

APOYANDO EL APRENDIZAJE DE LAS FUNCIONES VECTORIALES DESDE MÚLTIPLES REPRESENTACIONES

Martha Leticia García Rodríguez, Alma Alicia Benítez Pérez, Alicia López Betancourt

ESIME-Zacatenco y CECyT 11 del Instituto Politécnico Nacional. (México)

Universidad Juárez del Estado de Durango. (México)

martha.garcia@gmail.com, abenitez@ipn.mx, abetalopez@gmail.com

Palabras clave: funciones vectoriales, múltiples representaciones externas

Keywords: vectorial functions, multiple external representations

RESUMEN

La presente investigación analiza el razonamiento que tienen los estudiantes cuando trabajan en actividades que incorporan simulaciones en flash en comparación con el de estudiantes que trabajan en una clase tradicional de matemáticas, sobre el tema de funciones vectoriales de variable real. Se asume que cuando los estudiantes trabajan con una representación adecuada su rendimiento mejora, se utiliza una taxonomía de las funciones de las MERs en la que se incluyen tres funciones claves: roles complementarios, restricción a una sola representación y, construcción de aprendizaje profundo. El trabajo de los estudiantes se llevó a cabo en tres etapas: i) revisión de los conocimientos previos de los estudiantes; ii) clases tradicionales y con la simulación y iii) ejercicios extra-clase. Los hallazgos son evidencia de que el trabajo con la simulación favoreció la comprensión de los atributos que se debían incluir en la gráfica solicitada y que están relacionados con el dominio representado.

ABSTRACT

This research analyzes the students' reasoning when working on activities that incorporate flash simulations compared to students' work in a traditional math class, on the subject of vector functions of a real variable. It is assumed that when students work with a representation adequate improvement performance. We use a taxonomy of functions of MERs in which three key features include: complementary roles, restriction to a single representation and construction of deep learning. The student work was carried out in three stages: i) review of previous knowledge; ii) traditional classroom and simulation and iii) extra-class exercises. The findings are evidence that working with the simulation favored the understanding of the attributes to be included in the request graph and are related to the domain represented.

■ Introducción

En las reformas curriculares con enfoque por competencias llevadas a cabo en diferentes países, se identifica como prioritario para la enseñanza de las matemáticas: ajustar los objetivos de la educación matemática a las necesidades del ciudadano y de la sociedad; promover el papel social de las matemáticas en un mundo en que la tecnología desempeña un papel dominante; considerar la resolución de problemas como centro de las matemáticas escolares y, acompañar las propuestas de innovación y reformas curriculares con materiales desarrollados de acuerdo con propuestas didácticas y libros de texto. En estas reformas, las competencias genéricas y disciplinares emergen como elementos integradores de conocimientos en los individuos y su evaluación se realiza en dos dominios, uno de contenido y otro cognitivo. El dominio de contenido define los temas específicos de matemáticas, e incluye desde la dimensión numérica hasta la variacional. La dimensión cognitiva se refiere a los comportamientos esperados de los estudiantes al trabajar en un contenido específico e incluye las dimensiones; reconocimiento de objetos y elementos, solución de problemas simples y solución de problemas complejos (Proenza y Leyva, 2006). La incorporación del dominio cognitivo además del de contenido ha dado origen a diversas investigaciones como la que se reporta en este documento y que fue desarrollada en el IPN. El objetivo general de la investigación fue analizar el razonamiento que tienen los estudiantes cuando trabajan en actividades que incorporan simulaciones en flash en comparación con el de estudiantes que trabajan en una clase tradicional de matemáticas.

■ Elementos teóricos

Proenza y Leyva (2006) señalan que el desempeño cognitivo se refiere al cumplimiento de lo que un estudiante debe hacer en un área del saber, de acuerdo con su edad y el grado escolar en el que se encuentra. En el estudio de la matemática, señalan que una habilidad esencial es plantear, formular, resolver e interpretar problemas dentro de una variedad de contextos y situaciones; contextos que van desde los matemáticos, hasta los que no presentan ninguna estructura matemática aparente.

