LA ENSEÑANZA INICIAL DE LA DEMOSTRACIÓN EN GEOMETRÍA DESDE UNA PERSPECTIVA COGNITIVA: UN MANUAL PARA DOCENTES EN EJERCICIO

DIANA MARCELA LOURIDO GUERRERO - 0532756

CARLOS ALBERTO MELÁN JARAMILLO - 0530645

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA
SANTIAGO DE CALI
2012

LA ENSEÑANZA INICIAL DE LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA EN LA EDUCACIÓN BÁSICA DESDE UNA PERSPECTIVA COGNITIVA

DIANA MARCELA LOURIDO GUERRERO -0532756
CARLOS ALBERTO MELÁN JARAMILLO - 0530645

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar el título de Licenciado en Educación Básica con énfasis en Matemáticas.
Licenciado en Matemáticas y Física.

ASESOR
JORGE ENRIQUE GALEANO CANO

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA
SANTIAGO DE CALI
2012

RESUMEN

Este trabajo de grado pretende identificar y destacar en la investigación desarrollada por Pilar Ponce de León (2007), elementos que permitan sentar las bases para crear un manual dirigido a docentes en ejercicio, que comunique las reflexiones y resultados de dicha investigación y al mismo tiempo brinde elementos curriculares y didácticos en torno a la enseñanza de la demostración. Así, el marco teórico se inscribe principalmente en los trabajos de Duval y su grupo (1993, 2004 a, 2004 b), además de Balacheff (1999, 2000), que para el interés de este proyecto son los más influyentes desde la perspectiva cognitiva. Por otro lado, las condiciones para construir el manual como un documento de divulgación son planteadas desde diversas consideraciones, entre ellas se incluye la teoría de recursos pedagógicos de Trouche y Guin, a partir del proyecto de investigación propuesto por Arce et al (2010).

Palabras clave: perspectiva semiótico-cognitiva, demostración, razonamiento deductivo, manual, figuras geométricas.

TABLA DE CONTENIDO

TABLA DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

El interés que motivó el desarrollo del presente trabajo de grado fue encontrar una vía, si no de solución, por lo menos sí alternativa para que los profesores de matemáticas del último ciclo de la educación básica tengan un apoyo, un soporte para la enseñanza de la demostración en geometría, conocimiento que arroja los resultados más desfavorables en las distintas evaluaciones nacionales e internacionales.

La posibilidad de enfrentar tal reto la dio que en el año 2007, Pilar Ponce de León defendió su tesis de maestría en educación, aportando resultados y elementos de reflexión para la comprensión de la problemática relativa a los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la demostración matemática. Ponce de León tomó como base teórica la perspectiva semiótico-cognitiva propuesta por Duval- Egret (1993), perspectiva en la cual se inscribe la línea de formación por la cual habíamos optado para nuestra profesionalización como licenciados.

Nos propusimos así retomar la propuesta de Ponce de León para el diseño de un manual dirigido a maestros en ejercicio de tal manera que mediante su uso, se fomente en el aula el aprendizaje de la demostración y, además, se resalte su importancia en la enseñanza de la geometría. Con este manual se espera dar a conocer las investigaciones recientes en el campo contribuyendo así a la actualización y cualificación de los docentes y, por esta vía, aportar al desarrollo de pensamiento matemático de los estudiantes en el aula.

La pertinencia de la realización de este proyecto consiste en la plena convicción de que los manuales en términos de alcance (cobertura, costos, libre distribución) resultan más asequibles de lo que podrían ser los otros medios de divulgación (congresos y/o seminarios, cursos de formación docente, etc.).

En el primer capítulo de este trabajo se presentan los elementos que fundamentan la propuesta, además del problema de indagación y los objetivos. En el segundo capítulo se encuentra el marco teórico; está enfocado desde la perspectiva semiótico-cognitiva de Duval-Egret (1993) destacando lo relacionado con los costos y las exigencias cognitivas para el aprendizaje de la demostración, en particular en lo atinente al papel que juegan las figuras en la comprensión del funcionamiento del razonamiento deductivo. Adicionalmente, se exponen las consideraciones para la elaboración de un manual. En el tercer y último capítulo se hace la contextualización de las actividades en términos de la propuesta de Duval-Egret para la enseñanza de la demostración; en este sentido, se presentan las condiciones que deben cumplir las actividades a través de situaciones que aluden a los teoremas de Pitágoras y de Tales y, finalmente, se presenta una propuesta de estructura del manual para efectos de una posible publicación.

I. PRESENTACIÓN DE LA PROPUESTA DE TRABAJO

En el marco de las investigaciones cognitivas sobre la enseñanza y aprendizaje de la demostración, particularmente desde una perspectiva semiótico-cognitiva, el presente proyecto pretende analizar en la tesis de investigación desarrollada por Ponce de León (2007), elementos que permitan sentar las bases para crear un manual dirigido a docentes en ejercicio, que comunique las reflexiones y resultados de dicha investigación y al mismo tiempo brinde elementos curriculares y didácticos en torno a la enseñanza de la demostración.

Al reconocer la complejidad inherente a la enseñanza de la demostración que ha conllevado a desplazarla por otras formas de razonamiento, como la argumentación, o incluso a excluirla por completo en los currículos, se hace evidente la necesidad de divulgar trabajos en torno a su enseñanza. Por otro lado, con el fin de aportar al reconocimiento de la importancia de la demostración en los currículos, se presentan algunos elementos teóricos que exhiben cómo acercarse a su comprensión, además de algunas propuestas para la enseñanza de la demostración.

I.1 Justificación del problema

Las investigaciones sobre la enseñanza de la demostración en geometría no son nuevas en el campo de la educación matemática; en los últimos años se pueden identificar muchas y variadas posturas sobre este objeto de conocimiento.

Entre las investigaciones realizadas destacamos las realizadas por Duval (1993, 2004a, 2004b) y su grupo, y las de Balacheff (1999, 2000), toda vez que para el interés de este proyecto son los más influyentes desde la perspectiva cognitiva. Cabe anotar que, como lo muestran Perry, Camargo, Samper y Rojas (2006), los anteriores no son los únicos investigadores sobre la actividad demostrativa en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas desde una perspectiva cognitiva. Las autoras mencionan los siguientes trabajos que caen en tal clasificación (p.37):

Aliberth y Thomas (1991), Bartolinni Bussi (2000), de Villiers (1993), Dreyfus (1999), Harel (1998), Harel y sowder (1996-1998) Healy y Hoyles (1998), Olivero (2003), Perks y Prestage (1995), Radford (1994), Senk (1985), Sackur, Drouhard y Maurel (2000) y Tall (1991, 1995).

De otro lado, se hace necesario reconocer que a pesar del esfuerzo que se ha hecho en Colombia por divulgar trabajos sobre la enseñanza de la demostración, aún prevalece la dificultad de que, por lo general, los reportes o informes de las investigaciones de punta se quedan entre la comunidad académica y los maestros que realizan estudios posgraduados; en pocas palabras, no llegan a la escuela. Es por esto que se requiere la elaboración de documentos que además de presentar una teoría sobre la enseñanza de la demostración, brinden elementos para el diseño y puesta en marcha de actividades de enseñanza. Al hacer un rastreo de este tipo de bibliografía en Colombia, se destacan los trabajos realizados por profesoras de la Universidad Pedagógica Nacional, en particular los de Perry, Camargo, Samper y Rojas (2006) y Samper, Camargo, Leguizamón (2003). No obstante, se trata de documentos que exigen que el maestro regrese a la teoría antes de implementarlo en la clase.

Del mismo modo, los documentos oficiales -Lineamientos Curriculares (1998) y Estándares Básicos en Competencia en Matemáticas (2006), respecto a la enseñanza de la demostración, pese a que no ahondan específicamente en la comprensión del funcionamiento del razonamiento deductivo, sí hablan de distintos tipos de razonamientos que se conjugan en la formulación de conjeturas. Por demás, abordan el razonamiento deductivo en términos de la axiomática inherente a la coherencia entre las proposiciones matemáticas. Esta propuesta se materializa en los Estándares Básicos en Competencias Matemáticas (2006) cuando explicitan que:

> Es conveniente que las situaciones de aprendizaje propicien el razonamiento en los aspectos espaciales, métricos y geométricos, el razonamiento numérico y, en particular, el razonamiento proporcional

> apoyado en el uso de gráficas. En esas situaciones pueden aprovecharse diversas ocasiones de reconocer y aplicar tanto el razonamiento lógico inductivo y abductivo, al formular hipótesis o conjeturas, como el deductivo, al intentar comprobar la coherencia de una proposición con otras aceptadas previamente como teoremas, axiomas, postulados o principios, o al intentar refutarla por su contradicción con otras o por la construcción de contraejemplos (Ministerio de Educación Nacional, 2006, p. 54).

Se reconoce entonces como situaciones que pueden aprovecharse para aplicar el razonamiento deductivo, aquellas que involucren los teoremas de Tales y Pitágoras, la construcción de sus respectivas demostraciones, así como sus aplicaciones en la resolución de problemas los hacen potentes, como se vera más adelante, para efectos de movilizar procesos demostrativos. Cabe anotar que se retoman estos teoremas pues en los Estándares Curriculares se hace mención de ellos al referirse a demostración.

"*Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales)".* (Ministerio de Educación Nacional, 2006, p.86).

No obstante, se hace necesario establecer la distinción entre el razonamiento deductivo y la demostración misma. Para ello, Ponce de León (2007) establece que

> Una demostración es un texto matemático que presenta la organización específica del razonamiento deductivo, es decir que está estructurado en dos niveles: la organización de los pasos, por un lado; y, por el otro, el establecimiento de la continuidad entre los pasos por substitución, para obtener, partiendo de las hipótesis, la conclusión buscada, a través del uso de definiciones y teoremas. (p.114)

De tal definición se infiere que el razonamiento deductivo subyace a la demostración. Partiendo de esta idea, según Ponce de León, debe desarrollarse un trabajo específico con los estudiantes sobre el funcionamiento del razonamiento deductivo y sobre el tipo de organización que éste implica.

De otra parte, desde la perspectiva teórica en la cual se enmarca este trabajo, se reconoce la potencia de la geometría para realizar los trabajos iniciales en la enseñanza de la demostración, gracias a que permite realizar conversiones entre los distintos registros de representación que le son propios: la lengua natural, el registro figural y el lenguaje simbólico. Más aun, esta posibilidad de realizar conversiones presenta una característica interesante a nivel cognitivo, si se considera que los objetos matemáticos solo son accesibles por medio de sus representaciones semióticas: la geometría privilegia el desarrollo de capacidades de razonamiento, de visualización y el análisis en los estudiantes. Sin embargo, como lo justifica Ponce de León con base en su estudio del trabajo realizado por Mesquita, no cualquier tipo de geometría es pertinente para los fines vistos anteriormente, sino que debe tratarse de una geometría discursiva, es decir, una en la cual los resultados se validen deductivamente y no solo se establezcan como verdades producto de observaciones y mediciones.

Ahora bien, en cuanto a la demostración y su relación con otras formas de expresión que usualmente le son relacionadas, como explicación[1], prueba y argumentación, es importante subrayar que no existe continuidad entre ellas, en virtud de los razonamientos que les son propios. Particularmente, en el razonamiento deductivo la especificidad del sentido conferido a las proposiciones que lo componen debe buscarse en el valor que toman dichas proposiciones. Duval (2004b) ha caracterizado dos de estos valores para el razonamiento deductivo: el valor lógico y el valor epistémico. El valor lógico alude al hecho de que la proposición sea verdadera, falsa o indeterminada; con respecto al valor epistémico en este trabajo se hace referencia a dos tipos de valores epistémicos: valor epistémico semántico, el cual tiene ver con la comprensión de las

[1] En el contexto sobre el trabajo de la demostración conviene señalar las distinciones de vocabulario realizadas por Balacheff (2000) Explicación: Discurso de una persona o grupo para hacer inteligible y comunicar a otros el carácter de verdad de un enunciado. Prueba: Explicación convincente para cierta comunidad, en cierto momento. Demostración: Prueba aceptada por la comunidad matemática. No obstante, estas distinciones importantes en su momento no son objeto de reflexión en este trabajo.

proposiciones y el valor epistémico teórico, este último responde al marco teórico en el cual una proposición es enunciada. Adicionalmente, la organización de las proposiciones en el razonamiento deductivo es consecuencia del valor epistémico teórico, esta organización se denomina estatus operatorio, más adelante se ampliarán cada uno de estos términos.

En este sentido, con respecto a la relación entre explicación y demostración se tiene que: el objetivo de los razonamientos, a diferencia de la explicación, es el cambio del valor epistémico del enunciado que está en la mira. En la argumentación ésta transformación de valor epistémico se da por una organización de las proposiciones sobre la base de sus contenidos. En cambio, en el razonamiento deductivo se da sobre la base del estatus operatorio, determinado por el estatus teórico de las proposiciones, dentro del contexto de la Geometría euclidiana. Por esta razón los conectores en la argumentación juegan un papel esencial, mientras que el estatus operatorio en el razonamiento deductivo debe estar marcado por las actitudes proposicionales. La argumentación puede producir proposiciones oportunas, verosímiles, pertinentes, mientras que la demostración produce enunciados con un valor lógico de verdadero (Ponce de León, 2007).

Por todo lo anterior, este proyecto pretende a través del diseño del manual ser otro canal de comunicación y/o divulgación sobre los trabajos recientes sobre la enseñanza de la demostración, particularmente desde el trabajo de Ponce de León (2007) que en su génesis fue pensado con el propósito de sentar algunas bases para la realización de un curso sobre la demostración matemática desde una perspectiva semiótico-cognitiva, enmarcada en el proceso de formación de docentes. En sus propias palabras: “se espera que se elabore en conjunto con los estudiantes y futuros profesores una cartilla o documento de divulgación de una propuesta didáctica que recoja las reflexiones, discusiones y análisis realizados” (Ponce de León, 2007, p.154). Esta idea de manual surge además por la plena convicción de que los manuales en términos de alcance (cobertura, costos, libre distribución) resultan más asequibles de lo que podrían ser los otros medios de divulgación (congresos y/o seminarios, cursos de formación docente, etc.). De igual manera, otro aspecto que sustenta la pertinencia de la creación del manual radica en el hecho de instaurarlo como vínculo entre los resultados de las investigaciones de Ponce de León y los maestros en ejercicio que en este caso son la población a quien va dirigido. Así pues, el trabajo que se propuso realizar y del que damos informe a través de este documento, consiste en la puesta en escena de los costos y exigencias cognitivas de la enseñanza de la demostración.

I.2 Aspectos generales del problema de indagación

De los análisis a la tesis desarrollada por Ponce de León, se tiene una primera propuesta: la introducción a los procesos demostrativos ha de hacerse en geometría, pues favorece el trabajo con distintos registros de representación semiótica, a saber: registro figural, la lengua natural y el lenguaje simbólico. La geometría se encuentra así dotada de una particularidad que permite el desarrollo de actividades de conversión, es decir, el paso de un registro a otro. En otras palabras, las potencialidades de la geometría, descubriendo el rol que juegan las figuras, se constituyen en un costo cognitivo necesario en aras de acceder a la demostración. De otra parte se encuentra que es necesario analizar las características propias de la demostración, esto es, identificar la relación entre demostración y razonamiento deductivo; la comprensión de este último, es una exigencia cognitiva que implica específicamente saber cómo opera, que propósito tiene, en qué fundamenta su validez y qué tipo de razonamientos produce[2].

Lo anterior permite establecer una relación entre al rol desempeñado por las figuras en la comprensión del razonamiento deductivo, una vez que se entienda la potencia de hacer énfasis en la conversión de un registro a otro, se tiene que del tipo de aprehensión que se haga sobre las figuras se desprende un tipo particular

[2] Duval responde a estos interrogantes desde los *análisis funcional, estructural, lógico y epistemológico del razonamiento* respectivamente (Duval, 2004).

de geometría, bien sea de acción[3] o la que se conoce como geometría discursiva, que según la perspectiva en la cual se enmarca este proyecto es la deseable, pues en ella tiene lugar la demostración. A su vez, llegar a esta geometría discursiva involucra un cambio en las reglas de juego en donde la validez de los hechos parta de la deducción y no de lo observable; tal cambio implica el tránsito entre las diferentes formas de aprehender las figuras. En síntesis, el papel que juegan las figuras permite dilucidar la idea de que la validación que se espera en matemáticas debe ser discursiva y no experimental, en tanto se haga el paso de una geometría de observación y medición (acción) a una geometría discursiva.

Ahora bien, dado que el propósito final del presente trabajo de grado es construir un manual que retome las consideraciones teóricas aquí explicitadas, se hace necesario precisar las condiciones de elaboración de este manual, así como reconocer el lugar que ocupan los manuales en la escuela, el rol que juegan en la movilización de conocimiento y los aportes curriculares que traen consigo.

Finalmente, tomando en cuenta las consideraciones sobre la problemática relativa a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración, explicitadas anteriormente, la intención de este proyecto es el de encontrar en las reflexiones de la tesis de Ponce de León (2007) elementos para responder o ampliar los siguientes cuestionamientos:

¿Qué del análisis sobre las exigencias cognitivas implicadas en la demostración, retomar y ampliar en un manual dirigido a docentes en ejercicio? ¿Cómo hacer para que estas reflexiones se constituyan en una propuesta curricular y didáctica?

I.3 Objetivos del trabajo

I.3.1 Identificar y sintetizar los elementos teóricos sobre la enseñanza de la

[3] Se entiende por geometría de acción, aquella que da cuenta de procedimientos empíricos, (…) *donde el registro figural tiene un gran peso* (Ponce de León, 2007).

demostración presentes en la tesis de Ponce de León que guiarán la construcción del manual.

I.3.2 Seleccionar y ajustar situaciones de enseñanza sobre los teoremas de Tales y Pitágoras a la luz de la propuesta cognitiva de Duval-Egret.

I.3.3 Identificar las consideraciones teóricas existentes sobre el desarrollo de manuales y sus formas de implementación.

En virtud de lo anterior, se retoman tres aspectos fundamentales en el desarrollo del presente trabajo. El primero de ellos destaca que conviene acortar la distancia entre los resultados de investigaciones en educación matemática y las prácticas de aula; el segundo alude al aprovechamiento del trabajo realizado por Ponce de León sobre la enseñanza de la demostración. El tercer y último aspecto alude a la pertinencia de la elaboración de un manual que ha de retomar los elementos teóricos aquí explicitados y seleccionar y ajustar situaciones matemáticas convenientes para los fines buscados.

II. ELEMENTOS TEÓRICOS QUE PERMITEN EL DESARROLLO DE UN MANUAL

El marco teórico en el cual se inscribe el presente proyecto tiene que ver con los desarrollos e investigaciones realizados desde una perspectiva semiótico-cognitiva, los cuales han sido planteados por Duval (1993, 2004a, 2004b), Ponce de León (2007)

Se presentan entonces tres partes en este capítulo del documento; en la primera parte se desarrollan los elementos centrales de aquello que aquí se ha llamado una perspectiva semiótico-cognitiva en educación matemática, en particular las implicaciones de esta con la propuesta de trabajo presentada. En la segunda parte se presenta una sintesis de los desarrollos teóricos de Ponce de León (2007), en relación con los elementos de una propuesta para la introducción a la demostración en la escuela. En la tercera y última parte se caracterizan las condiciones teóricas para la construcción del manual de interés.

II.1 Una perspectiva semiótico-cognitiva en educación matemática

En este apartado se delimitan aspectos relacionados con la naturaleza de los objetos matemáticos, la comprensión de dichos objetos en términos del funcionamiento cognitivo que suponen. De igual forma, se establecen algunas consecuencias para la enseñanza de la demostración, específicamente aquellas que aluden a los análisis sobre el razonamiento deductivo así como los vínculos o rupturas de este tipo de razonamiento con otros.

Para efectos de caracterizar los objetos matemáticos y dar cuenta de cómo se entiende la comprensión de estos, se toma en consideración la perspectiva semiótico-cognitiva desarrollada por Duval (1993, 2004a, 2004b), en particular se reconoce que los objetos matemáticos suponen para su comprensión, unos modos de funcionamiento cognitivo posibles solo mediante la movilización de distintos registros de representación semiótica.

> La actividad matemática necesita modos de funcionamiento cognitivos que requieren la movilización de sistemas específicos de representación. Estos sistemas constituyen registros de representación semiótica. Su integración a la arquitectura cognitiva[4] de los sujetos es la condición absolutamente necesaria para poder comprender en matemáticas (Duval, 2004a).

