

Comparación de la Dinámica en Tiempo Real de los Métodos Mínimos Cuadrados y Variable Instrumental para Estimación de Parámetros

José de Jesús Medel Juárez, Pedro Guevara López
Laboratorio de Electrónica, Centro de Investigación en Computación
Instituto Politécnico Nacional de México
Tel. (81)57296000, Ext. 56523 C.P. 07738 México D. F.
e - mail: {jjmedel, pguevara}@pollux.cic.ipn.mx

Resumen

*En este trabajo se presenta un análisis comparativo de la dinámica en Tiempo Real de los métodos de estimación: **Mínimos Cuadrados (MC)** y **Variable Instrumental (VI)**, para sistemas lineales estacionarios e invariantes en el tiempo que contienen perturbaciones internas y externas, correlacionadas con el estado observable del tipo una entrada una salida.*

Al utilizar las teorías de procesos estocásticos y Filtrado en Tiempo Real dentro del análisis teórico, se presentan algunas diferencias básicas entre ambos métodos. Se incluyen resultados comparativos. A través de una simulación en Tiempo Real en la plataforma QNX RTP 6.0 se observa en forma ilustrativa el desempeño de los estimadores para un sistema en ecuaciones en diferencias de primer orden, invariantes en el tiempo, y de naturaleza estacionaria considerando restricciones de tiempo y sincronía. La gráfica de estimación para los métodos considerados muestra visualmente y a través del funcional de error qué método es más conveniente usar de acuerdo a sus restricciones temporales locales y globales.

Palabras clave: Filtro, Mínimos Cuadrados, Variable Instrumental, estimación, Tiempo Real.

1. Introducción

Los Filtros Digitales en general tienen aplicaciones en los procesos industriales, en sistemas de control y de monitoreo de acuerdo a Buttazzo (1997) y Chui & Chen (1999); por ejemplo, se encuentran en: Plantas químicas y nucleares, procesos de producción, bolsas de aire de seguridad para automóviles, sistemas de inyección de combustible, análisis de voz, sistemas de control de vuelo, adquisición de datos, aplicaciones médicas, sistemas de telecomunicación, análisis de trayectorias de misiles y cohetes espaciales, entre otras muchas aplicaciones. Estos filtros interactúan con el mundo físico y no deben fallar ni en calidad de respuesta ni en tiempo de respuesta, ya que de otra manera, podrían ocasionar graves daños al proceso con que interactúan. Por este motivo a esta clase de filtros se les denominará como Filtros Digitales en Tiempo Real (FDTR). Los Filtros Digitales en Tiempo Real pueden implementarse como sistemas dedicados (embedded systems) de acuerdo a lo escrito por Burns y Wellings (1997) a través de microcontroladores, DSP's, etc; o en computadoras con Sistemas Operativos de Tiempo Real (SOTR), como es el caso de este trabajo.

1.1 Filtros Digitales

El término *filtro* se usa de acuerdo a Haykin (1991) y Grewal (1993) para describir un dispositivo que en forma de *hardware* o *software* se aplica para:

a) Eliminar el ruido de los datos de un sistema, b) Extraer información de acuerdo a alguna característica del sistema, c) Predecir el comportamiento del sistema a analizar, d) Reconstruir el comportamiento del sistema a analizar.

Dentro de la teoría de filtrado existen dos áreas básicas de acuerdo a Haykin (1991), Medel (2002) y Ljung (1987): a) **Estimación**. Es el área que se encarga de describir la dinámica de los parámetros del sistema a través de sus señales observables (Kailath, 1980 y Medel 2002). b) **Identificación**. Es el área que se encarga de describir la dinámica de los estados del sistema a través de sus señales observables (Kailath, 1980 y Medel 2002).

El error del filtrado o funcional $J(k)_i$ (error de estimación y/o error de identificación) es desarrollado bajo algún criterio para minimizar su valor medio (Haykin, 1991), de tal manera que la convergencia a un valor se dé en un tiempo finito y conocido (Young (1982)).

Söderström y Estoica (1988_a) presentan tres métodos para realizar la estimación: a) Método de Steiglitz - McBride (MMCR) (conocido como el método de mínimos cuadrados recursivo), b) Método del Gradiente Recursivo (MGR), c) Método de Variable Instrumental (MVI).

