DIFICULTADES ASOCIADAS AL CONCEPTO CONJUNTO GENERADOR EN NIVEL SUPERIOR

Esteban Mendoza-Sandoval, Flor M. Rodríguez-Vásquez
Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
emendoza@uagro.mx, flor.rodriguez@uagro.mx

Palabras clave: didáctica del álgebra, conjunto generador, dificultades
Key words: didactic of algebra, generator set, difficulties

RESUMEN

El estudio del álgebra lineal es sin duda una de las asignaturas más difíciles para estudiantes de nivel superior en el área de matemáticas. Dada la naturaleza de sus conceptos, los estudiantes tienen diversas dificultades para comprenderlos, en este sentido presentamos algunas dificultades asociadas al concepto conjunto generador, concepto necesario para la construcción de la descomposición genética del concepto matriz cambio de base. Recurrimos a una entrevista no estructurada para identificar tales dificultades bajo la línea de investigación pensamiento matemático avanzado. Los resultados deparan robustecer conceptos fundamentales antecedentes al de conjunto generador.

ABSTRACT

Linear algebra is for some students one of the most difficult subjects in superior level studies of mathematics, for its nature, most students have several difficulties in its understanding. In this paper we show some difficulties associated to generator set concept, which is necessary for the construction of a genetic decomposition of the change of basis matrix concept. We use an unstructured interview for identifying such difficulties under the research line of the mathematical advanced thinking. The results yields strengthen the background of essential concepts to generator set.

Introducción

El estudio del álgebra lineal, es sin duda una de las asignaturas más difíciles para estudiantes de nivel superior en el área de matemáticas, dicha unidad de aprendizaje se propone en diferentes planes de estudios por ejemplo en licenciatura en Matemáticas, al menos un curso en este nivel educativo, probablemente debido a su importancia y las aplicaciones en las que trasciende. Los resultados teóricos en diferentes disciplinas hacen de esta asignatura y de sus conceptos un interesante objeto de estudio, esto debido a su naturaleza abstracta y compleja, por consecuente el aprendizaje de los estudiantes en los temas que se tratan en esta asignatura resulta endeble. Investigaciones en álgebra lineal atiende a diferentes cuestiones referentes a la naturaleza epistemológica del álgebra lineal, diseños didácticos y uso de diversos tipos de lenguaje fuentes de obstáculos en el aprendizaje, por ejemplo Dorier, Robert, Robinet y Rogalski (1997) realizaron diversos trabajos y diagnósticos entre los años 1987 a 1995 sobre la enseñanza del álgebra lineal en estudiantes franceses de edades entre 18 a 20 años aproximadamente, los cuales arrojaron diversas dificultades que presentan los estudiantes del álgebra lineal como por ejemplo, uso inadecuado del lenguaje formal. Además revelan un enorme obstáculo que aparece en las generaciones sucesivas llamado el obstáculo del formalismo, que quizá su génesis sea despertada por malas interpretaciones del álgebra lineal o la falta de requisitos previos elementales como teoría de conjuntos y lógica matemática.

Se han realizado diversas investigaciones sobre conceptos y temas relacionados con el álgebra lineal, tal como lo muestra el artículo de Oktaç y Trigueros (2010), el cual reporta un proyecto que realizan en México con el objetivo demostrar cómo los estudiantes aprenden álgebra lineal, en consecuencia se proponen realizar un análisis teórico de los diferentes conceptos involucrados utilizando la teoría APOE y validar dicho análisis; en particular lo hacen para conceptos como espacio vectorial, transformación lineal, base y sistemas de ecuaciones lineales. En sus resultados muestran la necesidad no sólo de identificar las dificultades de los estudiantes sino que sugieren que la descomposición genética constituye una herramienta eficaz para que emerjan las construcciones mentales involucradas en la construcción de los distintos conceptos del álgebra lineal y con ello diseñar actividades didácticas que permitan a los alumnos una construcción más sólida del álgebra lineal.

