

Simulación y Evaluación de Filtros de Cancelamiento Activo de Ruido Utilizando Señales de Dimensión Fractal Variable

Gabriel M. Ambrozy, Guillermo G. D'Amico y Claudio A. Delrieux
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad Nacional del Sur
Alem 1253 - Bahía Blanca - ARGENTINA
gambrozy@criba.edu.ar, ggdamico@ieee.org, claudio@acm.org

Resumen

La utilización de filtros digitales para cancelación de ruido es una técnica ampliamente difundida. En muchas aplicaciones, sin embargo, es necesario poder contar con experiencias previas para determinar si un esquema de filtrado es adecuado, en qué condiciones y bajo qué parámetros. Para estas situaciones se hace necesaria la simulación previa del filtro en condiciones plausibles de señal e interferencia. En este trabajo se presenta la implementación computacional de un filtro para el cancelamiento activo de ruido. Este tipo de filtros permite reducir hasta niveles aceptables la interferencia inducida en una señal determinística, logrando la recuperación de la información transmitida a partir de la señal deteriorada. La utilización de señales aleatorias como modelo de ruido produce en general resultados poco satisfactorios en las simulaciones debido a la falta de correlación. Por dicha razón aquí utilizamos señales estocásticas de dimensión fractal variable, las cuales pueden ser fácilmente correlacionadas por medio de la elección apropiada del parámetro de Hurst. Los resultados obtenidos permiten evaluar detalladamente los comportamientos del sistema estudiado ante diversas situaciones definidas por distintos valores en los parámetros.

Palabras Clave: Procesamiento de Señales Digitales - Simulación - Filtros FIR - Cancelación Activa de Ruido - Ruido Fractal.

1. Introducción

La cancelación activa de ruido (CAR) es una técnica de procesamiento de señales digitales de gran utilidad para la recuperación de la información contenida en ellas cuando se ven afectadas por ruidos aditivos [1], requiriendo un costo computacional relativamente bajo, fácilmente implementable con las tecnologías actuales y arrojando resultados altamente satisfactorios. Para demostrarlo, se ha desarrollado un programa capaz de realizar la simulación de un sistema CAR constituido por un filtro FIR (Finite Impulse Response) cuyos parámetros se adaptan para mejorar el desempeño del sistema, por medio de un algoritmo recursivo RLS (Recursive Least Squares) que minimiza el error medio cuadrático. Para generar el ruido se utiliza un modelo de movimiento Browniano fraccional (fBm) cuyas características son las deseadas para el tipo de sistema que se pretende estudiar.

El sistema a estudiar supone como punto de partida la transmisión de una señal digital a través de un canal que no introduce distorsión de fase ni de magnitud, es decir, su respuesta en frecuencia corresponde a la de un canal ideal. Pero introduce un ruido aditivo sobre la señal transmitida, que no puede ser separado de ella en forma sencilla [2]. El objetivo de sistema CAR es el de eliminar este ruido en el extremo receptor, a través de una estimación del mismo. Esta estimación se realiza operando sobre otra señal, denominada aquí *ruido* que se encuentra correlacionada de alguna manera con el ruido introducido en el canal de transmisión [1]. El sistema se puede representar a través del diagrama de la Fig. 1.

La señal $x(k)$ se encuentra afectada por una interferencia desconocida $n_1(k)$. Además se dispone de una secuencia de ruido $n_2(k)$ que se encuentra correlacionada con la interferencia $n_1(k)$. Se utiliza la secuencia $n_2(k)$ para estimar el valor $n_1(k)$ de forma tal que al restarle a la secuencia ruidosa el ruido estimado, la salida del sistema sea la secuencia correspondiente a la señal transmitida originalmente. La estimación de $n_1(k)$ a través de $n_2(k)$ se efectúa por medio de un filtro FIR [3] cuyos coeficientes son ajustados por un algoritmo RLS para lograr la minimización del error medio cuadrático, definido por la siguiente expresión [1]:

$$\xi = [e_{rls}(k)]^2 = [(n_1(k) - y_{rls}(k)) + x(k)]^2 = [(n_1(k) - y_{rls}(k))^2 + 2 \times (n_1(k) - y_{rls}(k)) \times x(k) + x^2(k)].$$

Se observa que en la minimización del error, la secuencia $y_{rls}(k)$ debe aproximarse a la secuencia $n_1(k)$, quedando entonces la secuencia de salida del sistema $e_{rls}(k)$ aproximadamente igual a la secuencia que corresponde a la señal de entrada libre de ruidos.

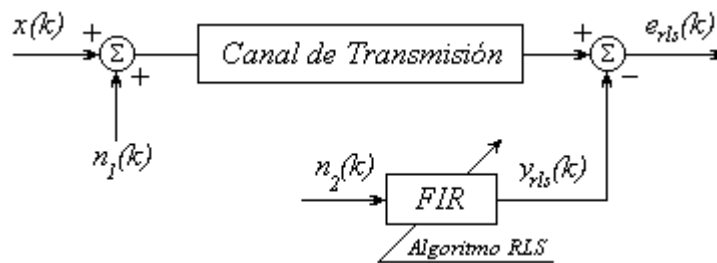


Figura 1: Diagrama en bloques de un sistema CAR.

A partir de las premisas anteriores se ha creado un programa que permite simular esta CAR, con el objeto de estudiar en forma sencilla y concreta los diferentes fenómenos que ocurren en el sistema bajo ciertas condiciones. Además, a través de una interfaz gráfica, el programa brinda la posibilidad de observar detalladamente y modificar todas las señales, los parámetros de los filtros, etc. en forma interactiva. Asimismo proporciona la oportunidad de grabar las señales relevantes del sistema en formato de audio para luego evaluarlas auditivamente y analizar sus diferencias. También posibilita la grabación en archivo de imagen o la impresión de las gráficas tal cual se encuentran, en el momento que el usuario lo requiera.

