Visualización de puntos críticos de funciones *n*-dimensionales mediante coordenadas paralelas

Marcela Caldarelli[1], Liliana Castro[1], Graciela Paolini[1], Silvia Castro[2]
[1] Dpto. de Matemática
[2] Dpto. de Cs. de la Computación
VyGLab – Dpto de Cs. de la Computación
Universidad Nacional del Sur
Avda. Alem 1253
8000 – Bahía Blanca

Resumen

Si bien hay muchas herramientas que permiten visualizar funciones 2D, 3D y sus puntos críticos, no ocurre lo mismo cuando se quieren visualizar funciones de dimensiones mayores. La importancia de obtener visualizaciones de estas funciones *n*-dimensionales reside en el estudio de relaciones multivariadas ya que el entender la geometría subyacente de un problema puede proveer una comprensión crucial en lo que es posible y lo que no. La visualización permite lograr una rápida asimilación de esta información junto con el monitoreo de grandes cantidades de datos. En este trabajo describimos cómo visualizar funciones *n*-dimensionales y sus puntos críticos. Esta visualización está basada en un sistema de coordenadas paralelas que induce un mapeo no proyectivo entre conjuntos de $\Re^n$ en $\Re^2$.

Palabras clave: Coordenadas Paralelas, Visualización en Matemática, Visualización de Información.

1. Introducción

En este trabajo se presenta una metodología para visualizar funciones y extremos de funciones definidas en $\Re^n$. Esta metodología está basada en un sistema de coordenadas paralelas. En este sistema de coordenadas, las relaciones entre las *n* variables reales se mapean unívocamente en subconjuntos del espacio 2D permitiendo así la visualización de las correspondientes hipersuperficies *n*-dimensionales. Usando este sistema de coordenadas, las hipersuperficies se representan por sus imágenes planas. Las coordenadas paralelas han sido aplicadas en una gran gran variedad de problemas multivariados tales como el análisis exploratorio de datos en estadística, la representación de hipersuperficies utilizadas para modelar la economía de un país en economía, la resolución de conflictos en el control de tráfico aéreo, etc.

Es bien conocido el hecho que el comprender la geometría subyacente de un problema multivariado brinda una gran ayuda para distinguir lo que es posible y lo que no. Las coordenadas paralelas proveen una metodología para la visualización de funciones multidimensionales sin ambigüedades ni proyecciones y, en consecuencia, de relaciones multivariadas.

Hay muchas herramientas que permiten la visualización de funciones 3D, pero la generalización a funciones de mayor dimensión no es fácil. El deseo de aumentar nuestra percepción tridimensional y la necesidad de visualizar funciones multivariadas hacen necesaria la exploración de diferentes metodologías que den una mejor forma de comprender la representación de funciones multidimensionales. En el siglo XIX, matemáticos como Riemann y Gauss abrieron nuestra imaginación a las geometrías no-Euclídeas y de mayores dimensiones. El desafío intelectual, limitado por nuestra experiencia perceptual tridimensional y la abundancia de problemas multivariados, crearon distintas metodologías para representar (codificar) conjunto finitos de puntos de datos multivariados. Las coordenadas paralelas aplicadas a la visualización de hipersuperficies *n*-dimensionales y sus puntos críticos, permiten su representación usando una imagen plana que hereda algunas de las propiedades que éstas representan. En este trabajo, se discute la representación de funciones *n*-dimensionales y se dan ejemplos que muestran algunas propiedades locales de las funciones y su relación con su representación en coordendas planas.

La aplicación de esta herramienta al análisis clásico de funciones provee relaciones entre los parámetros de datos que permiten identificar características geométricas de las funciones así representadas. Esto da una percepción diferente de la naturaleza de las funciones y permite visualizar propiedades que no son fáciles de ver analíticamente. Con los ejemplos, se muestra que el descubrimiento basado en esta técnica de análisis provee conclusiones cuantitativas y razonablemente precisas, que son similares a las que se arriba usando las técnicas analíticas estándar. La principal ventaja es que es posible visualizar funciones *n*-dimensionales y sus puntos críticos completamente ya que esto no puede verse fácilmente con los métodos estándar, dando así una nueva metodología para la representación y el análisis de funciones multivariadas.

En la próxima sección presentamos la definición de lo que constituye un sistema de Coordenadas Paralelas. En la sección 3, describimos la metodología propuesta, en la sección 4 damos algunos ejemplos de aplicación de distintas visualizaciones de funciones y sus puntos críticos y por último presentamos las conclusiones y delineamos el trabajo futuro.