De la actividad que se propone a los estudiantes, depende la elección que ellos hacen de los procedimientos y métodos matemáticos así como de las representaciones que utilizan para trabajar en la actividad.

Es por lo anterior que una forma de conocer sobre el razonamiento que realizan los estudiantes al trabajar en una actividad, es analizar el trabajo con las representaciones que utilizan. Las investigaciones en el campo de la educación matemática otorgan particular importancia al estudio de las representaciones. Se distingue entre representaciones mentales o internas y representaciones externas. También se destaca la importancia de generar representaciones mentales adecuadas, para la adquisición de un concepto matemático.

Las investigaciones sobre el aprendizaje con representaciones han mostrado que cuando los estudiantes trabajan con una representación adecuada su rendimiento mejora. De acuerdo con Ainsworth (2006), recientemente las investigaciones se han orientado hacia el aprendizaje con más de una representación. Más aún, el énfasis en las investigaciones relacionadas con el aprendizaje a través de múltiples representaciones externas (MERs) ha cambiado, antes se verificaba la efectividad de las MERs para el aprendizaje, ahora se identifican las circunstancias que influyen en esta efectividad, una de ellas es la

información que es proporcionada en una representación y la forma en que esta es presentada a los estudiantes.

Por otra parte, el incremento en los ambientes de aprendizaje multimedia ha orientado las investigaciones hacia la inclusión de diagramas, ecuaciones, tablas, textos, gráficas, animaciones, sonido, video y simulaciones dinámicas como elementos de las MERs.

Ainsworth (2009) estableció una taxonomía de las funciones de las MERs, en la que se incluyen tres funciones claves: roles complementarios, restricción a una sola representación y, construcción de aprendizaje profundo.

■ Métodos y procedimientos

La metodología utilizada en la presente investigación es de tipo cualitativo, consistió en analizar las actividades realizadas por dos grupos de estudiantes, cuyas edades oscilan entre 18 y 19 años, inscritos en un curso de Cálculo Vectorial impartido por el mismo profesor en una carrera de ingeniería.

El primer grupo, que contó con 17 estudiantes, trabajó en la forma tradicional; el segundo grupo, que tuvo 20 estudiantes, además de asistir a las clases tradicionales, realizó actividades con una simulación diseñada en flash.

El trabajo de los estudiantes se llevó a cabo en tres etapas: i) revisión de los conocimientos previos de los estudiantes; ii) clases tradicionales y con la simulación y iii) ejercicios extra-clase, (figura 1).

Figura 1. Etapas de trabajo de los estudiantes



Los instrumentos utilizados para la recolección de datos fueron: reportes escritos, grabaciones en audio y reportes elaborados por el profesor-investigador.

El contenido matemático: Las actividades propuestas a los estudiantes incluyeron los temas de ecuaciones paramétricas de una curva, dominio y gráfica de una función vectorial. La simulación en flash fue diseñada para apoyar el concepto de función vectorial de variable real, Vinner and Dreyfus (1989) identifican en los estudiantes dos formas del concepto: la relación entrada salida y la covariación.

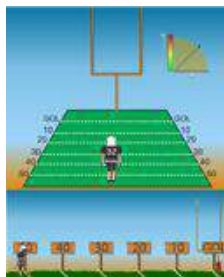
Drijvers, Doorman y Boon (2007) señalan que la reflexión de los estudiantes se debe dirigir a conocer ¿cómo puede esto observarse en una gráfica, en una tabla de valores o explicarlo con una fórmula?

Primera etapa revisión de los conocimientos previos de los estudiantes; los estudiantes habían cursado las asignaturas de cálculo diferencial e integral de una variable real y fundamentos de álgebra lineal. Conocían la forma de determinar las ecuaciones de la recta y el plano en dos y tres dimensiones.

Segunda etapa de clases tradicionales y trabajo con la simulación en flash; se revisaron con los estudiantes los conceptos de función vectorial de variable real, dominio, curva, trayectoria, y parametrización de una curva.

