Univerzális algebrák kvázirendezés-hálói

Gergő Gyenizse

SZTE Bolyai Intézet

2018 március 13.

Preorderek, kvázirendezések, kongruenciák

Definíció

Egy X halmaz **preorderjei** a reflexív és tranzitív binér relációk a halmazon.
Ezek a tartalmazásra nézve egy $\mathrm{Pre}X$-szel jelölt hálót alkotnak.

Definíció

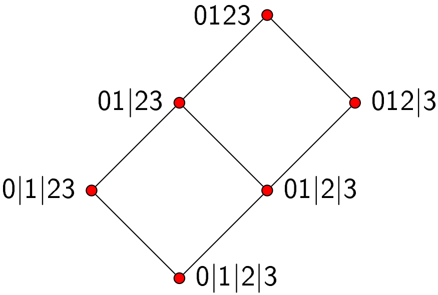
Az $\mathbf{A}$ algebra kompatibilis preorderjeit **kvázirendezéseknek** nevezzük.
Ezek egy $\mathrm{Quo}\mathbf{A}$-val jelölt hálót alkotnak.
A szimmetrikus kvázirendezések a **kongruenciák**, melyek a $\mathrm{Con}\mathbf{A} \leq \mathrm{Quo}\mathbf{A}$ hálót alkotják.
Az $\mathbf{A}$ algebra egy **rendezéshálójának** nevezzük $\mathrm{Quo}\mathbf{A}$ azon részhálóit, melyek csak antiszimmetrikus kvázirendezéseket tartalmaznak.

Egy példa: egy négyelemű félcsoport kvázirendezés-hálója

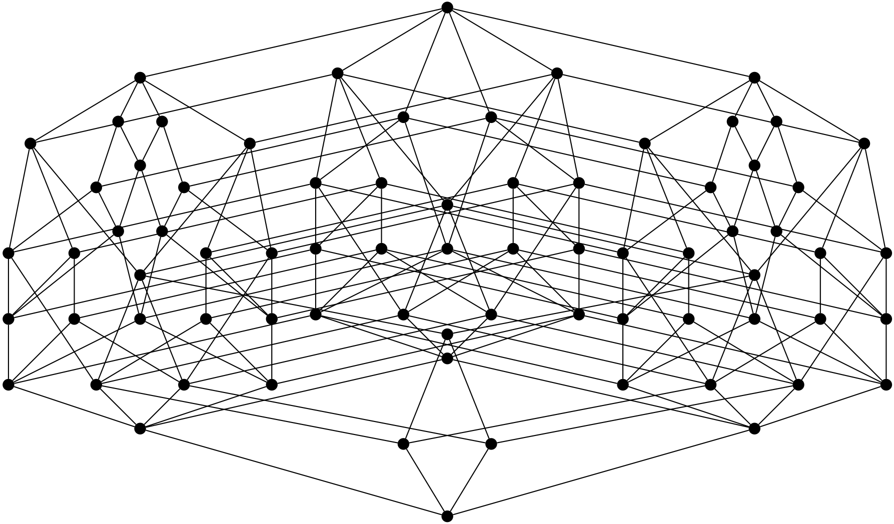
Tekintsük a következő művelettáblával megadott **S** félcsoportot:

	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	0	1	2	2
3	0	1	2	3

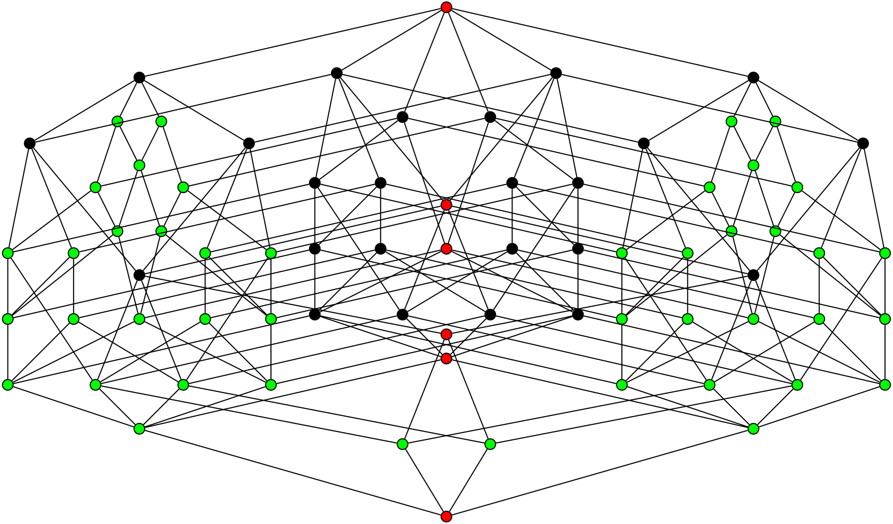
Ennek barátságos kongruenciahálója van:



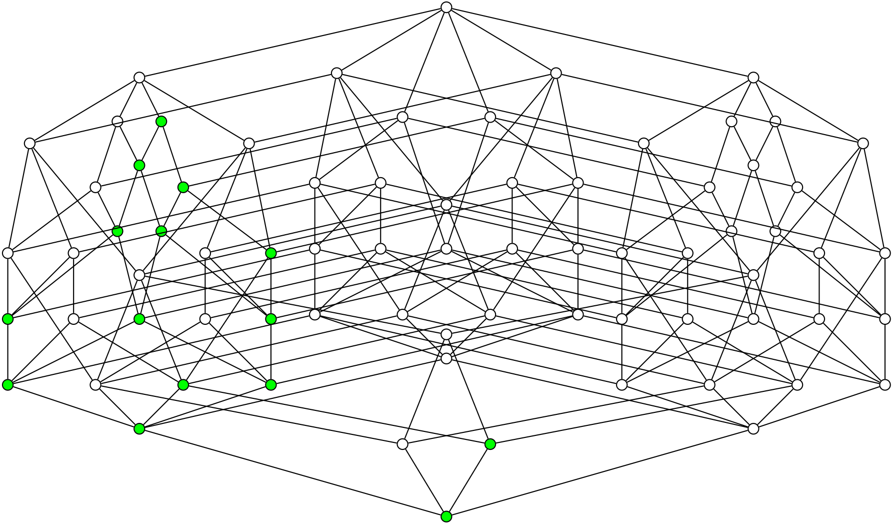
Egy példa: **S** kvázirendezés-hálója



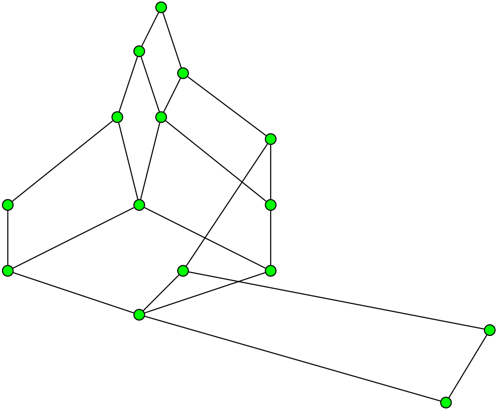
Egy példa: **S** kvázirendezés-hálója



Egy példa: **S** egy maximális rendezéshálója



Egy példa: **S** egy maximális rendezéshálója



Rendezéshálók véges algebrán

Definíció

Egy háló **egyesítés szemidisztibutív** ha

$$a \vee b = a \vee c \ \rightarrow \ a \vee b = a \vee (b \wedge c)$$

teljesül minden elemhármasára.
A háló **metszet szemidisztributív**, ha a duális feltétel teljesül, és **szemidisztibutív**, ha mindkét feltétel teljesül.