Estos métodos son comparados en la convergencia local y global, concluyendo en su trabajo de 1988_b: *la mejor alternativa para la estimación de parámetros en los sistemas estocásticos con perturbaciones correlacionadas, es usar el método de la variable instrumental (VI)*. Fan y Nayeri (1989), aplicaron los algoritmos estudiados por Söderström y Estoica en (1988_a), a un filtro en forma recursiva y de orden reducido; y llegaron a la conclusión de que cada método tiene algunas ventajas con respecto a los otros dos. Retomando sus resultados, expuestos en 1989, Fan y Nayeri (1990) utilizaron un filtro de orden reducido y concluyeron que los métodos MSM y MGR dan una buena convergencia local y global; pero para filtros de orden pleno, la mejor solución es el uso del MVI. Wie y Kumar (1994) utilizaron las técnicas de los esquemas Indirecto y Desacoplado en conjunto con los métodos de mínimos cuadrados y gradiente expuesto en Söderström, y Estoica (1988_b), para estimar a los parámetros de un sistema, concluyendo que con ambas técnicas se puede obtener buena convergencia paramétrica. Poznyak y Medel (1999_a y 1999_b) utilizaron a la variable instrumental y al factor de olvido para la estimación de parámetros variantes en el tiempo. Sus resultados fueron novedosos, ya que los compararon con respecto a los modos deslizantes, y al gradiente estocástico, en sistemas MIMO ("Multi Input Multi Output": muchas entradas - muchas salidas), con una convergencia a los parámetros reales de un 99.99%.

1.2 Sistemas en Tiempo Real (STR)

Diversos autores (entre los que destacan: Martin (1980), (Burns & Wellings, 1997), (Heitmeyer y Mandrioli 1996), Gray (1999), De la Puente (2000), Stankovic (1992), entre otros.), que utilizan a los sistemas digitales y en específico a los sistemas computacionales como una subclase de estos últimos, para observar y / o controlar a un proceso dinámico definen a un *STR*, de la siguiente manera:

Un STR es aquel sistema digital que obedece tres condiciones: a) Interacción con el mundo físico, b) Emisión de una respuesta correcta de acuerdo a algún criterio preestablecido (por ejemplo Haykin (1991) entre otros), c) Cumplimiento de las restricciones de tiempo del proceso dinámico, conforme a los conceptos mostrados en Nyquist (1928).

En general cada una de las variables del *proceso dinámico* (entradas, salidas y estados) son relacionadas con una tarea específica. Si se trata de un sistema multivariable, entonces se tendrá un conjunto de tareas por cada arreglo de variables y tendrán que dar respuesta con restricciones de tiempo. De acuerdo a (Burns & Wellings, 1997) los STR son *sistemas compactos* con recursos mínimos de hardware (por ejemplo: un solo procesador), y sus tareas se realizan en forma *concurrente*.

1.3 Filtros Digitales en Tiempo Real (FDTR)

Chui y Chen (1999) comentan que los filtros digitales como el de Kalman se implementan en aplicaciones de Tiempo Real gracias al reciente desarrollo de computadoras de alta velocidad: Expresan al Tiempo Real como sinónimo de rápido sin hacer un estudio completo del STR en el que se encuentra el filtro. Plantean problemas de seguimiento de trayectorias en 2D para aeronaves a través de radares, y las únicas consideraciones que toman son la velocidad del sistema de cómputo y la capacidad del filtro para expresarse en forma recursiva. Gustafsson (2000) describe en su libro a los filtros digitales FIR (Finite Impulse Response) como “aplicaciones para procesamiento de señales estándares en Tiempo Real”, sin dar ningún argumento que valide sus afirmaciones. Papoulis y Bertrán (1989) hacen una cuantificación de los tiempos de desarrollo de aplicaciones (filtros digitales) para el manejo de señales desde un punto de vista práctico, donde consideran: a) tiempos de ejecución del algoritmo de filtrado, b) el procesador, c) tiempos de conversión A/D y D/A, d) diagramas de tiempos y e) restricciones de precedencia. Kuo (1996) da algunos ejemplos sencillos de sistemas (aplicables a filtrado) con restricciones de tiempo impuestas por el mundo físico y coincide con lo que se comenta en Buttazzo (1997), descrito en la sección anterior. Liu (2000) trata de establecer un lazo entre la teoría de filtrado y la de los STR, pero solo menciona al Filtro de Kalman dentro de su introducción sin explicar si lo implementó o no y cuál fue el proceso de implementación. Baras (1999) realiza un estudio sobre procesamiento de señales en Tiempo Real, expone algunas técnicas de filtrado (incluso usando redes neuronales) y justifica que éstas son en Tiempo Real solo si son capaces de expresarse en ecuaciones recursivas de acuerdo a (Chui & Cheng, 1999).

Como se observa, diferentes autores han descrito a los filtros digitales como sistemas de Tiempo Real (FDTR), dando algunas de sus características, lo que motiva a la realización de este trabajo. Buscando describirlos a través de este conjunto de propiedades tanto teórica como prácticamente. En (Medel y Guevara, 2002) se presentan los fundamentos teóricos de la Teoría de Filtrado en Tiempo Real a través de las siguientes definiciones:

Definición 1. (Filtro Digital en Tiempo Real (FDTR)). Un FDTR es un Filtro Digital que satisface las condiciones de un sistema de Tiempo Real de acuerdo a (Buttazzo (1997)), y debe cumplir: a) Extracción y emisión de información sincronizada con el tiempo de evolución del proceso considerando al criterio de Nyquist (1928), b) Emisión de respuestas correctas (por ejemplo, los criterios usados en Haykin (1991) entre otros), c) Respuestas acotadas en tiempo a través de intervalos semi-abiertos en forma local y global de acuerdo a las restricciones temporales del proceso dinámico, conforme al criterio de Nyquist (1928) y a algún criterio de

convergencia, d) Capacidad de expresarse en forma recursiva de acuerdo a los conceptos de Baras (1999), y (Chui & Cheng, 1999). Modelos obtenidos a través de ecuaciones en diferencias finitas (Jordan (1960)).