2. Filtros digitales

Los filtros digitales están descriptos generalmente por ecuaciones a diferencia lineales a coeficientes constantes de la forma:

$$\sum_{k=0}^K Dk \times y(n-k) = \sum_{l=0}^L Ci \times x(n-l),$$

donde Dk y Ci son los coeficientes que definen al sistema, $y(n)$ y $x(n)$ se utilizan para representar a las secuencias de salida y entrada respectivamente. Recordemos que sólo estamos interesados en sistemas causales, es decir que $y(n)$ y $x(n)$ son nulos para $n < 0$. De la ecuación anterior se puede obtener una expresión que relacione la salida actual en función de la entrada presente y de las entradas y salidas pasadas.

$$y(n) = \sum_{l=0}^L Ai \times x(n-l) - \sum_{k=1}^K Bk \times y(n-k),$$

donde $A_i = C_i/D_0$ y $B_k = C_k/D_0$ [4].

La representación en diagrama en bloques de la expresión anterior se muestra en la Fig. 2.

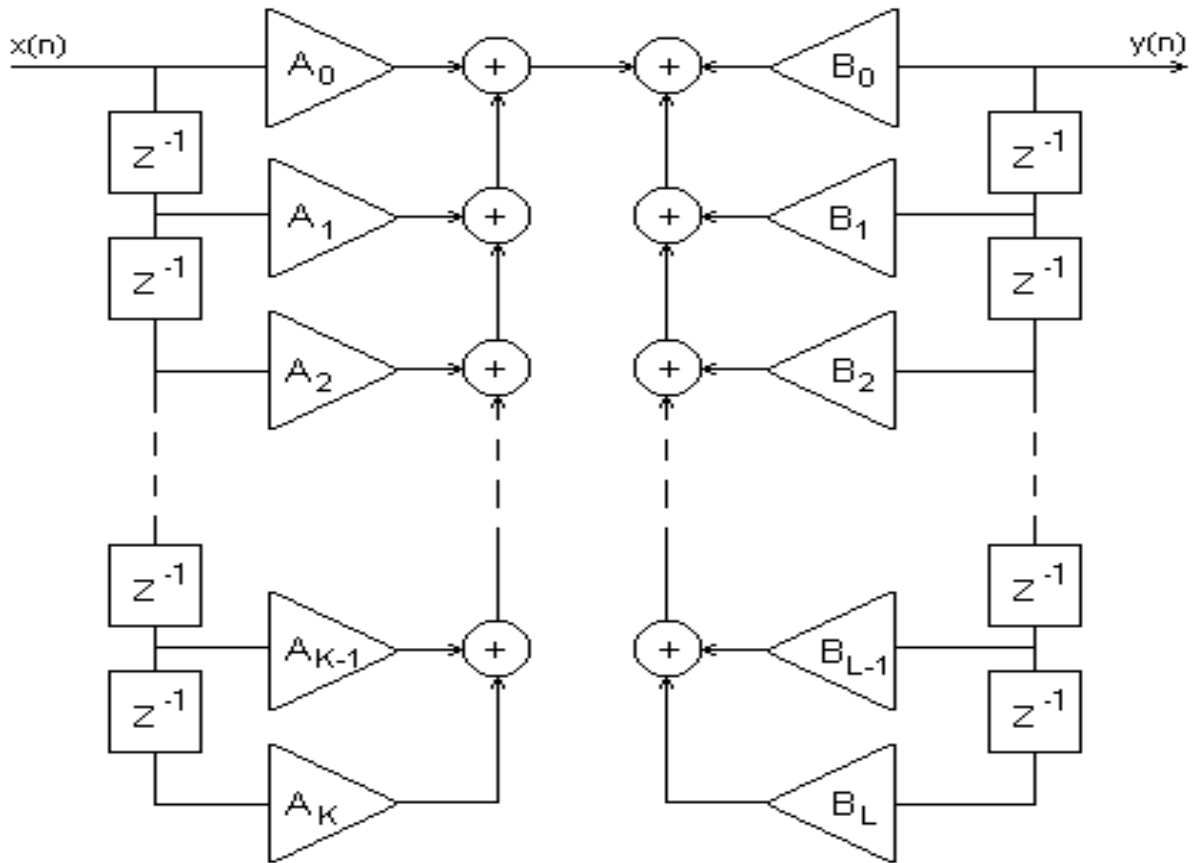


Figura 2: Diagrama en bloques de un filtro digital.

Para diseñar estos filtros se debe encontrar el valor de cada uno de los coeficientes de la última ecuación. En nuestro caso dichos coeficientes se calculan utilizando un algoritmo RLS. Existen dos clases importantes de filtros digitales, los de respuesta infinita al impulso (IIR) y los de respuesta finita al impulso (FIR). En los primeros, la respuesta es una función de las muestras de la señal de entrada presente y las señales pasadas, además de las muestras de las salidas anteriores. La ecuación característica de este filtro es,

$$y(n) = \sum_{l=0}^L A_l \times x(n-l) - \sum_{k=1}^K B_k \times y(n-k).$$

De la ecuación anterior vemos el motivo al cual deben su nombre, ya que ante una entrada impulsiva las muestras de salida son no nulas para n tendiendo a infinito. En cambio, en los filtros FIR las muestras de salida dependen solamente de la muestra de entrada presente y de un número finito de muestras de entrada pasadas. Los coeficientes del filtro FIR son iguales a los valores que toma sucesivamente la respuesta impulsiva del mismo. La ecuación característica de este tipo de filtros está dada por la ecuación general con los coeficientes B_k nulos, es decir:

$$y(n) = \sum_{l=0}^L A_l \times x(n-l).$$

3. Ruido Browniano Fraccionario:

Uno de los primeros resultados notables en nuestra simulación es que utilizando un modelo de ruido estocástico, la cancelación de ruido era inefectiva. Esto ocurre porque claramente el ruido que deteriora la señal de entrada en el canal no tiene correlación con el ruido utilizado para realizar la cancelación. Por dicha razón, en este trabajo buscamos un modelo de señal aleatoria que tenga la capacidad de ser correlacionada con otra similar, y -de ser posible- que permita modificar su contenido espectral para juzgar las cualidades de la CAR.

