}(E,P)\}) \tag{8}$$

La ecuación (8) añade al tratamiento de la información positiva y negativa presente en (6) la política de introspección del agente sobre el conjunto de información que tiene valor de verdad `indefinido`. Para este caso si la f.b.f. S es negativamente admisible entonces se establece que $\neg \mathrm{L}S$ debe formar parte de su conocimiento; si S no es negativamente admisible, lo que significa que si se considera como `falso` entonces trae aparejados incompatibilidades con la interpretación, el agente no presupone la ausencia de conocimiento sino que simplemente se abstiene de definirse.

Ahora se describirá la relación entre esta versión trivaluada de la lógica autoepistémica y la semántica de los modelos bien fundados, resultado que proporciona una conexión entre los conjuntos de respuestas y los modelos bien fundados. Con el objetivo de describir formalmente esta relación, se utilizará la inmersión de las reglas de programas normales no monótonos de la forma (3) dentro de un lenguaje autoepistémico como en la siguiente f.b.f. modal

$$L_1 \wedge \ldots \wedge L_n \wedge \neg \mathrm{L} L_{n+1} \wedge \ldots \wedge \neg \mathrm{L} L_m \supset L_0 \tag{9}$$

Si P es un programa normal, se notará con P^{AE} a su traducción autoepistémica. Esta interpretación de programas lógicos en un lenguaje modal no es nueva y ni siquiera es propia de los modelos bien fundados. Gelfond [2] la definió por primera vez al caracterizar los modelos estables y es utilizada en todos los trabajos que relacionan la lógica autoepistémica con la programación en lógica [14, 4, 7].

La traducción autoepistémica de un programa normal establece que la negación en la programación en lógica debe interpretarse como "no creo" en la lógica autoepistémica. Bajo esta interpretación, la relación entre la semántica de los modelos bien fundados para los programas lógicos y las teorías autoepistémicas determinadas por sus traducciones autoepistémicas se establecen en la siguiente proposición. La notación $\models_{\mathrm{FUND}}$ representa las concecuencias de los modelos bien fundados.

Proposición 4.5 *Sea P un programa normal en un lenguaje $\mathcal{L}$. Entonces P^{AE} tiene por lo menos una expansión estable trivaluada y para toda f.b.f. $F \in \mathcal{L}$ vale:*

- $P \models_{\mathrm{FUND}} F$ *si y solo si F es una creencia autoepistémica positiva de P^{AE}.*
- $P \models_{\mathrm{FUND}} \neg F$ *si y solo si F es una creencia autoepistémica negativa de P^{AE}.*

Este resultado también implica que los programas normales, bajo otras semánticas más específicas que la semántica de los modelos bien fundados, como ser la semántica de los modelos estables o la de los modelos perfectos, pueden ser también interpretadas como teorías autoepistémicas al ser casos particulares de la semántica de los modelos bien fundados.

5 Circunscripción Trivaluada

En esta sección se presenta una extensión de la circunscripción priorizada [8, 6] a la lógica $\mathfrak{L}_3$. La caracterización semántica de la circunscripción basada en el cálculo de predicados establece un pre-orden de preferencia entre los modelos de una teoría a través de una clasificación de los literales del lenguaje. Según sobre qué datos se calcula la relación que establece esta preferencia, se definen distintos tipos de circunscripción. Estas definiciones son fácilmente generalizables al caso de la lógica trivaluada $\mathfrak{L}_3$. Las definiciones que se muestran en esta sección lo hacen para la circunscripción paralela, la más simple, y la circunscripción priorizada. Primero se define un orden entre modelos trivaluados, cuya definición es idéntica al caso de dos valores de verdad ya que dicho orden sólo considera la clasificación de los literales que son verdaderos. Luego, se eligen para representar el significado de una teoría dada los modelos que son minimales en este orden.

Para comenzar se extenderá a modelos trivaluados el orden de preferencia que caracteriza a la circunscripción de predicados. Con este objetivo se utilizará el orden "$\preceq$" de comparación de interpretaciones trivaluadas que establece que una interpretación es menor que otra si tiene menos átomos con valor de verdad `verdadero` y más átomos con valor de verdad `falso`. Esta relación es más natural que el otro orden que se utiliza para la comparación de átomos minimizados, los que se prefieren que tengan valor de verdad `falso`. Si se usara este orden se establecería que es preferible que los átomos minimizados tengan valor de verdad `indefinido`, lo cual contradice el espíritu de la circunscripción.