2. Sistema de Coordenadas Paralelas

Un sistema de coordenadas paralelas consiste en ejes paralelos, cada uno de los cuales representa una dimensión. Un sistema *n*-dimensional tendrá entonces *n* ejes paralelos. Así, para representar un punto *n*-dimensional en este sistema, se realiza un mapeo no proyectivo entre un conjunto *n*-dimensional y uno bidimensional.

Este sistema se representa en el plano Euclídeo con coordenadas cartesianas *xy*, *n* copias de la línea real etiquetada $X_1, X_2, \ldots, X_n$ se colocan equidistantes y perpendiculares al eje x. Estos son los ejes de un sistema de coordenadas paralelas para el espacio *n*-dimensional. Todos estos ejes tienen la misma orientación positiva que el eje *y*, que se toma coincidenmte con el eje X_1. [2,3,4]. Un punto *C* con coordenadas $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ se representa mediante una poligonal *l* cuyos *n* vértices están en $(i\text{-}1, c_i)$ en el eje X_i para $i = 1,\ldots,n$ como se muestra en la Figura 1.

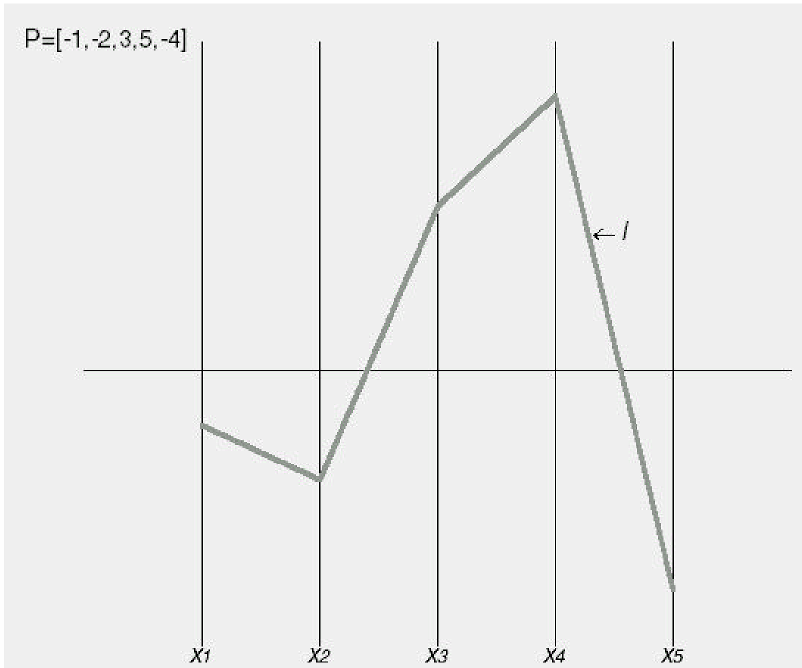

Figura 1. Un punto representado en coordenadas paralelas

De este modo, se contruye una correspondencia uno a uno entre puntos en $\Re^n$ y las líneas poligonales con vértices en los ejes paralelos [1]. En la Figura 2 es posible ver las representación de un cuadrado y un cubo mediante sus vértices en coordenadas paralelas.

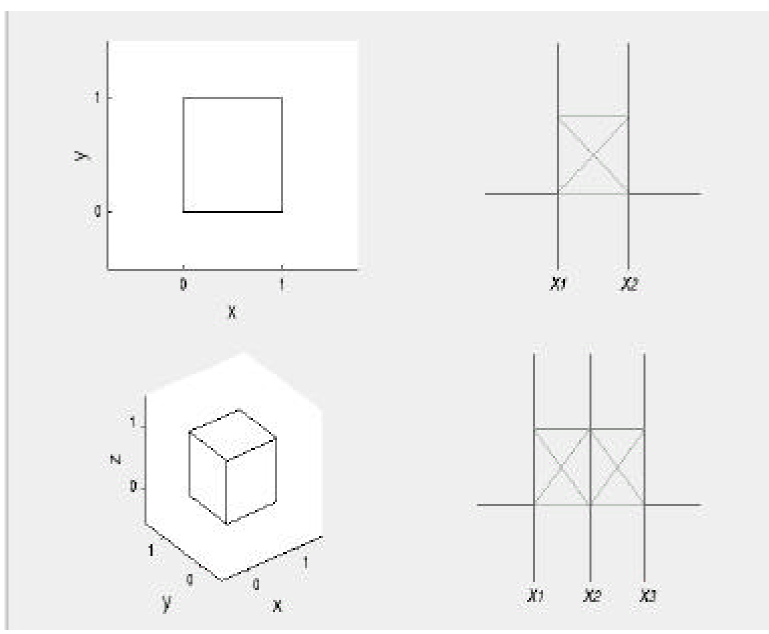

Figura 2. Representación de un cuadrado y un cubo en coordenadas cartesianas y en coordenadas paralelas