Definición 2. (Características temporales de las tareas de un FDTR). Las *tareas* de un FDTR tienen un conjunto de características temporales dentro de los intervalos de tiempo k , con $k=0, \dots, n$:

a) *Tiempo de arribo o llegada* ($l(k)_i$) (Buttazzo (1997)): Es el tiempo absoluto con respecto al inicio del proceso en que una tarea pasa a formar parte de la *cola de listos*. Es decir, es un tiempo absoluto en que la tarea queda formada hasta ser atendida. Cumpliendo: $l(k)_i > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^+$, b) *Tiempo de ejecución* ($C(k)_i$) *en cada intervalo*: Es el tiempo que el procesador se encarga de ejecutar una tarea (o conjunto de tareas sin interrupción), donde $C(k)_i \geq 0$, c) *Plazo relativo mínimo* ($D(k)_i_{min}$) *dentro de cada intervalo*: Es el tiempo mínimo en el que se puede obtener una respuesta por parte del FDTR, sin alterar negativamente la dinámica o comportamiento del sistema físico de acuerdo a Kuo (1996) y a Buttazzo (1997). El plazo relativo mínimo cumple $D(k)_i_{min} \geq 0$, d) *Plazo relativo máximo* ($D(k)_i_{max}$): Es el tiempo máximo en el que se puede obtener una respuesta por parte del FDTR, sin alterar negativamente la dinámica del proceso de acuerdo a Kuo (1996) y Buttazzo (1997). El plazo relativo máximo cumple $D(k)_i_{min} \leq D(k)_i_{max}$, e) *Tiempo de inicio o tiempo de liberación* ($s(k)_i$). Es el tiempo en que una tarea inicia su ejecución. Y cumple: $l(k)_i \sim s(k)_i < (l(k)_i + D(k)_i_{max})$, f) *Tiempo de finalizado* ($f(k)_i$) *en cada intervalo* k : Es el tiempo en que una tarea termina su ejecución dentro del intervalo k . La condición principal es $f(k)_i \in [ld(k)_i_{min}, LD(k)_i_{max}]$, con $ld(k)_i_{min} := l(k)_i + D(k)_i_{min}$, y $LD(k)_i_{max} := l(k)_i + D(k)_i_{max}$, g) *Tiempo de retraso* ($L(k)_i$) *en cada intervalo* k : Es el tiempo definido por $L(k)_i := |LD(k)_i_{max} - f(k)_i|$. Si $LD(k)_i_{max} > f(k)_i$ significa que la tarea fue terminada dentro de su plazo absoluto máximo, en caso contrario, la tarea terminó después del intervalo k , y cuenta con un retraso, h) *Tiempo prematuro* ($P(k)_i$) *en cada intervalo* k : Es descrito por la siguiente expresión $P(k)_i := |ld(k)_i_{min} - f(k)_i|$. Si $f(k)_i \geq ld(k)_i_{min}$, i) *Plazo de convergencia* (d_i): Se define como el tiempo máximo en que el FDTR debe converger a un ϵ . Está determinada por la dinámica del mundo real.

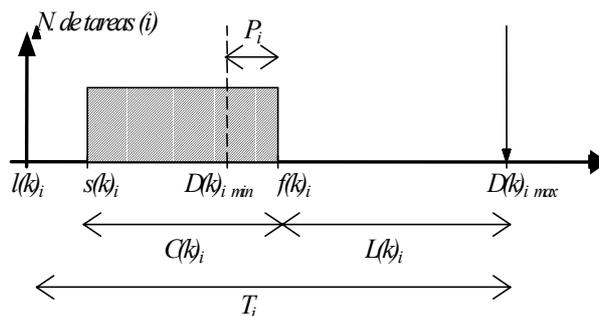


Figura 1.1 Tarea de Tiempo Real en un FDTR.