En particular, la demostración en tanto actividad matemática requiere para su comprensión, la movilización de unos sistemas específicos de representación semiótica que satisfacen sus modos de funcionamiento cognitivo, a saber la lengua natural y el registro figural. En este sentido, el trabajo sobre estos sistemas de representación se constituye en uno de los costos cognitivos propios de la demostración. Otro costo cognitivo alude a la comprensión del razonamiento subyacente a la demostración. Naturalmente, existe un vínculo entre estos costos, por tanto a continuación se presenta una caracterización del razonamiento a partir de análisis que determinan una propuesta didáctica para la enseñanza de la demostración, propuesta que retoma y exhibe cada uno de estos costos cognitivos así como sus vínculos.

El razonamiento se encuentra intrínsecamente ligado a la utilización de un lenguaje, lo cual quiere decir que se caracteriza por el uso y movilización de proposiciones; ello implica considerarlo como un recorrido discursivo en el cual cada proposición enunciada es un *acto completo del discurso*[5] *o unidad apofántica,* esto es, la especificidad del sentido conferido al razonamiento debe buscarse en el **valor** que toman las proposiciones que lo componen. Dicho de otra manera, el sentido de las proposiciones implicadas en el razonamiento trasciende al **contenido** de las mismas.

> […] Su sentido está constituido a la vez por el contenido enunciado, es

---

[4] […] ”la arquitectura cognitiva” del sujeto, es decir, lo que constituye la infraestructura operacional de la consciencia. Se trata de estructuras generales del funcionamiento cognitivo que permiten a un sujeto adquirir conocimientos sobre su entorno y adaptarse (Duval, 2004a).

[5] Un acto de expresión es un acto *completo del discurso* cuando la expresión producida toma un valor determinado en el universo cognitivo, representacional o relacional de los interlocutores (Duval, 2004b)

> decir, por lo invariante en sus múltiples ocurrencias posibles, y por los diferentes valores que este contenido puede tomar en un universo cognitivo, en un universo representacional o en un universo relacional dado: valor epistémico, valor de verdad, valor social (Duval, 2004b, p.99).

Los valores que intervienen en la comprensión del sentido de las proposiciones presentes en un razonamiento son: el valor lógico, el valor epistémico y el valor social. El valor lógico alude al hecho de que la proposición sea verdadera, falsa o indeterminada; este valor resulta de procedimientos específicos de verificación o de prueba y no depende solo de la comprensión de su contenido. De otra parte, conviene señalar que en este trabajo se hace referencia a dos tipos de valores epistémicos, a saber, valor epistémico semántico, el cual tiene ver con la comprensión de las proposiciones y el valor epistémico teórico, que responde a la organización del marco teórico en el cual una proposición es enunciada.

De igual forma, considerar el razonamiento como un recorrido discursivo implica que las proposiciones enunciadas no pueden ser separadas de su contexto de enunciación, pues es en virtud de este contexto que se tipifican los valores epistémicos y, más aún, el mismo determina el valor lógico de las proposiciones.

Ahora bien, de acuerdo con Duval (2004b) existen distintos tipos de démarches[6] de razonamiento intrínsecamente ligadas a la utilización de un lenguaje,: *el silogismo aristotélico, las inferencias semánticas, la argumentación y la deducción.* Lo que distingue cada una de estas démarches, es el uso o no de tercer(os) enunciado(s), o bien que las proposiciones se enuncien o no dentro de un marco teórico. *La deducción* es un tipo de démarche que usa terceros enunciados pues parte de un sistema de axiomas y definiciones; dicho sistema se constituye en el marco teórico dentro del cual las proposiciones de la deducción se enuncian. En este sentido se evidencia el hecho que en la demostración el razonamiento

[6] En francés, el término démarche, tiene varios sentidos. En primer lugar se emplea para aludir al modo como se desenvuelve alguien, a su "manera de caminar". En un sentido más amplio, se emplea para referirse a todo lo que alguien hace para llegar a un resultado, incluidas las falsas pistas abandonadas. (Duval, 2004b).

subyacente es *la deducción a partir de un sistema de axiomas y definiciones*.

Por lo anterior, es necesario definir cómo la deducción a partir de un sistema de axiomas y definiciones opera. Esto es, responder a las siguientes preguntas: ¿Qué función cumple un razonamiento? ¿Qué operaciones se requieren para llevar a cabo este tipo de desarrollo discursivo? ¿En qué se fundamenta la validez de un razonamiento? Además de ¿Qué tipo de saberes científicos produce? Para tal fin, se hace una revisión de los análisis desde la perspectiva semiótico-cognitiva desarrollada por Duval (2004b) y puesta en escena por Ponce de León (2007). Dichos análisis fundamentan la aproximación didáctica para la enseñanza de la demostración que nos proponemos elaborar.

II.1.1 Análisis funcional

Este análisis permite reconocer la naturaleza de las expansiones discursivas reconocidas como razonamiento, además de caracterizar sus diferencias. Para ello se consideran aquellas démarches intrínsecamente vinculadas a la utilización de un lenguaje pues es solamente en estos términos que se establece la validez de tal o cual razonamiento. En este sentido, el razonamiento puede definirse, como

> La forma de expansión discursiva que está orientada hacia un enunciado-objeto con el propósito de modificar el valor epistémico, semántico o teórico, que ese enunciado-objeto tiene en un estado de conocimiento dado, o en un medio social dado, y en consecuencia, de modificar el valor de verdad cuando se cumplen ciertas condiciones particulares de organización discursiva. (Duval, 2004b, p. 205).

Cierto es que una demostración matemática presenta unas condiciones particulares de organización discursiva, comparables con la deducción a partir de un sistema de axiomas y definiciones. Por lo tanto, la modificación del sentido de las proposiciones se refiere a la transformación que sufren en virtud de las tres componentes del sentido de dichas proposiciones, a saber: contenido, estatus y valor. Así pues, según Ponce de León (2007) se supone un enunciado y se le sigue la pista durante un razonamiento deductivo en tres etapas: al inicio, durante la demostración y al final. Por medio de la identificación de estos tres momentos se pretende hacer evidentes las transformaciones que tiene este enunciado.

Al inicio de la demostración hay que hacer una primera distinción entre el valor epistémico semántico y el estatus teórico. El enunciado tiene un cierto contenido que le da un valor epistémico semántico, valor inducido por la comprensión de dicho contenido, por ejemplo: un enunciado *posible.* Sin embargo, el enunciado en un contexto de enunciación tiene un estatus teórico, es decir, ocupa un lugar dentro de la organización de dicho contexto; algunos posibles estatus son: definición, axioma, teorema, conjetura. Esta es una primera distinción necesaria: entre el contenido y el estatus; aquí debe predominar el estatus teórico de conjetura, sobre el contenido, visto en la simple comprensión del enunciado.

Una vez el enunciado toma dicho estatus teórico, se le asocia un estatus operatorio, por ejemplo: un enunciado con estatus teórico de teorema puede ser una hipótesis o un tercer enunciado, lo anterior en virtud del contexto de enunciación. Adicionalmente, el conjunto de esos estatus operatorios caracterizan los pasos de razonamiento deductivo; la organización de dichos pasos, efectuados en un marco teórico, requiere que el pasaje de las premisas a la conclusión se haga a través de un tercer enunciado (que puede ser una definición, un teorema…). Según Duval (2004b), se puede considerar que el marco teórico funciona como un contexto global para la proposición enunciada y que la organización del paso de razonamiento funciona como un contexto local.

Durante la deducción hay que tener en cuenta que el enunciado está compuesto por dos proposiciones: las hipótesis o datos presentes en el enunciado, y lo que se desea demostrar. En la organización de las proposiciones durante la deducción, que puede constar de uno o varios pasos, la información dada en el enunciado tiene el estatus operatorio de *hipótesis.* Otros estatus operatorios dentro de cada paso son: tercer enunciado o conclusión. Para el caso de este supuesto, la proposición que indica lo que se quiere demostrar tiene el estatus operatorio de *conclusión* del último paso.

Al final de la deducción y suponiendo que todo haya marchado bien, el producto de ese razonamiento es una conclusión con un valor epistémico teórico, inducido por el contexto teórico de enunciación, esto es, proposición *necesaria o apodíctica*, proceso por el cual se le confiere al enunciado el valor lógico de *verdadero.* Se produce así una ganancia epistemológica importante, que a condición de comprender este funcionamiento propio del razonamiento deductivo, no solo demuestra, sino que convence.

II.1.2 Análisis estructural

Este análisis determina las operaciones requeridas para llevar a cabo el desarrollo discursivo presente en la demostración, estableciendo en primera instancia los niveles de organización en los cuales estas operaciones toman lugar. En el nivel local de organización de un paso de razonamiento aparecen las operaciones de verificación y desprendimiento. En el nivel global o progresión hacia un enunciado-objeto, la operación requerida, es la de sustitución.

En un paso de deducción intervienen tres proposiciones con tres estatus operatorios dentro de esta organización: la hipótesis (o información dada), el tercer enunciado y la conclusión. En un paso se necesitan dos operaciones discursivas: la verificación de las condiciones en el antecedente del tercer enunciado, y el desprendimiento necesario de la conclusión como efecto de haber aplicado ese tercer enunciado. Ese carácter “apodíctico” de la última conclusión, terminada la demostración, dará al enunciado el estatus lógico de verdadero, realizándose así el cambio de su valor epistémico.

Hasta aquí se ha expresado lo que ocurre en un paso de deducción. En la progresión hacia un objeto, también se debe tener en cuenta cómo se encadenan dichos pasos; al respecto Ponce de León (2007) afirma:

> El encadenamiento de pasos, que puede ser lineal o en forma de árbol, establece la continuidad de pasos por la operación discursiva de sustitución, algo así como un reciclaje, donde la conclusión de un paso se transforma en la hipótesis del siguiente (igual mecanismo de un cálculo). (p.58)

En este sentido, al establecer las operaciones discursivas de verificación y desprendimiento al interior de un paso y la de sustitución para la continuidad de pasos, en el razonamiento deductivo, conviene analizar en las otras démarches de razonamientos intrínsecamente ligadas a la utilización del lenguaje (inferencias semánticas, silogismos aristotélicos e inferencias discursivas), las operaciones requeridas para su funcionamiento, caracterizándolas según lo que el análisis estructural permite.

Según Duval (2004b), las *inferencias semánticas*, son inherentes a la comprensión del discurso más cotidiano, no cuentan con tercer enunciado y no necesitan de un contexto teórico de enunciación, por tanto se organizan y comprenden en virtud del contenido de las proposiciones que las componen. Los *silogismos aristotélicos*, las proposiciones que los componen están dotadas de estatus operatorio, aparecen dos premisas y una conclusión que se organizan a partir de la presencia de un mismo término en las dos premisas, que ocupa una de los dos proposiciones gramaticales de sujeto o de atributo, provienen entonces de una lógica de los términos y no de una lógica de los predicados, en razón de este tipo de funcionamiento los silogismos son más próximos a las inferencias semánticas.

Por último, aparecen las inferencias discursivas que recurren a un tercer enunciado que no pertenece a un corpus teórico, el tercer enunciado puede ser una declaración, una constatación ligada a un contexto particular, un principio que se impone como una norma en un medio social. Las inferencias se efectúan en el marco de la argumentación. A diferencia de los dos tipos de pasos anteriores, las inferencias discursivas dependen de la organización semántica del léxico de una lengua. Sin embargo, el pasaje de una proposición a la conclusión con la ayuda de un tercer enunciado, se efectúa a través de las relaciones semánticas como la instanciación, subsunción, u oposición.

Como se ha visto, el análisis estructural permite explicitar las operaciones requeridas para que en un razonamiento se presente la progresión hacia el enunciado-objeto, a nivel local del paso y a nivel global del encadenamiento de pasos, esto se particulariza en la deducción. Adicionalmente, se caracterizaron las otras démarches discursivas en virtud de las relaciones entre sus pasos por la ausencia o presencia de un marco teórico, caso del silogismo aristotélico además de cómo interviene el uso o no de tercer(os) enunciado(s) en las inferencias semánticas. Por último se presentó, la argumentación como ejemplo de las inferencias discursivas, mostrando que las operaciones que encadenan sus pasos difieren significativamente de aquellas de la deducción.

II.1.3 Análisis lógico

Este análisis permite dilucidar las condiciones de organización de un paso de razonamiento que hacen posible que los valores epistémico y de verdad del enunciado que se constituyen en el blanco, sean modificados. Es decir, establece cómo es que la organización de las proposiciones produce una y solo una conclusión.

Al respecto Ponce de León (2007) destaca que en el razonamiento deductivo son importantes dos aspectos. Primero, hay que comprender que las proposiciones tienen un estatus dentro de la organización; y segundo, descubrir el tipo de organización bipartita del tercer enunciado. Esto último quiere decir que en un tercer enunciado hay dos partes: antecedentes y consecuencia; lo que implica que la conclusión está pre-inscrita en el tercer enunciado. Reconocer esta organización bipartita permite la operación de desprendimiento o extracción de la conclusión, previa verificación de la existencia y correspondencia de las hipótesis del paso con el antecedente del tercer enunciado.

Cabe anotar que es el llamado valor epistémico apodíctico el que implica el valor lógico de verdad de la proposición. De esta manera, tanto el sentido como la convicción, términos entendidos en su acepción más común, que acarrean un razonamiento válido solo pueden ser el resultado de la comprensión del funcionamiento del razonamiento que condujo a esta conclusión.

II.1.4 Análisis epistemológico

Este análisis aborda el problema del aprendizaje de la demostración a partir de la comprensión de las definiciones en matemáticas, esto es, aborda los problemas de la heterogeneidad de las definiciones, además del papel intuitivo de las figuras en el acceso cognitivo a los objetos matemáticos, en relación con las proposiciones que los enuncian.

Con respecto a la heterogeneidad de las definiciones, Duval (2004b), caracteriza cuatro tipos de definición que corresponden a cuatro tipos de démarches cognitivas totalmente diferentes en razón de sus pruebas de aceptabilidad:

- *Proposición primitiva,* de un corpus de proposiciones reconocidas como verdaderas, separan las proposiciones que planteadas como primeras proposiciones, serán suficientes para derivar deductivamente todas las proposiciones de ese corpus. Las definiciones de este tipo responden a un criterio de anterioridad en relación con un conjunto de otras proposiciones desde el estricto punto de vista de un orden de derivabilidad deductiva.
- *Proposición constructiva,* determina un objeto por la combinación de propiedades de manera que posea una propiedad no incluida en esta combinación y que no haya ningún objeto posible que verifique esta combinación de propiedades sin que posea esa otra propiedad. Estas

definiciones de resisten al contraejemplo

- *Conceptuo-lexicales,* describen un objeto de manera tal que se encuentre situado en relación con el conjunto de objetos diferentes que comparten con él por lo menos un rasgo común, responden por tanto a un criterio de comparabilidad en términos de semejanzas y diferencias. Estas definiciones se basan en la posibilidad de explicitar la organización semántica que subtiende a la definición.
- *Características*, son aquellas que seleccionan las propiedades que pueden describir un objeto, identificándolo de manera más económica. Su prueba de aceptabilidad es la rapidez de tratamiento en las situaciones que este objeto debe ser reconocido.

Luego de caracterizar los tipos de definiciones posibles, en cuanto al análisis epistemológico aparece el problema que alude al papel desempeñado por la figuras en el acceso a los objetos matemáticos, máxime a la comprensión del razonamiento deductivo; puesto que en geometría cada definición remite casi de forma natural a una representación figural.

En este sentido, Duval (2004b) establece que las figuras juegan un papel heurístico dado que los tratamientos propiamente figurales permiten descubrir los terceros enunciados principales que se pueden poner en juego y, eventualmente, determinar su orden de aplicación en la organización global del razonamiento deductivo. El papel heurístico de las figuras implica entonces una congruencia entre los tratamientos propiamente figurales y el desarrollo de un razonamiento válido. Entonces es cognitivamente esencial la posibilidad de una articulación entre los dos registros.

En síntesis, del análisis epistemológico se puede derivar que para la enseñanza de la demostración esnecesario realizar un trabajo previo a la introducción a la demostración en el ámbito de la geometría euclidiana, en términos de coordinación de los registros figural y de la lengua natural; considerando particularmente los diferentes papeles que puede jugar la figura en torno al acceso a la demostración.

II.2 Una perspectiva semiótico-cognitiva para la enseñanza de la demostración

Con respecto a lo semiótico, hay tres aspectos que resultan fundamentales al momento de abordar la enseñanza de la demostración: ver la demostración como un texto que presenta la organización del razonamiento deductivo; desarrollar un trabajo por niveles y por último, ha de tenerse en cuenta iniciar los trabajos en demostración en geometría.

Teniendo en cuenta los aspectos precedentes, además de las implicaciones didácticas de cada uno de ellos, resulta pertinente presentar una definición de demostración que los retome, pero que además dé luces sobre la propuesta que dichos análisis traen consigo.

> Una demostración es un texto matemático que presenta la organización específica del razonamiento deductivo, es decir, que está estructurado en dos niveles: la organización de los pasos, por un lado; y, por el otro, el establecimiento de la continuidad entre los pasos por substitución, para obtener, partiendo de las hipótesis, la conclusión buscada, a través del uso de definiciones y teoremas (Ponce de León, 2007, p. 114).

En virtud de la anterior definición es posible establecer la condición obligada en la enseñanza de la geometría de comprender el razonamiento deductivo Justamente aquí es donde se manifiesta el sentido de los anteriores análisis.

Otro aspecto que ha de considerarse en la enseñanza inicial de la demostración, es desarrollar un trabajo por niveles; según Ponce de León (2007), este debe empezar por el nivel <u>local</u>, el cual corresponde al descubrimiento del mecanismo de expansión discursiva que es propio a las demostraciones matemáticas en lengua natural; seguido del nivel <u>semi-global</u>, es decir de una lectura regresiva de la construcción teórica donde la “demostración” previamente trabajada tuvo lugar; y finalmente el nivel global o de la comprensión matemática, para el cual se requiere un acervo cultural vasto.

Es indispensable además tener en cuenta iniciar el trabajo de enseñanza y aprendizaje de la demostración en geometría. La razón de orden cognitivo es la de liberar esta enseñanza del marco del encierro mono-registro, y poder, a través de la conversiones, solucionar los problemas fundamentales de la enseñanza de las matemáticas. Las figuras juegan un papel importante no en el funcionamiento del desarrollo discursivo del razonamiento sino en su comprensión, de ahí la importancia de un trabajo en el registro figural en términos de conversiones, convergencia, rol de las figuras, heurística y aprehensiones de la figura geométrica, fenómenos de visualización (Ponce de León, 2007).

II.3 Propuesta didáctica de Duval-Egret

Tomando como referencia los distintos análisis sobre el funcionamiento del razonamiento deductivo, Duval y Egret (1993) realizaron una propuesta para la enseñanza inicial de la demostración. Dicha propuesta está compuesta por tres etapas como sigue:

a) *Primera etapa*: involucra a su vez tres elementos; construcción y exploración de figuras, formulación de conjeturas y distinción del antecedente y del consecuente de tercer enunciado.

b) *Segunda etapa* : está compuesta por dos partes discusión y búsqueda de propiedades y puesta en común

c) *Tercera etapa:* comprensión y puesta en escena del funcionamiento del razonamiento deductivo, a través de la construcción de grafos proposicionales y redacción de la demostración.

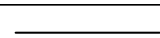
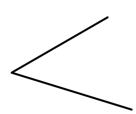
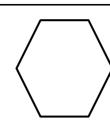
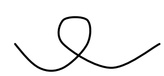
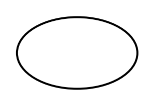
II.3.1 Primera etapa

Al establecer la posibilidad intrínseca de convertir todas las proposiciones que intervienen en una demostración en el registro de representaciones figurales, se hace evidente el soporte intuitivo que proporcionan las figuras, pues aportan más de lo que dicen los enunciados, al permitir explorar, anticipar y formular conjeturas. En este sentido, esta etapa vincula un uso especializado de la lengua natural, además de un tratamiento pertinente de las figuras a partir de tres momentos: *construcción y exploración de figuras, formulación de conjeturas y la distinción del antecedente y el consecuente del tercer enunciado.*

II.3.1.1 Construcción y exploración de figuras

Conviene, desde esta perspectiva, caracterizar lo que se entiende por figura además de reconocer su potencial para explorar, anticipar y conjeturar. En primera instancia, se dice que una figura es aquella que está constituida por variaciones y combinaciones de unidades figurales elementales, las cuales están representadas a continuación

Tabla 1. Unidades figurales elementales

Dimensión		**Cualidad**			
0	Punto	Rectilíneo		Curvilíneo	
1	Línea				
2	Superficie	Abierto	Cerrado	Abierto	Cerrado
					

Nota. Fuente: Ponce de León (2007).