Theorem (Sivak, 1978)

Algoritmikusan eldönthető, hogy egy véges háló beágyazható-e egy véges algebrához tartozó rendezéshálóba.

Állítás

Véges algebra bármely rendezéshálója egyesítés szemidisztributív.

Poset-ek szuborderhálói

Állítás

Véges poset szuborderhálója egyesítés szemidisztributív.

Tétel (Semenova, 2005)

Tegyük fel, hogy **L** *egy véges háló, ami beágyazható egy végtelen láncot nem tartalmazó poset szuborderhálójába.*
L *ekkor beágyazható véges poset szuborderhálójába is.*

Állítás

Egy poset akkor és csak akkor nem tartalmaz végtelen láncot, ha teljesíti az ACC és a DCC feltételeket, vagyis nincs benne sem végtelen felszálló, sem végtelen leszálló lánc.

DCC poset-ek szuborderhálóinak véges részhálói

Definíció

Egy háló egy l eleme **egyesítés irreducibilis**, ha nincsenek olyan $l_1, l_2 < l$ elemek, melyekre $l_1 \vee l_2 = l$. $J(L)$ jelöli az $\mathbf{L}$ háló nemzéró egyesítés irreducibiliseinek halmazát.
Ha $\mathbf{L}$ véges, minden $l \in J(L)$-re l^* jelöli a legnagyobb l-nél kisebb elemet.

Definíció

Véges $\mathbf{L}$ hálóra $\mathcal{C}_{\mathbf{L}}$ jelöli az $\mathbf{L}$-beli egyesítés irreducibilisekre vonatkozó minimális nemtriviális fedéseket,vagyis a következő halmazt:

$$\{(l, l_1, \dots, l_k) \in J(L)^{k+1} : l \leq l_1 \vee l_2 \vee \dots \vee l_k,$$
$$l \not\leq (l_1)^* \vee l_2 \vee \dots \vee l_k,\ l \not\leq l_1 \vee (l_2)^* \vee \dots \vee l_k, \dots, l \not\leq l_1 \vee l_2 \vee \dots \vee (l_k)^*\}$$

DCC poset-ek szuborderhálóinak véges részhálói

Tétel (Gy.)

Egy véges $\mathbf{L}$ *háló akkor és csak akkor ágyazható be egy DCC poset szuborderhálójába, ha létezik egy* $s : \mathcal{C}_{\mathbf{L}} \mapsto L$ *színezés, melyre:*

- *bármely* $(l, l_1, \ldots, l_k) \in \mathcal{C}_{\mathbf{L}}$ *esetén* $s(l, l_1, \ldots, l_k) \in \{l_1, \ldots, l_k\}$,
- s *szimmetrikus az elsőt leszámítva az összes változójában,*
- *a binér*

  $$T_{\mathbf{L}} := \{(l, l_i) : (l, l_1, \ldots, l_k) \in \mathcal{C}_{\mathbf{L}}, \; s(l, l_1, \ldots, l_k) \neq l_i\}$$

  és

  $$\begin{aligned} U_{\mathbf{L}} := \mathrm{Tr}(\{(l, l) : l \in L\} \cup \\ \{(l, l_i) : (l, l_1, \ldots, l_k) \in \mathcal{C}_{\mathbf{L}}, \; s(l, l_1, \ldots, l_k) = l_i\}), \end{aligned}$$

  relációkra $U_{\mathbf{L}} \circ T_{\mathbf{L}}$ *körmentes.*

Félhálók

Félhálók kongruenciahálóiról a következők ismeretesek:

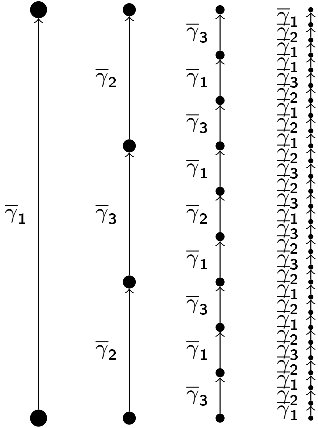
- (Freese, Nation, 1973) Semmilyen nemtriviális hálóazonosságot nem elégítenek ki mind.
- Metszet szemidisztibutívak.
- Következésképp, nem tartalmaznak $\mathbf{M}_3$-mal izomorf részhálót.