2. Comparación probabilística entre los métodos de VI y de MC

Dentro de la teoría de filtrado podemos encontrar dos técnicas ampliamente usadas para la estimación de parámetros. Ellas son conocidas bajo los nombres de *Mínimos Cuadrados* (MC) y de *Variable Instrumental* (VI). En esta sección se presenta la diferencia entre ambos métodos cuando el sistema tiene perturbaciones internas y externas, ambas correlacionadas con su estado observable. El modelo considerado para tal caso es un modelo discreto de una entrada una salida (conocido por

sus siglas en ingles como SISO, "Single Input Single Output": Una entrada – una salida), representado bajo la estructura siguiente:

$$y_k = ay_{k-1} + w_k \quad (1)$$

con $w_k = f(W_{1k}, W_{2k})$ y dado que $y_{k-1} = f(x_k, w_k)$.

Donde W_{1k} y W_{2k} son las perturbaciones internas y externas del sistema, respectivamente. Y_k , es el estado del sistema observable y x_k es el estado interno del sistema descrito Haykin (1991); es decir, la salida del sistema en el intervalo k . Donde k es la medida de $[t, t+\varepsilon)$, y representa el tiempo en el cual el computador adquiere, analiza y describe el comportamiento interno y/o externo del sistema real; puede considerarse como el periodo T . El estado final de convergencia ocurre cuando $k \rightarrow n$, el estimador tiene un tiempo de convergencia t_c , que contendrá a n .

Comentario 1: El error de estimación está definido para ambos modelos, por la siguiente ecuación en diferencias (ver: Poznyak y Medel, 1999_a y en 1999_b):

$$\Delta_n := \hat{a}_n - a \quad (2)$$

y de acuerdo a Haykin (1991), y Caines (1986), describen al funcional del error:

$$J_n := E(\Delta_n \Delta_n^T)$$

El estimador de parámetros por el *método de mínimos cuadrados* (MMC) es expresado en el siguiente resultado.

Teorema 1: Dado el sistema descrito por las ecuación (1), con ruidos correlacionados (ver: Ash, 1968) con el estado observable (ver: Kailath, 1980), su estimador converge utilizando al método de mínimos cuadrados (MMC), al parámetro a estimar más un delta, esto es:

$$\hat{a}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{c. t. p} a + \Delta_n \quad (3)$$

Prueba: (Ver Medel 2001), donde el error de convergencia es descrito por:

$$\Delta_n = \frac{\langle a \sigma_{w_{2,n}}^2 - \sigma_{w_{1,n}}^2 \rangle}{\frac{\sigma_{w_{1,n}}^2}{1-a^2} + \sigma_{w_{2,n}}^2} + o_w(1)$$

donde $o_w(1)$ es un error de medición, que tiende a cero cuando n tiende a infinito, considerando que las perturbaciones están correlacionadas con el estado observable, pero no entre ellas ■.

Comentario 2: Se puede decir que los sistemas con perturbaciones correlacionadas, en general no deben utilizar el método de mínimos cuadrados (MMC), para realizar estimación de parámetros.

Ahora consideremos al método de la variable instrumental (MVI) para el sistema descrito por las ecuación (1).

Teorema 2: Dado el sistema descrito por las ecuación (1), con ruidos correlacionados (ver: Ash, 1968) con el estado observable (ver: Kailath, 1980). Su estimador al utilizar el método de variable instrumental (MVI) descrito por Young en 1984, converge al parámetro a estimar, esto es:

$$\hat{a}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{c. t. p.}} a \quad (4)$$

Prueba: (Ver Medel 2001), Considerando que el sistema descrito por las ecuaciones (1) y (2) con perturbaciones correlacionadas (ver: Ash, 1968) y utilizando a la variable instrumental descrita por Söderström y Estoica en 1988^a; considerando que las perturbaciones no están correlacionadas con la variable instrumental, así como tampoco entre ella, el error de estimación tiene a cero, es decir:

$$\Delta_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{c. t. p.}} 0 \quad \blacksquare.$$

Este estimador de parámetros, podemos considerarlo como ideal para sistemas con ruidos correlacionados con nuestro estado observable.

Comentario 3: Un buen resultado para la elección de la VI para obtener la mejor convergencia fue expresado por Söderström y Estoica en 1988^b, y consiste en considerar a la variable instrumental igual a:

$$z_n = y_{n-1}. \quad (5)$$

Por los resultados obtenidos en los dos teoremas anteriores, se considera al método de VI el adecuado para estimar a sistemas que tienen ruidos correlacionados con el estado observable. La aplicación de este método en una computadora digital puede expresarse en forma recurrente para observar y cuantificar su desempeño a través del funcional del error descrito en (2) durante un periodo T para describir la evolución del parámetro o parámetros del sistema analizado.

El sistema a utilizar, es el expresado por las ecuación (1). El método con el cual se trabajará para realizar la estimación de parámetros es el de la VI por el resultado obtenido en el Teorema 2.