Así pues, dada la complejidad del álgebra lineal respecto a su aprendizaje, se considera necesario contribuir al desarrollo de la línea de investigación pensamiento matemático avanzado mediante un análisis teórico respecto a la matriz de cambio de base como objetivo principal, para lo cual en una primera etapa de la investigación, se requirió indagar sobre cuáles eran los conceptos subyacentes a éste y asimismo conocer sus características esenciales y las dificultades asociadas a cada uno de estos. Un concepto fundamental relacionado con el de matriz cambio de base es el concepto conjunto generador, puesto que es necesario que un estudiante reconozca cuando un conjunto de vectores dados genera a todo el espacio vectorial o que sea capaz de visualizar qué subespacio genera dicho conjunto, interesándonos los espacios vectoriales de dimensión finita, esto como parte de sus conocimientos previos para decidir cuándo un conjunto de vectores forma una base de un espacio vectorial dado. En este sentido, el principal objetivo de este artículo es mostrar algunas dificultades asociadas al concepto conjunto generador.

■ La matemática de la investigación

Analizando el libro de texto de álgebra lineal de los autores Hoffman y Kunze ellos presentan en el apartado de subespacios, un teorema para decidir cuándo un conjunto dado S de un espacio vectorial V puede o no ser un subespacio vectorial de V, posterior a ello presentan un teorema el cual garantiza que la intersección de cualquier colección de subespacios vectoriales de un espacio vectorial es de nuevo un subespacio vectorial, de lo anterior deducen que si S es cualquier colección de vectores del espacio vectorial V, existe un subespacio vectorial mínimo el cual contiene a S; es decir, dicho subespacio contiene a S y además está contenido en cada uno de los subespacios de V que contienen a S, esto les motiva a su siguiente definición:

> **Definición**. Sea S un conjunto de vectores de un espacio vectorial V. El *subespacio generado por* S se define como la intersección W de todos los subespacios de V que contienen a S. Cuando S es un conjunto finito de vectores, $S = \{\alpha_1,\ \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ se dice simplemente que W es el subespacio generado por los vectores $\alpha_1,\ \alpha_2, \dots, \alpha_n$.
>
> Hoffman y Kunze (1973, p. 36)

Esa elegancia o formalismo excesivo en algunas definiciones pueden ser causa de un obstáculo por parte de los estudiantes en su aprendizaje puesto que definir el subespacio generado por $\alpha_1,\ \alpha_2, \dots, \alpha_n$ en el caso finito de vectores; como el mínimo subespacio que contiene a ese conjunto no dice mucho sobre cómo son los elementos del conjunto generado, para efectos de esta investigación entenderemos por *conjunto generador* (subesapcio generado) en el siguiente sentido;

> **Definición.** Sea V un espacio vectorial sobre un campo F y sea S un conjunto finito de vectores, $S = \{\alpha_1,\ \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ entonces el conjunto generador denotado de la siguiente manera $< S >$ se define como:

$$< S >= \{x_1\alpha_1 +\ x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n | x_i\ \in F\ \wedge\ \ \alpha_i\ \in S \text{ con } i = 1, \dots, n\}.$$

En otras palabras el conjunto generador $< S >$ tiene como elementos todas las combinaciones lineales que se pueden hacer con los elementos de S y escalares del campo F. Notemos que dicha definición se sustenta en la definición de subespacio generado enunciada anteriormente pero tratamos de dar de manera explícita como es que son los elementos del conjunto generador.

■ Referentes teóricos y metodológicos

El trabajo tiene lugar en la línea de investigación pensamiento matemático avanzado, como menciona Tall (1991, citado en Rodríguez 2010) en 1985 se crea un grupo de trabajo con el objetivo principal de estudiar la naturaleza del Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) y en particular el proceso de enseñanza y el proceso de aprendizaje en temas relacionados al cálculo infinitesimal, en el congreso del grupo Psychology of Mathematics Education. El interés por estos temas se distingue por la tendencia en Didáctica de la Matemática, al considerar, la problemática del aprendizaje de las Matemáticas en términos de procesos cognitivos y no como adquisición de competencias y habilidades.