Todas estas características pudieron obtenerse utilizando el modelo de *ruido Browniano fraccional* (fBm) de Mandelbrot y VanNess [5], el cual se puede implementar computacionalmente de una forma muy eficiente por medio del algoritmo de desplazamiento aleatorio del punto medio (random midpoint displacement) [6], al mismo tiempo conservando la correlación entre dos evaluaciones con características espectrales diferentes.

El ruido Browniano fraccional ($V_H(t)$) es una función que depende de la variable t (usualmente tiempo). Este ruido se destaca porque la correlación entre sus muestras no es nula, siendo su valor dependiente de un parámetro que caracteriza a tal ruido. La representación matemática de un ruido con las características mencionadas es:

$$\Delta V = \Delta t^H,$$

donde $\Delta V = V_H(t_2) - V_H(t_1)$ es la variación de la amplitud del ruido entre t_1 y t_2 , $\Delta t = t_2 - t_1$ es el incremento de la variable independiente y H es el parámetro de autocorrelación o *coeficiente de Hurst* [7] mencionado anteriormente, el cual define a esta señal desde el punto de vista temporal y está comprendido entre $0 < H < 1$. Se observa que para valores de H cercanos a cero, la señal generada es muy irregular asemejándose a un ruido blanco, es decir, con una baja correlación entre sus muestras; mientras que cuando H se acerca a la unidad el comportamiento del ruido es más suave y por ende la correlación es mayor. En la literatura es muy común hablar de estas señales como *fractales no determinísticos* o *vuelos de Levi*. Este nombre se debe a que la señal posee la característica de ser autosemejante a escala, es decir, diversas porciones de la misma, adecuadamente escaladas, poseen la misma distribución. En particular, una buena estimación de la dimensión *box* D de esta señal es $D = 2 - H$ [8].

En el movimiento o ruido Browniano clásico, el incremento ΔV es la raíz cuadrada del incremento Δt . Entonces éste es un caso particular del fBm que ocurre cuando el parámetro H es igual a un medio ($H = 1/2$). Esto produce una señal cuyas características estadísticas están bien estudiadas (desplazamiento medio proporcional al cuadrado del tiempo, variancia normal, etc. [8]). Desde el punto de vista del espectro, o la distribución frecuencial de la energía $S_V(f)$ se puede definir una clase de señales aleatorias a través de la fórmula:

$$S_V(f) = \frac{1}{f^\beta},$$

donde β es el parámetro que define el tipo de ruido desde el punto de vista espectral y está comprendido entre $1 < \beta < 3$ (ver Fig. 3). Este parámetro no es independiente del parámetro definido anteriormente, H . La ecuación que vincula a ambos [7] es

$$H = \frac{\beta - 1}{2}.$$

Sabiendo que para el caso de ruido Browniano el parámetro $H = 1/2$, entonces por la ecuación anterior $\beta = 2$. Uno de los algoritmos más eficientes para generar fBm es a través del

desplazamiento aleatorio del punto medio [6]. Para un proceso calculado entre $0 \leq t \leq 1$, se comienza con un valor $V_H(0) = 0$ e igualando $V_H(1)$ al valor de una muestra aleatoria con media cero y varianza σ^2 . Por lo tanto,

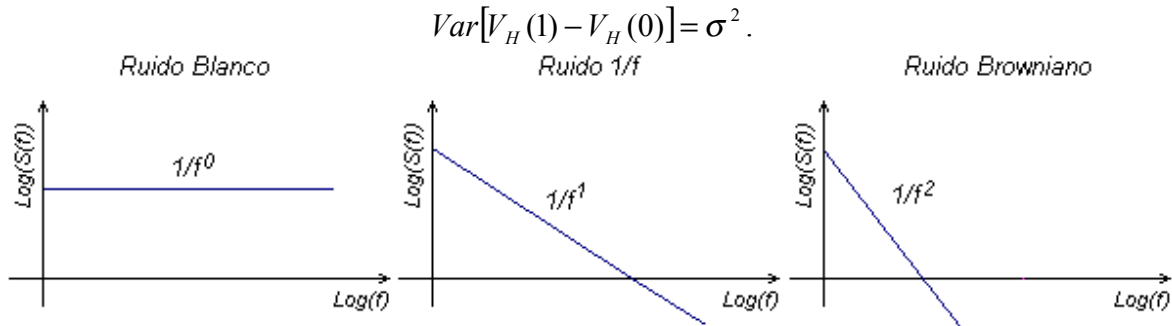


Figura 3: Espectros asociados a señales aleatorias de distintas autocorrelaciones.

