UN ACERCAMIENTO FIGURAL A LA GRÁFICA. EL CASO DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

Beatriz Alejandra Veloz Díaz, Claudia Margarita Acuña Soto
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional Cinvestav-IPN. (México)
betty.vdiaz@gmail.com, claudiamargarita_as@hotmail.com

Palabras clave: concepto figural, transparencia, triángulo, pendiente
Key words: figural concept, transparency, triangle, slope

RESUMEN

La presente investigación se refiere a la manera cómo los estudiantes trabajan con las gráficas y su interpretación desde el punto de vista de las propiedades figurales. Donde lo figural se refiere a las propiedades de forma o la posición de la gráfica. Usamos este tratamiento para establecer el ser creciente o decreciente, puntos máximos o mínimos, tanto locales como globales o puntos de inflexión. Los procedimientos figurales que usamos son: 1. Evaluar la pendiente de la tangente con un triángulo geométrico y 2. La exhibición de familias de tangentes con ayuda de una computadora. Encontramos que los estudiantes de bachillerato de desempeños desiguales interpretan mejor las gráficas con el uso de estos procedimientos y que algunos indicadores llegan a ser relativamente transparentes.

ABSTRACT

This research is about the way students work with graphs and their interpretation from the point of view of the figural properties. Figural aspects refer to the shape property or the position of the graphic. We use the figural treatment to establish the increasing or decreasing, the maximum or minimum, local and global or the inflection points. The figural procedures we used are one. To evaluate the slope of the tangent line with a geometric triangle and 2. To show families of tangent lines with the help of a computer. We found that high school students with uneven performances are able to interpret the graphs better with the use of these procedures and that some indicators become relatively transparent.

Introducción

Una exploración de los contenidos de los libros y programas de bachillerato actuales nos muestra que el criterio usado para detectar propiedades gráficas como la concavidad y los puntos de inflexión se hace a través del uso de la derivada, pese al nexo analítico de este acercamiento, en el estudiante no queda muy claro por qué calcular las derivadas es necesario para interpretar la gráfica de las funciones en cuestión, de hecho estos tienen dificultades para interpretar éstas con el apoyo que les proporciona solamente la derivada.

En una investigación de Tall (1986) sobre la recta tangente encontró que cuando se estudia esta permanecen conflictos potenciales asociados con la noción de una “tangente genérica” que “toca la gráfica en un solo punto”. También respecto a la recta tangente Canul Pech (2009) considera que los estudiantes (e incluso algunos profesores) tienen complicaciones cuando se han de trazar las rectas tangentes a cualquier curva, porque utilizan la definición euclidiana (global) de recta tangente, cumple con tener un punto de contacto con la gráfica y solo uno, lo que no es necesariamente el caso de muchas de las gráficas de funciones estudiadas. Lo que sugiere una definición de tangente más general, como la concepción leibniziana, “en la que se trasciende la concepción global poniendo en su lugar a una concepción local, donde se acepta que la tangente eventualmente puede ‘cortar’ a la curva y no solo ‘tocarla’” (Canul Pech, 2009, p. 5).

Con respecto al punto de inflexión, Tsamir y Ovodenko (2004) llevan a cabo una investigación con estudiantes para profesor de los que afirman que en su interpretación gráfica:

> La prospectiva de los maestros de matemáticas de preparatoria tiende a considerar que $f'(x) = 0$ y/o la ubicación *donde la gráfica tiene curvas* son condiciones necesarias y suficientes para decir que un punto es de inflexión. Así pues, se observa que el acercamiento analítico no es suficiente para la correcta comprensión de las condiciones necesarias para determinar que un punto sea de inflexión (p. 337).

Al observar en conjunto los resultados de las investigaciones nos damos cuenta de que los estudiantes construyen sus propias explicaciones en la interpretación de la gráfica; aun cuando se les proponga una definición y pese a que el tratamiento sea analítico, sus explicaciones se ajustan a las propiedades matemáticas sólo parcialmente y además suelen ignorar las definiciones generales.