Algunos de los modelos que se utilizan en la investigación para describir los procesos cognitivos que están implicados en el aprendizaje de conceptos abstractos, menciona Rodríguez (2010) que son distintas formas teóricas de describir la naturaleza del conocimiento de los estudiantes y los procesos de construcción del mismo. Por ejemplo, una de tales formas considera la *definición de un concepto* matemático como resultado de una definición verbal del concepto, fruto de su evolución histórica. En este sentido, se pueden distinguir entre las definiciones *formales* y *definiciones personales*, las primeras entendidas como convenciones y aceptadas por la comunidad científica de los matemáticos en un momento dado, usualmente encontradas en libros y las segundas utilizadas por personas para interpretar, construir o reconstruir una definición formal.

Asimismo el PMA considera esencialmente el papel de las definiciones de los conceptos, puesto que podrían crear un problema serio respecto al aprendizaje de las matemáticas y presentarse entonces conflictos cognitivos si éstas se representan en la estructura de las matemáticas, tal como la conciben los matemáticos profesionales (Vinner, 1991).

Desde la perspectiva del PMA, se han identificado investigaciones con el objetivo de profundizar en el estudio de diferentes aspectos como son:

- Los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje de las matemáticas y que van adquiriendo una progresiva importancia en los cursos superiores: abstraer, analizar, categorizar, conjeturar, representar, conceptualizar, inducir y sintetizar, procesos todos ellos que tiene una componente psicológica.
- El estudio histórico y epistemológico de los contenidos matemáticos con especial referencia a los conceptos fundamentales del Análisis, lo cual implica estudiar la transposición didáctica del saber matemático al saber escolar.
- El papel que juegan los ordenadores y las calculadoras gráficas y simbólicas en la enseñanza y aprendizaje de algunos conceptos importantes del Análisis Matemático.

Nuestro trabajo lo situamos en el primero de los aspectos puesto que nos interesan los procesos cognitivos relacionados a un concepto específico.

Ahora bien, para investigar sobre las dificultades que tienen los estudiantes respecto del concepto Conjunto Generador, se diseñó una actividad la cual consistió en once preguntas y se entrevistó a siete estudiantes de nivel superior, de una licenciatura en Matemática Educativa (México), dichos estudiantes cursan su licenciatura en el modelo educativo; semiescolarizado, los cuales cursaron la asignatura de álgebra lineal y esta entrevista fue parte de una actividad final de dicho curso.

■ Diseño de la actividad

La entrevista no estructurada la entendemos en el sentido de Cohen y Manion (2002) como una situación abierta, teniendo grados de libertad para su elaboración y flexibilidad pero que es planificada cuidadosamente.

Así está actividad constó de tres cuestiones relacionadas con la definición del concepto de combinación lineal; dos relacionadas con la escritura de vectores en combinación lineal de otros vectores dados, la variante aquí es que se consideró la combinación lineal para el espacio de polinomios de grado no mayor a dos; dos actividades que cuestionaron sobre la relación de subespacio vectorial y combinación lineal;

una actividad directamente relacionada con conjuntos linealmente dependientes y conjuntos no generadores, pues por lo general en los libros de texto no se menciona cómo justificar si un conjunto genera a un espacio; de las últimas tres actividades, en la nueve y diez se cuestionó sobre las características de un conjunto de vectores para que pueda generar un espacio vectorial dado y la relación entre combinación lineal y conjunto generador y en la pregunta doce se pidió decidir si un conjunto de vectores de un espacio dado lo generan o no, considerando el espacio de matrices cuadradas de dos por dos$Mat_{2x2}(\mathbb{R})$ y el espacio de polinomios de menor o igual grado a dos $\mathbb{R}[x]_2$, ambos sobre el campo $\mathbb{R}$.

De forma sistémica todas las actividades tuvieron como objetivo formar el concepto conjunto generador y en este sentido se pudo vislumbrar sobre las dificultades que presentan los estudiantes respecto de éste (véase Figura 1).