Las ecuaciones recursivas de los métodos MC y VI se expresan a continuación:

$$\hat{a}_n = \hat{a}_{n-1} \Gamma_{n-1}^{-1} \Gamma_n + (p_n - p_{n-1}) \Gamma_n, \quad (6)$$

$$P_n = P_{n-1} + y_n y_{n-1}, \quad (7)$$

$$\Gamma_n = (\Gamma_{n-1}^{-1} + y_{n-1} y_{n-1})^{-1}. \quad (8)$$

Este resultado es implementado dentro de una computadora digital, considerando que el sistema es invariante en el tiempo y estacionario (ver: Cramér y Leadbetter, 1968^a y 1968^b), requiriendo tan solo dos instantes de tiempo: El presente en el instante (n) y el pasado inmediato en el tiempo (n-1). Esto permite ahorrar en memoria del computador y en tiempo de procesamiento, ya que el estimador depende sólo de un estado anterior. El modelo expresado en la ecuación (6) puede tener

cualquier valor que se encuentre dentro de un círculo unitario (ver: Isermann, 1989), esto significa que $|a| \leq 1$.

3. Implementación experimental del FDTR

La decisión de implementar este FDTR a través de sub-tareas concurrentes se basa en que idealmente cada actividad del sistema real se realiza en paralelo a ellas en (Burns & Wellings, 1997), se comenta que en un sistema físico, las actividades se realizan es paralelo) y en la *Definición 1*, se describe como unas de las características de un FDTR es que este sincronizado con el mundo físico (en este caso con el motor de c.c. analizado en Vicuña y Guevara (2001)). Para ello se requiere que las tareas sean planificables y que la suma de sus tiempos de ejecución (y el tiempo de finalizado $f(k)$) cumpla: $C(k)_i < D(k)_{i_max}$.

QNX[®] soporta POSIX de Tiempo Real (1003.1b, 1003.1c) para la creación de tareas se utilizó la tarea "O". En la *Figura 2.1* se presenta la secuencia de creación de las tareas concurrentes utilizadas por el estimador de parámetros (FDTR); una vez que todas las tareas son creadas (nueve tareas), la tarea "O" muere y su identificador es borrado del sistema.

Para la planificación de las tareas se usaron mensajes bloqueantes; ésta técnica evitó el uso de algoritmos como el RM (ver: Liu & Layland, 1973) o el EDF (ver: Buttazzo (1997)) y además impuso a las sub-tareas las restricciones de precedencia necesarias donde cada flecha representa la comunicación de dos sub-tareas mediante la forma *send() – receive() – reply()* (ver :Krtén (1998)). Este resultado se muestra en las Figuras 2.1 y 2.2.

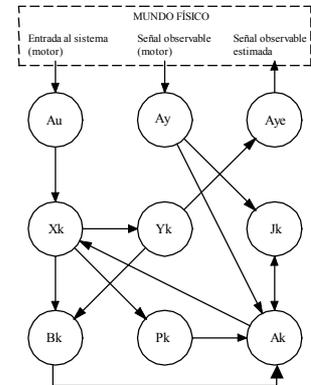
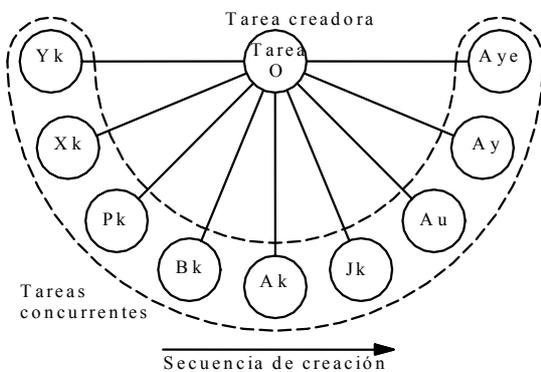


Figura 2.1 y Figura 2.2. *Creación de las tareas utilizadas para el FDTR y Grafo de comunicación de tareas, respectivamnete.*

La implementación experimental del FDTR aplicando en ambos métodos, se describe bajo las siguientes restricciones, ya que los procedimientos y la estructura de los procesos son iguales:

- Los tiempos de ejecución ponderados ($C_p \forall k$) del conjunto de tareas se obtuvieron del primer momento de probabilidad del conjunto de tiempos de ejecución $\{C(k)\}$,
- El plazo máximo $D(k)_{max}$ del sistema es igual al periodo $T(k)$.
- El tiempo de inicio ponderado ($s_p-l(k) \forall k$) se obtuvo a través del primer momento de probabilidad del conjunto de tiempos de inicio $\{s(k)\}$ tal que $s_p = l(k) + 0.0015$ ms .
- El periodo de muestreo $T(k)$ para el motor de C.C a 1500 rpm es de 20 ms.

- El plazo mínimo $D(k)_{min} = 2.5$ ms. Experimentalmente se comprobó que una respuesta en un tiempo menor afectaba al motor en forma no deseada
- El plazo de convergencia del motor (en base a su curva de arranque) es: $d = 4.5$ s.