Definición 5.1 Sea P una teoría en un lenguaje $\mathcal{L}$, M, N dos modelos trivaluados de P y $R, Z \subseteq B_{\mathcal{L}}$ dos subconjuntos de átomos llamados *átomos minimizados* y *átomos variables* respectivamente, definiendo a $Q = B_{\mathcal{L}} - (R \cup Z)$ como el resto de los átomos del lenguaje. Entonces M se dice *R, Z-menor o igual que* N si cumple

1. $M \mid Q = N \mid Q$
2. $M \mid R \preceq N \mid R$

En este caso se nota con $M \preceq_{R,Z} N$ y se dice que M es R, Z-minimal si para todo modelo N tal que $N \preceq_{R,Z} M$ se cumple que $N = M$.

Se puede probar que la relación $\preceq_{R,Z}$ es una relación de pre-orden entre modelos trivaluados de una teoría P, dado que pueden existir ciclos entre modelos distintos lo que contradice la propiedad antisimétrica.

En el caso en que todos los átomos sean minimizados, *i.e.* $R = B_{\mathcal{L}}$, el orden $\preceq_{R,Z}$ coincide con el orden $\preceq$ anteriormente mencionado.

Definición 5.2 Sea P una teoría en un lenguaje $\mathcal{L}$ y $R, Z \subseteq B_{\mathcal{L}}$ los conjuntos de átomos minimizados y variables respectivamente. Un modelo M se dice un modelo de la *circunscripción paralela trivaluada* CIRC3$(P; R; Z)$ de P si y solo si M es un modelo R, Z-minimal. Una f.b.f. $F \in \mathcal{L}$ se dice consecuencia de CIRC3$(P; R; Z)$ si y solo si es verdadera en todos los modelos de la circunscripción paralela trivaluada de P, notándose CIRC3$(P; R; Z) \models F$.

La misma secuencia de pasos es posible realizarla para generalizar la circunscripción priorizada a la lógica trivaluada, pero primero es necesario definir el concepto de priorización que representa una partición de los átomos del lenguaje de manera que existe un orden lineal entre las particiones.

Definición 5.3 Sea lenguaje $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. Se denomina una *priorización para* $\mathcal{L}$ a una secuencia $\{S_\beta\}_{0\leq\beta\leq\lambda}$ tal que λ es un ordinal cualquiera y los $S_\beta \subseteq B_\mathcal{L}, 0 \leq \beta \leq \lambda$ son subconjuntos disjuntos de la base de Herbrand de $\mathcal{L}$. Un átomo $A \in \bigcup_{0\leq\beta\leq\lambda} S_\beta$ se denomina un *átomo minimizado* en la priorización.

Definición 5.4 Sea P una teoría en un lenguaje $\mathcal{L}$ y $\{S_\beta\}_{0\leq\beta\leq\lambda}$ una priorización para $\mathcal{L}$ y $Z \subseteq B_\mathcal{L} - \bigcup_{0\leq\beta\leq\lambda} S_\beta$ un subconjunto de $B_\mathcal{L}$ disjunto de los S_β. Un modelo M de P se dice un modelo de la *circunscripción priorizada trivaluada* $\mathrm{CIRC3}(P; \{S_\beta\}_{0\leq\beta\leq\lambda}; Z)$ de P si y solo si para cada $\beta, 0 \leq \beta \leq \lambda$ vale que M es un modelo $(S_\beta, (\bigcup_{\beta<\gamma\leq\lambda} S_\gamma) \cup Z)$-minimal de P. Una f.b.f. $F \in \mathcal{L}$ se dice consecuencia de $\mathrm{CIRC3}(P; \{S_\beta\}_{0\leq\beta\leq\lambda}; Z)$ si y solo si es verdadera en todos los modelos de la circunscripción paralela trivaluada de P, notándose $\mathrm{CIRC3}(P; \{S_\beta\}_0 \leq \beta \leq \lambda; Z) \models F$.

La relación entre los modelos bien fundados y la circunscripción se presentará usando la extensión trivaluada de la circunscripción priorizada. Para ello es necesario establecer un orden de minimización entre los átomos minimizados. El orden utilizado es el denominado *estratificación dinámica* [12], determinado por la sintaxis del programa. Esta estratificación es calculada directamente a partir de la sintaxis del programa, sin necesidad que el programador la mencione explícitamente. Una vez fijada la estratificación, se puede calcular la circunscripción priorizada trivaluada de un programa, probándose que es equivalente al modelo bien fundado del mismo.

Proposición 5.5 *Sea P un programa normal en un lenguaje $\mathcal{L}$ y $\{S_\beta\}_{0\leq\beta<\delta}$ su estratificación dinámica. Entonces para toda f.b.f. $F \in \mathcal{L}$ vale:*

$$P \models_{\mathrm{FUND}} F \textit{ si y solo si } \mathrm{CIRC3}(P; \{S_\beta\}_{0\leq\beta<\delta}; Z) \models F$$

Como en el caso de la lógica autoepistémica, es posible particularizar estos resultados para las semánticas de los modelos estables y perfectos en los casos en que el modelo bien fundados saturados. También es posible la interpretación en sentido contrario, desde el punto de vista de la circunscripción o la lógica autopistémica. Esto es, existen ciertas teorías, aquellas relacionadas con los programas normales, que tienen un método efectivo de computación determinado por la resolución de SLDNF.