Generalizando el resultado anterior para cualquier tiempo tal que $1 \geq t_2 \geq t_1 \geq 0$, se cumple que

$$Var[V_H(t_2) - V_H(t_1)] = |t_2 - t_1| \times \sigma^2.$$

Se puede observar que esta señal es estacionaria, por lo que el valor esperado medio $V_H(1/2)$ es el promedio entre $V_H(0)$ y $V_H(1)$. Si estos valores coincidieran, entonces la señal sería totalmente previsible. Sin embargo, se trata de una señal aleatoria, por lo que en $V_H(1/2)$ debe haber además un desplazamiento aleatorio Gaussiano D_1 con media 0 y varianza Δ_1^2 . Entonces podemos tener un modelo para $V_H(1/2)$

$$V_H(1/2) - V_H(0) = \frac{1}{2} \times (V_H(1) - V_H(0)) + D_1.$$

De esta expresión se advierte que es posible calcular valores de $V_H(1/2)$ para $0 \leq t \leq 1$ conociendo $V_H(0)$ y $V_H(1)$, y luego aplicando la fórmula anterior en forma recursiva se calculan los puntos intermedios deseados entre dicho intervalo, es decir, la secuencia de valores no se computa en forma incremental sino recursiva, en la Fig. 4 se puede observar gráficamente la mecánica de este método. Los valores de las muestras calculadas corresponden a un ruido Browniano si $H = 1/2$ ó a un fBm si $H \neq 1/2$. Una observación de gran importancia en este punto es que dos señales generadas por este método, van a ser idénticas si se utiliza el mismo espacio de muestras para la variable aleatoria (por ejemplo, utilizando la misma semilla para el generador de números pseudoaleatorios). Otra observación es que dos instancias del cálculo de un fBm efectuadas con el mismo valor de H , producen señales perfectamente correlacionadas pero de distinta resolución (o frecuencia de muestreo). Por último, y más importante, dos señales computadas con distintos valores de H pero con el mismo espacio muestral poseen espectros totalmente diferentes, pero están correlacionadas en el tiempo.

4. Detalles de implementación:

Basándose en la problemática planteada, surge la necesidad de escoger una plataforma para el desarrollo de esta aplicación. En una primera instancia se realizaron prototipos en MatLab para ir adquiriendo en forma exploratoria una idea de la apariencia y comportamiento deseado de nuestro sistema. La flexibilidad de este utilitario permite una rápida implementación, pero cuando la complejidad de los cálculos sobrepasa cierto límite, entonces el comportamiento de la aplicación deja de ser lo suficientemente interactivo como para servir a nuestros propósitos y sólo permite

realizar la simulación para una cantidad de muestras definidas a priori. Por todas estas razones se decidió migrarlo a algún lenguaje de programación de tipo RAD, que permita simplificar la representación gráfica del programa a desarrollar, que tenga un entorno gráfico amigable, y por ende que sea sencillo de operar y además que este basado en un lenguaje de programación conocido. El lenguaje Delphi 5.0 cumple estas condiciones ya que está orientado a objetos sobre una plataforma de programación sencilla y bien conocida como es el Pascal, e implementa un modelo de objetos basado en Object Pascal, que si bien no es exactamente un lenguaje OOP “puro”, es menos híbrido que otras plataformas similares (por ejemplo C++).

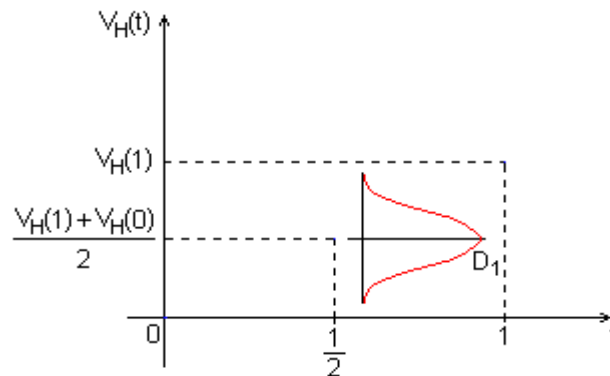


Figura 4: Generación de fBm con el método de desplazamiento del punto medio

La funcionalidad nativa de Delphi provee diversos componentes de software que solucionan una amplia variedad de problemas relacionados con la programación de la interfase gráfica, el manejo de estructuras de datos, etc. Afortunadamente, cuando estas componentes no son suficientes, es posible extender el lenguaje por medio de la publicación de componentes desarrolladas específicamente, o bien es posible descargarlas de Internet en los tantos sitios dedicados a la programación en Delphi. La interfase gráfica que presenta el programa desarrollado se puede ver en la Fig. 5.

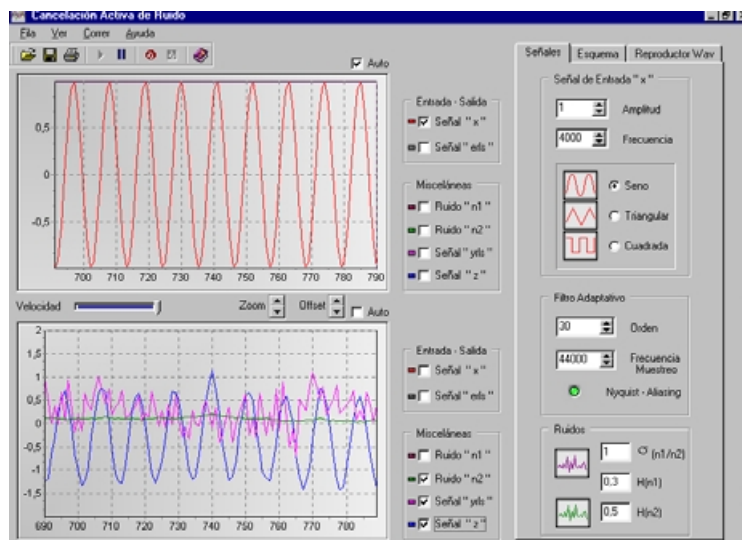


Figura 5: Pantalla principal del programa CAR.

Se percibe la existencia de dos gráficos de amplitud vs. muestra, los cuales dan la posibilidad de visualizar de manera independiente la forma de las distintas señales definidas en el sistema a través de los respectivos grupos de *boxes*, a la derecha de cada uno de ellos. Ambos poseen controles de

escala sobre su eje vertical visibles a través del control “Auto” que permiten variar la magnitud absoluta del eje (“Zoom”) así como también la magnitud relativa del mismo (“Offset”). Además comparten un control nombrado “Velocidad” que posibilita modificar la rapidez de movimiento del eje horizontal.