Lo anterior apoya la necesidad de un tratamiento específico sobre las gráficas desde el punto de vista de las representaciones que están frente a los ojos de los estudiantes. Nos muestra que es necesario enfocar las gráficas como objeto de estudio de una manera más fina, con base en las propiedades de las propias representaciones o diagramas gráficos. Consideramos que es posible sugerir a los estudiantes una dinámica donde observen los aspectos figurales y las propiedades geométricas como una forma de ir dando sentido a la gráfica en sí misma y para que construyan una interpretación adecuada de ella.

Marco teórico

Como bases teóricas nos sostenemos en la idea de *concepto figural*, el cual distingue dos tipos de estructuras, el concepto y la imagen. Lo que caracteriza un concepto es el hecho que expresa una idea, en general, una representación ideal de una clase de objetos. En contraste, la imagen (mental) es una representación sensorial de un objeto o fenómeno. Los objetos de investigación y manipulación en el razonamiento geométrico son entidades mentales, llamadas por Fischbein (1993) conceptos figurales, los cuales reflejan propiedades espaciales (forma, posición, magnitud), y al mismo tiempo, poseen cualidades conceptuales, como idealidad, abstracción, generalidad, perfección, entre otras.

Se tienen que tomar en cuenta tres categorías de entidades mentales cuando se refiere a figuras geométricas: la definición, establecida como una proposición general sobre el objeto al que se refiera, la imagen (basada en la experiencia perceptivo – sensorial, como el esbozo de un dibujo) y el concepto figural que es la entidad en la que se ven concentradas las dos anteriores.

En el presente trabajo consideramos que podemos tomar a las gráficas como conceptos figurales porque pueden ser pensadas como una realidad mental, ya que al pensar en ellas con la intención de interpretarlas se prescinde de las propiedades concreto – sensoriales, pero no de los aspectos figurales como objetos matemáticos con propiedades que hacen referencia al tamaño, la longitud, la forma, etc. El uso que pretendemos hacer de las gráficas en el presente trabajo se apoya en un pensamiento doble ya pueden ser pensados en términos de sus aspectos figurales al mismo tiempo que en consideración de sus propiedades conceptuales.

El uso de la computadora también puede ofrecer un apoyo en términos de la ostentación de ciertas propiedades gráficas (Tall, 1986), ya que las imágenes son sugestivas para los estudiantes que pueden desarrollar ciertos procesos de visualización (Hitt, 1998). Lo cual puede ser aprovechado para ilustrar situaciones gráficas que de otra forma sería imposible dibujar con lápiz y papel.

Respecto a la construcción entre los signos usados y los significados asociados, consideramos que los estudiantes construyen significados de los signos a través del uso y que inicialmente asocian a éstos ciertas ideas idiosincráticas (Berger, 2004).

En el caso del uso de las gráficas el significado que éstas ostentan no es espontáneamente claro, la correcta interpretación de una gráfica requiere del desarrollo de una habilidad cognitiva a través de la cual se logra una interpretación que es considerada como *transparente*, las gráficas no son transparentes de inicio (Roth, 2003). De la idea de transparencia podemos decir que ésta está relacionada directamente con los entornos específicos de los usuarios de las gráficas, este fenómeno aparece cuando a los ojos del usuario la gráfica es susceptible de ser leída e interpretada en términos de sus significados implícitos.

Con la intención de que los estudiantes tuvieran un instrumento figural que les orientara en el trabajo de interpretación de la gráfica, se recurrió a la relación entre signo de la pendiente y la posición de la recta tangente, concretada en lo que llamamos un *triángulo geométrico* que, para nuestros fines, puede ser estimado visualmente. Consideramos que además de ser un concepto figural este triángulo funciona como una herramienta que busca la transparencia y es el principal apoyo de la investigación.

El uso a través de una intervención de este recurso durante la actividad fue el siguiente: Se les indicó que para tener el valor de la pendiente de la recta podrían suponer que están colocados en algún lugar sobre la recta – la que ellos deseen – y desde esa posición podrían trazar una línea paralela al eje de las abscisas, ya sea en sentido positivo o negativo y anotar el signo correspondiente en el denominador del cociente $m = \frac{y}{x}$. Como el objetivo es encontrarse con la recta, entonces, desde el punto en el que se encuentran deben trazar una línea paralela al eje de las ordenadas, dependiendo del desplazamiento efectuado se considera el signo correspondiente y se coloca en el numerador del mismo cociente, el resultado de la comparación de signos nos permite saber si la pendiente es positiva o negativa.