Tétel (Gy., Maróti)

Véges félhálók kvázirendezés-hálói általában nem metszet szemidisztibutívak, viszont nem tartaznak $\mathbf{M}_3$*-mal izomorf félhálót. Létezik végtelen félháló, melynek kvázirendezés-hálója tartalmaz* $\mathbf{M}_3$*-mal izomorf részhálót.*

Hogyan találjunk $\mathbf{M}_3$-at $\mathrm{QuoFS}\omega$-ban?

Van olyan rendezésháló, amely izomorf $\mathbf{M}_3$-mal:



Hogyan találjunk $\mathbf{M}_3$-at $\mathrm{QuoFS}\omega$-ban?

- $\overline{\gamma}_1$, $\overline{\gamma}_2$, $\overline{\gamma}_3$ rendezések a C halmazon,
- kvázirendezéseket generálnak $\mathrm{FS}(C)$-n: $\gamma_1^{(0)}$, $\gamma_2^{(0)}$, $\gamma_3^{(0)}$,
- ezek páronkénti egyesítése megegyezik, páronkénti metszetük nem:
- elérhető, hogy azok is megegyezzenek:

$$\gamma_i^{(k)} := \gamma_i^{(0)} \vee (\gamma_{i-1}^{(k-1)} \wedge \gamma_{i+1}^{(k-1)}),\ \gamma_i := \bigcup \gamma_i^{(k)},$$

- most γ_1, γ_2, γ_3 egy **homomorf képét** generálják $\mathbf{M}_3$-nak,
- bizonyítható, hogy $\gamma_1 \neq \gamma_2$.

Szoros kapcsolatok $\mathrm{Con}\mathbf{A}$ és $\mathrm{Quo}\mathbf{A}$ között

Állítás

Ha $\mathbf{A}$ *kongruencia permutábilis (CP) varietásban van, akkor minden kvázirendezése kongruencia.*

Tétel (Czédli, Szabó, 1995)

Minden $\mathbf{L}$ *hálóra* $\mathrm{Quo}\mathbf{L} \approxeq (\mathrm{Con}\mathbf{L})^2$.

Tétel (Gy., Maróti)

Ha $\mathcal{V}$ *lokálisan véges kongruencia disztibutív (CD) varietás, akkor minden* $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$*-re* $\mathrm{Quo}\mathbf{A}$ *disztributív. Vagyis:* $\mathrm{Quo}\mathbf{A} \in \mathrm{HSP}(\mathrm{Con}\mathbf{A})$.

Tétel (Gy., Maróti)

Ha $\mathcal{V}$ *lokálisan véges kongruencia moduláris (CM) varietás, akkor minden* $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$*-re* $\mathrm{Quo}\mathbf{A}$ *moduláris. Ebből* **nem** *következik, hogy* $\mathrm{Quo}\mathbf{A} \in \mathrm{HSP}(\mathrm{Con}\mathbf{A})$.

Szoros kapcsolatok $\mathrm{Con}\mathbf{A}$ és $\mathrm{Quo}\mathbf{A}$ között

Gumm szerint CM=CP+CD.

Tétel (Gy.)

Ha $\mathbf{A}$ *véges algebra, és CM varietást generál, akkor* $\mathrm{Quo}\mathbf{A} \in \mathrm{HSP}(\mathrm{Con}\mathbf{A})$.

Következmény (Gy.)