Una figura geométrica se considera entonces como la configuración de al menos dos unidades figurales elementales. En cuanto al aporte heurístico de las figuras, es importante distinguir el tipo de aprehensión susceptible de sugerir la solución del problema. Hay tres tipos de aprehensiones sobre la figura, a saber: perceptiva, operatoria y discursiva, definidas por Duval (2004b).

Aprehensión perceptiva: Aprehensión que captura la figura de un primer vistazo y de forma automática, en forma independiente del enunciado; está ligada a las leyes gestálticas de organización de la percepción, particularmente a la ley de cierre. El tratamiento cognitivo es inconsciente e inmediato. Este tipo de aprehensión puede tener un rol inhibidor o facilitador en la comprensión de un problema.

Aprehensión operatoria: Centrada en las diferentes modificaciones de la figura y sus consecuentes reorganizaciones perceptivas. Los tratamientos dan lugar a operaciones de reconfiguración intermediarias, es decir de reagrupamientos de las sub-figuras. Una figura de partida se puede dividir en diversas sub-figuras a partir de los cuales se puede transformar en otra figura de un contorno global diferente o no. Los tipos de modificación relacionados a esta aprehensión son:

a) *Modificaciones mereológicas*, que consisten en partir y añadir trazos sobre la figura para reconfigurarla en otra; estas modificaciones ponen en juego las relaciones entre la parte y el todo.

b) *Modificaciones posicionales*: que conciernen la orientación y la ubicación en el medio. Se trata la mayoría de las veces de rotaciones y traslaciones.

c) *Modificaciones ópticas*: consisten en transformar una figura en otra, llamada su imagen. Pueden ser ampliaciones o reducciones.

Más aun, a cada una de estos tipos de modificación corresponde según Marmolejo (2003) un factor que juega sobre la visibilidad, a saber: el carácter convexo o no convexo de las partes elementales; el recubrimiento parcial, orientación; y la estabilidad del señalamiento del campo perceptivo para el soporte de la figura. Estos factores, corresponden a las modificaciones mereológicas, posicionales, y ópticas respectivamente.

Aprehensión discursiva: está ligada a las propiedades asociadas a las hipótesis, por lo tanto la figura es de alguna manera un fragmento del discurso teórico. Requiere una doble referencia: una red semántica de objetos matemáticos y una axiomática local. La aprehensión discursiva de una figura tiene que ver exclusivamente con el estatus que el enunciado da a sus proposiciones. El tipo de experiencia con la figura de esta aprehensión es la llamada experiencia figural en geometría, que consiste en que a través del enunciado se explicitan propiedades pertenecientes a un corpus teórico.

De la anterior caracterización se deriva que a cada tipo de aprehensión figural le corresponde un modo particular de hacer geometría y por tanto de acercarse a la demostración, de tal suerte que deba privilegiarse la aprehensión discursiva de entre todas, pues es justo ahí donde la demostración tiene lugar. De otra parte, la aprehensión discursiva, da cuenta de la relación indisoluble entre demostración en geometría y las figuras.

II.3.1.2 Formulación de conjeturas

La conjetura, desde esta perspectiva, aparece como un estatus teórico en el nivel local (paso de razonamiento) y toma un lugar preponderante ya que el reconocimiento de éstas marca el inicio de la distinción entre el contenido y el estatus de una proposición; dicho reconocimiento implica –de parte del estudiante- el hecho de que no basta con lo observado en un figura para aceptar o no la formulación de una propiedad o el establecimiento de un resultado. Entonces, la posibilidad de formular conjeturas, de reconocer su lugar en un recorrido discursivo y en la solución de un problema es un aspecto central en el aprendizaje del funcionamiento de los razonamientos deductivos.

Se necesita por lo tanto de un acercamiento a las conjeturas, a su formulación por parte de los estudiantes en el marco de un trabajo de exploración y búsqueda consciente; en este sentido Larios (2001) ha propuesto una definición de éstas:

> […] una situación más “experimental”, donde el individuo, puesto en una situación en particular, observa los hechos, los analiza, compara, encuentra un patrón y hace una afirmación, para posteriormente encontrar argumentos que la sustenten. Tales argumentos están

> relacionados íntimamente con las experiencias previas al momento de hacer la afirmación, además de que ésta, hasta antes de proporcionar argumentos deductivos (es decir una demostración), es una conjetura […]. Es importante recalcar que no se puede probar conscientemente algo si antes no fue conjeturado. (Larios, 2001, p. 50).

Este trabajo de búsqueda y formulación de la conjetura ha de distinguirse, como se señala más adelante, con el trabajo de búsqueda de los argumentos que la sustente, son dos procesos distintos aunque necesariamente relacionados.

Existen además otras perspectivas teóricas en el proceso de elaboración de conjeturas, en particular Cañadas et al (2008) en su investigación procuraron establecer un marco teórico, para el cual definieron los tipos de conjeturas y los pasos correspondientes a su elaboración. En primera instancia, se explicita que solo un problema abierto, esto es, que tenga como objetivo encontrar ciertos elementos que satisfagan las condiciones del problema a través de la conexión entre datos e incógnitas, ha de estimular la formulación de conjeturas. Lo cual significa que, el enunciado de este tipo de problemas no sugiere su solución ni el método, de modo que se estimula. En este sentido, se definen además los siguientes tipos de conjeturas:

La inducción empírica a partir de un número finito de casos discretos, la formulación de una conjetura se puede realizar a partir de la observación de un número finito de casos discretos en los cuales se puede detectar un patrón constante. Este tipo de conjetura aparece con frecuencia al resolver problemas que implican propiedades numéricas.

La inducción empírica a partir de casos dinámicos, la base para establecer una conjetura de este tipo es un número infinito de acontecimientos posibles. A partir de ellos se conjetura una regla general, que describe la naturaleza de un conjunto de acontecimientos dinámicamente relacionados.

La analogía, se puede establecer una conjetura por analogía sobre algún hecho particular ya conocido, o incluso conjeturar una regla general sobre la base de otra regla general ya conocida.

La abducción, este tipo de conjetura se establece sobre la base de un solo caso, ejemplo o acontecimiento. La conjetura surge como una regla general que permite explicar un acontecimiento inexplicable de otra manera.

Por último, aparece *la conjetura basada en la percepción*, una conjetura puede ser establecida a partir de una representación visual de un problema o de una traducción perceptual de su planteamiento. La base de este tipo de conjeturas es una cuidadosa representación del problema como una imagen mental. No hay una atención inmediata a las relaciones que existen entre los elementos del problema porque el foco inicial está en la creación de una nueva representación del problema. Una vez que esta representación existe, es a menudo bastante adecuada para reproducir las relaciones entre los elementos matemáticos que aparecen (Cañadas et al, 2008).

II.3.1.3 Distinción del antecedente y el consecuente del tercer enunciado

Esta distinción tiene que ver con el análisis lógico, en términos de la naturaleza bipartita de los enunciados en matemáticas, particularmente de la estructura si-entonces del tercer enunciado. Esto es, reconocer que tanto el antecedente como el consecuente son proposiciones, además el antecedente corresponde a la(s) premisa(s), mientras que el consecuente corresponde a la conclusión. Comprendiendo así que el tercer enunciado es otra proposición cuya operatividad es la articulación entre el antecedente y el consecuente.

De un rastreo a los libros de lógica universitarios, se establece que es común a estos comenzar por introducir una equivalencia entre el lenguaje formal con el lenguaje natural, estableciendo convenciones para realizar las respectivas conversiones, así como explican las reglas que rigen los cálculos entre las proposiciones. En ese sentido, se hace énfasis en afirmar que los argumentos se componen de proposiciones, estableciendo que la validez de dichos argumentos responde a las conexiones entre las premisas y la conclusión (Anacona & Ortíz, 2004), (Mates, 1965), (Moreno, 1971) y (Pérez, 2006).

Más aun, es importante destacar que con respecto al tercer enunciado, es muy poco lo que estos textos consultados aportan, solo en uno de ellos se hace alusión a un componente adicional que conecta premisas y conclusión en los argumentos, específicamente Pérez (2006) afirma que: “en todo argumento se deben reconocer por lo menos tres componentes: unas conclusiones, unas razones o premisas y una relación de fundamentación entre las premisas y la conclusión” (p. 40).

Dicha relación de fundamentación parece aproximarse a la operatividad propia del tercer enunciado. A su vez, Pérez (2006) añade que las premisas y la conclusión se pueden identificar fácilmente, pero la relación de fundamentación es algo que solo podemos establecer con posterioridad. Cabe anotar que, este autor presenta argumentos ya acabados, por tanto el tercer enunciado es visto como relación de fundamentación no parece ser una proposición, pero en el ejercicio de comprensión del razonamiento deductivo y construcción de la demostración esta proposición (tercer enunciado) será el resultado de la búsqueda de entre todos los elementos conocidos de la teoría, aquellos que permiten concluir otras proposiciones bajo unas condiciones dadas.

II.3.1.4 Lineamientos generales de esta primera etapa.

Dada la naturaleza de este trabajo, conviene delimitar los alcances de esta primera etapa, además de los avances que aporta en la comprensión del funcionamiento del razonamiento deductivo.

a) Las figuras adquieren su mayor potencia heurística, esto es, permiten formular conjeturas, si son el resultado de una construcción con la ayuda de instrumentos, pues un instrumento permite producir una forma visual que tiene una propiedad geométrica (Ponce de León, 2007).

b) La producción de formas visuales por un instrumento cambia completamente la relación con las formas percibidas y con las configuraciones de las formas. En efecto, la utilización de un instrumento da la posibilidad de experimentar, de alguna manera, las propiedades geométricas como limitaciones de construcción (Duval, 2004b).

c) Se puede establecer entonces la potencia de las construcciones con instrumentos para el desarrollo de la aprehensión operatoria de las figuras, pues este tipo de construcciones permiten al estudiante darse cuenta de que las propiedades geométricas no son solamente características perceptivas.

II.3.2 Segunda etapa

Esta etapa busca identificar los procedimientos heurísticos asociados a la resolución de un problema en geometría, además permite caracterizar la dinámica de una clase que permita la discusión. En este sentido, esta etapa se divide en dos partes *Discusión y búsqueda de propiedades y Puesta en común.*

II.3.2.1 Discusión y búsqueda de propiedades

En este momento se delimita o trata de establecer entre las distintas formas en las que un estudiante aborda un problema geométrico, aquella en la cual la demostración tiene lugar. En ese sentido, Balacheff, retomando a Brousseau (2000) caracteriza tres tipos de situaciones inducidas por las actividades sugeridas a los estudiantes, están son la *esfera de práctica*, las *situaciones de decisión* y las *situaciones de validación*. En el primer tipo se trabaja de forma mecánica aplicando los conocimientos adquiridos, lo cual no genera nuevos conocimientos; en el segundo tipo se construyen conjeturas con el fin de diseñar estrategias que lleven a la resolución de una situación problema y en el último tipo el estudiante socializa sus explicaciones acerca de una afirmación, lo cual se aproxima a la demostración. Balacheff (2000) distingue dos tipos de pruebas[7] que le permiten al

[7] Es necesario recordar que Balacheff (2000) ha distinguido, en su trabajo sobre los procesos de prueba en los estudiantes, tres conceptos: la explicación, la prueba y la demostración; los cuales

estudiante convencer y convencerse acerca de una conjetura; estas se conocen como, las formas pragmática e intelectual de abordar un problema geométrico.

Pruebas pragmáticas: los estudiantes recurren a la acción u ostensión sobre una figura para establecer o justificar conjeturas. Se fundamentan en observaciones y construyen razones personales o grupales para tener confianza en ellas. En este tipo de pruebas lo que el estudiante busca o trata de ilustrar es la eficacia de la conjetura que propone y el modo para llegar a ella. Estas pruebas a su vez se pueden clasificar según la relación que se establece entre las razones dadas por el estudiante y la experiencia sensible que le aporta la situación problema, luego se tienen:

- Empirismo ingenuo: se produce y asegura una conjetura después de haberla estudiado en algunos casos, ya sea por observación directa de hechos debido a las conexiones que los estudiantes hacen con conocimientos previos, no de manera explícita, en el proceso de construcción. Los estudiantes expresan la aceptación del enunciado con frases como: "*lo veo en la figura*", "*lo medí*", o "*ya lo comprobé con estos valores*".

Este tipo de proceder se constituye en un punto de partida importante, para iniciar los trabajos en demostración, puesto que se constituye en un primer acercamiento a la necesidad de demostrar. Sin decir con esto que la sola necesidad conduce a la comprensión del razonamiento deductivo y menos a la demostración. Por otro lado, es evidente la relación existente entre el empirismo ingenuo y la aprehensión perceptiva.

- Experiencia crucial: se consolida una conjetura porque se escoge un caso, con características extremas, en el cual se verifica que esta se cumple. Este tipo de razonamiento surge ante la necesidad de generalizar un hecho ya sea para

---

son entendidos como estados sobre los cuales un estudiante debe avanzar y para ello el autor presenta las condiciones que caracterizan este proceso.

lograr el convencimiento personal y generar una conjetura o para defenderse contra una oposición

Aquí se exhibe un avance en la comprensión del funcionamiento del razonamiento deductivo, pues al generalizar sobre un ejemplo concreto, los estudiantes establecen la necesidad de su conjetura, es decir afirman que si no se cumple, puede llegar a contradecir algo que saben que es cierto. De otra parte, puede observarse en el trabajo realizado por los estudiantes avances en los tratamientos de la operación operatoria.

Pruebas intelectuales: los estudiantes se apoyan en propiedades y relaciones geométricas. El proceso se fundamenta en la toma de conciencia del carácter genérico de las situaciones consideradas. Los estudiantes se alejan de acciones específicas que dan solución a casos particulares y del proceso de solución, para convertir el conocimiento en objeto de reflexión y discusión.

- Ejemplo genérico: se produce una conjetura y se llega a la validez de ésta después de estudiar un caso que se supone es representativo de la clase. Tal estudio lleva a la realización de acciones sobre las representaciones hechas, las cuales determinan la conclusión a la que se llega al poner de presente las características y estructura de la clase en estudio.

El ejemplo genérico marca la transición de los procedimientos pragmáticos a los procedimientos intelectuales al pasar de acciones efectivas sobre representaciones hacia la descontextualización o ruptura con el mundo sensible que elimina la atención en lo particular. Estas últimas están en la génesis de operaciones formales y son necesarias para la demostración.

- Experiencia mental: se produce una conjetura y se afirma la validez de ésta interiorizando la acción, separándola de las ejecutorias sobre un representante particular.

De aquí, es importante reconocer el paralelo existente entre estas formas de validar en geometría y las formas de aprehensión de las figuras. Se evidencia además que, es en virtud de este mismo paralelo, que se puede establecer la necesidad de un trabajo sobre la aprehensión operatoria para lograr el afianzamiento de las propiedades geométricas.

En este sentido, es posible considerar la etapa de búsqueda y discusión de propiedades, como el intento por conseguir lo que Balacheff (2000) ha denominado prueba, entendida como una explicación convincente para cierta comunidad, en cierto momento. Es evidente que la comunidad la constituyen los estudiantes enfrentados en una clase a los diversos tipos de actividades vistos anteriormente. Esta etapa por lo tanto, apunta a que los estudiantes sientan la necesidad de probar, a su comunidad inmediata por lo menos, sus conjeturas, aspecto fundamental en la comprensión del funcionamiento del razonamiento deductivo más no el único, como veremos más adelante.

II.3.2.2 Puesta en común

Conviene aquí explicitar la labor de un docente que quiera incorporar esta propuesta, en términos del rol que deberá jugar en el desarrollo de la clase. Esto es, dejar de ser el actor principal en la escena, permitiendo a los estudiantes desarrollar su trabajo autónomamente, constituyéndose en un guía y organizador del aprendizaje. En este sentido, el carácter de las situaciones propuestas por el docente se transforma, de instruccional (tipo, “pruébese que…”) a experimental.

El primer diagnóstico acerca de cuáles podrían ser los orígenes de la dificultad para enseñar y aprender la demostración en matemáticas ha sido formulado en términos de la naturaleza del contrato didáctico que emerge naturalmente de las posiciones del estudiante y el docente con respecto a los saberes en juego. Dado que el docente es el garante de la legitimidad y de la validez epistemológica de lo que se construye en la clase, eso parecería implicar que el estudiante se vería privado de un acceso auténtico a una problemática de la verdad y de la prueba. La superación de esta dificultad inherente a los sistemas didácticos puede ser investigada en situaciones que permiten la devolución a los estudiantes de la responsabilidad matemática sobre sus producciones, lo que significa la desaparición del docente de los procesos de toma de decisión durante la resolución de un problema en favor de un esfuerzo de construcción de medios autónomos de prueba por parte de los estudiantes. (Balacheff, 1999)

A este respecto, una vez devuelta la responsabilidad de la verdad a los estudiantes se caracterizan dos tipos de trabajo, para cumplir tal fin: *situaciones de decisión* y *situaciones de validación.*

> *[…]Situaciones de decisión* o actividades en las cuales se invita a la construcción de conjeturas con el fin de diseñar una estrategia a seguir en la resolución de una situación problema y *situaciones de validación* o actividades en las cuales el estudiante socializa sus explicaciones acerca de una afirmación, un paso en el camino a lo que es la demostración (Camargo, L.; Leguizamón, C. & Samper, C. 2003, p. 19).

Este tipo de situaciones son las que se propone hagan parte de las dinámicas de una clase, en dos sentidos, el primero de ellos tiene que ver con la potencia heurística, trabajo con la aprehensión operatoria, de las situaciones de decisión. El segundo sentido, alude al lugar de la verdad, este se reconoce en los estudiantes por medio de las situaciones de decisión, en la cuales estos deben socializar sus afirmaciones sobre determinada proposición.

II.3.2.3 Lineamientos generales de segunda etapa

Con el objeto de potenciar la comprensión del funcionamiento del razonamiento deductivo, mediante la discusión y búsqueda de propiedades además de la puesta en común, se presentan unos lineamientos generales que retoman y concretan la teoría expuesta anteriormente:

Se pueden plantear situaciones de decisión que apunten a realizar construcciones, de las cuales las conjeturas sean el producto.

- Dada la importancia de desplazar el lugar de la verdad del docente hacia los estudiantes, resulta pertinente proponer actividades de discusión donde se confronten los enunciados con las figuras correspondientes.
- Se han de plantear situaciones que tenga como elementos constitutivos la necesidad de justificar su resolución, para ello deben estar cargados de preguntas motivadoras y desafiantes, al mismo tiempo la solución de cada situación debe constituirse en una base para la solución de otras.

II.3.3 Tercera etapa

Lo que se pretende establecer en esta etapa es la indiferenciación entre valor epistémico teórico y valor epistémico semántico de una proposición. Partiendo de este principio fundamental; el estudiante descubre y comprende el funcionamiento del razonamiento deductivo pasando por un registro no discursivo: los grafos proposicionales.

II.3.3.1 Construcción de grafos proposicionales

Enmarcando a los grafos dentro de la teoría del aprendizaje visual, este se define como un método de enseñanza que utiliza un conjunto de organizadores gráficos tanto para representar información como para trabajar con ideas y conceptos, que al utilizarlos ayudan a los estudiantes a pensar y a aprender más efectivamente (Eduteka, 2007).

En este sentido, un grafo podría definirse como un registro no discursivo que privilegia la aprehensión sinóptica o vista global de las proposiciones que intervienen en la demostración, al organizarlas de acuerdo a su estatus operatorio. Es así como, los grafos proposicionales aparecen en esta perspectiva de trabajo en la enseñanza de la demostración como un registro de representación que apoya la comprensión de aquello que es objeto de análisis en un razonamiento. Su uso se basa en el hecho de que para comprender lo que una representación discursiva presenta (enunciado en lengua natural) es necesario el paso por una representación no discursiva (Duval, 2004b).

La construcción de dichos grafos se rige por las siguientes reglas:

- De una hipótesis parte una flecha (no llega)
- Del y al tercer enunciado parten y llegan flechas
- Llega una flecha a la conclusión, siempre y cuando sea la conclusión final, en el caso contrario, parte una flecha.

Se presenta un ejemplo de este fenómeno, mediante un modelo de grafo proposicional para demostrar un teorema de concurrencia de rectas (Duval, 1993).