Es importante mencionar que el valor de la pendiente no depende del tamaño de los desplazamientos, por lo que el triángulo puede tomar tamaños distintos y la construcción vale tanto para un lado como otro de la recta asociada, lo que no cambiará el signo de la pendiente al realizar la estimación.

Metodología

Esta investigación es de tipo cualitativo interpretativo. Se llevó a cabo con 13 estudiantes de cuarto semestre de bachillerato con desempeño desigual. Trabajamos durante cuatro sesiones con 3 cuestionarios. Se desarrolló trabajo colaborativo en donde se hicieron distintas intervenciones. Los datos se video-grabaron y se transcribieron pasajes de interés.

Algunas de las preguntas que se hicieron se apoyaron en las siguientes gráficas:

Figura 1. Señalar puntos máximos y mínimos.

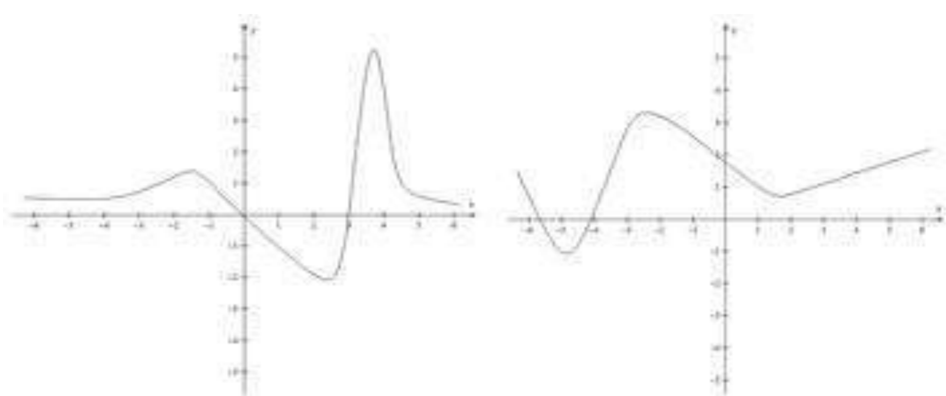


Figura 2. Comportamiento de las gráficas.

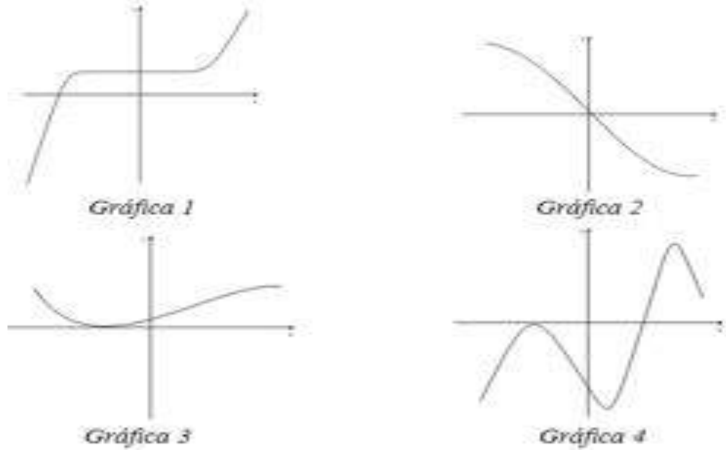


Figura 3. Determinar la pendiente usando el triángulo geométrico.