Para tal fin se midieron los tiempos de ejecución de cada sub-tarea $C(k)$:

Xk: Ecuación de estados del sistema. $C_{Xk} = 0.237$ ms, Yk: Ecuación de estados observables. $C_{Yk} = 0.289$ ms, Bk: Varianza de la señal observable. $C_{Bk} = 0.258$ ms, Pk: Ecuación de Ricatti. $C_{Pk} = 0.249$ ms, Ak: Estimador de parámetros. $C_{Ak} = 3.252$ ms, Jk: Funcional de error. $C_{Jk} = 0.245$ ms, Au: Acondicionamiento de la entrada. $C_{Au} = 0.310$ ms, Ay: Acondicionamiento de la señal observable. $C_{Ay} = 0.302$ ms, Aye: Acondicionamiento de la señal observable estimada. $C_{Aye} = 0.314$ ms, O: Tarea creadora. $C_O = 0.261$ ms.

El valor de $C(k)$ se obtuvo de acuerdo a:

$$C(k) = C_{Xk} + C_{Yk} + C_{Bk} + C_{Pk} + C_{Ak} + C_{Jk} + C_{Au} + C_{Ay} + C_{Aye}, \quad (9)$$

De acuerdo a la *Definición 2*, inciso *f*, el tiempo de finalizado total $f_T(k)$, es igual a la suma del tiempo de ejecución $C(k)$, más la suma de sus cambios de contexto descritos por $(s(k)-l(k))$, para cada intervalo k . En este trabajo, se consideró al promedio de la suma de los cambios de contexto, para todas las evoluciones k :

$$f_T(k) = C(k) + 9 (s(k)-l(k)), \quad (10)$$

La precedencia de ejecución de las tareas del FDTR se muestra en la Figura 2.2. Si se realiza un diagrama equivalente suponiendo que el FDTR está compuesto por una sola sub-tarea se obtiene las Figuras 2.3 y 2.4, donde:

$T(k) = 20$ ms, $l(k) = T(k-1)k$ ms, $s(k) = l(k) + 0.0135$ ms, $C(k) = 5.7305$ ms, $D(k)_{min} = 2.5$ ms, $D(k)_{max} = 20$ ms, $f(k) = 5.7305$ ms, $L(k) = 14.269$ ms, $P(k) = 3.2305$ ms.

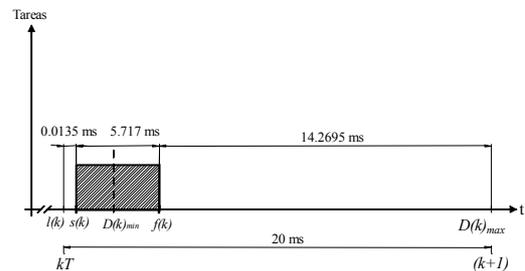
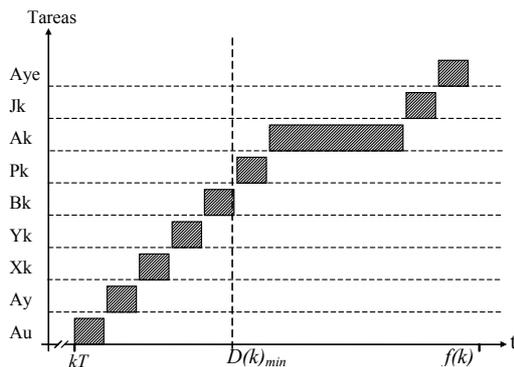


Figura 2.3 y Figura 2.4 Diagrama de tiempos de procesos del FDTR y Diagrama de tiempos equivalente a las tareas concurrentes del FDTR, respectivamente.

Del experimento se obtuvieron las Figuras 2.5 y 2.6 con los siguientes resultados: $n = 113$ intervalos, $t_c = 2.24$ s (para MC), $t_c = 4.00$ s (para VI), $d = 4.5$ s, Con $t_c < d$ se muestra que el plazo de convergencia se cumplió para ambos casos.

Los ruidos se generaron a través de las funciones *random* de Watcom[®] C en QNX[®] con un rango de variación de ± 0.008 con relación a los ruidos reales. El error de estimación calculado fue de 0.32 unidades por arriba del parámetro del modelo, siendo el valor estimado de 0.62 de acuerdo al experimento mostrado por Medel (2002). Sobreponiendo las simulaciones de la estimación de parámetros, tenemos la *Figura 2.5*. El resultado de los estimadores MC y VI se sustituyeron en el modelo propuesto y se obtuvo un gráfico donde se observan la evolución del proceso dinámico a través de sus señales observables real y estimada para ambos métodos. Ambas señales en línea, ejecutándose en el mismo intervalo k , en forma paralela. (Ver Figuras 2.5 y 2.6).