Teorema:ABCD es un paralelogramo *de centro O. M y J son los puntos medios de AD y DC, respectivamente. Demostrar que las rectas AJ, CM y BD son concurrentes.*

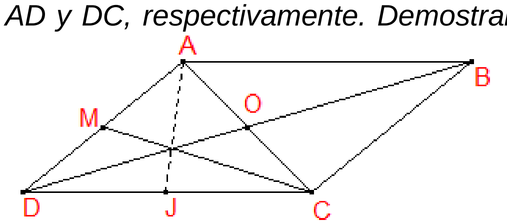


Figura 1. Enunciado y representación gráfica del teorema de la concurrencia de las rectas dadas.

Grafo proposicional:

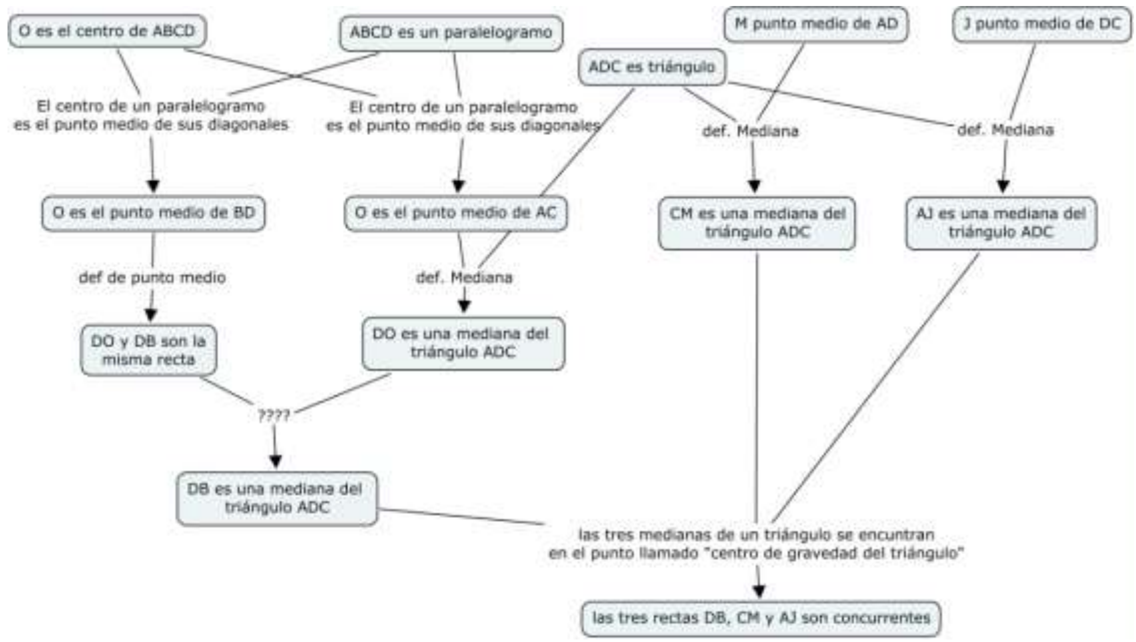


Figura 2. Grafo proposicional que presenta una demostración al teorema propuesto.

En este grafo las hipótesis se encuentran en la primera línea: *O es el centro de ABCD, ABCD es un paralelogramo, M punto medio de AD y J punto medio de DC*; de ellas parten solo parten flechas. Se presenta una hipótesis intermediaria: *ADC es un triángulo*. Luego aparecen los terceros enunciados: *El centro de un paralelogramo es el punto medio de sus diagonales y definición de mediana*. Estos terceros enunciados, no se encierran para explicitar su estatus operatorio, a ellos llegan flechas de las hipótesis y parten flechas hacia las conclusiones, exhibiendo el paso de deducción que termina en las conclusiones: *O es el punto medio de BD, O es el punto medio de AC, CM es una mediana del triángulo ADC y AJ es una mediana del triángulo ADC*. Estas conclusiones de los pasos anteriores se encierran para mostrar que se convierten en hipótesis del siguiente paso, aquí se evidencia la operación de "reciclaje", que da cuenta de la progresión hacia el enunciado-objeto. Nuevamente aparecen dos terceros enunciados: *definición de mediana y definición de punto medio*, los cuales permiten concluir respectivamente que *DO y DB son la misma recta y que DO es una mediana del triángulo ADC*, estas conclusiones de nuevo se encierran y producen al final del paso la conclusión intermediaria: *DB es una mediana del triángulo ADC.* Se presenta otro nuevo paso que retoma esta última conclusión intermediara y las conclusiones: *CM es una mediana del triángulo ADC y AJ es una mediana del triángulo ADC* junto con el tercer enunciado: *las tres medianas de un triángulo se encuentran en un punto llamado "centro de gravedad del triángulo*" para producir la conclusión final, enunciado-objeto, de la cual no parten flechas.

II.3.3.2 *Redacción de la demostración*

Dado que, es importante que los valores epistémicos teóricos se diferencien de los valores epistémicos semánticos y que estos últimos ya no se asimilen a los valores de verdad, la redacción en lengua natural de la demostración se presenta como una traducción del grafo, privilegiando actitudes proposicionales (frases cortas provistas de un verbo, como: puedo concluir, ya demostré que, tengo que…) que marcan el estatus operatorio de las proposiciones.

Lo anterior implica, comprender como se puede marcar lingüísticamente la organización de un paso de razonamiento y el encadenamiento de pasos de razonamiento, Duval (1993), recalca que el recurso a los conectores es inútil y no pertinente, pues la organización local depende del estatus teórico previamente fijado para cada proposición a utilizar. Y, el estatus de una proposición no determina su valor de verdad sino su valor epistémico.

En este sentido, la opción propuesta para expresar la articulación de las proposiciones en un paso de deducción, es expresar el valor epistémico correspondiente al estatus teórico que determina el operatorio, empleado verbos de actitudes proposicionales "es necesario que, puedo concluir que..."

En cuanto a la organización global se plantea para la redacción en lengua natural del razonamiento deductivo que los enunciados de todas las conclusiones intermediarias pueden ser omitidos, en general, todo lo que concierne al nivel local puede ser omitido. Las expresiones irreducibles son las del nivel de la organización global. La expresión del razonamiento deductivo puede entonces variar entre dos extremos: se omite todo lo relacionado con la organización local de cada paso o se explicita.

II.3.3.3 *Lineamientos generales de la tercera etapa*

Podría pensarse en principios o lineamientos que materialicen esta etapa.

1. Es necesario pasar por un registro no discursivo, como es el de los grafos proposicionales; esto, por dos razones. La primera, para no caer en el círculo vicioso de explicar un discurso por medio de otro discurso explicativo, es decir, quedar encerrado en el mismo registro. La segunda, esa aprehensión sinóptica o vista global del grafo corta la linealidad del discurso, indispensable para su recontextualización (Ponce de León, 2007).
2. Evitar caer en el recurso de redactar haciendo uso de los conectores pues estos son generalmente usados para explicitar inferencias semánticas propias de la lengua natural, lo cual podría causar que lo estudiantes asemejen argumentación y razonamiento deductivo, los cuales aquí son claramente diferenciados.
3. La demostración debe redactarse como una traducción del grafo utilizando actitudes proposicionales, esto con el fin de recuperar los valores epistémico, ocultos por el grafo.

II.4 Manuales

Para lograr que la propuesta didáctica planteada anteriormente se pueda aplicar en el aula se establece como intención primordial del presente del proyecto la construcción de un manual para uso de docentes en ejercicio, el cual deberá funcionar como vínculo entre las investigaciones aquí retomadas y la práctica escolar. El manual puede pensarse entonces como *recurso pedagógico;* pues según Arce, et al, (2010), los recursos pedagógicos funcionan como instrumentos que evolucionan al interior de una comunidad de práctica, ello implica que la estructura de estos puede ser visualizada con su implementación en el salón de clase; en este sentido proveer recursos permitirá a los profesores hacer la transición hacia la acción pedagógica.

En virtud de lo anterior, de las dimensiones que se han de considerar para dar cuenta del manual como recurso pedagógico, se destaca la dimensión ecológica pues esta da cuenta de las condiciones ambientales en las que se va a mover el dispositivo de formación, a saber: los contenidos, las características de la institución y la organización del espacio escolar; más aun de entre todos los aspectos que aluden a la dimensión ecológica, se privilegian, dado los alcances de este trabajo, las condiciones que aluden a los contenidos.

De otra parte, en el trabajo de Trouche y Guin, en Arce, et al, (2010) se describen los recursos pedagógicos bajo tres componentes: un conjunto de documentos, la situación matemática y el aprovechamiento didáctico. El primero de estos componentes ha sido objeto de desarrollo en las dos primeras partes de este capítulo y como se vio ha girado en torno a la presentación de una perspectiva semiótico-cognitiva del aprendizaje del razonamiento deductivo, en particular las condiciones para el desarrollo de éste en la clase de geometría. El segundo elemento tiene que ver con lo que se presenta más adelante (capítulo 3, segunda parte) y está asociado con la selección de dos teoremas cuya presentación es común en la geometría escolar: el teorema de Pitágoras y el teorema de Tales, a través de diversas situaciones que se retoman de algunos trabajos recientes en este campo. Finalmente, la propuesta didáctica se ha desarrollado en la tercera parte de este capítulo y se complementa con algunos elementos desarrollados en la primera parte del siguiente capítulo, y se basa fundamentalmente en la propuesta Duval – Egred la cual ha sido ampliamente desarrollada por la Ponce De León (2007). Estos elementos han de permitir sustentar entonces esta propuesta de manual como recurso pedagógico, al establecer las condiciones en las cuales se han de conjugar dichos elementos para efectos de su formulación, la cual se considera ha de constituirse en una herramienta potente de trabajo para el profesor. Así desde esta perspectiva el manual debe aparecer como un conjunto de proposiciones para la organización del trabajo del profesor.

En consecuencia, las proposiciones que se plantean aparezcan en el aludido manual, pueden aportar a la organización del trabajo docente, si y solo si: presentan los principales aspectos teóricos que sustentan su elaboración, y si logran dar cuenta de una estructuración cognitiva, curricular y didáctica que responda a la propuesta de Duval-Egret sobre la enseñanza inicial de la demostración; lo anterior debe reflejarse en los contenidos matemáticos allí expuestos.

Todas las reflexiones anteriores, fruto de arduas tareas de revisión y confrontación de diversas posturas teóricas, su adecuación y organización para consolidar un marco de trabajo pertinente para este proyecto, ahora necesitan ser puestas en juego en un ejercicio de análisis y de construcción, que les dé un lugar dentro de las prácticas docentes y las experiencias de aula reales a las que se enfrentan los profesores. Ese es el propósito del siguiente apartado.

III. CONSIDERACIONES QUE PERMITEN LA ELABORACIÓN DE UN MANUAL PARA LA ENSEÑANZA DE LA DEMOSTRACIÓN

Todo lo anterior ha de conducir entonces a la formulación de la estructura de un manual publicable, cuya intención es de garantizar la comunicabilidad de los elementos teóricos aquí expuestos a un público no experto en esta terminología. Pero antes es preciso señalar que la publicación efectiva del manual involucra procesos y requerimientos que escapan a las posibilidades de un trabajo de grado como este, por lo cual se presenta a continuación la mayoría de los aspectos a incluir en dicha estructura, es decir, aquellos elementos que han de constituir el contenido del manual, para lo cual se usaran dos estilos: unos contenidos serán expresamente presentados y otros serán mencionados solamente, es decir, se dará una descripción de ellos mas no su presentación exacta, esto por dos razones: primero, muchos de dichos contenidos son los que ya han sido expuestos en diversos apartes de este proyecto por lo cual incluirlos sería una repetición innecesaria, y segundo, la estructura del manual como un nuevo texto ha de exigir, por ejemplo, ciertos ajustes en los títulos o en las formas de redacción de dichos contenidos y tales ajustes no se podrán hacer sino en el momento de la edición final del manual.

Las condiciones que determinan la estructura del manual tienen que ver fundamentalmente con las características que para este se han presentado (supra II.4) entendiéndolo como un recurso pedagógico que ha de garantizar el vínculo entre la investigación y la práctica escolar, que fue uno de los ejes sobre los que se fundó este proyecto, esto se ha de lograr al garantizar las tres componentes expuestas por Trouche: un conjunto de documentos, la situación matemática y el aprovechamiento didáctico; en un ejercicio que además sustente aspectos relativos a la dimensión ecológica y el hecho, central, de estar orientado hacia los profesores en ejercicio. Como se ve, no se tienen restricciones de forma o adecuación tipográfica o textual asociadas al manual.

En este sentido entonces parece posible avanzar la tesis de que un manual para docentes debe constituirse respondiendo básicamente a una necesidad de comunicación entre un autor-experto[8] y un auditorio que posee las cualidades necesarias para interpretar el mensaje y las actitudes para modificar sus acciones en consonancia con dicha interpretación.

III.1 Estructura del manual

Bajo estas condiciones la organización de la información a presentar y las decisiones que se tomaron, son el producto de un ejercicio de reflexión de los autores en procura de establecer los mecanismos para que su mensaje sea presentado de manera tal que se cumplan los propósitos de la exposición que ha preparado. Por lo tanto, en el manual que se está presentando será necesario incluir:

1. Una parte introductoria, que deje claramente establecidos los propósitos, alcances y características del texto que se está presentando.
2. Una parte que presente los orígenes de la problemática sobre el proceso de enseñanza de la demostración en la escuela, así como una versión actual de las discusiones que alrededor de este tema se vienen adelantando por diferentes comunidades de investigadores.
3. Una parte que sustente la orientación teórica adoptada, en la que queden expresadas sus características, sus potencialidades y limitaciones para efectos de su implementación como una alternativa de trabajo en clase en lo señalado en la parte anterior, además que ilustra, analiza y propone situaciones que actualizan todas las reflexiones que se han desarrollado, se trata entonces de una presentación de situaciones ejemplarizantes, es decir, situaciones que a modo de ejemplo intentan poner en acto las discusiones realizadas con la necesaria

[8] Entendiendo esta palabra en el sentido más natural del término, es decir, considerar a una persona como experta en un tema pasa por reconocer en ella ciertos recorridos teóricos o experienciales que le hacen poseedor de ciertas informaciones, susceptibles de transformarse en competencias o mecanismos de acción, referentes a un tema particular, tan restringido como le obliga la información que posee.

aclaración sobre los alcances que tiene un ejemplo: se trata, con dicha aclaración, de no confundir el ejemplo con la situación ejemplificada.

III.1.1 **Contenidos**

III.1.1.1 Presentación

Este documento es producto de la reflexión y el análisis que los autores han realizado sobre la tesis de Ponce de León (2007) donde se presentan los aspectos más relevantes de la propuesta que realizan Duval y Egret (1993) sobre la enseñanza de la demostración desde una perspectiva cognitiva. La intención de este documento es entonces presentar los elementos teóricos de manera simultánea con algunas actividades que han sido seleccionadas con el fin de ilustrar cada una de las tres etapas de la propuesta que conducen a aprender a demostrar, particularmente en geometría. De ahí, la intención que este manual este dirigido a docentes en ejercicio y a cualquier persona que tenga interés en el campo de la educación matemática.

Nos propusimos acercar al aula una propuesta para la enseñanza de la demostración que regularmente se queda entre comunidad académica, este trabajo pretende ser otro de los esfuerzos por cualificar la profesión de quienes mantengan un interés por hacerlo. La invitación en este sentido, es que los docentes enfrentados a esta propuesta reflexionen en torno a sus realidades de aula, para efectos de operativizar lo que aquí aparece, ajustando esta propuesta al PEI y plan de estudios propio de cada institución.

Para lograr lo anterior, el presenta manual aborda los procesos de enseñanza y aprendizaje de la demostración en tres partes: una primera donde se exponen los aspectos generales sobre el razonamiento deductivo y los trabajos en demostración en geometría que debe ser discursiva; una segunda parte que abarca los elementos teóricos de la perspectiva cognitiva y las tres etapas de la propuesta didáctica de Duval-Egret (1993) y por último una tercera parte donde se exponen situaciones sobre los teoremas de Tales y Pitágoras las cuales se encuentran contextualizadas en el marco de las reflexiones de la perspectiva semiótica.

III.1.1.2 Primera parte

En la primera parte, se presenten aquellos aspectos generales del problema de indagación (supra I.1-I.2) que aluden: a iniciar los trabajos en demostración en geometría, a entender el funcionamiento del razonamiento deductivo y el tipo de geometría que se espera hagan los estudiantes, esto es, que realicen conversiones entre los distintos registros de representación: la lengua natural, el registro figural y el lenguaje simbólico. Reconociendo que la posibilidad de realizar conversiones, presenta una característica interesante a nivel cognitivo, al considerar que los objetos matemáticos solo son accesibles por medio de sus representaciones semióticas. De otra parte, la geometría que se espera aborden los estudiantes, es discursiva porque en esta los resultados se validan deductivamente y no solo se establecen como verdades producto de observaciones y mediciones.

III.1.1.3 Segunda parte

En cuanto a la segunda parte, de los elementos teóricos en el manual se presenta una síntesis de la perspectiva semiótica (supra II.1) que retome: la caracterización de la actividad matemática, una presentación del razonamiento deductivo como subyacente a la demostración, los análisis del razonamiento, junto con sus condiciones generales (supra II.1.1-II.1.5).

La síntesis de la perspectiva semiótica presenta la naturaleza de los objetos matemáticos, la comprensión de dichos objetos en términos del funcionamiento cognitivo que suponen, estableciendo las consecuencias de lo anterior para la enseñanza de la demostración, específicamente aquellas que aluden a los análisis que sobre el razonamiento que le subyace se tienen, estos análisis responden a las siguientes preguntas: ¿Qué función cumple un razonamiento? ¿Qué operaciones se requieren para llevar a cabo este tipo de desarrollo discursivo? ¿En qué se fundamenta la validez de un razonamiento? Además de ¿Qué tipo de saberes científicos produce? Además, fundamentan la propuesta didáctica para la enseñanza de la demostración, descrita en algunos lineamientos generales.

III.1.1.4 Tercera parte

En cuanto a la tercera parte, de las situaciones que ejemplifican o ilustran las reflexiones que en lo teórico se han venido desarrollando, al igual que se presentan algunas consideraciones de orden curricular.

Consideraciones de orden curricular

Una de las principales inquietudes que surgen al momento de presentar esta propuesta de trabajo para la introducción del razonamiento matemático, en particular la demostración matemática, tiene que ver con la organización de las acciones y reflexiones que se dan en el marco de la enseñanza básica colombiana. Por lo cual es necesario incluir algunas consideraciones relacionadas con la política curricular colombiana y con las condiciones particulares del trabajo en clase de matemáticas actualmente, que tienen que ver con los tiempos destinados a las clases de matemáticas, las diferentes y variadas formas de pensar la planeación educativa, los recursos con los que cuentan los profesores de matemáticas, entre otros.

Precisar las consideraciones de orden curricular para la implementación de la propuesta, requiere entonces presentar la concepción que tiene el Ministerio de Educación Nacional sobre la enseñanza de la geometría, esto es, explicitar las condiciones particulares del trabajo en clase; observando cómo la descripción de lo que se denomina “razonar” en matemáticas, se relaciona con la propuesta aquí explicitada.

El Ministerio de Educación Nacional sugiere el enfoque de la geometría activa que parte de la actividad del estudiante y su confrontación con el mundo. Se da prioridad entonces a la actividad sobre la contemplación pasiva de figuras y símbolos, a las operaciones sobre las relaciones y elementos de los sistemas y a la importancia de las transformaciones en la comprensión aun de aquellos conceptos que a primera vista parecen estáticos (MEN, 1998).

Se puede constatar que este tipo de geometría no está desligada de la propuesta cognitiva de Duval-Egret (1993), en tanto que en ambas es claro que el trabajo sobre las figuras toma un valor privilegiado, específicamente el paso por las distintas aprehensiones, logrando con esto dejar a un lado la concepción de que los objetos geométricos son estáticos y acabados.

En cuanto a las formas de planeación educativa cabe anotar que el MEN (2006) definió los Estándares Básicos en Competencias los cuales se clasifican por ciclos de escolaridad, a saber, para la educación básica: primero a tercero, cuarto a quinto, sexto a séptimo, octavo a noveno, y para la educación media décimo a undécimo. Por otro lado, el MEN (2006) también resalta que es conveniente que las situaciones de aprendizaje propicien el razonamiento al formular hipótesis o conjeturas, al intentar comprobar la coherencia de una proposición con otras aceptadas previamente como teoremas, axiomas, postulados o principios, o al intentar refutarla por su contradicción con otras o por la construcción de contraejemplos. Pese a que lo anterior no se presenta para un grado en especial, es posible encontrar algunos estándares para ciclos específicos:

Sexto a séptimo

- Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales. (p. 84)

Octavo a Noveno

- Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.
- Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales).
- Aplico y justifico criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas. (p. 86)

De esta manera, la propuesta de la enseñanza inicial de la demostración atañe al ciclo de sexto a séptimo y octavo a noveno[9]. En el primero se espera que se desarrolle la etapa heurística (etapas uno y dos) y en el segundo que se aborde la etapa tres (fase deductiva) sobre redacción de la demostración.