En tanto que en el sistema cartesiano utilizamos mayúsculas para los puntos y minúsculas con tilde para las líneas, en el sistema de coordenadas paralelas se utilizan habitualmente barras sobre las letras mayúsculas y letras manuscritas para las poligonales (ej. *l*).

El punto $C \in \Re^n$ se representa por la poligonal l, i.e. $C \in \Re^n$ está compuesta por las líneas indexadas $C_{i,i+1}$ conectando los puntos con coordenadas $(i\text{-}1, c_i)$ y (i, c_i+1) para $i = 1, \ldots, n\text{-}1$.

3. Representación de Funciones y Puntos Críticos

Brindar la posibilidad de visualizar funciones n-dimensionales y sus puntos críticos es el objetivo de nuestro trabajo. Puede verse fácilmente que los métodos estándar no permiten la visualización n-dimensional debido a la limitación de nuestra experiencia perceptual tridimensional; por ello consideramos necesaria una nueva metodología que permitiera la representación y el análisis de funciones multivariadas.

Veamos entonces cómo podemos representar funciones y sus puntos críticos.

3.1. Representación de una función

Consideramos la representación de funciones n-dimensionales de clase C^3, en un conjunto dado de $\Re^n$. Para esto, la función de $(n\text{-}1)$- variables independientes se representa en n ejes paralelos. Nuestro sistema de coordenadas tendrá $n\text{-}1$ ejes identificados desde X_1 hasta $X_{n\text{-}1}$ que corresponden a los valores de las $n\text{-}1$ variables independientes y el n-ésimo, es el eje que corresponderá a la variable dependiente y será identificado con f (Ver Figura 3).

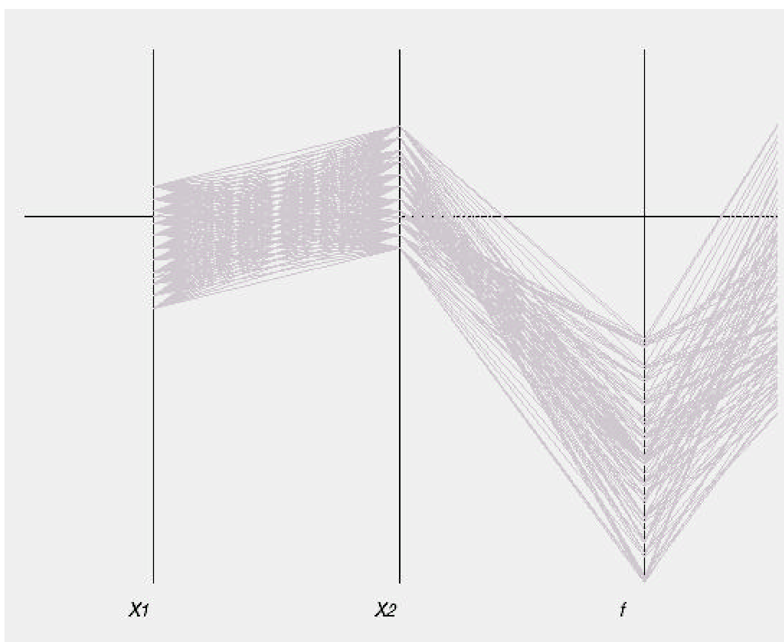

Figura 3. Representación de una función.

3.2. Representación de puntos críticos

Las coordenadas paralelas también las utilizaremos para representar los puntos críticos. A continuación de los ejes correspondientes a la función, se ubucarán los correspondientes a la primera derivada de la función con respecto a cada una de las variables independientes. Estos ejes se etiquetan respectivamente como f_{x1}, f_{x2}, …, $f_{xn\text{-}1}$. Como último eje, se grafica una característica del hessiano que describiremos a continuación.