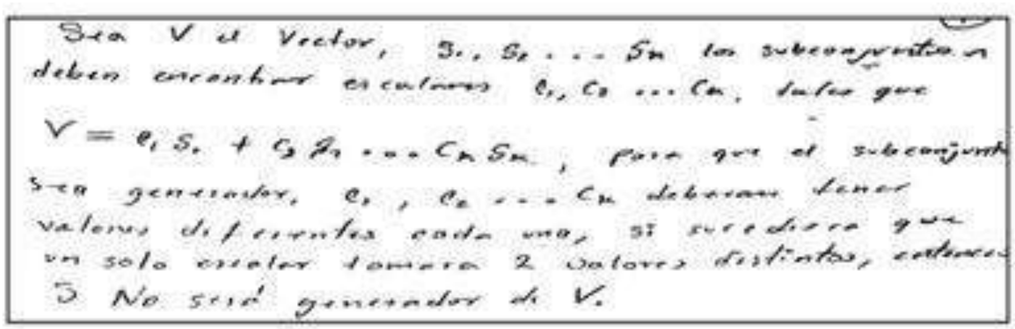
Figura 1. La actividad aplicada.

Resultados

Como mencionamos en el apartado anterior, centramos nuestra atención en las preguntas que tienen que ver con las características que debe tener un subconjunto de un espacio vectorial dado para generarlo y la relación entre combinación lineal y conjunto generador. Sobre las dificultades, referente a la cuestión *Dado un espacio vectorial un subconjunto de él, ¿qué características debe tener dicho subconjunto para generar al espacio?*, sólo seis estudiantes respondieron; sin embargo, cinco de ellos no contestaron correctamente.

A pesar de que la pregunta consideraba un espacio vectorial cualquiera, los estudiantes se limitaron a contestar para espacios de dimensión finita, con ejemplos, además encontramos algunas ideas las cuales se hacen confusas y pierden sentido, por ejemplo el estudiante tiene la idea de que una característica que debe tener el conjunto para generar al espacio vectorial es que "cualquier vector dado del espacio vectorial $v \in V$ y dados los $S_1, S_2, \dots, S_k$, encontrar escalares $C_1, C_2, \dots, C_k$ tales que $v = C_1S_1 + C_2S_2 + \cdots + C_kS_k$, el cual puntualiza que si se cumple eso, los $C_1, C_2, \dots, C_k$ deben tomar distintos valores para garantizar que el conjunto $S_1, S_2, \dots, S_k$ genere al espacio V", lo mostrado aquí enfatiza la no compresión que se tiene respecto a una combinación lineal puesto que asocian propiedades a los escalares para que la combinación lineal sea posible; es decir, para escribir al vector v como combinación lineal de los vectores dados $S_1, S_2, \dots, S_k$. Ver Figura 2.

Figura 2. Idea errónea del conjunto generador.


Sea V el Vector, $S_1, S_2 \dots S_n$ los subconjuntos deben encontrar escalares $C_1, C_2 \dots C_n$, tales que
$V = C_1S_1 + C_2S_2 \dots C_nS_n$, para que el subconjunto sea generador, $C_1, C_2 \dots C_n$ deberan tener valores diferentes cada uno, si sucediera que un solo escalar tomara 2 valores distintos, entonces S No será generador de V.

Para la pregunta diez *Explica la relación que existe entre los conceptos combinación lineal y conjunto generador* se observó una interpretación errónea de lo que es una combinación lineal lo cual lleva a recalcar al estudiante que la existencia de la combinación lineal está ligada a que los escalares sean distintos (véase Figura 3), para poder decir que hay combinación lineal de los vectores dados.

Figura 3. Interpretación errónea de combinación lineal.