De otra parte, tanto en el sector oficial como en el privado de la educación colombiana se asigna generalmente una intensidad horaria de cinco horas semanales para matemáticas, que según cada institución educativa se ajusta para abarcar los cinco pensamientos, así como sus respectivos sistemas, definidos por los lineamientos curriculares (MEN, 1998): numérico y sistemas numéricos, geométrico y sistemas geométricos, métrico y sistema de medidas, aleatorio y sistema de datos, variacional y sistemas algebraicos y sistemas analíticos. De ahí, es deseable que se dedique en promedio una hora semanal para cada grado a la implementación de la propuesta, de tal manera que haya una coherencia entre los tiempos y se logre abordar la tercera etapa al finalizar el grado noveno.

Finalmente, se retoman las anteriores consideraciones en un tabla que intenta sintetizar y operativiza cada uno de los aspectos cognitivos, didácticos y curriculares aquí presentados.

[9] Las edades promedio de los estudiantes de estos dos ciclos oscilan generalmente entre los 12 y 15 años.

Tabla 2. Relación entre las etapas y las fases.

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">Fase heurística</td><td>Fase deductiva</td></tr>
<tr><td>Etapa 1</td><td rowspan="2">Triple diferenciación</td><td>Cognitivamente se diferencian los estatus operatorios y los pasos, así como se comprende la estructura si-entonces de las proposiciones matemáticas por ende del tercer enunciado, cuando se trabaja en la formulación de conjeturas y la distinción del antecedente y el consecuente.</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>Etapa 2</td><td>En la discusión y búsqueda de propiedades, así como en la puesta en común, aparecen oportunidades para que se diferencien el valor epistémico teórico, del valor semántico de las proposiciones.</td></tr>
<tr><td>Etapa 3</td><td colspan="2"></td><td>Descubrimiento y comprensión del razonamiento deductivo a través de los grafos proposicionales y recuperación de los valores epistémicos en la redacción en lengua natural.</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Grados sexto y séptimo</td><td>Grados octavo y noveno</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">Curricular</td></tr>
</table>

Tabla 2. Sintetiza y operativiza las etapas con la triple diferenciación a nivel cognitivo, así como la ruptura entre las fases heurística y deductiva vistas desde lo curricular.

Las etapas aquí señaladas y desarrolladas teóricamente en supra II. Ahora son presentados en diversas actividades que señalan su aspecto práctico.

La etapa 1: actividades que promueven su implementación

Se presentan la construcción y exploración de figuras, formulación de conjeturas y distinción del antecedente y el consecuente, dos actividades que promueven su implementación así como ejercicios para cada componente de la propuestos al lector.

La primera etapa para la enseñanza de demostración, al tratar la construcción y exploración de figuras remite al paso por diferentes aprehensiones figurales, lo cual necesariamente implica revisar la influencia de la visualización en las relaciones geométricas. Al respecto, Gómez y Grueso (2010) muestran que la visualización consolida una forma de aprehensión de la realidad, determinando la acción matemática en una situación; y además, proporciona elementos en la manipulación de conceptos necesarios en la resolución de problemas. Ésta, por tanto, trasciende a la visión inmediata, requiriendo interpretar lo presentado a contemplación, lo cual depende del tipo de comunicación que la sustenta. Este último aspecto, referido a la comunicación, delimita los enunciados posibles para las actividades que han de plantearse con respecto a las figuras. .

a) Construcción y exploración de figuras

Se debe propender por actividades que permitan reconocer el potencial de las figuras en términos de variaciones y combinaciones de las unidades figurales elementales. Además, las actividades deben dar pie para que se promuevan los tipos de aprehensiones que son susceptibles de sugerir la solución deseada. A continuación, se presenta una actividad que ejemplifica las condiciones aquí vistas en cuanto a la aprehensión perceptiva.

Formule la relación matemática presente en las figuras.

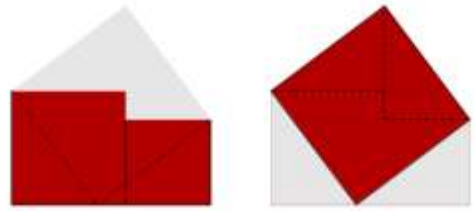


Figura 3. Situación introducida para el trabajo con el Teorema de Pitágoras. Hace parte de las múltiples "demostraciones visuales" que se conocen de este famoso teorema. Alegría, P. (sf).

La organización perceptiva de una figura privilegia el reconocimiento de ciertas unidades figurales y tiende a ocultar otras (Duval, 2004b); en el caso de la situación anterior, se deben poder distinguir los dos triángulos que se han de "desprender" de los cuadrados dados y reconocerlos como idénticos a los dos que permiten la reconfiguración de las subfiguras en el cuadrado final; dicho reconocimiento y la posterior reconfiguración son operaciones relativas a las modificaciones posibles de una figura que no son ni evidentes ni espontáneas, han de ser objeto de un proceso de aprendizaje de parte de los estudiantes organizado por el maestro. Entonces explorar, con los estudiantes, las condiciones que inhiben o fomentan la aprehensión perceptiva ha de ser una de las tareas centrales en esta etapa.

Reorganización de las figuras que permiten ver la relación matemática

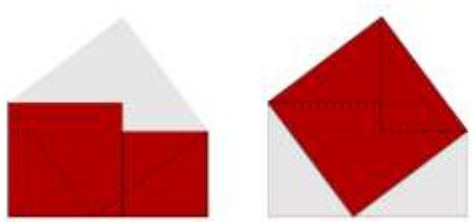
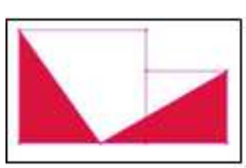
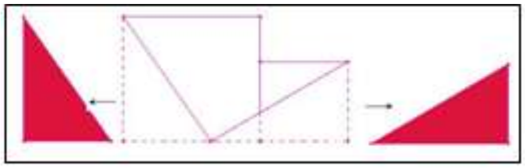


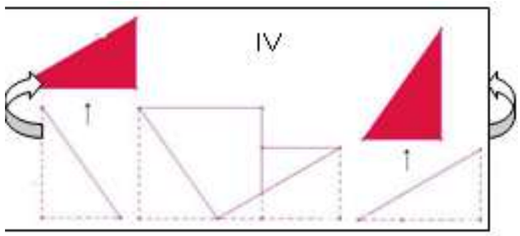
Figura inicial. En ellas se señalan con segmentos punteados las hipotenusas de los triángulos que han de separarse, además se presenta el cuadrado final con una sombra.



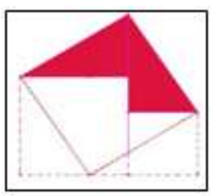
En esta se han remarcado los dos triángulos que serán objeto de transformaciones.



Se muestra en esta figura el inicio del proceso de transformación: una traslación que para cada triángulo se determina por un vector paralelo a sus bases.



En esta se muestra una combinación de dos transformaciones: una traslación determinada por los catetos verticales de cada triángulo y una rotación de 90º según los sentidos señalados.



Finalmente, una traslación (inversa a la inicial) aplicada a los dos triángulos permite ver los cuadrados buscados.

Toda esta serie de trasformaciones, sus características y modos de empleo, son entonces algunas de las acciones que tendrían que adelantarse en un proceso de enseñanza que busque rescatar el rol que tienen las figuras y su manipulación en la solución de problemas de la geometría y en los procesos relacionados, como el razonamiento.

Para el caso del Teorema de Pitágoras existen múltiples situaciones que dejan ver la complejidad, y por ende lo necesario, de este asunto; citamos, como ejemplo para que el lector revise estas reflexiones, la demostración de Bhascara que aparece en Balacheff (2000, p21):

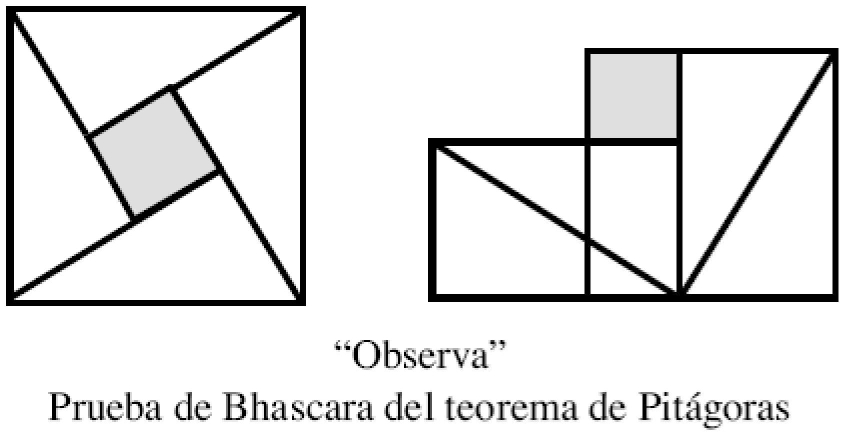


Figura 4. Ejercicio de determinación de subfiguras

Esta forma de acceder a las figuras que se propone trabajar con los estudiantes encuentra complementos en los otros dos tipos de aprehensiones descritas anteriormente (supra II.3.1.1): la operatoria y la discursiva. Se presentan entonces dos actividades en las que se puede ver la puesta en escena de las aprehensiones operatoria y discursiva.

Dado un triángulo ABC verifique que la mediana BD lo divide en dos triángulos de igual área.

Figura 5. Situación que presenta uno de los resultados fundamentales de la geometría del triángulo. Su estudio aparece generalmente con el estudio de las líneas notables del triángulo

La siguiente secuencia de subfiguras aplica una serie de modificaciones ópticas, que están asociadas a la aprehensión perceptiva (supra II.3.1.1), como una forma de acercarse a la solución del problema propuesto. En dicha secuencia se puede ver como los factores de visibilidad[10,] en particular aquel que tiene que ver con el recubrimiento parcial[11], apoyan el reconocimiento de las subfiguras

---

[10] Factores que aumentan o disminuyen la visibilidad de determinadas operaciones, cuya aplicación sobre la figura permite transformarla en otra, con una organización perceptiva que permite utilizarla con mayor potencia en la resolución de un problema determinado, a estos factores se les conoce con el nombre de factores de visibilidad (Marmolejo, 2003).

[14] El hecho que una misma parte elemental deba entrar simultáneamente en dos reagrupamientos

pertinentes, dado que ninguna de tales subfiguras se recubre entre ellas lo cual facilita la observación de las propiedades y resultados que se ponen en juego.

Construcción que pone en juego la aprehensión operatoria y los factores de visibilidad

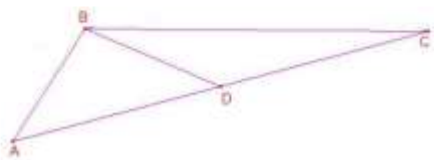
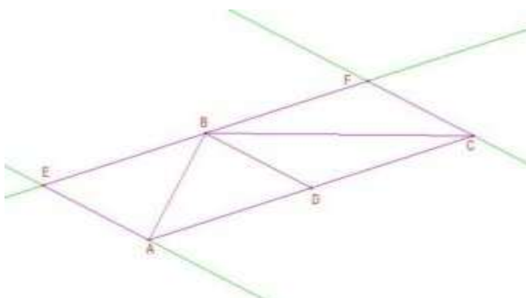
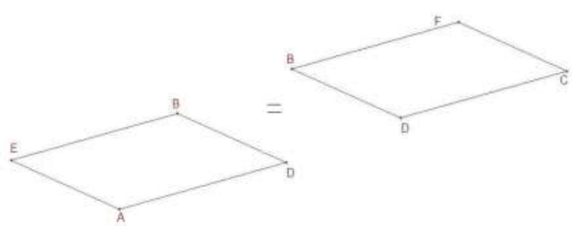


Figura inicial, en la cual se plasman las hipótesis del problema, es decir, se tiene un triángulo sobre el cual se ha trazado una mediana.



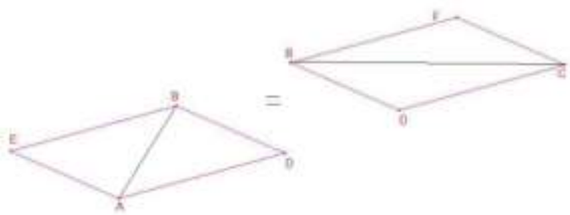
Como una parte central en esta parte, **la construcción** juega un papel fundamental, ya que permite el trazo de paralelas a la base y a la mediana del triángulo que determinan un paralelogramo sobre el cual han de girar las reflexiones siguientes.



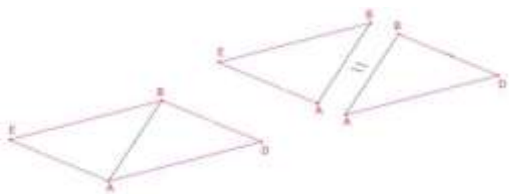
Primer par de subfiguras a comparar: los dos paralelogramos determinados por la mediana en el nuevo paralelogramo construido. Son iguales en virtud de las construcciones realizadas.

---

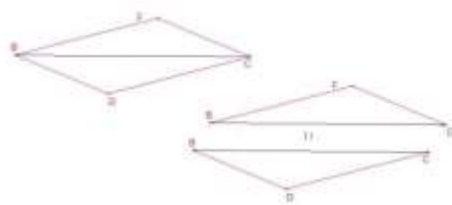
intermediarios a comparar. Es esto lo que se ha llamado el obstáculo de desdoblamiento de los objetos, es una práctica tan trivial como necesaria en la identificación de un mismo objeto bajo varias expresiones o puntos de vista diferentes, constituye un obstáculo que una buena parte de los estudiantes no cesa de encontrar en las diversas situaciones de aprendizaje que le son planteadas.

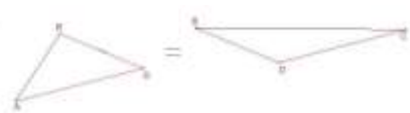


Esta figura presenta la misma situación anterior, solo que los trazos que se reintroducen hacen entrar en juego los triángulos sobre los cuales trata la conclusión buscada.



En esta, y en la siguiente, se presentan dos triángulos que son iguales en virtud de la propiedad conocida para la diagonal de un paralelogramo.





Basta entonces aplicar dos nociones comunes para concluir el resultado buscado.

La aprehensión operatoria, o mejor, su desarrollo por parte de los estudiantes ha de permitir que el trabajo con problemas en geometría la figura se convierta en un soporte para la búsqueda de un camino de solución, es decir, la figura y lo que de ella se le hace visible al estudiante le ha de permitir explorar con miras a anticipar la conjetura, esto pues se constituye en un problema abierto que promueve una conjetura basada en la percepción.

De la misma forma, se presenta una actividad que en su resolución involucra tratamientos propios de la aprehensión discursiva, la cual en su enunciado pone en evidencia como la existencia o no de congruencia entre figura y enunciado, facilita o no, por lo menos cognitivamente la resolución de un problema.

A'C' y AC son paralelas,
A'B' y AB son paralelas,
B'C' y BC son paralelas,
Probar que A es el punto medio de B'C

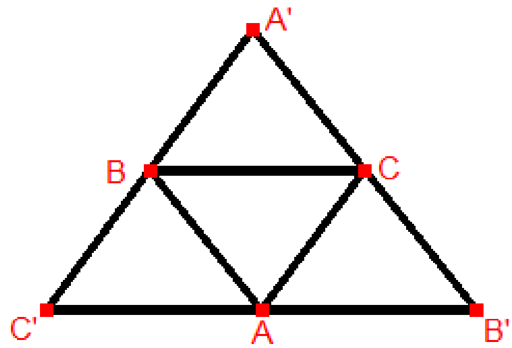
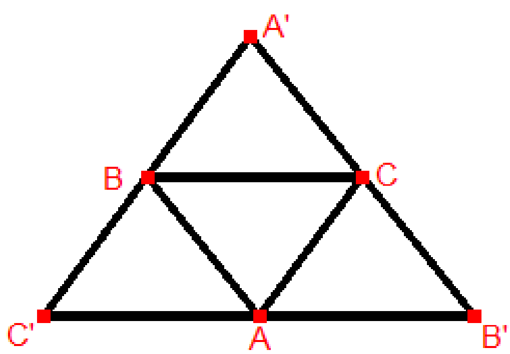
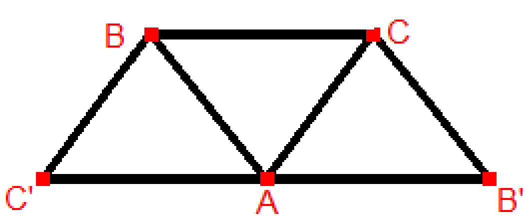


Figura 6. Situación que presenta una organización de subfiguras que permite la prueba del enunciado. **Nota.** Fuente: Duval (2004b).

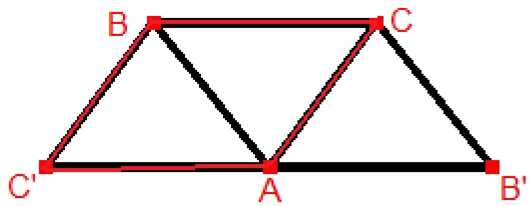
Reorganización de las subfiguras para determinar la solución.



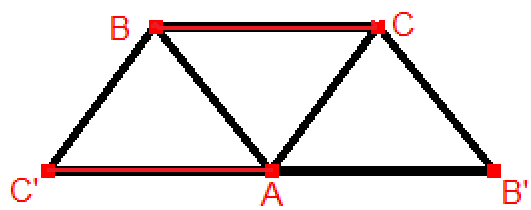
Se pide probar que A está en la mitad de C'B'. Para ello se considera el cuadrilátero C'BCB'



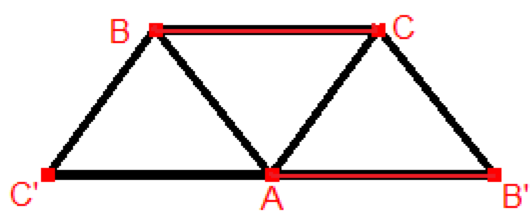
Por lo anterior, resolver el problema propuesto implica en primera instancia centrar la atención en este conjunto de subfiguras de la **Figura 4**.



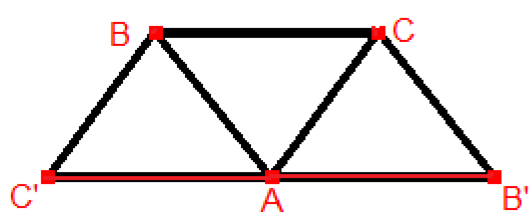
Para que sea posible identificar los paralelogramos *AC'BC, y ABCB'* es necesario, neutralizar la organización perceptiva que hace predominar los contornos triangulares sobre los contornos de los cuadriláteros, y ver separadas unidades que de hecho se recubren parcialmente y por tanto tienen parte de su contorno en común.



Dado que, la aprehensión discursiva de una figura privilegia exclusivamente el estatus que el enunciado concede a sus proposiciones, se tiene que una vez identificados los paralelogramos *AC'BC, y ABCB'* estos vendrán a ser la hipótesis de una demostración como la siguiente.



Puesto que *AC'BC y ABCB'* son paralelogramos. Se puede concluir que, BC es igual C'A por ser lados opuestos del paralelogramo *AC'BC*, de igual forma el lado BC es igual al lado AB' pues son lados opuestos del paralelogramo *ABCB'*.



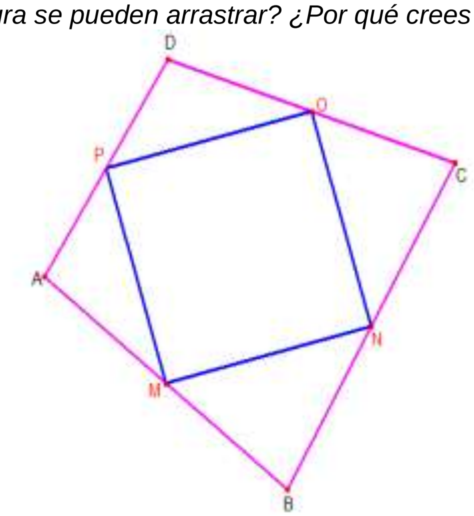
Luego por una noción común se tiene que C'A es igual a AB', de lo cual se puede demostrar que al ser iguales, y tener al punto A en común, A es el punto medio de B'C'.

b) Formulación de conjeturas

Una premisa básica para esta etapa, es la potencia de las figuras como medio para ir más allá de los enunciados, esto es, las figuras representan un soporte intuitivo que permite explorar, anticipar y formular conjeturas.