Para realizar el estudio de funciones es necesario contar con los puntos críticos. Para una función de *n* variables, éstos son los puntos donde las primeras derivadas se anulan. Gráficamente, los puntos críticos corresponderán a las poligonales que intersectan a los ejes f_{x1}, f_{x2}, …, f_{xn-1} en cero y serán identificados mediante líneas resaltadas en distintos colores.

Si queremos ver cuáles son los máximos y los mínimos se prosigue con el estudio de la función viendo qué ocurre en los puntos críticos. Para esto se analiza qué sucede con el hessiano:

- Si en el punto crítico la función alcanza un máximo relativo, el hessiano es definido negativo y se grafica con el valor –1 en el eje correspondiente.
- Si en el punto crítico la función alcanza un mínimo relativo, el hessiano es definido positivo y se grafica con el valor 1 en el eje correspondiente.
- Si en el punto crítico la función tiene un punto silla, entonces al hessiano se le asigna el valor cero en el eje correspondiente.

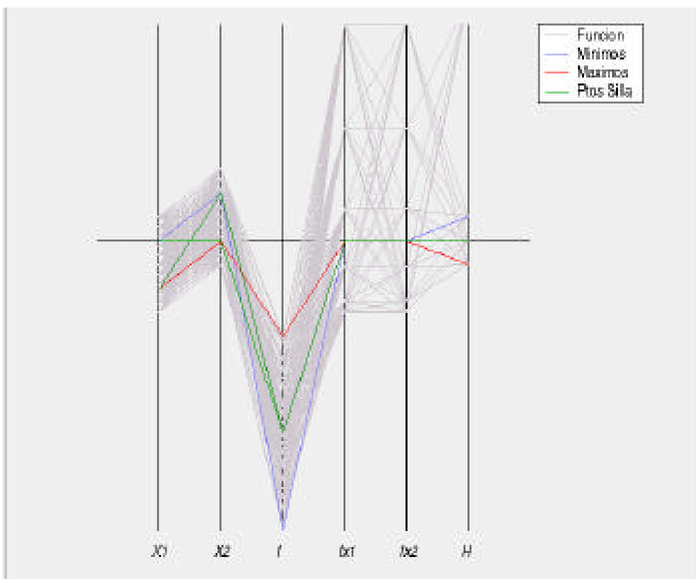

Figura 4. Representación de una función y sus puntos críticos.

Esto puede verse gráficamente en la Figura 4. Identificamos de esta manera los puntos críticos de acuerdo a cómo está definido el hessiano y también lo visualizamos con un código redundante de color que permite visualizarlos inmediatamente.

4. Visualización de funciones y Puntos Críticos

En los distintos gráficos no se han colocado las escalas correspondientes a los ejes para no oscurecer la visualización; sin embargo, esto puede hacerse bajo demanda. Lo mismo ocurre con el valor particular de cada uno de los punto críticos.

Ejemplo 1

Si consideremos la función

$$f_1(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2 - 8,$$

en la Figura 5 y la Figura 6 es posible ver, usando la metodología descripta, que la función tiene un mínimo local en (0, 2), un máximo local en (-2, 0) y dos puntos silla en (0, 0) y en (-2, 2). La Figura 6 corresponde a un zoom hecho sobre la Figura 5 con el objetivo de ver más de cerca, por ejemplo, los puntos silla.

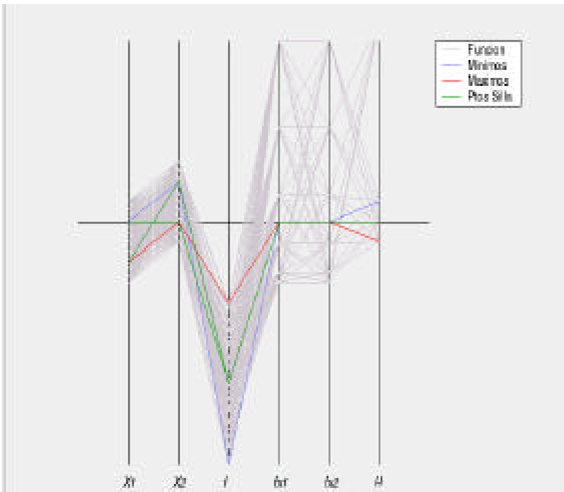

Figura 5. Gráfico de la función f_1 y sus puntos críticos.