A la derecha de la Fig. 5 se observan tres lengüetas. La llamada “Señales” contiene los parámetros modificables de la señal de entrada, a saber el tipo de señal, amplitud y frecuencia de la misma así como también admite modificaciones de los parámetros del filtro (orden y frecuencia de muestreo) e indica claramente si se está produciendo o no aliasing. Por último existe un conjunto de boxes en los cuales se ingresan las ya conocidas características del ruido aditivo (varianza del ruido y coeficiente de Hurst). En las dos lengüetas restantes, “Esquema” y “Reproductor Wav” se encuentran respectivamente un diagrama en bloques descriptivo del sistema y tres reproductores de archivos de sonido que otorgan la libertad de oír la señal de entrada libre de ruido, la señal ruidosa y la señal filtrada.

Aparece también una barra de herramientas la cual posee botones de izquierda a derecha respectivamente “Abrir” y “Guardar”, con estos se puede salvar el estado del escritorio en el momento deseado para después recuperarlo cuando se desee, “Imprimir”, con este se accede a la pantalla de impresión, Fig. 6, que contiene las opciones de impresión entre las cuales se cuentan, imprimir o guardar en archivo de imagen uno o ambos gráficos y demás propiedades de impresión.

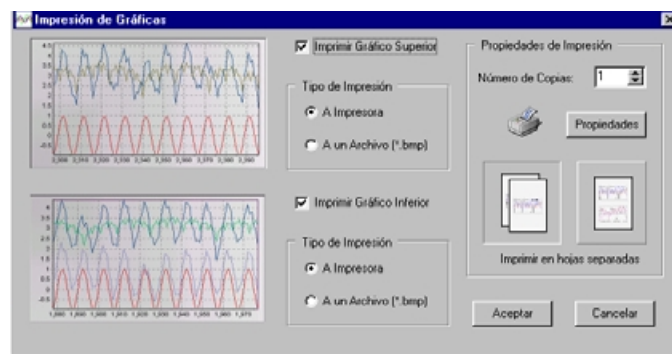


Figura 6: Pantalla de impresión del programa CAR.

Continuando con la descripción de los botones en la barra de herramienta encontramos los denominados “Correr” y “Pausa” los que nos dan el control sobre el comienzo y la detención de la simulación. A la derecha de estos últimos están los llamados “Empezar grabación Wav” y “Terminar grabación Wav” que con su utilización se logra la grabación en formato de audio de las tres señales más importantes del sistema. Por último se aprecia el botón de “Ayuda Programa” cuya función es la de mostrar la ayuda del programa que contiene tanto aspectos teóricos como los necesarios para la utilización del software. En último lugar aparece un menú desplegable que contiene todas las herramientas nombradas anteriormente con el agregado de la opción “Salir” bajo el dominio “Fila” y la opción “Acerca” bajo “Ayuda”.

5. Experiencias realizadas

Con el programa CAR se realizaron distintas experiencias modificando los parámetros del sistema, manteniendo en todas las ocasiones, a la señal de entrada con una amplitud de 1 y una frecuencia de 4 KHz; Del mismo modo se mantuvo la frecuencia de muestreo en 50 KHz. En cuanto al ruido, se utilizó un valor del parámetro σ igual a 1.

Descripción de los colores que corresponden a cada una de las señales:

- Señal de Entrada $x(k)$

- ◆ Señal de Salida $e_{rls}(k)$
- ◆ Señal Ruidosa $z(k) = x(k) + n_1(k)$
- ◆ Señal de Ruido $n_1(k)$
- ◆ Señal de Ruido $n_2(k)$
- ◆ Señal de Salida Filtro $y_{rls}(k)$

En la Fig. 7 se observa que para un ruido Browniano en la entrada del sistema y un ruido Browniano fraccional a la entrada del filtro FIR, la salida no presenta la componente de continua ni las componentes de baja frecuencia que se observan en la señal de entrada con ruido.

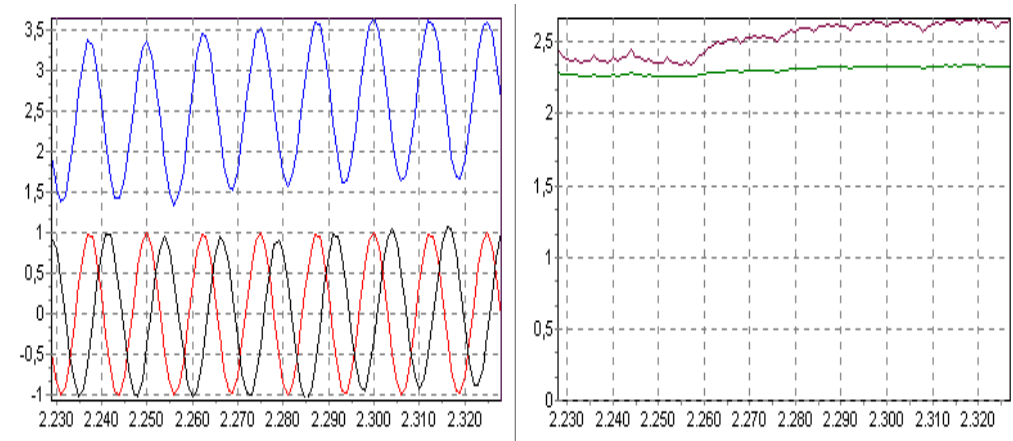


Figura 7: Orden del Filtro = 30; $H(n_1) = 0,5$; $H(n_2) = 0,3$.