Reconocer que una proposición tiene el estatus teórico de conjetura, constituye un avance en el paso de razonamiento, con esto se marca el inicio de la distinción entre el contenido y el estatus de una proposición, lo cual implica –de parte del estudiante- entender el hecho de que no basta con lo observado, debe trabajarse sobre la figura en una búsqueda y exploración consciente de propiedades para aceptar o no el establecimiento de un resultado.

1. *¿Qué puntos de la figura se pueden arrastrar? ¿Por qué crees que pasa esto?*



2. *¿Qué tipo de cuadrilátero es MNOP? ¿Por qué podemos afirmar esto?*
3. *¿Qué propiedades del cuadrilátero MNOP se mantienen invariantes cuando se mueven los puntos B y C?*
4. *¿Por qué creen que estás propiedades son invariantes? Justifica tu afirmación.*
5. *Escriban una afirmación (conjetura) que describa lo observado en la Figura 1.*
6. *Prepárense para justificar su conjetura frente a la clase.*
7. *Escribe una conclusión del trabajo de hoy en la clase.*

Figura 7. Situación que permite formular una conjetura haciendo uso de un software de geometría dinámica. **Nota**. **Fuente**: Cisneros, M. (2012).

En la anterior actividad es importante destacar, el dinamismo que aporta un software de geometría, explícitamente la posibilidad del arrastre, juega un papel preponderante en la actividad pues en la exploración (uso del arrastre), se anticipa la conjetura, específicamente, en la actividad esto se traduce en que los estudiantes descubran las invariantes que existen al realizar el arrastre, esto es que comprendan que para cualquier cuadrilátero (ABCD como representante) MNOP (representante igualmente) sigue siendo un paralelogramo. La formulación de la conjetura esperada es entonces que: *el cuadrilátero formado por los puntos medios de los lados de cualquier cuadrilátero es un paralelogramo*.

De nuevo se resalta el papel de software en términos de la posibilidad o no, de arrastrar unos puntos. En particular, los vértices del cuadrilátero (A, B, C, D) pueden arrastrarse, no así los puntos que forman el cuadrilátero interno (M, N, O, P), este hecho presenta una oportunidad para la formulación de conjeturas, en virtud de dar respuesta al interrogante de por qué sucede esto, se espera que los estudiantes lleguen a establecer que la resistencia al movimiento de estos puntos responde a que son el resultado de construcción de los puntos medios de cada lado del cuadrilátero. Del mismo modo, una vez que se tiene que los puntos M, N, O, P son fijos, estos aparecen como los vértices de un cuadrilátero sobre el cual también se pueden realizar afirmaciones, como lo plantea la actividad, teniendo presente que los estudiantes debieran conocer los tipos de cuadriláteros describirían MNOP como un paralelogramo. Al establecer que aun cuando se muevan los vértices del cuadrilátero ABCD, el cuadrilátero MNOP siempre será un paralelogramo, se exhibe la naturaleza invariante de dicho cuadrilátero y por tanto es posible formular la conjetura deseada.

Lo anterior evidencia el hecho que formular una conjetura implica el recorrido por afirmaciones que a su vez tendrán un carácter conjetural y como se ha visto cada una de ellas es transitoria y necesaria. Este hecho permite reconocer el lugar de las conjeturas en un recorrido discursivo y en la solución de un problema particular, dando cuenta de la formulación de conjeturas como aspecto central en el aprendizaje del funcionamiento de los razonamientos deductivos.

A continuación se propone un ejercicio al lector en el cual se espera sea capaz de establecer la conjeturas transitorias que permitirían la formulación de la conjetura: *el segmento $\overline{MN}$ es paralelo a uno de los lados del triangulo e igual a la mitad de su longitud y que los triángulos son semejantes.*

De otra parte se espera que se reflexione sobre la necesidad o no de usar un software de geometría dinámica.

Actividad
Dibuja un triángulo equilátero
Determina los puntos medios de dos de sus lados (sean M y N) y traza el segmento que los une ($\overline{MN}$).
Mide las longitudes de los lados y las del segmento $\overline{MN}$.
Mide los ángulos del triángulo original y los del triángulo que se formó con el segmento $\overline{MN}$ y uno de los vértices.
Repite el procedimiento para: Un triángulo obtusángulo, uno rectángulo, un acutángulo, un isósceles, un escaleno.
Consigna los datos en la siguiente tabla

TRIÁNGULOS	*Original*		*Formado*	
	Longitud	*Ángulos*	*Longitud*	*Ángulos*
Equilátero				
Obtusángulo				
Rectángulo				
Acutángulo				
Isósceles				
Escaleno				

Elaborando conjeturas

Observando las longitudes de los lados ¿puedes formular alguna conjetura?

A) Observa la medida de los ángulos: ¿Describen algún patrón?

Figura 8. Ejercicio propuesto para la formulación de conjeturas.

c) Distinción del antecedente y el consecuente del tercer enunciado

A continuación se presentan la definición de un objeto geométrico inventado llamado Kuid.

Definición: es un cuadrilátero con dos pares de lados adyacentes congruentes y un par de ángulos opuestos congruentes.

1. Tomando en cuenta la definición determina si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa y explique por qué lo son.

a) Algunos rectángulos son Kuid.

b) Existen rombos que no son Kuid.

c) Todo Kuid tiene un par de lados adyacentes no congruentes.

d) Ningún Kuid es un polígono regular.

e) Algunos paralelogramos son Kuid.

Figura 9. Situación que pretende mostrar la relación de implicación en enunciados matemáticos.
Nota. *Fuente*: Camargo, L; Samper, C; Leguizamón, C. (2003).

Esta situación admite analizar por separado sus características matemáticas de sus potencialidades en términos de los aspectos teóricos aquí explicitados. En este sentido, el análisis matemático presenta las soluciones a las actividades que componen la situación, mientras que el análisis teórico evidencia la importancia de la relación de implicación en los enunciados matemáticos para reconocer y usar los terceros enunciados.

En consecuencia, conviene traducir las expresiones que requieren se establezca su valor de verdad en términos de una lengua formal, así:

a) $\exists x(R(x) \rightarrow K(x))$

b) $\exists x(Ro(x) \wedge \neg K(x))$

c) $\forall x(K(x) \rightarrow \neg Pla(x))$

d) $\forall x(K(x) \rightarrow \neg \Pr(x))$

e) $\exists x(P(x) \wedge K(x))$

Haciendo uso de una representación intermediaria es posible señalar, cómo la definición de cada objeto que aparece en cada parte ha de servir como tercer enunciado:

a) *Algunos rectángulos son Kuid. S*e requieren dos pasos para usar las definiciones de rectángulo y kuid con el fin de llegar a la conclusión.

Definición de rectángulo (cuadrilátero).
- Lados opuestos iguales y paralelos.
- Todos los ángulos son rectos.

Sea un rectángulo

Premisa

- En los cuadrados (cuadrilátero) todos los ángulos son rectos.
- Lados opuestos paralelos
- Todos los lados son iguales.

Terceros enunciados

Todo cuadrado es un rectángulo.

Conclusión

- En los cuadrados todos los ángulos son rectos.
- Todos los lados son iguales.

Todo cuadrado es un rectángulo.

Premisa

Un kuid *es un cuadrilátero con dos pares de lados adyacentes congruentes y un par de ángulos opuestos congruentes.*

Terceros enunciados

Algunos rectángulos (los cuadrados) son kuids.

Conclusión

Por lo anterior al usar las definiciones se muestra que algunos rectángulos verifican las condiciones de kuid.

b) *Existen rombos que no son Kuid. S*e requieren dos pasos para analizar la falsedad de la implicación. El primero muestra como al usar las definiciones de rombo y kuid se concluye que todo rombo es un kuid.

Definición de rombo (cuadrilátero).
- Todos los lados son iguales.
- Lados opuestos paralelos.
- Ángulos opuestos iguales.

Sea un rombo

Premisa

Un kuid *es un cuadrilátero con dos pares de lados adyacentes congruentes y un par de ángulos opuestos congruentes.*

Todo rombo es un Kuid

Conclusión

Terceros enunciados

En otro paso se puede mostrar que la conclusión anterior hace falsa la proposición inicial, éste daría cuenta de la contradicción, si todo rombo es un kuid, no existe ninguno que no lo sea (no se dibuja pues se entiende que la lógica es la misma). Por lo tanto, la implicación es falsa.

c) *Todo Kuid tiene un par de lados adyacentes no congruentes.* Dos pasos son necesarios para establecer por contraejemplo la falsedad de esta afirmación, un primer paso muestra que un rombo es un kuid (contraejemplo) y no cumple que tenga un de lados adyacentes no congruente, el segundo paso es evidente mostrar que si no se cumple para uno por lo tanto no se cumple para todo kuid.

d) *Ningún Kuid es un polígono regular.* De nuevo la falsedad de esta proposición se encuentra por contraejemplo, pues ya se mostró que los cuadrados son kuid y estos son polígonos regulares.

e) *Algunos paralelogramos son Kuid*. Bastaría mostrar en dos pasos que todo cuadrado es un paralelogramo y luego por definición de kuid establecer, como en la primera afirmación que algunos paralelogramos son kuid.

De otra parte, se tipifica esta situación como promotora de la distinción del antecedente y el consecuente del tercer enunciado, pues exhibe la naturaleza bipartita de los enunciados en matemáticas, particularmente su estructura si-entonces, esto último contribuye a la comprensión del razonamiento deductivo, por ende a la construcción de la demostración, al reconocer que tanto el antecedente como el consecuente son proposiciones, además el antecedente corresponde a la(s) premisa(s), mientras que el consecuente corresponde a la conclusión; se evidencia que el tercer enunciado es otra proposición cuya operatividad es la articulación entre el antecedente y el consecuente.

Más aún, en la práctica ha de enfatizarse que el tercer enunciado es el resultado de la búsqueda de entre todos los elementos conocidos de la teoría, aquellos que permiten concluir otras proposiciones bajo unas condiciones dadas.

La etapa 2: Los ejemplos de los teoremas de Pitágoras y Tales

Aquí se hace énfasis en que el estudiante comprenda que, encontrar la solución a un problema dado, es significativamente distinto a justificar su proceder al resolverlo, debido a que, resolver un problema implica reconocer la necesidad de tener un inventario eficiente y amplio de propiedades que le sirvan de base para encontrar su solución, la búsqueda de ese inventario o mejor de las propiedades que lo componen constituye un avance en el camino de la demostración. En este sentido, los ejemplos de actividades que se presentan pretenden cumplir con un doble propósito: procurar que los estudiantes descubran el “inventario” necesario para su resolución, por otro lado lograr que la solución de dichas actividades se constituya en inventario para la justificación de los teoremas de Pitágoras y Tales.

a) Discusión y búsqueda de propiedades

El objetivo de la discusión y búsqueda de propiedades, es identificar los procedimientos heurísticos asociados a la resolución de un problema en geometría. Balacheff (2000) encontró lo siguiente:

> Con el fin de entablar un proceso de prueba para la solución de un problema, es necesario que haya dos aspectos: un riesgo motivado por la incertidumbre y un desafío que valga la pena, para que uno pueda asegurarse de un resultado. Para despertar en los interlocutores el interés por formular una solución elaborada y discutirla, es necesario que la situación contenga un desafío a la contradicción, lo que implica a su vez un desafío a admitir. (p. 18).

Cabe anotar que, formular conjeturas se constituye en un avance heurístico, por tanto se reconoce que las conjeturas han de ser el producto de actividades de construcción que permiten la experimentación, es decir que posibilitan que el estudiante enfrentado a ella, analice, compare y encuentre un patrón con el fin de hacer una afirmación (esta última es la conjetura). Es importante recalcar, en el sentido de Larios (2001) que no se puede probar conscientemente algo si antes no fue conjeturado.

A continuación se presenta una actividad en la cual se pueden encontrar elementos para constituirse en situación de decisión, la búsqueda de propiedades entonces da cuenta de las opciones que brinda la aprehensión operatoria sobre las figuras, en términos de los tratamientos auxiliares, realizados con instrumentos, aluden por tanto a propiedades geométricas, estas propiedades una vez descubiertas se convertirán en el camino heurístico (inventario) para la resolución de situaciones como esta u otras que se le asemejen.

Si cada lado ha sido dividido en 3 partes iguales y estos puntos se han unido como lo indica la figura ¿Qué razón hay entre las áreas blanca y rayada?

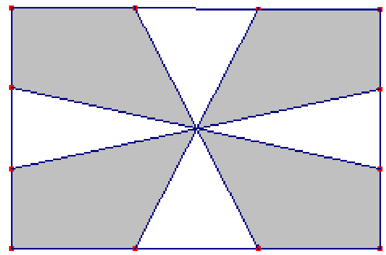
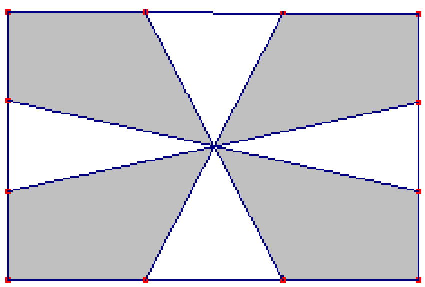
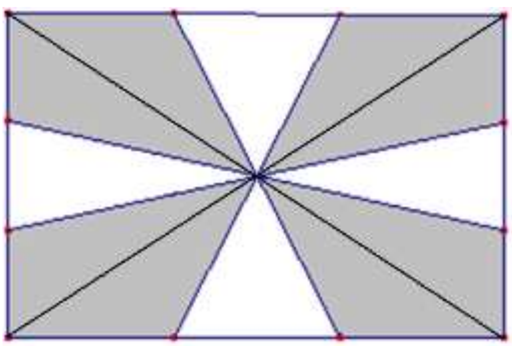


Figura 10. Situación que pone en juego trazos sobre la figura para encontrar la razón entre las áreas.

Uso de la aprehensión operatoria para la formulación de conjeturas

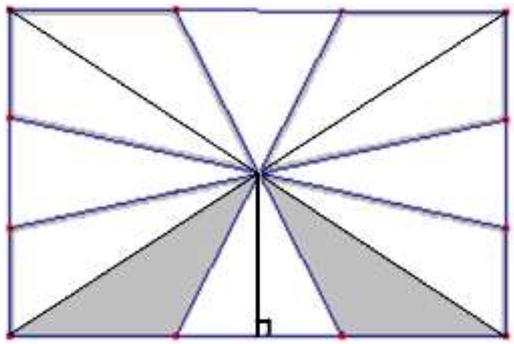




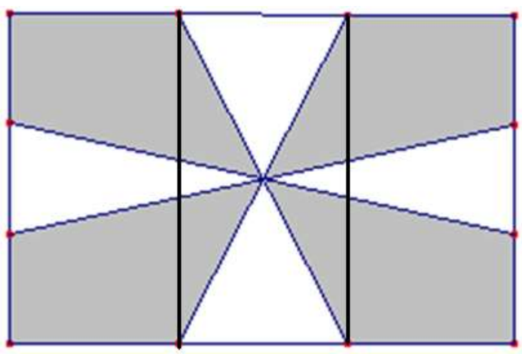
Este es un problema abierto que para su solución supone trazos auxiliares y la potencia de la figura se presenta en el hecho que aparecen dos caminos[12] para su solución.

En el primer camino se trazan las diagonales de rectángulo, las cuales generan ocho triángulos grises (rayados) y cuatro triángulos blancos, los vértices de estos triángulos son los puntos de división de la figura inicial y el corte de las diagonales trazadas.

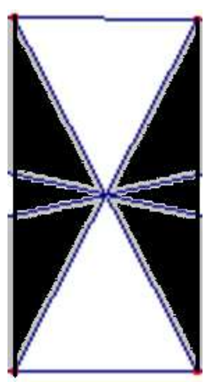
[12] Cabe anotar que, existe un camino adicional para solucionar este problema, mediante el álgebra, sin embargo este no se considera puesto que se quiere analizar las soluciones que se supone exhiben la potencia de las figuras.



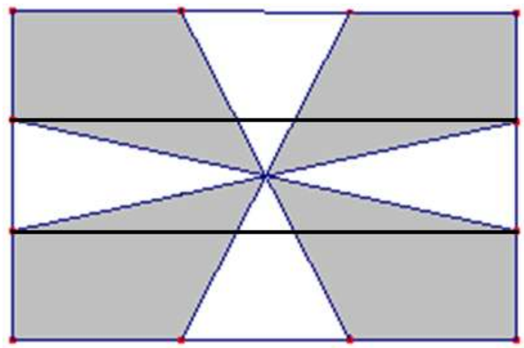
Aparece entonces la conjetura de que los triángulos grises son iguales a los triángulos blancos, lo cual presupone la búsqueda de propiedades que la sustenten. Así, al trazar la altura del triángulo blanco, se observa que esta también es la altura de los triángulos obtusángulos grises; luego los triángulos son iguales entre si, pues sus bases son iguales y comparten la misma altura. Se puede concluir entonces que, 8 triángulos equivalen a 4 triángulos blancos, por tanto la razón entre las áreas blanca y rayada es 2:1.



El segundo camino, también requiere de la construcción de trazos auxiliares, por ejemplo trazar paralelas que definan el segundo tercio del área del rectángulo, en forma vertical.



En este rectángulo, cuya área es un tercio del área total, se puede establecer como conjetura que los triángulos blancos equivalen a la mitad de su área. Entonces se requiere mostrar que los triángulos negros son iguales a los blancos, la propiedad necesaria para validar dicha conjetura es que la diagonal de un rectángulo lo divide en dos triángulos iguales; como se observa cada uno de estos triángulos está compuesto por uno negro y uno blanco, dado que los triángulos blancos son iguales entre si, luego los negros en tanto restos por noción común también serán iguales, lo cual significa que los dos triángulos blancos son la mitad del rectángulo, numéricamente la mitad de un tercio, equivale a 1/ 6

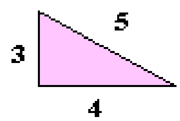


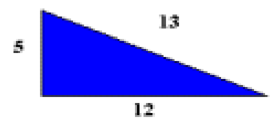
Horizontalmente, se trazan las paralelas y al realizar un razonamiento homólogo al anterior, se encuentra que los dos triángulos blancos son la mitad de ese tercio del rectángulo.

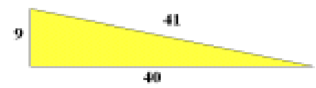
Luego se ha mostrado que, los dos triángulos del rectángulo horizontal y los del vertical equivalen a 1/6 en cada rectángulo, por tanto los cuatro triángulos blancos a 2/6 del área total, por tanto a la zona rayadas le correspondería a 4/6 del área total, de lo cual se obtiene que la razón entre la parte rayada y blanca es de 4:6, equivalente a 2:1.

A continuación se presenta otro tipo de situación que evidencia los elementos de la etapa heurística, en términos de la clasificación que sobre las situaciones propone Balacheff (2000).

Observa los siguientes triángulos, sus medidas se denominan ternas pitagóricas, pues cumplen que $a^2 + b^2 = c^2$







Triángulo 3,4,5	Triángulo 5,12,13	Triángulo 9,40,41
$3^2 + 4^2 = 5^2$	$5^2 + 12^2 = 13^2$	$9^2 + 40^2 = 41^2$

Existen infinitas ternas pitagóricas, encuentra por lo menos cinco más.

Figura 11. Actividad que muestra las ternas pitagóricas.

Este tipo de situación se identifica como de decisión puesto que procura que el estudiante construya una conjetura como la siguiente: *las infinitas ternas pitagóricas son el resultado de multiplicar por cualquier escalar una terna dada*. Llegar a la construcción de una u otra conjetura depende de la forma en la cual el estudiante aborde el problema, a saber de forma pragmática o intelectual. En el primer caso, es posible que se opte por creer equivocadamente, luego de observar directamente los ejemplos presentados, que todas las ternas involucran números consecutivos, es posible que para aceptar esta conjetura se enuncie la frase "lo comprobé con estos valores". En el segundo caso, la forma intelectual de acercarse a la conjetura alude a que el estudiante pase de acciones efectivas sobre representaciones, hacer uso de ensayo y error, hacia la descontextualización o ruptura con el mundo sensible que elimina la atención en lo particular, esto es proponerse encontrar la regularidad, por ejemplo, multiplicando por algún escalar varias veces alguna terna.