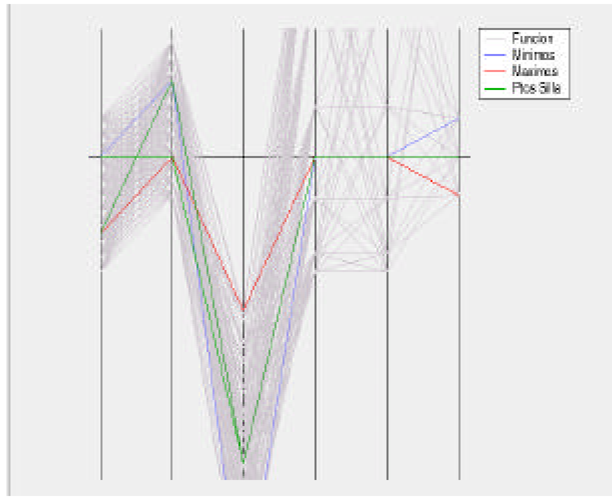

Figura 6. Zoom de los puntos críticos de la función f_1.

Ejemplo 2

Analizamos ahora la función

$$f_2(x,y) = y \sin(x)$$

Esta función tiene puntos silla en los puntos (π/4, 0). Esto puede visualizarse claramente en la Figura 7 .

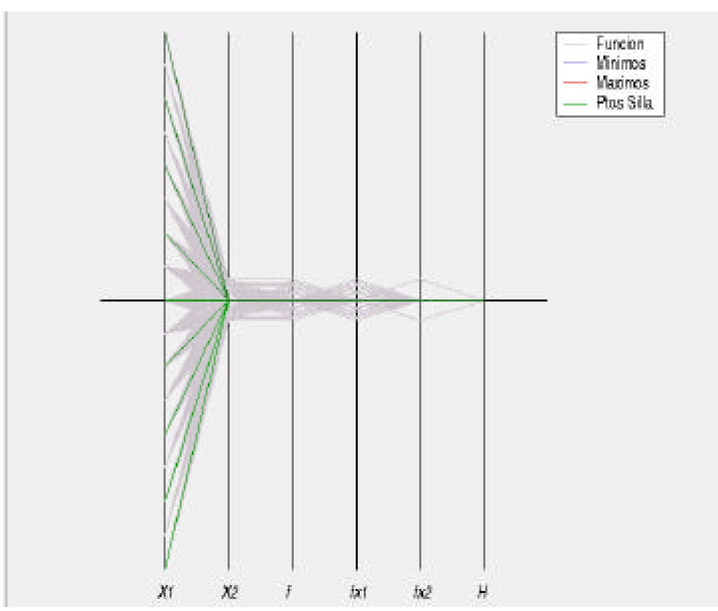

Figura 7. Representación de la función f_2 y sus puntos silla.

Ejemplo 3

Consideremos la función

$$f_3(x,y,z) = x^3 + y^3 - z^3 + 2yz - 3x^2$$

Esta función tiene un mínimo local en (2, 1/3, -2/3) y tres puntos silla en los puntos (0, 0, 0), (0, 2/3, -2/3) y (2, 0, 0). Estos pueden determinarse usando la metodología descripta y se observa en las Figuras 10 y 11. La Figura 11 corresponde a un zoom sobre la Figura 10 que permite visualizar mejor los extremos.

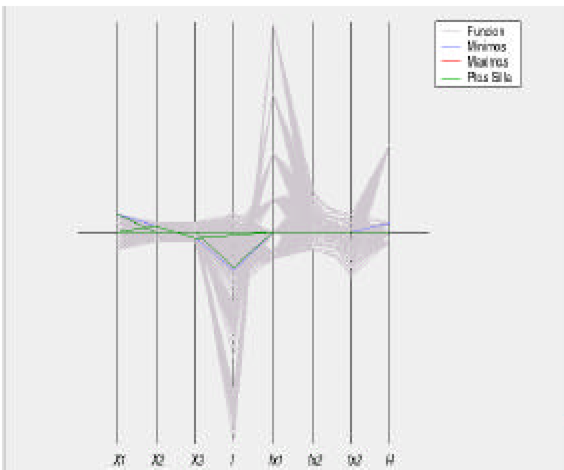

Figura 8. Representación de la función f_3 y de sus puntos críticos.