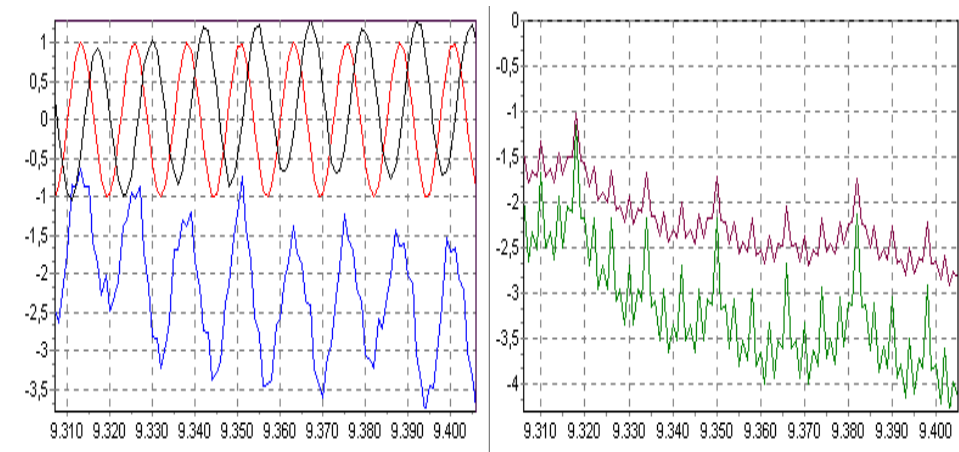


Figura 8: Orden del Filtro = 30; $H(n_1) = 0,1$; $H(n_2) = 0,01$.

En la Fig. 8 se observa que ante condiciones desfavorables en ambos ruidos (ambos semejantes a ruido blanco) y ante un orden del filtro razonable, la señal de salida se parece mucho a la señal original, por lo que se deduce que el filtro en cuestión elimina tanto componentes de baja como de alta frecuencia.

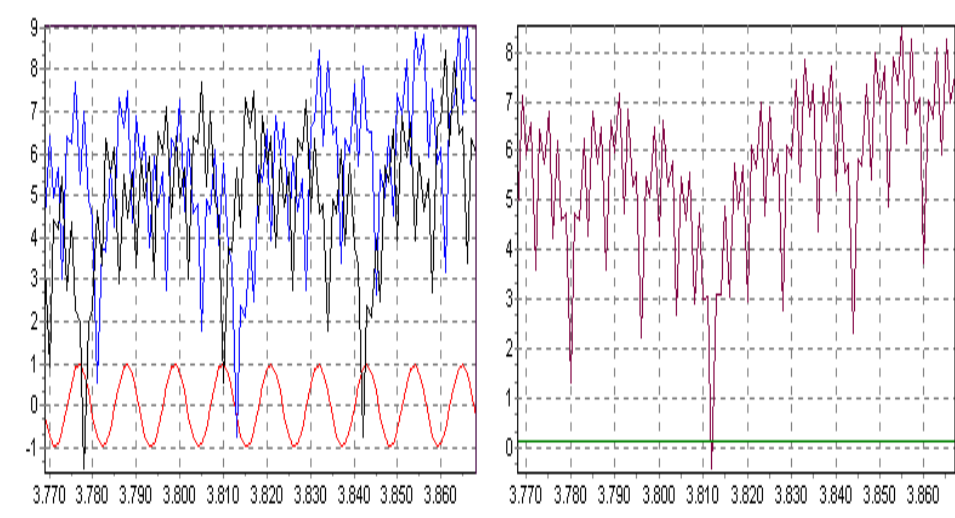


Figura 9: Orden del Filtro = 30; $H(n_1)=0,01$; $H(n_2)=0,99$.

En la Fig. 9 se aprecia que el sistema no tiene un comportamiento satisfactorio bajo las condiciones a las que se lo somete en este caso. Esto se debe a que el ruido en la entrada es prácticamente ruido blanco, mientras que el ruido a la entrada del filtro tiene un comportamiento muy suave, por este motivo, el filtro FIR no posee la suficiente “información” como para realizar una buena estimación del ruido entrante. Si bien los resultados se obtuvieron con un orden de filtro igual a treinta, al aumentar este índice, de todas formas no se mejoró el desempeño del filtro.

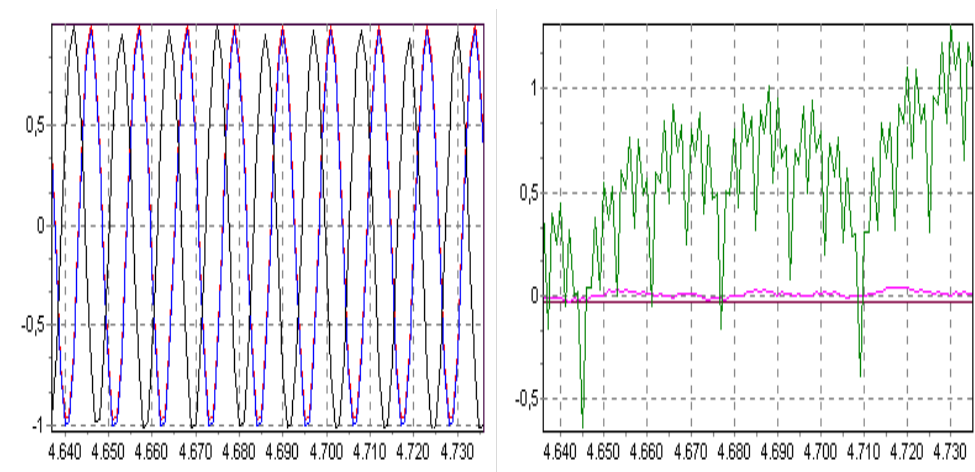


Figura 10: Orden del Filtro = 30; $H(n_1)=0,99$; $H(n_2)=0,01$.

Observando el gráfico derecho de la Fig. 10 se puede inferir que las condiciones de ruido son las inversas a las del ejemplo anterior. Sin embargo el comportamiento es muy favorable a pesar de que se está tratando de recuperar la información de un ruido muy suave en la entrada, con ruido cuasi-blanco.