Legyen $\mathcal{P}$ *egy a modularitásnál erősebb hálóazonosság. Ha egy lokálisan véges varietás kongruenciahálói kielégítik* $\mathcal{P}$*-t, akkor a kvázirendezés-hálói is.*

Probléma

Igaz marad az előző állítás akkor is, ha elhagyjuk a lokális végességre tett felvetést és/vagy megengedjük azonosságok helyett a kváziazonsságokat is?

Minimális halmazok és algebrák

Definíció

Legyen $\alpha \prec \beta$ $\mathrm{Con}\,\mathbf{A}$-ban. Egy $U \subseteq A$ halmaz **minimális az** (α, β)**-párra**, ha

- van egy p egyváltozós polinom, melyre $p(A) = U$, és $p(\beta) \not\subseteq \alpha$ (vagyis p legalább egy β-beli párt **nem** visz α-ba),
- U minimális a fenti tulajdonságra (tartalmazásra nézve)

Definíció

Legyen $\alpha \prec \beta$ $\mathrm{Con}\,\mathbf{A}$-ban. **A minimális az** (α, β)**-párra**, ha A (α, β)-minimális halmaz.

Állítás

Ha U egy (α, β)-minimális halmaz a véges **A***-ban, és* **U** *egy U alaphalmazú algebra, melynek polinomklónja megegyezik* **A** *polinomklónjával U-ra megszorítva, akkor* **U** *$(\alpha|_U, \beta|_U)$-minimális.*

Minimális halmazok és algebrák

Állítás

Ha **A** *véges, és* $\alpha \prec \beta$ $\mathrm{Con}\mathbf{A}$*-ban, akkor* **U** *nem függ az* U *minimális halmaz választásától (a polinomklón izomorfiája erejéig).*

Állítás

Ha **A** *véges,* $\alpha \prec \beta$ $\mathrm{Con}\mathbf{A}$*-ban, és* U (α, β)*-minimális, akkor* $\mathrm{Con}\mathbf{U}$ *homomorf képe* $\mathrm{Con}\mathbf{A}$*-nak.*

Mindezek triviálisan érvényesek maradnak, ha kvázirendezésekre cseréljük a kongruenciákat.

Típusok

Definíció

Az **A** algebra **minimális**, ha $(0_{\mathbf{A}}, 1_{\mathbf{A}})$-minimális, vagyis minden egyváltozós polinomja bijektív vagy konstans.

Tétel (Pálfy, 1984)

Ha **A** *véges minimális algera, akkor a polinomklónja*

1. *csak lényegében egyváltozós műveletet tartalmaz, VAGY*
2. *izomorf egy vektortér polinomklónjával, VAGY*
3. *izomorf a kételemű Boole-algera polinomklónjával, VAGY*
4. *izomorf a kételemű háló polinomklónjával, VAGY*
5. *izomorf a kételemű félháló polinomklónjával.*

Típusok

Állítás

Ha $\mathbf{A}$ *véges,* $\alpha \prec \beta$ $\mathrm{Con}\,\mathbf{A}$*-ban,* U (α, β)*-minimális,* V *egy* $\beta|_U$ *osztály* $\mathbf{U}$*-ban, de nem* $\alpha|_U$ *osztály, és* $\mathbf{V}$ *polinomklónja megegyezik* $\mathbf{U}$*-éval megszorítva* $\mathbf{V}$*-re, akkor* $\mathbf{V}/\alpha|_V$ *minimális algebra, aminek a típusa nem függ* V *választásától.*

Ha δ kvázirendezés,

- δ-nak nincs osztálya (bár $\delta \vee \delta^{-1}$-nek van)
- δ-val nem lehet faktorizálni (bár $\delta^* := \delta \wedge \delta^{-1}$-gyel lehet)
- δ nincs $\delta \vee \delta^{-1}$ és δ^* által meghatározva
- más módon lehet csak a fedő kvázirendezés-párokokat besorolni a típusokba

Típusok definíciója kvázirendezésekre[Gy.]