Es necesario destacar la importancia de estos resultados, que permiten que tres formalismos matemáticos distintos como la programación en lógica, la lógica autoepistémica y la circunscripción, cada uno con motivaciones, fundamentos y propiedades distintas, coincidan en una gran cantidad de teorías como lo son los programas normales. Esto permite entonces continuar con la incorporación de distintos patrones de razonamientos dentro de un lenguaje de programación, como en [1] con teorías de razonamiento no monótono, pero conservando aún la semántica operacional eficiente de los programas lógicos.

6 Conclusiones

Se presentaron en este trabajo versiones trivaluadas de la lógica autoepistémica y la circunscripción priorizada que permiten establecer resultados de equivalencia entre la semántica de conjuntos de respuestas y la semántica de modelos bien fundados, aplicadas a programas extendidos no monótonos. Para ello se utilizó como base una lógica trivaludada denominada $\mathfrak{L}_3$, que presenta diferencias con las lógicas anteriormente utilizadas para relacionar los modelos bien fundados con formalismos no monótonos.

La importancia de la conexión entre la semántica de conjuntos de respuestas y los modelos bien fundados es que permite definir una semántica con dos tipos de negación para la totalidad de los programas extendidos no monótonos. Los resultados anteriores caracterizaban la negación por falla de estos programas con los modelos estables, por lo que heredaban el inconveniente de no estar bien definidos para el conjunto de todos estos programas lógicos.

Referencias

[1] FILLOTTRANI, P. R., AND SIMARI, G. R. Circumscriptive logic programming. In *Proceedings of the XIV International Conference of the Chilean Computer Science Society* (Concepción, Chile, 1994).

[2] GELFOND, M., AND LIFSCHITZ, V. The stable model semantics for logic programming. In *Proceedings of the 5th. International Conference on Logic Programming* (Seattle, WA, 1988).

[3] GELFOND, M., AND LIFSCHITZ, V. Logic programs with classical negation. In *Proceedings of the 7th. International Conference on Logic Programming* (Jerusalem, Israel, 1990).

[4] GELFOND, M., AND LIFSCHITZ, V. Classical negation in logic programming and disjunctive databases. *New Generation Computing 9* (1991).

[5] KOWALSKI, R., AND SADRI, F. Logic programs with exceptions. In *Proceedings of the 7th. International Conference on Logic Programming* (Jerusalem, Israel, 1990).

[6] LIFSCHITZ, V. On the satisfiability of circumscription. *Artificial Intelligence 28* (1986).

[7] LIFSCHITZ, V., AND SCHWARZ, G. Extended logic programs as autoepistemic theories. In *Proceedings of the 2nd. International Workshop on Logic Programming and Nonmonotonic Reasoning* (Lisbon, Portugal, 1993).

[8] MCCARTHY, J. Applications of circumscription to formalizing common-sense reasoning. *Artificial Intelligence 28* (1986).

[9] MOORE, R. C. Semantical considerations on nonmonotonic logic. *Artificial Intelligence 25* (1985).

[10] PEARCE, D. Answer sets and constructive logic II: extended logic programs and related nonmonotonic formalisms. In *Proceedings of the 2nd. International Workshop on Logic Programming and Nonmonotonic Reasoning* (Lisbon, Portugal, 1993).

[11] PRZYMUSINSKA, H., AND PRZYMUSINSKI, T. C. Semantic issues in deductive databases and logic programs. In *Formal techniques in artificial intelligence*, A. Banerji, Ed. North Holland, Amsterdan, 1990, pp. 321–367.

[12] PRZYMUSINSKI, T. C. Every logic program has a natural stratification and an iterated fixed point model. In *Proceedings of the 8th. Symposium on Principles of Database Systems* (1989), ACM SIGACT-SIGMOD.

[13] PRZYMUSINSKI, T. C. On the declarative and procedural semantics of logic programs. *Journal of Automated Reasoning 5* (1989).

[14] PRZYMUSINSKI, T. C. Three-valued nonmonotonic formalisms and semantics of logic programs. *Artificial Intelligence 49* (1991).

[15] VAN GELDER, A., ROSS, K., AND SCHLIPF, J. Unfounded sets and well-founded semantics for general logic programs. In *Proceedings of the 8th. Symposium on Principles of Database Systems* (1989), ACM SIGACT-SIGMOD.