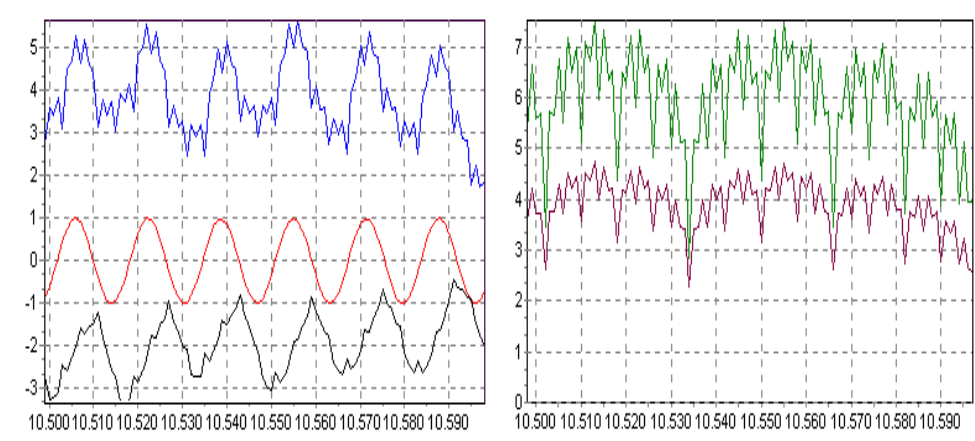


Figura 11: Orden del Filtro = 5; $H(n_1) = 0,1$; $H(n_2) = 0,01$.

Para el caso de la Fig. 11 se nota que al bajar el orden del filtro el sistema disminuye sus prestaciones conduciendo a un resultado no del todo eficaz.

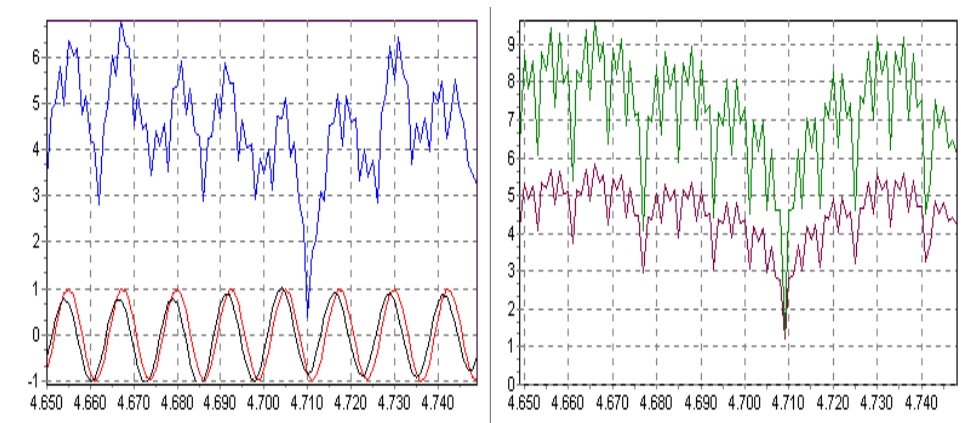


Figura 12: Orden del Filtro = 100; $H(n_1) = 0,1$; $H(n_2) = 0,01$.

Comparando la Fig. 12 con las Figs. 8 y 11 notamos que al aumentar el orden del filtro los resultados obtenidos indican una actuación superior ya que prácticamente se eliminaron todas las componentes frecuenciales del ruido.

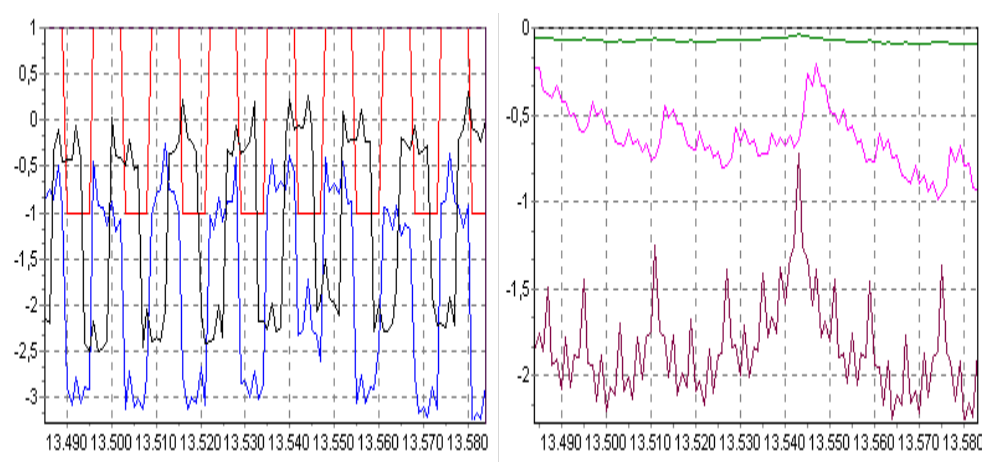


Figura 13: Orden del Filtro = 5; $H(n_1) = 0,2$; $H(n_2) = 0,7$.