Uno de los grupos de estudiantes además de lo anterior, trabajaron con una simulación diseñada con flash. El concepto a estudiar con la simulación fue el de funciones vectoriales, se eligió un problema clásico sobre el tema de funciones vectoriales y se pensó en transformar ese problema en un contenido interactivo con el que un usuario (estudiante) pudiera trabajar. El problema seleccionado fue el tiro parabólico, se presenta al usuario un jugador de fútbol americano que patea una pelota y esta crea una trayectoria parabólica, que es la trayectoria a estudiar, se analiza la forma de representar la trayectoria mediante una función vectorial, la distancia recorrida por el balón, y la altura máxima alcanzada, entre otros elementos (figura 2).

Figura 2. Escenario para el usuario y objetos de la interfaz



Tercera etapa de ejercicios extra-clase; se solicitó a los estudiantes que trabajaran ejercicios fuera de clase, que posteriormente fueron entregados al profesor, para realizar una comparación entre los trabajos de los dos grupos de estudiantes (figura 3).

Figura 3. Ejercicios propuestos a los estudiantes

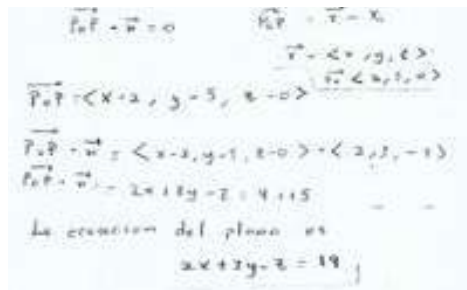
1. Para cada una de las funciones vectoriales siguientes:
 - a) $\vec{r}(t) = (t + 1)\vec{i} + (t^2 - 1)\vec{j}$
 - b) $\vec{r}(t) = (t^2 + 1)\vec{i} + (2t - 1)\vec{j}$
 - c) $\vec{r}(t) = \text{sent } \vec{i} + 3\vec{j} + \text{cost } \vec{k}$
- Determina:
- Las ecuaciones paramétricas de la curva ℓ que representa a cada función vectorial y el dominio de sus funciones componentes.
 - El dominio de cada función vectorial.
 - Esboza la gráfica de cada función vectorial.

■ Análisis de datos

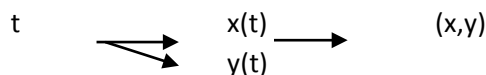
Para el análisis de los datos se revisó el trabajo de cada uno de los estudiantes de ambos grupos, se eligió el trabajo de un estudiante de cada grupo que se consideró representa a todo el grupo.

Primera etapa revisión de los conocimientos previos de los estudiantes; en esta etapa se identificó que los estudiantes que trabajaron con la simulación, podían calcular en forma algorítmica la ecuación de un plano, pero al parecer no habían construido el significado de perpendicularidad del producto punto entre los vectores $\vec{P_0P}$ y \vec{n} , ya que el resultado del producto punto igual a cero no parecía importante, como se observa en la figura 4. Características similares se encontraron en el trabajo de los estudiantes de la clase tradicional.

Figura 4. Trabajo de un estudiante de la clase que trabajó con la simulación

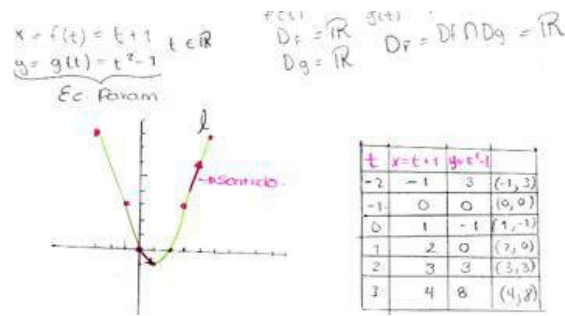


Segunda etapa de clases tradicionales; en el trabajo inicial de los estudiantes en las actividades, se identifica un acercamiento al concepto de función basado en la regla de correspondencia $y=f(x)$ para determinar valores de salida $x(t)$, $y(t)$ de valores de entrada únicos para la variable t , enfoque señalado por Vinner and Dreyfus (1989). El esquema utilizado por los estudiantes para graficar fue:



En términos de Ainsworth (2009) los estudiantes de la clase tradicional: a) extienden el conocimiento anterior a un nuevo conocimiento pero sin reorganizar la naturaleza de ese conocimiento.