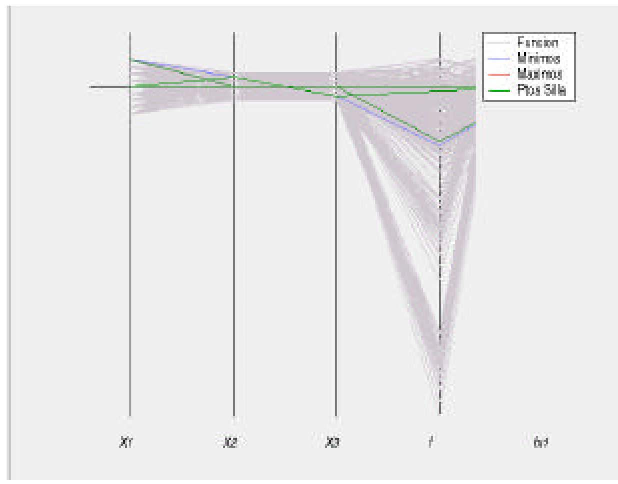

Figura 9. Zoom de la Figura 8 sobre los puntos críticos

Ejemplo 4

Consideremos la función

$$f_4(x,y,z,u) = -x^2 - (y-1)^2 - (z+2)^2 - u^2$$

Esta función tiene un máximo local en (0,1,-2,0) y no tiene mínimos ni puntos silla. Vemos que, bajo demanda, podemos obtener el valor correspondiente al extremo.

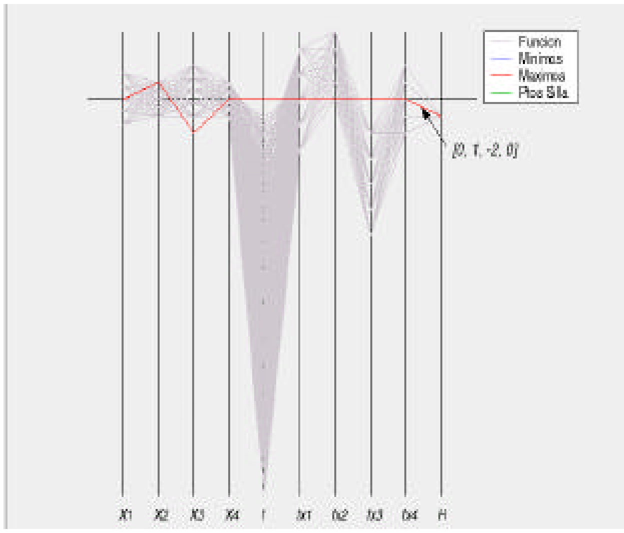

Figura 10. Representación de la función f_4 y del máximo relativo.

6. Conclusiones y Trabajo Futuro

Hemos dado una metodología basada en un sistema de coordenadas paralelas para visualizar funciones reales n-dimensionales de clase C^3 y sus puntos críticos sin ambigüedades ni proyecciones.

Consideramos que las coordenadas paralelas permiten obtener de manera simple un muy buen *insight* en la representación de funciones multivariadas. Por ello, actualmente estamos trabajando en la extensión de la metodología de visualización a una subclase más amplia de funciones multivaridas.

Por otro lado cabe señalar que para que los usuarios de las visualizaciones puedan utilizar adecuadamente las coordenadas paralelas para extraer información sobre las funciones, es necesario que cuenten con una interfaz adecuada y efectiva. Desde este punto de vista, estamos trabajando en un sistema que permita una buena interacción con la visualización. Si bien se permite la selección de distintos subconjuntos de valores para las variables independientes, se quiere extender la interacción de acuerdo a las necesidades planteadas en las entrevistas realizadas a los expertos sobre las distintas visualizaciones. También se examinarán otras técnicas de interacción que faciliten el proceso de exploración de la visualización.

Bibliografía

1. Coxeter, H., *Projective Geometry*, Univ. of Toronto Press, Toronto, Canada, 1974.

2. Inselberg, A., Hassett, J. and Chatterjee, A., *Visualization of Multi-dimensional Geometry and Application to Multi-variate Problems*, SIGGRAPH'95 Course Notes, Course No. 27, 1995.

3. Inselberg, A. and Dimsdale, B., *Multidimensional lines I: Representation*, SIAM J. Appl. Math., Vol. 54, No. 2, 1994, pp. 559-577.

4. Inselberg, A. and Dimsdale, B., *Multidimensional lines II: Proximity and Applications*, SIAM J. Appl. Math., Vol. 54, No. 2, 1994, pp. 578-596.