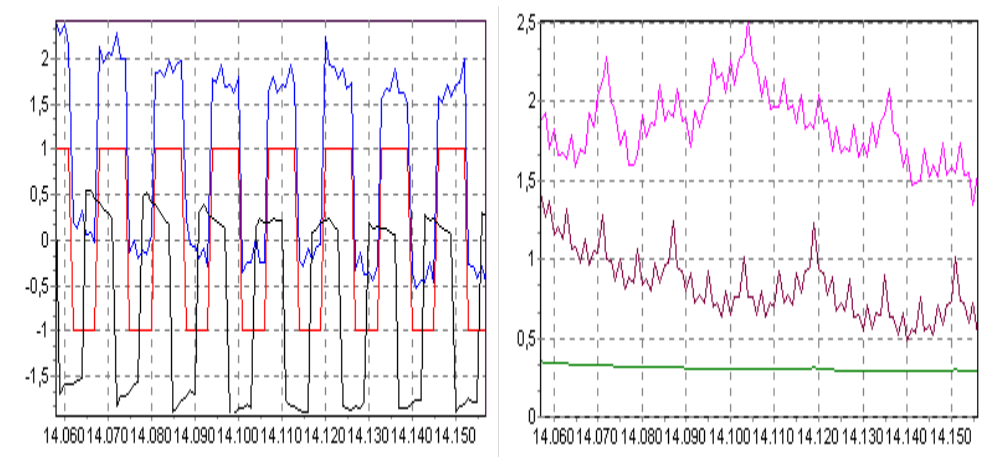


Figura 14: Orden del Filtro = 50; $H(n_1) = 0,2$; $H(n_2) = 0,7$.

Evidentemente, según lo visto en las Figs. 13 y 14, si la señal de entrada es cuadrada, los resultados obtenidos, independientemente del orden del filtro FIR, no son del todo exactos ya que como sabemos el espectro de esta señal tiene componentes de alta frecuencia que la CAR no puede discernir de las altas frecuencias que introduce el ruido.

Por último, se modificó la frecuencia de muestreo de tal forma que no se cumpla con el Teorema de Nyquist, produciéndose entonces el fenómeno conocido como *aliasing* [4]. En la Fig. 15 se aprecia claramente el fenómeno mencionado ya que la señal obtenida no es siquiera parecida a la señal de entrada.

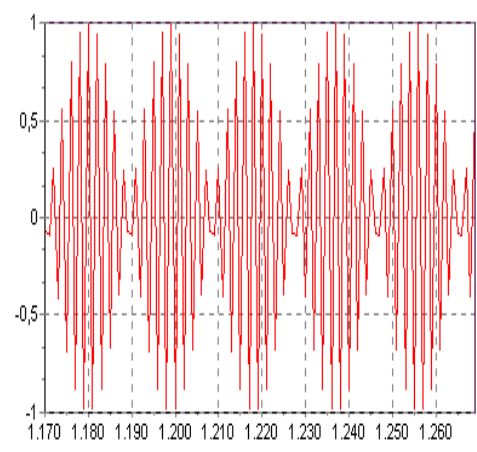


Figura 15: Frecuencia de la señal = 4 KHz; Frecuencia de muestreo = 7,6 KHz.

6. Conclusiones

Se ha desarrollado un software capaz de simular el comportamiento de un sistema eliminador de ruido. El mismo puede ser utilizado para la eliminación de varias formas de interferencia en aplicaciones como electrocardiografía, señales de voz, la cancelación de interferencia de banda ancha en los lóbulos laterales de un arreglo de antenas y la eliminación de zumbido en la cinta magnética durante la reproducción de grabaciones de banda ancha. El mismo es versátil, simple de operar, con grandes posibilidades de modificar los parámetros de las señales y del filtro, facilita el estudio del comportamiento de este tipo de sistemas bajo infinidad de condiciones. Además de visualizar temporalmente todas las señales, se pueden escuchar las más importantes para comparar en forma auditiva la respuesta del sistema.

Se puede decir que para el caso de poseer una señal con bajo nivel de ruido en la entrada, independientemente del nivel de ruido con el cual se quiere estimar el primero, el sistema no perjudica de ninguna manera el comportamiento general de la señal de salida. Cuando existe una alta correlación entre los ruidos, el desempeño del filtro es muy bueno sin importar de que tipo de ruido se trata. Esto no sucede así cuando el orden del FIR es relativamente bajo.

Se han estudiado casos en los cuales el procedimiento utilizado no conduce a resultados satisfactorios como es de esperar en sistemas reales, los cuales no responden de la manera deseada ante ciertas condiciones. Durante el desarrollo de los distintos ejemplos se pudo notar que al tener un filtro FIR de orden excesivamente elevado, la cancelación de ruido, en momentos donde este no presenta cambios demasiados bruscos, es aceptable, pero en el instante que se produce un cambio violento en los ruidos aparecen valores de salida que disminuyen la eficiencia general del sistema. Todas estas experiencias resultan invalorable a la hora de decidir la utilidad o no de este tipo de esquema en aplicaciones específicas.

Referencias

- [1] J. Lim and A. Oppenheim, *Advanced Topics in Signal Processing*, Fundamentals of Adaptive Signal Processing, págs. 246-284, Prentice Hall, 1988.
- [2] J. Proakis and M. Salehi, *Communication Systems Engineering*, Mathematical Models for Communications Channels, págs. 21-22, Prentice Hall.
- [3] A. Oppenheim, R. Schaffer and J. Buck, *Discrete Time Signal Processing*. Structures for Discrete Time Systems, págs.340-370, Prentice Hall, 1998.
- [4] D. DeFatta, J. Lucas and W. Hodgkiss, *Digital Signal Processing*, Digital Filters, págs 46-50, John Wiley & Sons, 1988.
- [5] B. Mandelbrot y J. VanNess, *Fractional Brownian Motion, fractional noises and applications*. SIAM Review **10**(4), págs. 422-437, 1968.
- [6] A. Fournier, D. Fussell and L. Carpenter, *Computer Rendering of Stochastic Models*. Communications of the ACM 25(6), págs. 371-384, 1982.
- [7] H.-O. Peitgen y D. Saupe, *The Science of Fractal Images*, Springer-Verlag, 1986.
- [8] H. Jurgens y H-O. Peitgen, *Fractals for the Classroom*, Springer-Verlag, 1989.