- Legyen **A** véges, $\alpha \prec \beta$ Quo**A**-ban, **A** (α, β)-minimális,
- Tegyük fel, hogy $\alpha^* \neq \beta^*$. Ha β^* fedi α^*-ot a kongruenciahálóban, akkor (α, β) örökölje (α^*, β^*) típusát. Ha nincs fedés, legyen (α, β) típusa 1.
- A továbbiakban $\alpha^* = \beta^*$. Definiálom $\mathbf{A}_+$-ot, **A** β-**val vett felfúltját**, ami A^3 azon (a, b, c) elemeiből áll, melyekre (a, b) és (b, c) β-beli (ez egy részalgebrája $\mathbf{A}^3$-nek).
- Minden $\delta \in \mathrm{Quo}\mathbf{A}$-nak megfeleltetünk egy $\delta_+ \in \mathrm{Con}\mathbf{A}_+$-ot, amit úgy definiálok, mint a következő reláció tranzitív lezártját:

$$\{((a, b, c), (a, b', c)) \in \mathbf{A}_+^2 : (b, b') \in \delta \cup \delta^{-1}\}.$$

- Bizonyítható, hogy α_+ és β_+ **különböző** kongruenciák $\mathbf{A}_+$-ban. Nézzük meg, milyen (kongruencia) típusok vannak $[\alpha_+, \beta_+]$-ban. Ha van 4-es típus, akkor az (α, β) kvázirendezés párnak a típusa is 4 lesz. Ha nincs 4-es, de van 5-ös, akkor (α, β) típusa is 5. Minden más esetben (α, β) típusa 1.

Tulajdonságok

Tétel (Gy.)

A fenti definíció a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- *ha egy kongruencia pár fedő a kvázirendezés-hálóban, akkor a kongruencia és a kvázirendezés típusa megegyezik,*
- *egy varietásban ugyanazok a kongruencia és kvázirendezés párok fordulnak elő (ez algebrákra nem igaz)*
- *prím perspektív párok típusa megegyezik (két fedő pár prím perspektív, ha $\mathbf{2}^2$-tel izomorf részhálót generálnak),*
- *a kvázirendezés-hálók antiszimmetrikus részeiben csak 1-es, 4-es, és 5-ös típus fordulhat elő.*

Típusok és tiltott részhálók

Tétel (Gy.)

Ha **A** *véges algera, és az általa generált varietásban nincsen 1-es típus, akkor* $\mathrm{Quo}\,\mathbf{A}$ *nem tartalmaz nemmoduláris egyszerű részhálót.*

Tétel (Gy.)

Ha **A** *véges algera, és az általa generált varietásban nincsen 1-es és 2-es típus, akkor* $\mathrm{Quo}\,\mathbf{A}$ *nem tartalmaz nemdisztributív egyszerű részhálót.*

Tétel (Gy.)

Ha **A** *véges algera, és az általa generált varietásban nincsen 1-es, 2-es, és 5-ös típus, akkor* $\mathrm{Quo}\,\mathbf{A}$ *egyesítés szemidisztributív.*

Köszönöm a figyelmet!

The thesis is based on

[1] G. Gyenizse: *On lattice representations with posets*, submitted to Order.
[2] G. Gyenizse: *Quasiorder lattices in congruence modular varieties*, submitted to Acta Sci. Math. (Szeged).
[3] G. Gyenizse: *Types of quasiorders*, draft.
[4] G. Gyenizse and M. Maróti: *Quasiorder lattices of varieties*, to appear in Algebra Universalis.
[5] G. Gyenizse, M. Maróti and L. Zádori: *The structure of polynomial operations associated with smooth digraphs*, Algebra Universalis 72 (4) (2014), pages 381–391.