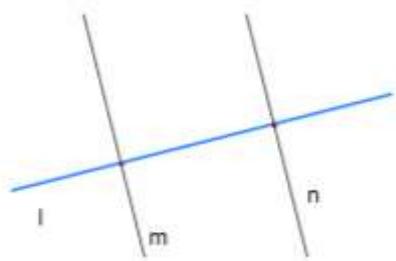
Se exhibe entonces que, el objetivo de la discusión y búsqueda de propiedades, es identificar los procedimientos heurísticos asociados a la resolución de un problema en geometría.

b) Puesta en común

El siguiente aspecto de la segunda etapa, puesta en común, responde a las interrelaciones propias de la situación didáctica, cobra vida en la relación docente/estudiante pues alude a que la actividad propuesta devuelva la responsabilidad de validar a los estudiantes, apartando la idea que el docente es el garante de la veracidad, pues esto conduce a una dificultad de orden didáctico para la enseñanza de la demostración. En este sentido, expone Balacheff (1999) que la superación de esta dificultad inherente a los sistemas didácticos puede ser investigada en situaciones que permiten la devolución a los estudiantes de la responsabilidad matemática sobre sus producciones, lo que significa la desaparición del docente de los procesos de toma de decisión durante la resolución de un problema en favor de un esfuerzo de construcción de medios autónomos de prueba por parte de los estudiantes.

En este sentido, se entiende, que el profesor deja de ser el actor principal en la escena, constituyéndose en un guía y organizador del aprendizaje; esto es, genera un ambiente que invita a la investigación en el sentido de Camargo, L.; Leguizamón, C. y Samper, C. (2003), el docente debe proponer una indagación que se halle dentro de un contexto familiar para el estudiante, capte su interés, tenga en cuenta los conocimientos que posee, lo incite a anticipar, lo lleve a la toma de decisiones con fines prácticos y tenga en cuenta el tipo de razonamiento que maneja para proporcionarle los recursos. Lo anterior ha de permitir que los estudiantes desarrollen su trabajo autónomamente.

Es posible entonces, dotar a una actividad como la siguiente de elementos que permitan al profesor y estudiantes cumplir con los roles explicitados.



Se tiene una recta l y dos rectas m y n respectivamente perpendiculares a l.

1. ¿Cómo son entre si las rectas m y n?
2. Escriba una justificación de su respuesta y haga una discusión con su compañero sobre la pertinencia de la misma.

Figura 12. *Situación que presenta la relación de paralelismo en términos de rectas perpendiculares.*
Nota. Fuente: Quintero, G. (2010).

De acuerdo con Balacheff (2000) la interacción social es un recurso potente para la discusión y búsqueda de propiedades, más aun la puesta en común, específicamente propone que el trabajo se realice en parejas, lo cual le permite a los estudiantes, en igualdad de condiciones, exteriorizar sus concepciones y los procedimientos que ellos utilizan. Además, resulta pertinente devolverle al responsabilidad a los estudiantes de realizar una confrontación constante para seleccionar la estrategia de una operación que vayan a realizar, o para determinar criterios comunes para aceptar o refutar una aserción. En este sentido, Balacheff (2000) propone un mecanismo para lograr dicha confrontación; los estudiantes por parejas solo contarán con un lápiz. Cabe anotar que esta restricción, puede variar en términos de la condiciones del problema propuesto, no obstante cualquiera que sea debe procurar promover la confrontación entre pares. En la actividad propuesta dicha confrontación tiene lugar en el momento del desarrollo de la discusión para encontrar una justificación, a la conjetura sobre la relación entre las rectas *m* y *n* perpendiculares a la recta *l*.

De igual manera, un elemento de referencia para la comunicación de la conjetura encontrada por parejas al igual que los elementos para la justificación de su pertinencia, es según Balacheff (2000) escribirla para otra pareja de estudiantes desconocidos sobre quienes los emisores no ejerzan ningún tipo de control, esto debería favorecer una problemática de la fiabilidad que pudiera dar origen al sometimiento de las conjeturas propuestas a severas pruebas y así constituirse en el preámbulo a una problemática de la prueba. Sin embargo, es importante señalar que, solo se presenta una posibilidad para la comunicación de la solución de una situación, esta podría adaptarse según las condiciones particulares de cada situación.

La etapa 3 en el análisis del teorema de Pitágoras

La tercera etapa: construcción de grafos proposicionales y redacción de la demostración, esta etapa promueve el aprendizaje visual mediante el recurso sinóptico de los grafos proposicionales, al igual que se retoman los valores epistémicos en la redacción de la demostración, estos análisis aparecen en dos actividades con una propuesta de ejercicio para el lector.

En cuanto a la redacción en lengua natural, se alude al análisis epistemológico del razonamiento, en particular se tiene que la redacción debe dar cuenta de la comprensión del nivel local en cada paso de razonamiento, definiendo si se omiten o no, las conclusiones producto de los terceros enunciados. Asimismo, el avance progresivo en el nivel global se exhibe en la redacción con actitudes proposicionales, -frases cortas provistas de un verbo como: puedo concluir, ya demostré que, tengo que…- que marcan por un lado el estatus operatorio de las proposiciones, por otro permiten recoger los valores epistémicos, condición que determina la comprensión del razonamiento deductivo.

a) *Construcción de grafos proposicionales*

En particular, para el caso del razonamiento deductivo los grafos proposicionales han de permitir comprender que la organización de un paso de deducción depende del estatus operatorio de las proposiciones y no de su contenido. Dicha producción o la comprensión de un paso de deducción por un estudiante dependen de una triple percepción:

- que la organización de las proposiciones constituyentes de un paso se hace en función de su estatus operatorio determinado por su estatus teórico.
- La separación de los terceros enunciados en dos partes: la parte de las premisas, condiciones, y la parte a extraer, conclusión.
- La única tarea a efectuar en un paso de deducción, al verificar las condiciones (premisas), es la de extraer la conclusión del tercer enunciado. No se produce ninguna otra proposición.

Y es en el logro de esta triple percepción que los grafos juegan un papel significativo, lo cual se ilustra a partir de la siguiente situación:

Justifica cada paso, y realiza el grafo de la demostración.

$$
\begin{aligned}
CAE &\sim FAB,\\
\text{área }(CAE) &= \text{área }(LAE),\\
\text{área }(FAB) &= \text{área }(FAC).\\
\text{Entonces, área }(LAE) &= \text{área }(FAC),\\
\text{área }(LAEK) &= \text{área }(FACG).
\end{aligned}
$$

Análogamente,

$$\text{área }(LBDK) = \text{área }(BCHJ).$$

Como área $(LAEK) + $ área $(LBDK) = c^2$,

entonces $c^2 = a^2 + b^2$.

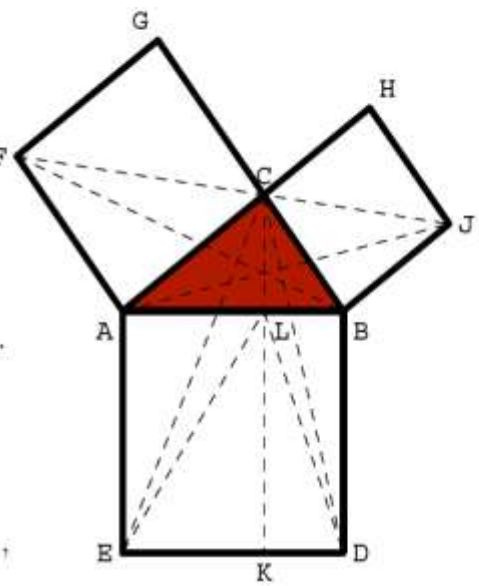


Figura 13. Situación que ilustra una variación de la demostración hecha por Euclides del teorema de Pitágoras.

Cada una de las tres proposiciones previas a la conclusión intermediaría “área (LAE) = área (FAC)” son en sí mismas conclusiones a justificar en el contexto del problema propuesto, es decir, su estatus teórico es el de conjetura que ha sido determinado por la comprensión del estatus operatorio de conclusión intermediaria que tiene cada una de ellas. Nos centraremos en esta parte del análisis en la primera de ellas "CAE ~ FAB", iniciando con una de las posibles[13] opciones de redacción

Se tiene que los lados CA y FA son congruentes por ser lados de un cuadrado, por la misma razón lo son los lados AE y AB. Solo falta mostrar, para aplicar el teorema LAL, que los ángulos FAB y CAE son congruentes, para ello se tiene que cada una de ellos está formado por dos ángulos así: < FAB = <FAC + <CAB, y también < CAE = <CAB + <BAE, de estos se sabe que <FAC y <BAE son rectos dado que son ángulos de un cuadrado, por lo tanto son iguales y los otros dos son idénticos. Por lo anterior, y en virtud del teorema LAL, CAE ~ FAB.

Veamos como los estatus teóricos de cada una de las proposiciones que intervienen en esta redacción determinan los estatus operatorios mediante la organización que se le da en un grafo proposicional

[13] Se sabe que la variabilidad redaccional es una de las características de los enunciados en lengua natural, es decir, que para un mismo contenido existen múltiples opciones en la redacción. En este caso se asume una opción que presenta una solución válida al problema

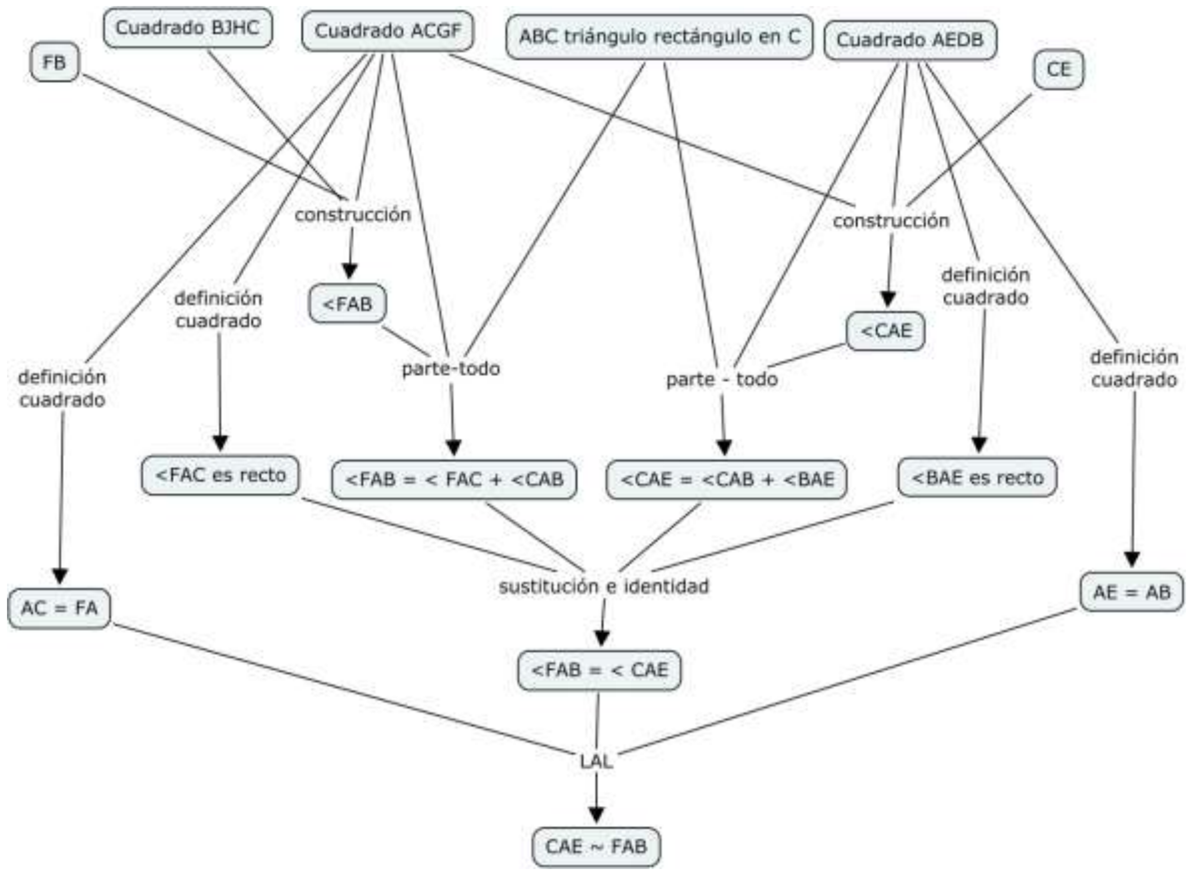


Figura 14. Grafo proposicional de la primera parte (CAE ~ FAB) de la demostración del teorema anterior.

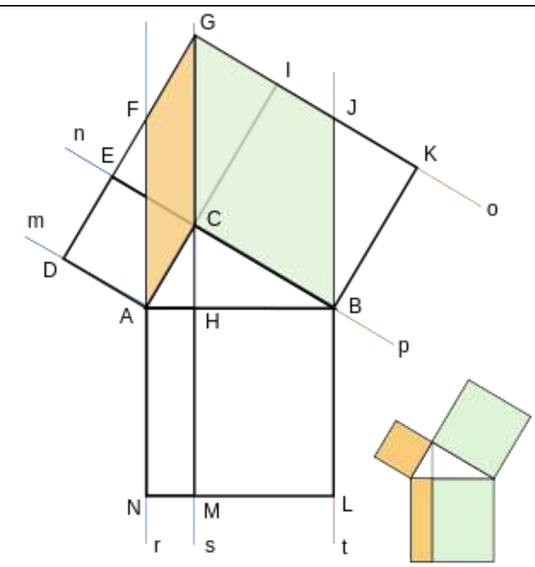
Se puede ver en el grafo que las primeras entradas, es decir las premisas, del grafo se corresponden con aquello que está dado inicialmente en la situación, ya sea de manera explícita en el enunciado o instaurado por las condiciones que impone la figura que acompaña a la situación; a partir de estas se inicia el proceso de desprendimiento de las conclusiones intermediarias aplicando, en cada paso de deducción, un tercer enunciado que permite vincular las premisas con la conclusión en virtud de su estructura bipartita, esto es, una estructura que contiene la proposición (antecedente) que ocupa el lugar de premisa y otra proposición (consecuente) que ocupa el lugar de la proposición a extraer. La existencia de estos terceros enunciados y el reconocimiento del lugar que ocupan en el funcionamiento del razonamiento son dos de los aspectos centrales que permite el uso de grafos proposicionales. Sin embargo, y como se puede ver en este grafo, no se considera necesario hacer una presentación detallada del contenido de la proposición que representa al tercer enunciado, ya que se le puede nombrar con etiquetas o frases que lo recrean gracias a que se asume que son enunciados de propiedades ya adquiridas o conocidas y por lo tanto su contenido y estructura ha de ser familiar, cabe aclarar que esto se debe haber conseguido en la etapa de exploración y búsqueda de propiedades.

Se puede ver también, en términos de la naturaleza de esta representación gráfica, que su estructura no permite nodos sueltos ya que esto implicaría el uso de una proposición que no interviene en la consecución del enunciado objeto; además, y aunque es una estructura que se organiza para ser leída de arriba abajo, los nexos (segmentos que unen dos nodos) son flechas cuando salen de un tercer enunciado hacia una conclusión, en los otros casos son segmentos y indican el paso de una premisa a un tercer enunciado, esta característica refuerza el trabajo sobre los estatus operatorios de las proposiciones involucradas. Y aunque el ejemplo es solo una parte de la demostración, deja ver que todo grafo ha de terminar en una y solo una proposición que es el enunciado objeto, aquello que se quería demostrar, sin esta condición podríamos estar frente a un grafo de otro tipo de expansiones discursivas como las argumentaciones – las cuales permiten ninguna o varias conclusiones-.

Se tiene entonces una estructura que apoya el proceso de construcción de sentido para el razonamiento deductivo gracias a que fortalece el lugar que se le ha de dar a las proposiciones en virtud de su estatus operatorio, condición que es fundamental para separar al razonamiento deductivo de otras expansiones discursivas en las que el lugar dado la las proposiciones está fundamentado en el contenido de dicha proposición. Sin embargo hay un aspecto de las proposiciones que intervienen en el razonamiento deductivo que “pasa en silencio” en la organización de un grafo proposicional, y es el que tiene que ver con los valores epistémicos teóricos de dichas proposiciones; dichos valores epistémicos son los que intervienen finalmente en la producción y comprensión del razonamiento ya que es a partir de ellos, y su modificación gracias al proceso emprendido, que se logra la comprensión del funcionamiento de la expansión discursiva de una deducción al permitir comprender la necesariedad de la proposición que se ha propuesto como enunciado objeto y así finalmente dar lugar al valor de verdad verdadero que se está buscando. Por ello es fundamental regresar a la expresión en lengua natural, ya que es en ella donde estos valores epistémicos teóricos toman fuerza.

b) Redacción en lengua natural

La producción de la redacción de una demostración a partir de un grafo proposicional permite devolverle a las proposiciones el reconocimiento de sus valores epistémicos, esto se logra mediante el recurso a expresiones de actitudes proposicionales más que de los conectores que son los que han marcado las prácticas en general en este tipo de actividad. Se presenta, con el propósito de ilustrar lo señalado para esta etapa, dos redacciones distintas[14] de la demostración de Pappus del teorema de Pitágoras.



[14] Redacciones producidas por estudiantes regulares de un curso de geometría.

Partimos del triángulo ABC rectángulo en C, sobre cuyos catetos e hipotenusa hemos construido los cuadrados correspondientes. Se prolonga DE hasta G, de tal forma que EG sea igual a CI, lado del cuadrado CB. Como se sabe que DE es paralelo a AC porque son lados del cuadrado y siendo CI la prolongación de AC, se puede concluir que EG y CI son paralelos. Análogamente la prolongación de BC hasta E, EC es igual y paralelo a GI que es la prolongación del lado del cuadrado KI, pero esta prolongación GI es igual a los lados EC y DA, del cuadrado del lado AC respectivamente. Por todo lo anterior, se puede concluir que CEGI es un rectángulo.

Por otro lado, trazamos CH paralela a AN y la prolongamos hasta G, GC sería entonces la diagonal del rectángulo CEGI, esta diagonal determina en aquél dos triángulos rectángulos iguales al triángulo ABC dado, porque en particular CB es igual a CI, pues son lados del cuadrado, los ángulos GIC y ACB son iguales por ser rectos y AC es igual a GI por construcción. Como GC es la diagonal de rectángulo se demuestra también que el triángulo GEC es igual al triángulo ABC.

Adicionalmente prolongamos los lados del cuadrado AN y Bl hasta F y J respectivamente, prolongamos además la paralela GH hasta M. Por construcción se puede concluir que las rectas r (que pasa por NF), s (que pasa por GM) y t (que pasa por JL), son paralelas entre sí. Lo anterior permite afirmar que ACGF es un paralelogramo pues sus lados FA y GC se encuentran entre las paralelas r y s, AC es paralelo a FG pues AC es lado del cuadrado ACDE, y FG se encuentra en la prolongación del lado DE del mismo cuadrado. Análogamente se demuestra que BJGC es igualmente un paralelogramo, del cual se sabe que dos de sus lados están entre las paralelas s y t.

Si se toma en particular el paralelogramo CAFG se demuestra que los paralelogramos CAFG y AHMN tienen la misma superficie, esto porque tienen la misma base CG que es igual a HM, y están comprendidos entre las mismas paralelas, ***r*** *y* ***s*** *(Proposición I.36 de los elementos de Euclides). Aplicando el mismo principio a CAFG y ACED –base común AC, y paralelas* ***m*** *y* ***n****- resulta que ambos paralelogramos tienen superficies así mismo equivalentes. De lo anterior se puede concluir entonces que las superficies de ACED y AHMN son iguales. Análogamente: CGJB y BLMH tienen la misma base CG es igual a MH, y están comprendidos entre las paralelas* ***s*** *y* ***t****. Sus superficies son equivalentes. CGJB y CIKB tienen base común CB, y están entre las paralelas* ***o*** *y* ***p****, sus superficies son iguales. De donde se deduce la equivalencia de las superficies de BLMH y de CIKB. El teorema de Pitágoras queda demostrado.*

Figura 15. Redacción de la demostración realizada por Pappus del teorema de Pitágoras.

Para analizar el efecto que tiene esta redacción[15] se retoma solo el primer párrafo el grafo y la redacción de las demás partes de esta redacción se proponen como ejercicio de análisis al lector.