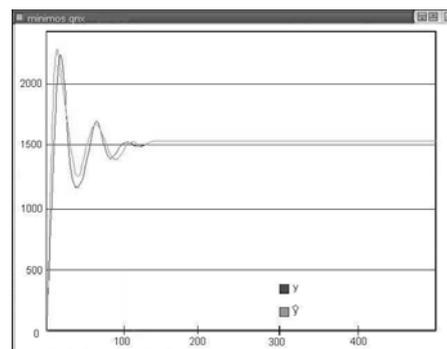
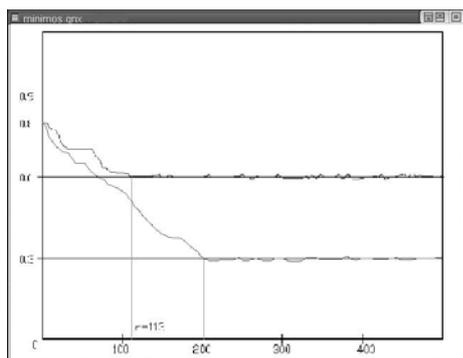


Figura 2.5 y 2.6, Gráfica obtenida de la estimación del parámetro a través del FDTR y Señales observable real y observable estimada, respectivamente

De la implementación de este Filtro Digital se puede decir que cumple con las definiciones y restricciones de un FDTR: Interactúa con un proceso físico y dinámico (motor), ofrece respuestas correctas tanto en estabilidad de parámetros estimados como en convergencia, cumple los plazos establecidos para el proceso dinámico y está expresado en forma recursiva. El mejor estimador en convergencia fue el de VI, y en tiempo el de MC, pero de acuerdo a la definición 1 el mejor estimador es el de VI, ya que ambos se encuentran en el plazo de convergencia y en consideración al teorema 2, es mejor el de VI que el de MC. Además, para todo caso sus tiempos de finalizado $f(k)$ (probabilísticamente) siempre estuvieron dentro de los intervalos $[ld(k)_{i_{min}}, LD(k)_{i_{max}}]$ para toda k , y se concluye que se logró implementar un FDTR para ambos casos.

4. Conclusiones

Muchos autores definen Filtro Digital en Tiempo Real, pero dejan algunos huecos entre las teorías: Filtrado y Tiempo Real. En este trabajo se da un conjunto de condiciones a cumplir por parte de los FDTR, se exponen algunas definiciones, teoremas y comentarios; pero en general se expone que los FDTR deben proporcionar respuestas correctas (buenos valores de convergencia), cumplir todas las restricciones de tiempo (plazos) y sincronía para no modificar indeseadamente las condiciones del proceso físico con el que interactúan. No siempre es necesario contar con la computadora más rápida, sino con aquella que cumpla todas las restricciones impuestas.

De los teoremas 1 y 2 se concluye: Los sistemas que tienen perturbaciones correlacionadas tanto internas como externas, con la señal observable, sus parámetros deben ser estimados por el método de VI ya que su error de convergencia tiende a cero.

El mejor estimador en convergencia fue el de VI, y en tiempo el de MC, pero de acuerdo a la definición 1 el mejor estimador es el de VI, ya que ambos se encuentran en el plazo de

convergencia y en consideración al teorema 2, es mejor el de VI que el de MC. Las restricciones temporales locales se cumplen en forma idéntica para ambos métodos, no así las restricciones temporales globales, donde se aprecia una gran diferencia en el tiempo de convergencia.