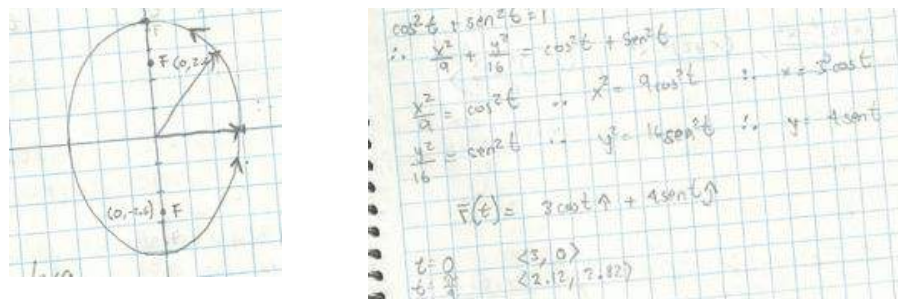
Figura 5. Trabajo inicial del estudiante de la clase tradicional



- utilizan roles complementarios, seleccionan una representación que les resultó familiar (representación tabular) para manejar la información, y construir a partir de ella la gráfica.
- utilizan tres representaciones y distribuyen la información en cada una de ellas, en la representación algebraica identifica las funciones componentes, en la representación tabular identifica las coordenadas de puntos para trazar la gráfica y en la representación gráfica el sentido de recorrido.

Tercera etapa de ejercicios extra-clase; después del trabajo con todo el grupo, los estudiantes d) realizan un proceso de abstracción en el que construyen nuevos procedimientos e identifican la estructura subyacente del dominio representado.

Figura 6. Trabajo posterior de los estudiantes

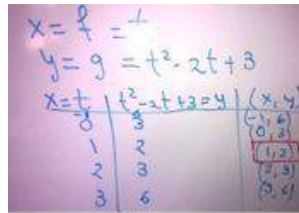


Segunda etapa de clases tradicionales y trabajo con la simulación en flash; en el trabajo inicial de los estudiantes en las actividades, también se identifica un acercamiento al concepto de función basado en la regla de correspondencia $y=f(x)$ para determinar valores de salida $x(t)$, $y(t)$ de valores de entrada únicos para la variable t .

Con esto nuevamente se identifica que los estudiantes: a) extienden el conocimiento anterior a un nuevo conocimiento pero sin reorganizar la naturaleza de este; b) utilizan roles complementarios, seleccionan

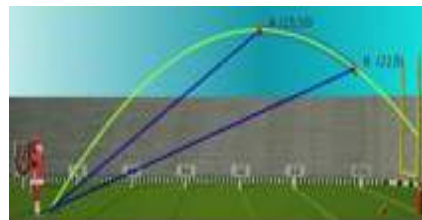
Figura 7. Trabajo inicial del estudiante de la clase con flash

una representación que les resultó familiar (representación tabular) para manejar la información, y construir la gráfica (figura 7).