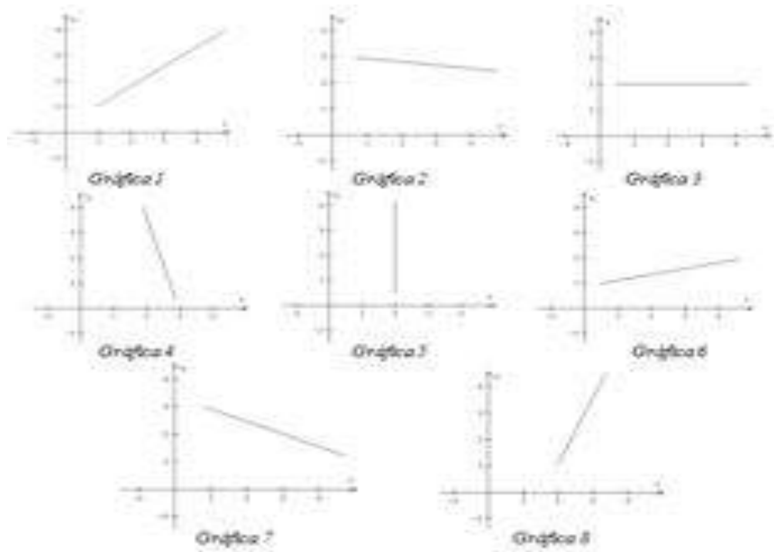
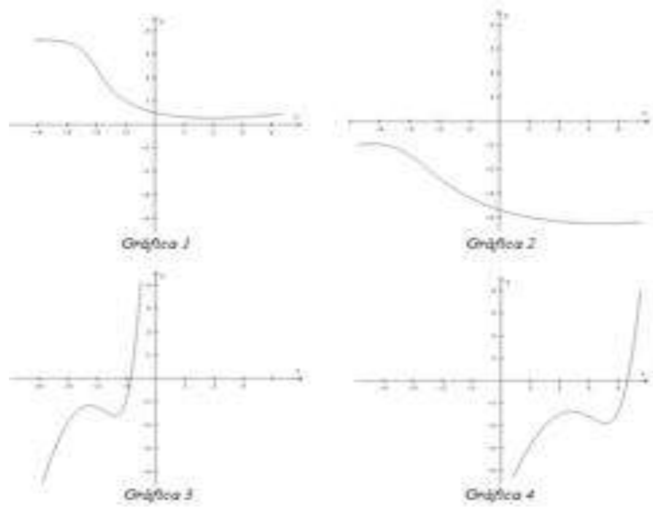


Figura 4. Distinguir concavidades y puntos de inflexión.



Resultados y discusión

Un obstáculo en la interpretación de los estudiantes para decidir si la función es creciente o no, fue la interpretación perceptual del valor de la ordenada de un punto, ya que suponían que si el segmento era mayor entonces el valor numérico también era mayor, cosa que dejaba de ser cierta en tres de los 4 cuadrantes del plano cartesiano, esta idea hace que los análisis locales de las propiedades de la gráficas sean especialmente más difíciles para los estudiantes.

Luego de aplicar todos los cuestionarios y hacer un análisis, encontramos los siguientes resultados:

1. Los estudiantes lograron localizar adecuadamente los puntos máximos y mínimos luego de aclarar los aspectos relativos al carácter de ser creciente y decreciente de las gráficas.
2. Consideran la importancia de la pendiente de la recta tangente para poder hablar de concavidad. Aunque no siempre es explícito el uso del triángulo geométrico en el trabajo de los estudiantes, observamos un cierto proceso de transparencia ya que primero los orientó, pero después no aparece dibujado aunque las respuestas ya son correctas.

La idea de familias de tangentes mostradas por la computadora permite dar sentido a la concavidad y a los puntos de inflexión. Algunos de estos resultados se pueden observar en las siguientes construcciones:

Figura 6. Comparación de pendientes de rectas.