5. Bibliografía

- Ash, R.**, *Real Analysis and Probability*, Academic Press, United States of America, 1968, pp. 229.
- Åström, K. J., y Wittenmark, B.**, *Computer Controlled Systems*, 2ª Ed, Prentice Hall, 1990.
- Baras J.** “*Symbolic and numeric Real-time signal processing*”, Technical Report University of Maryland, USA 1999, pp 226.
- Burns A., Wellings A.** “*Real-time systems and programming languages*”. University of York, Addison Wesley, 1997.
- Buttazzo G.** “*Hard real-time computing systems*”. Scuola Superiore S. Anna, Kluwer Academic Publishers, 1997.
- Cramér, H., y Leadbetter, M. R.**, *Stationary an Related Stochastic Processes: Sample Funciton Properties and Their Applications*, John Wiley & Sons. Inc, 1968, pp. 120 – 122.
- Cramér, H., y Leadbetter, M. R.**, *Stationary an Related Stochastic Processes: Sample Funciton Properties and Their Applications*, John Wiley & Sons. Inc., 1968, pp. 150 – 152.
- Chui C., Chen G.** “*Kalman Filtering with Real-time Applications*”. Ed. Springer, USA 1999.
- De la Puente J. A.** “*Introducción a los Sistemas en Tiempo Real*” Universidad Politécnica de Madrid, 2000.
- Diccionario** de la Real Academia Española, 2000.
- Fan, H., y Nayeri, M.**, "Stability of some system identification techniques for underparameterized IIR adaptive filters", *IEEE Transaction on Circuits and Systems*, vol. 3, 1989, pp 1748 - 1751.
- Fan, H., y Nayeri, M.**, "On reduced order identification"; revisiting On some system identification techniques for adaptive filters" *IEEE Transaction on Circuits and Systems*, v. 37, Iss. 9, 1990, pp. 1144 - 1151.
- Grewal M. and Andrews A.** “*Kalman filtering, theory and practice*”. Prentice Hall information and system sciences series. USA 1993.
- Gray D.** “*Introduction to the formal design of Real-Time Systems*”, Ed. Springer, UK 1999.
- Gustafsson F.** “*Adaptive filtering and change detection*”. Ed. John Wiley & Sons, LTD, Linkoping University Sweden 2000.
- Haykin, S.**, *Adaptive Filter Theory*, 2ª Ed, Prentice Hall, 1991.
- Heitmeyer C., Mandrioli D.** “*Formal Methods for Real-Time Computing*” Ed. Wiley, England 1996.
- Kailath, T.**, “*Linear Systems*”, Prentice Hall, United States of America, 1980.
- Kalman, R. E.**, A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME -- Journal of Basic Engineering*, 1960, pp. 35 - 45.
- Krten R.** “*Getting started with QNX 4*”, PARSE Software Devices, Canada 1998.
- Kuo B. C.** “*Sistemas de control automático*”. Prentice Hall 7ª edición, México, 1996.
- Isermann, R.**, *Digital Control Systems*, Springer Verlag, vol. 1, 2nd Ed, 1989.
- Larousse**, Diccionario Enciclopédico, 1997.
- Liu J.** “*Real-time Systems*” Ed. Prentice Hall USA 2000.
- Liu C., Layland J.** ”*Scheduling algorithms for multiprogramming in hard-real-time environment*”. *Journal of the ACM*, Vol. 20, No. 4, USA 1973.
- Ljung, L.**, *Systems Identification and estimation: Theory for the User*. Prentice Hall, 1987.
- Martín J.** “*Design Real-time computer systems*”, Ed. Diana México 1980.
- MatLab Co.**, Math Works ver. 4.0., 1984,

- Medel J. J., Guevara P.** “Implementación de un filtro digital en tiempo real sobre la plataforma QNX RTP 6.0” Octava Conferencia de Ingeniería Eléctrica, CINVESTAV IPN, México D.F. aceptado en julio de 2002.
- Medel J. J., Guevara P.** “Análisis restrictivo para filtros digitales en tiempo real presentando un ejemplo para un SLIT tipo SISO” VIII Conferencia Iberoamericana de Inteligencia Artificial, aceptado en julio de 2002.
- Medel J. J.** “Análisis de dos métodos de estimación para sistemas lineales estacionarios e invariants en el tiempo con perturbaciones correlacionadas con el estado observable del tipo: Una entrada una salida” Computación y sistemas volumen 6 número 1, México 2002
- Medel J. J. , y Poznyak A. S.,** “Adaptive Tracking for DC- derivate motor Based on Matriz Forgetting”, Computación y Sistemas, pp. 201-217, 2001.
- Nyquist H.** “Certain Topics in Telegraph Transmission Theory”. AIEE Transactions, USA 1928.
- Ogata, K.,** *Ingeniería de Control Moderna*, Prentice Hall Hispanoamericana, Primera Edición, 1980, pp. 858-861.
- Papoulis A., Bertrán M.** “Sistemas y circuitos”, Ed. Marcombo, 1ª edición, España 1989.
- Poznyak, A. S; y Medel Juárez J. J.,** “Matrix Forgetting Factor”, *International Journal of Systems Science*, vol. 30, n.-2, 1999_a, pp. 165 – 174.
- Poznyak, A. S., y Medel Juárez J. J.,** “Matrix Forgetting Factor with Adaptation”, *International Journal of Systems Science*, vol. 30, n.-8, 1999_b, pp. 865 – 878.
- QNX Real-time Operating Systems,** <http://www.qnx.com> Canada 2001.
- Stankovic J.** “Real-time Computing”. Technical Report, University of Massachusetts, 1992
- Söderström, T., y Estoica, P.,** *Systems Identification*, Prentice Hall International, Hemel, Hempstead, Hertfordshire, England, 1988_a.
- Söderström, T., y Estoica, P.,** "On Some System Identification Techniques for Adaptive Filtering", *IEEE Transaction of Circuits and Systems*, vol. 35, Iss. 4, 1988_b, pp. 457 - 461.
- Vicuña R., Guevara P.** “Elaboración de Administradores de Recursos en QNX para aplicaciones en Sistemas en Tiempo Real”, Informe Técnico serie azul CIC-IPN México 2001.
- Wei, R and Kumar, P. R.,** "Stochastic adaptive prediction and model reference control", *IEEE Transaction on Automatic Control*, v. 39, Iss. 10, 1994, pp. 2047 - 2060.
- Young, P.,** *Recursive Parameter Estimation*, Lancaster, England, 1984.