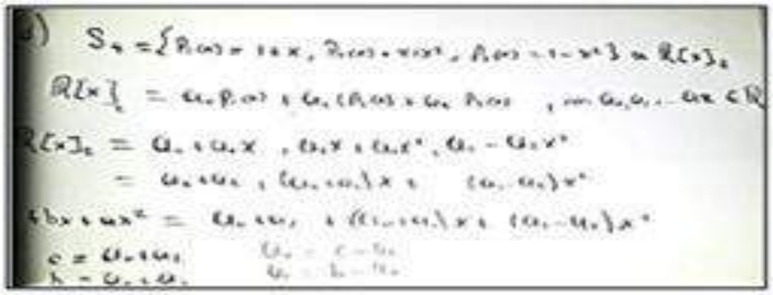
Otra dificultad que se observó en la resolución de la pregunta diez, pues el estudiante confunde el concepto de conjunto generador por el de subespacio (véase Figura 4).

Figura 4. Confusión entre subespacio y conjunto generador.

Ahora bien, en general se mostró que los alumnos tienen dificultad para reconocer las características que debe tener un subconjunto de un espacio vectorial dado para generarlo y la relación entre combinación lineal y conjunto generador, sin embargo, la mayoría de los estudiantes sí verificaron cuándo un conjunto de vectores puede generar a un espacio dado si el espacio es $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$.

Para el caso de los espacios vectoriales $\mathbb{R}[x]_2$ y $Mat_{2x2}(\mathbb{R})$ de la cuestión once la mayoría de los estudiantes no responde a esta pregunta, en caso contrario presentan dificultad de no distinguir que forma en general tiene un vector dado con dichos espacios, o muestran deficiencias en el uso del lenguaje formal, por ejemplo para la cuestión once del inciso d) el estudiante tiene la idea de que hay que escribir un vector en general como combinación lineal de los vectores dados para garantizar que esos vectores generen dicho espacio, pero hace mal uso de su escritura simbólica (véase la Figura 5).

Figura 5. Dificultad en el lenguaje formal.



Conclusiones

La investigación muestra una interpretación errónea respecto al concepto de combinación lineal por parte de la mayoría de los estudiantes la cual no les permite manipular bien este concepto y por consecuencia muestran dificultad para relacionarlo con el conjunto generador, es decir, los estudiantes no muestran una comprensión de que los elementos de un conjunto generador son combinaciones lineales de los elementos del conjunto dado y tienen serias dificultades para describir qué subespacio genera dicho conjunto, así que es necesario robustecer conceptos fundamentales antecedentes al de conjunto generador. Referente a las demás cuestiones las dificultades más comunes están en torno a la mala compresión de los problemas plateados, así como al mal uso del lenguaje simbólico y la identificación de los datos.

La necesidad de identificar algunas dificultades en los estudiantes sobre el concepto conjunto generadores es radical, puesto que dicho concepto está relacionado con el concepto de base ordenada la cual consideramos un requisito previo junto con las coordenadas de un vector, para poder describir una vía cognitiva para la construcción del *Concepto Matriz de Cambio de Base*, tomando como sustento la teoría APOE (Dubinsky, 1991) en lo siguiente.

Referencias bibliográficas

Cohen, L. y Manion L. (2002). *Métodos de investigación educativa*. Madrid, España: Editorial la Muralla.

Dorier J. L., Robert, A., Robinet, R., y Rogalski, M. (1997). L'algèbre linéaire: l'obstacle du formalisme à travers diverses recherches de 1987 à 1995. En J.-L. Dorier (Ed.). *L'Enseignement de l'Algèbre Linéaire en Question* (pp.105-147). Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage éditions.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En Tall, D. (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht, the Netherland: Kluwer Academic Publishers,

Hoffman, K. y Kunze, R. (1973). *Álgebra lineal*. México: Prentice-Hall.

Oktaç A. y Trigueros M. (2010). ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(4-II), 373-385.

Rodríguez, F. (2010). *Desarrollo conceptual de los métodos iterativos en la resolución de ecuaciones no lineales: un enfoque didáctico*. Tesis de doctorado no publicada. Universidad de Salamanca. Recuperado de http://gredos.usal.es/jspui/handle/10366/ 76557?mode=full&submit_simple =Mostrar+el+registro+Dublin+Core+completo+del+%C3%ADtem+

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.