Bibliography

[6] B.M. Achein: *A representation theorem for lattices*, Algebra universalis 2 (1972), pages 177–178.
[7] K.V. Adaricheva, V.A. Gurbunov and V.I. Tumanov: *Join-semidistributive lattices and convex geometries*, Advances in Mathematics, 173 (1) (2003), pages 1–49.
[8] S. Burris and H.P. Sankappanavar: *A course in universal algebra*, Graduate Texts in Mathematics, 78, Springer-Verlag, New York-Berlin (1981).
[9] N. Caspard: *The Lattice of Permutations Is Bounded*, International Journal of Algebra and Computation, 08/2000; 10 (4) (2000), pages 481–490.
[10] G. Czédli, E. K. Horváth and P. Lipparini: *Optimal Mal'tsev conditions for congruence modular varieties,* Algebra Universalis 53 (2–3) (2005), pages 267–279.
[11] G. Czédli: *A Horn sentence for involution lattices of quasiorders*, Order, 11 (1994) pages 391–395.

[12] G. Czédli and L. Szabó: *Quasiorders of lattices versus pairs of congruences*, Acta Sci. Math. (Szeged), 60 (1995), pages 207–211.
[13] A. Day: *A characterizations of modularity for congruence lattices of algebras*, Canad. Math. Bull. 12 (1969), pages 167–173.
[14] A. Day: *Characterizations of finite lattices that are bounded-homomorphic images of sublattices of free lattices*, Canad. J. Math. 31 (1979), pages 69–78.
[15] R. Freese, J. Ježek and J. B. Nation: *Free Latices*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 42, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
[16] R. Freese and J.B. Nation: *Congruence lattices of semilattices*, Pacific Journal of Mathematics 49 (1) (1973), pages 51–58.
[17] R. Freese, K. Kearnes and J. B. Nation: *Congruence lattices of congruence semidistributive algebras*, Lattice Theory and Applications, Research and Exposition in Mathematics, vol. 23, Heldermann, Lemgo, 1995, pages 63–78.

Biliography

[18] P.A. Grillet: *Semigroups: An Introduction to the Structure Theory*, Dekker, New York, 1995.
[19] H.-P. Gumm: *Congruence modularity is permutability composed with distributivity,* Archiv der Math. (Basel) 36 (1981), 569–576.
[20] J. Hagemann and A. Mitschke: *On n-permutable congruences*, Algebra Universalis 3 (1973), pages 8–12.
[21] D. Hobby and R. McKenzie: *The Structure of Finite Algebras,* Memoirs of the American Mathematical Society, No. 76, American Mathematical Society, Providence, RI, 1988.
[22] B. Jónsson: *Congruence varieties*, Algebra Universalis 10 (1980), pages 355–394.

Bibliography

[23] A. Kazda, M. Kozik, R. McKenzie and M. Moore: *Absorption and directed Jónsson terms*, `arXiv:1502.01072 [math.RA]`, 4 Feb 2015, 17 pages.
[24] M. Kozik, A. Krokhin, M. Valeriote and R. Willard: *Characterizations of several Maltsev conditions*, Algebra universalis 73 (3–4) (2015), pages 205–224.
[25] R. McKenzie: *Equational bases and non-modular lattice varieties*, Trans. Amer. Math. Soc., 174 (1972), pages 1–43.
[26] R. McKenzie and J. Snow: *Congruence modular varieties: commutator theory and its uses*, Structural Theory of Automata, Semigroups, and Universal Algebra, NATO Science Series, pages 273–329 (2003).

Bibliography

[27] P. Pudlák and J. Tůma: *Every finite lattice can be embedded in the lattice of all equivalences over a finite set*, Algebra Universalis 10 (1980), pages 74–95.
[28] M. V. Semenova: *Lattices that Are Embeddable in Suborder Lattices*, Algebra and Logic, 44 (4) (2005), pages 270–285.
[29] B. Sivak: *Representation of finite lattices by orders on finite sets*, Mathematica Slovaca, 28 (2) (1978), pages 203–215.
[30] P. M. Whitman: *Lattices, equivalence relations, and subgroups*, Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946), pages 507–522.