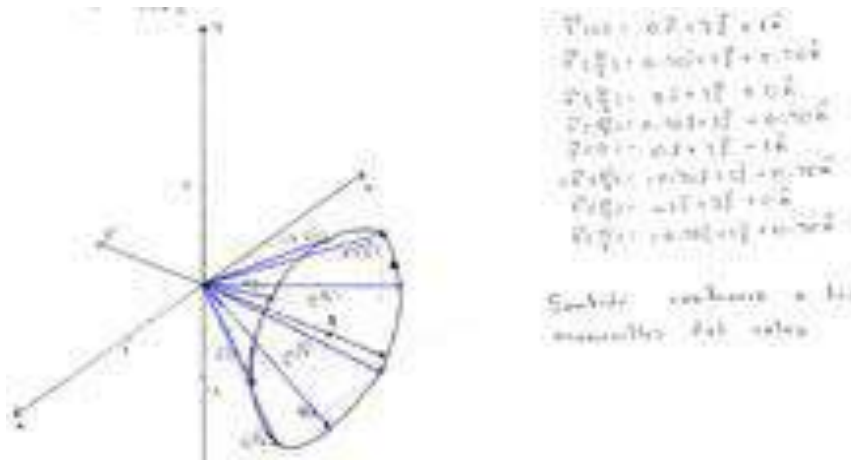
c) utilizan cuatro representaciones, algebraica, tabular, gráfica y simulación dinámica y distribuyen información en cada una de ellas; en la representación algebraica identifica las funciones componentes, en la representación tabular identifica las coordenadas de puntos para trazar la gráfica y en la simulación dinámica integran la información de la representación algebraica con el contexto que se les presenta (figura 8).

Figura 8. Trabajo de los estudiantes con la simulación



Tercera etapa de ejercicios extra-clase después de la simulación con flash; d) realizan un proceso de abstracción en el que construyen nuevos procedimientos con un nivel superior de organización e identifican la estructura subyacente del dominio representado.

Figura 9. Trabajo de los estudiantes después de la simulación



Tareas cognitivas señaladas por Ainsworth (2006) identificadas en el trabajo de los estudiantes.

Estudiantes de la clase tradicional: *seleccionaron una representación* que les resultó familiar para manejar la información, pero *no la relacionaron* con el dominio representado, es decir, utilizan una representación sin incluir los vectores de posición (figura 5).

Estudiantes de la clase que con la simulación en flash: *ensayaron* en flash, la trayectoria seguida por el balón de americano para diferentes valores de la rapidez y del ángulo de elevación como se muestra en la figura 8, lo que contribuyó para que *identificaran la relación* entre las representaciones algebraica y gráfica con el dominio representado (figura 9).

La diferencia identificada en términos de los elementos teóricos establecido por Ainsworth (2009), es que en los estudiantes que trabajaron con la simulación se encuentran en un nivel superior de organización que se refleja en los reportes escritos entregados después de trabajar con la simulación.

■ Conclusiones

En los datos recabados se encontró evidencia para señalar que el trabajo con la simulación favoreció la comprensión de los atributos que se debían incluir en la gráfica solicitada.

También es posible afirmar que ayudó para que los estudiantes relacionaran la representación algebraica de los vectores de posición con la gráfica obtenida con estos vectores, como se observa en la gráfica del estudiante B. Lo anterior refuerza lo señalado por Spiro y Jehng (1990) quienes afirman que el aprendizaje de un concepto debe apoyarse con el cambio entre múltiples perspectivas del mismo.

Es importante afirmar que no basta con que los estudiantes relacionen representaciones de un concepto es necesario que integren la información de cada representación.

■ Referencias bibliográficas

- Ainsworth, S. (1999). The functions of multiple representations. *Computers and Education*, 33 (2-3), 131-152
- Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction* 16, 183-198.
- Drijvers, P., Doorman, M. & Boon, P. (2007). Tool use in a technology-rich learning arrangement for the concept of function. In D. Pitta – Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Larnaca, Cyprus: Department of Education - University of Cyprus.
- Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function, *Journal for Research in Mathematics Education* 20, 356-366.
- Proenza, Y. & Leyva, L. (2006). Reflexiones sobre la calidad del aprendizaje y de las competencias matemáticas, *Revista Iberoamericana de Educación*, (40)6, 1-11.
- Spiro, R. J., & Jehng, J.-C. (1990). Cognitive flexibility and hypertext: Theory and technology for nonlinear and multi-dimensional traversal of complex subject matter. In D. Nix, & R. J. Spiro (Eds.), *Cognition, education and multi-media: Exploring ideas in high technology*. Hillsdale, NJ: LEA.