[15] Redacción realizada por estudiantes con formación en fundamentos de geometría por tanto se encuentra lejos de ser una “demostración” universal”.

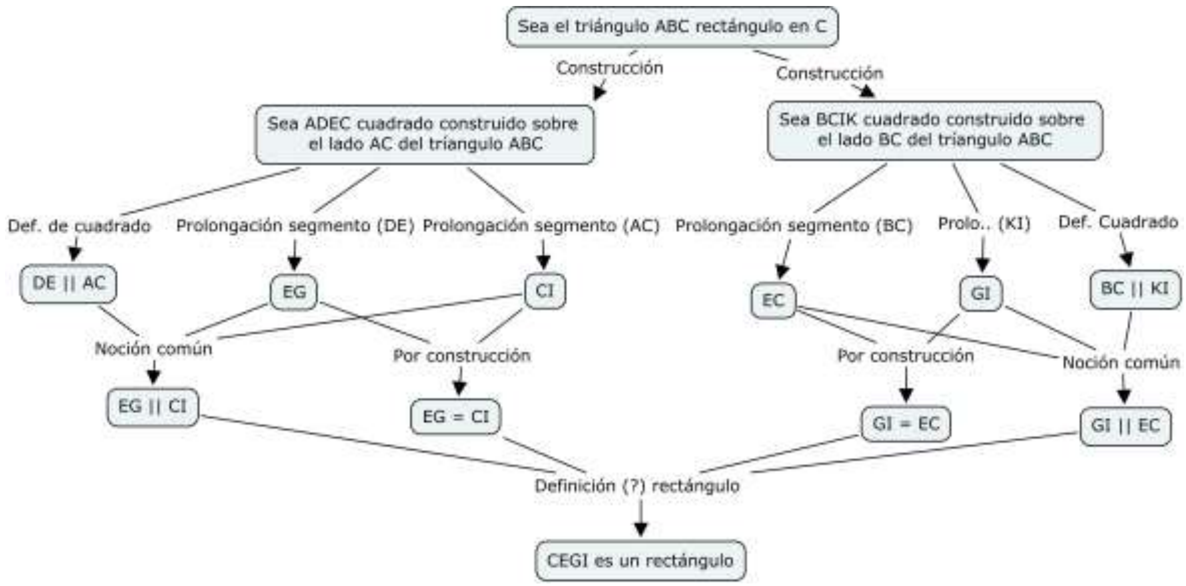


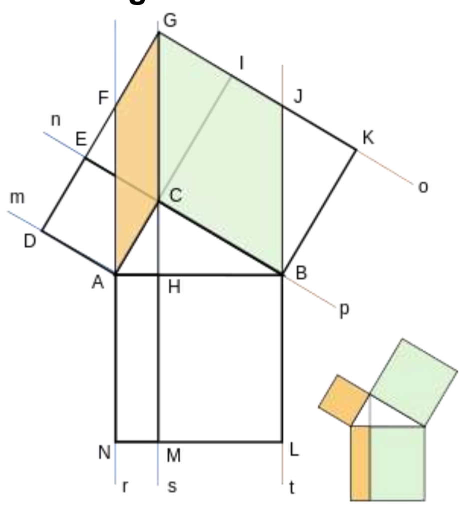
Figura 16. Grafo del párrafo "*Partimos del triángulo ABC rectángulo en C, sobre cuyos catetos e hipotenusa hemos construido los cuadrados correspondientes. Se prolonga DE hasta G, de tal forma que EG sea igual a CI, lado del cuadrado CB. Como se sabe que DE es paralelo a AC porque son lados del cuadrado y siendo CI la prolongación de AC, se puede concluir que EG y CI son paralelos. Análogamente la prolongación de BC hasta E, EC es igual y paralelo a GI que es la prolongación del lado del cuadrado KI, pero esta prolongación GI es igual a los lados EC y DA, del cuadrado del lado AC respectivamente. Por todo lo anterior, se puede concluir que CEGI es un rectángulo*"

Independiente de la forma de redacción que uno u otro usuario emplee, siempre es posible encontrar marcas lingüísticas o proposiciones que actúan como garantes de los valores epistémicos, se retoman algunas de ellas: "*partimos del triángulo ABC*" indica que se ha comprendido la necesidad de que el triángulo sea rectángulo para establecer de ese hecho otras conclusiones: "*como se sabe*", "*por todo lo anterior*" "*análogamente*", exhiben la progresión de "necesidad" en "necesidad" hacia el enunciado objeto, mostrando con la frase "*se puede concluir*" el carácter apodíctico de la última conclusión.

De igual forma aparece otra redacción que sigue la idea de Pappus para demostrar el teorema de Pitágoras, esta se retoma puesto que presenta el estilo clásico de presentación de las demostraciones, señalando hipótesis, tesis y enumera cada uno de los pasos. No obstante como se verá más adelante, tal o cual presentación no influye al momento de dar cuenta de la apropiación de los valores epistémicos.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE PITÁGORAS POR PAPPUS:

"En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto"



Hipótesis: Sea **ABC** un triángulo, rectángulo en **C**.
Tesis: El área del cuadrado sobre BC es igual a la suma de las áreas de los cuadrados sobre BA y AC.

P1. Por la proposición 1.46 (*Construir un cuadrado sobre un segmento dado*), podemos construir un cuadrado $BCIK$ sobre $\overline{BC}$, y los cuadrados $BANL$ y $ACDE$ sobre $\overline{BA}$ y $\overline{AC}$, respectivamente.
P2. Por el postulado 2 (Un segmento de línea recta se puede extender indefinidamente en una línea recta), podemos extender:

- **DE** para obtener **DG**, tomando **EG** igual a **CI**.
- **KI** para obtener **KG**, tomando **IG** igual a **EC**. Ambos segmentos sobre la línea recta **o.**
- **LB** para obtener **LJ**, ambos segmentos sobre la línea recta **t**.
- **NA** para obtener **NF**, ambos segmentos sobre la línea recta **r**.

P3. Por la proposición 1.31 (*Dibujar una recta que pasa por un punto dado paralela a una recta dada*), podemos dibujar **GM** paralela a **BL**, que pasa por el punto **C**. El segmento **GM** está sobre la línea recta **s**.
P4. Tenemos que la línea recta **AC** y en un punto **A** de ella, las dos rectas **CE** y **CB** no están del mismo lado y forman ángulos adyacentes iguales a dos ángulos rectos. Por la proposición 1.14 (*Dado un segmento y uno de sus puntos, si dos segmentos levantados a partir del punto no están del mismo lado del segmento y forman ángulos adyacentes iguales a dos rectos, entonces ambos segmentos están alineados*), concluimos que **CE** está en línea recta con **CB**. Entonces **EB** es una recta, y la llamaremos **p**. Así mismo **ED** y **EG** están en línea recta **m**; y **CA** y **CI** están sobre la misma línea **n**.
Tenemos que:

- Las líneas rectas **o** y **p** son paralelas.
- Las líneas rectas **m** y **n** son paralelas.
- Las líneas rectas **r** y **s** son paralelas.
- Las líneas rectas **t** y **s** son paralelas

P5. Tenemos el rectángulo **CEGI**, y su diagonal **CG** determina en aquél dos triángulos rectángulos iguales al triángulo **ABC** dado.

P6. Los ángulos agudos **GCI** y **ABC** tienen sus lados perpendiculares. Y el lado **CI** es igual al lado **CB**. En consecuencia los triángulos rectángulos **ABC**, **ICG** y **EGC** tienen sus tres lados iguales.
P7. Los paralelogramos **ACGF** y **AHMN** tienen la misma base **CG**=**HM**, y están comprendidos entre las mismas paralelas, **r** y **s**. Por lo tanto tienen la misma superficie (Elementos I.36)
P8. Aplicando el mismo principio a **ACGF** y **ACED**, donde tienen la base común **AC**, y paralelas **m** y **n**, entonces los paralelogramos tienen superficies equivalentes.
P9. Por transitividad tenemos que **ACED** y **AHMN** son iguales.
P10. CGJB y **BLMH** tienen la misma base **CG**=**MH**, y están comprendidos entre las paralelas **s** y **t**. Por tanto sus superficies son equivalentes.
P11. CGJB y **CIKB** tienen base común **CB**, y están entre las paralelas **o** y **p**. Sus superficies son iguales.
De dónde se deduce la equivalencia de las superficies de **BLMH** y de **CIKB.**

Ahora, para tomar otra dimensión de lo que aporta la escritura en lengua natural se considerara otra redacción[16] de la misma demostración, con lo cual se puede hacer una comparación de dos momentos (la parte final de cada demostración) que dejan ver que aunque se usan distintos enunciados que además configuran dos estilos clásicos de redacción de una demostración (aquel que recurre a nombrar los pasos con P1, P2, etc. y el que simplemente hace una presentación en *prosa*), las demostraciones conservan la referencia a los mismos hechos y razones, se mantienen además el recurso a los verbos y expresiones de actitud proposicional, entre otras marcas lingüísticas, veamos:

P7. Los paralelogramos **ACGF** y **AHMN** tienen la misma base **CG**=**HM**, y están comprendidos entre las mismas paralelas, **r** y **s**. Por lo tanto tienen la misma superficie (Elementos I.36)	*Si se toma en particular el paralelogramo CAFG se demuestra que los paralelogramos CAFG y AHMN tienen la misma superficie, esto porque tienen la misma base CG que es igual a HM, y están comprendidos entre las mismas paralelas,* ***r*** *y* ***s*** *(Proposición I.36 de los elementos de Euclides).*
P8. Aplicando el mismo principio a **ACGF** y	*Aplicando el mismo principio a CAFG y ACED –*

[16] De nuevo esta demostración también es realizada por estudiantes con conocimientos en geometría, no es una “demostración” universal.

ACED, donde tienen la base común **AC**, y paralelas **m** y **n**, entonces los paralelogramos tienen superficies equivalentes. **P9.** Por transitividad tenemos que **ACED** y **AHMN** son iguales. **P10. CGJB** y **BLMH** tienen la misma base **CG**=**MH**, y están comprendidos entre las paralelas **s** y **t**. Por tanto sus superficies son equivalentes. **P11. CGJB** y **CIKB** tienen base común **CB**, y están entre las paralelas **o** y **p**. Sus superficies son iguales. De dónde se deduce la equivalencia de las superficies de **BLMH** y de **CIKB**	*base común AC, y paralelas **m** y **n**- resulta que ambos paralelogramos tienen superficies así mismo equivalentes.* *De lo anterior se puede concluir entonces que las superficies de ACED y AHMN son iguales.* *Análogamente: CGJB y BLMH tienen la misma base CG es igual a MH, y están comprendidos entre las paralelas **s** y **t**. Sus superficies son equivalentes.* *CGJB y CIKB tienen base común CB, y están entre las paralelas **o** y **p**, sus superficies son iguales.* *De donde se deduce la equivalencia de las superficies de BLMH y de CIKB.* *El teorema de Pitágoras queda demostrado.*

Figura 17. Comparación de las redacciones (fragmentos finales) de la demostración del teorema de Pitágoras.

Específicamente, se reconoce el avance en la producción y comprensión del razonamiento, cuando se identifica en la redacción proposiciones articuladas según su estatus operatorio, evidenciado en dos niveles de organización: el de los pasos y el del encadenamiento de pasos, así como el modo de funcionamiento del tercer enunciado. En este sentido, es posible analizar en algunas marcas lingüísticas dicho avance: "*Por lo tanto*", expresión que marca una actitud proposicional, valor epistémico de necesario para la conclusión del paso en la primera redacción, "*de lo anterior se puede concluir que*", "*de donde se deduce*" son expresiones que muestran al igual que la anterior el final de un paso de deducción, al mismo tiempo que exhiben el avance de un paso a otro.

Es importante señalar que el lugar que ocupan los conectores no es vital, puesto que al comparar las distintas formas de redacción, una que intenta ser por lo general impersonal frente a otra que incluye al autor en el proceso, siempre en cada paso es posible determinar similitudes en las formas de concluirlo. Este hecho presenta las múltiples variedades en la redacción, razón por la cual el interés en su enseñanza no debe centrarse en estas marcas lingüísticas sino en realizar la triple diferenciación, que exhibe el avance en la comprensión del razonamiento propio de la demostración.

Finalmente es posible establecer para cada una de las etapas, las siguientes consideraciones generales. Las actividades de la primera etapa privilegian el reconocimiento de las unidades figurales, además las reconfiguraciones posibles en las figuras posibilitan las modificaciones de las figuras bien sean mereológicas, posicionales u ópticas. De igual manera las actividades de esta primera etapa deben permitir explorar las figuras con miras a anticipar y formular las conjeturas basadas en la percepción. Las conjeturas "transitorias" son las que darán pie para la formulación de nuevas conjeturas.

En la etapa dos mediante la clasificación de situaciones decisión se intentan mostrar los procedimientos heurísticos asociados a la resolución de cada una de las actividades propuestas. Actividades de este tipo proponen realizar una confrontación entre pares donde el profesor no debe estar presente durante el proceso de toma de decisiones para la resolución de la actividad. Por último, en la etapa tres se intenta ilustrar como los grafos proposicionales deben permitir que la comprensión en un paso de deducción dependan de una triple percepción, también se muestra que la redacción de la demostración se hace a partir del grafo utilizando actitudes proposicionales, esto con el fin de recuperar los valores epistémicos, ocultos por el grafo.

IV. CONCLUSIONES

En cuanto al análisis de las exigencias cognitivas implicadas en la demostración, en este trabajo se logró avanzar en el establecimiento de la necesidad de hacer una ruptura entre la fase heurística y la fase deductiva, lo cual significa que: *el trabajo con las figuras*, *la formulación de conjeturas*, así como el *trabajo lógico*, al igual que *la discusión y búsqueda de propiedades* que habrán de sufrir una *puesta en com*ún en dinámicas de clase que le devuelven la responsabilidad a los estudiantes. Son todos elementos o exigencias previas requeridas para el iniciar el trabajo en la enseñanza de la demostración.

La fase deductiva por su parte requiere que se descubra y comprenda el funcionamiento del razonamiento que le subyace, el deductivo, por medio del registro no discursivo de los grafos proposicionales así como de una recuperación de los valores epistémicos mediante la lengua natural.

Es así como, una vez que se establecen las anteriores exigencias cognitivas, presentarlas y ampliarlas en un manual implica considerarlo como un conjunto de proposiciones cuyo propósito es orientar la organización del trabajo del profesor, para ello debe presentar, los principales aspectos teóricos aquí considerados, estructurándose a partir de la propuesta de Duval-Egret sobre la enseñanza inicial de la demostración, en términos cognitivos, curriculares y didácticos. Del mismo modo, se ponen en juego estos elementos teóricos al proponer situaciones ejemplarizantes. Sin embargo, cabe destacar que la estructura planteada para el manual es tan solo una apuesta, sus alcances solo se medirán en tanto este pueda incorporarse al trabajo docente una vez se publique, dado que al terminar el trabajo esto no ha sucedido, no es posible determinar los aciertos o desaciertos de dicha estructura.

Ahora bien, en términos de los objetivos es posible establecer que en general se logró desarrollar una síntesis de los elementos teóricos sobre la enseñanza de la demostración desde una perspectiva semiótico-cognitiva, en particular la desarrollada por Duval-Egret como se ha mencionado. Es así como para cada uno de los elementos constitutivos de las etapas propuestas por estos autores, la síntesis consistió, en presentar la construcción realizada por Ponce de León (2007), en virtud del análisis que realiza de la misma propuesta, integrando otras posturas teóricas que al ajustarse responden a una aplicación de la propuesta: Balacheff (2000) que describe las características de situaciones propias de la etapa heurística; Larios (2001) para determinar las dinámicas de clase así que devuelven la responsabilidad de elaborar conjeturas a los estudiantes; Duval (2004b) el cual da cuenta de la fase deductiva; Arce et al (2010) quienes permiten dilucidar la idea de manual como recurso pedagógico, estos autores se destacan entre otros.

En particular, la determinación de los elementos teóricos presentes en Ponce de León (2007) consistió en dar cuenta de la idea de la necesidad, en su tesis establecida, de realizar un trabajo específico con los alumnos, sobre el funcionamiento del razonamiento deductivo y sobre el tipo de organización que éste implica, para ello se presenta su definición de demostración exhibiendo el funcionamiento del razonamiento deductivo a partir de lo que se requiere movilizar para su aprendizaje.

De otra parte, para sintetizar los elementos teóricos sobre la enseñanza de la demostración, se identificó en diversas posturas aquello que promoviera cada uno de las etapas de la propuesta, en virtud de ello se hizo la selección y ajuste de situaciones matemáticas verificando que todo lo presentado en el marco teórico apareciera en las situaciones así como en sus análisis. Lo anterior permitió caracterizar una estructura de manual para el uso de profesores de geometría en ejercicio que se espera se publique.

V. BIBLIOGRAFIA

Anacona, M.; Ortiz, G. (2004). *Elementos de lógica matemática*. Cali: Universidad del Valle.

Arce, J.; Castrillón, G.; Garzón, D.; Pabón, O. y Vega, M. (2010). *Caracterización de los vínculos entre los recursos pedagógicos y el conocimiento matemático en la enseñanza de las matemáticas en la educación básica*. Documento no publicado. Cali: Universidad del Valle.

Balacheff, N. (1999). *¿Es la argumentación un obstáculo?: invitación a un debate*. Recuperado de International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Prof: http://www.didactique.imag.fr/preuve/newsletter/990506theme/990506themeES.html

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los estudiantes de matemáticas*. Una empresa docente. Bogotá: Universidad de los Andes.

Camargo, L.; Leguizamón, C. y Samper, C. (2003). *Tareas que promueven el razonamiento en el aula a través de la geometría*. Bogotá: Cuadernos de Matemática Educativa.

Camargo, L.; Perry, P.; Rojas, C. y Samper, C. (2006). *Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Cañadas, M.; Deulofeu, J.; Figueiras, L. y Yevdokimov, O. (2008). *Perspectivas teóricas en el proceso de elaboración de conjeturas e implicaciones para la práctica*: *Tipos y pasos.* En: Enseñanza de las ciencias, 26(3), 431-444.

Cisneros, M. (2012) *Procesos de Argumentación mediante el uso de Pruebas Pragmáticas en un AGD con estudiantes de grado séptimo*. Trabajo de grado no publicado. Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (2004a). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo.* (M. V. Restrepo, Trad.) Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (2004b). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (Segunda edición). (M. V. Restrepo, Trad.) Cali: Peter Lang.

Duval, R. y Egret M. (1993) *Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif*. Lille: IREM 12.

Eduteka. (2007). *Módulo de aprendizaje visual, reseña de organizadores gráficos.* Obtenido el 16 de Septiembre de 2011. En: http://www.eduteka.org/modulos/4/86/

Gómez, M. & Grueso R. (2010). *Análisis y aplicación de algunos de los elementos teóricos y metodológicos expuestos por León Corredor y Calderón en su tesis "Experiencia figural y procesos semánticos para la argumentación en geometría", a propósito de los procesos argumentativos y de validación en geometría de estudiantes de educación secundaria*. Trabajo de grado no publicado. Cali: Universidad del Valle.

Larios, V. (2001). *Demostraciones y conjeturas en la escuela media*. Revista electrónica de Didáctica de las Matemáticas, 3, 45-55. Obtenido el 15 octubre de 2011, En: http://www.uaq.mx/matematicas/redm/art/a0703.pdf

Marmolejo, G. (2003). *Geometría, figuras y visualización*. Cali: Universidad del Valle.

Marmolejo, G. (2007). *Algunos tópicos a tener en cuenta en el aprendizaje del registro semiótico de las figuras geométricas: procesos de visualización y factores de visibilidad*. Tesis de maestría no publicada. Santiago de Cali: Universidad del Valle.

Mates, B. (1965). *Lógica Matemática Elemental*. Madrid: Editorial Tecnos.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional de Colombia.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. En: Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional de Colombia.

Moreno, A. (1971). *Lógica Matemática: Antecedentes y Fundamentos*. Buenos Aires: Eudeba Editores.

Pérez, M. (2006). *Lógica clásica y argumentación cotidiana*. Bogotá: Pontificia Universidad Javeriana.

Ponce de León, P. (2007). *La enseñanza inicial de la demostración matemática en la educación básica desde una perspectiva cognitiva.* Tesis de maestría no publicada. Cali: Universidad del Valle.

Quintero, G. (2010). *De la conjetura a la demostración deductiva con la mediación de un ambiente de geometría dinámica*. Tesis de maestría no publicada. Cali: Universidad del Valle.