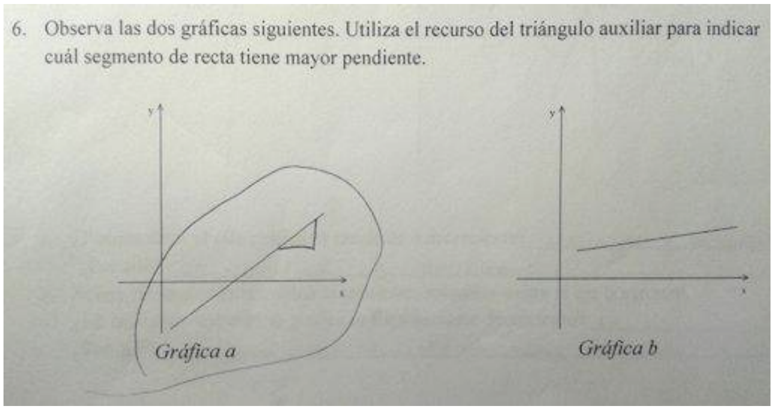
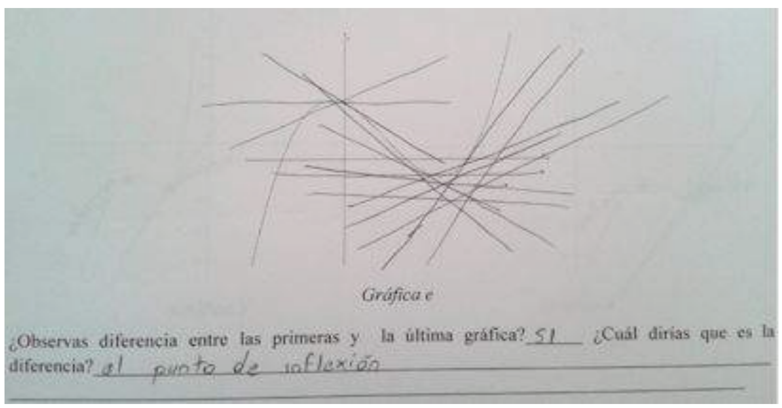


Figura 7. Trazo de familias de rectas.



3. Los resultados sobre la localización de los puntos máximos y mínimos nos sugieren que hay distintos niveles de apreciación visual en estas tareas, debido a que localmente tienen más conflictos para interpretar la gráfica que cuando deben hacerlo globalmente, también detectamos que hay una confusión entre pendiente indeterminada y cero, problema que probablemente rebase el tratamiento figural.

El tratamiento figural dado a la gráfica, mostró que éste puede abrir caminos para su interpretación, aunque aún queda por ver si es un logro permanente en ella. Este tratamiento figural que puede incluir al triángulo geométrico, a la estimación del valor de la pendiente o a las familias de tangentes sobres las gráficas, son una opción por la cual vale la pena apostar en la educación del nivel medio superior.

Las intervenciones fueron necesarias debido al carácter de este grupo, pero mostraron también ser una oportunidad para centrar la atención en los aspectos relevantes de la gráfica.

Conclusiones

El tratamiento figural y en particular el uso del llamado triángulo geométrico fue incorporándose poco a poco a las observaciones de los estudiantes, sin embargo, sólo la mitad de la población hizo un uso explícito de él aunque no se le usó consistentemente, el resto se percató solo de que les daba información importante.

El recurso de la exhibición de las familias de tangentes a las curvas con ayuda de la computadora, esclareció la idea de punto de inflexión así como el de concavidad. Consideramos que este es un recurso que debería ser incorporado a la enseñanza de las propiedades de las gráficas.

Las intervenciones en el transcurso de la investigación nos dieron la oportunidad de centrar la atención en los aspectos relevantes, que para la muestra con la que trabajamos fue importante, además de ser una forma de instrucción y de reflexión con los estudiantes que surtió un efecto benéfico en la investigación.

De manera general consideramos que el tratamiento figural dado a la gráfica mostró que puede abrir caminos para su interpretación, la que queda obscurecida con el uso de los criterios de las derivadas. Este tipo de tratamientos figurales, ya sean: el triángulo geométrico, la estimación del valor de la pendiente o las familias de tangentes sobre las gráficas, son una opción por la cual vale la pena apostar en la educación del nivel medio superior.

Referencias bibliográficas

Berger, M. (2004). The functional use of a mathematical sign. *Educational Studies in Mathematics, 55*, 81–102.

Canul Pech, E. (2009). *De la concepción euclidiana a la concepción leibniziana. El caso de la recta tangente en el marco de la convención matemática.* Universidad Autónoma de Guerrero.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24*(2), 139-162.

Hitt, F. (1998) Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum. *Educación Matemática, 10*(2), 23-45.

Roth, W. M. (2003). Competent workplace mathematics: how signs become transparent in use. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 8*, 161–189.

Tall, D. O. (1986). Constructing the Concept Image of a Tangent, *Proceedings of the Eleventh International Conference of P.M.E.*, Montreal, *3*, 69–75.

Tsamir, P. y Ovodenko, R. (2004). Prospective teachers' images and definitions: the case of inflection points, *Proceedings of the 28th International Conference of P.M.E., 4*, 337–344.