

## RELACIONES PROPORCIONALES ENTRE SEGMENTOS EN EL CONTEXTO DEL MODELO DE VAN HIELE

Tanith Celeny Ibarra Muñoz, Edison Sucerquia Vega, Carlos Mario Jaramillo López

Universidad de Antioquia. (Colombia)

tanith2710@gmail.com, esucerquia@gmail.com, carlos.jaramillo1@udea.edu.co

**Palabras clave:** proporcionalidad, entrevista socrática, van Hiele

**Keywords:** proportionality, Socratic interview, van Hiele

### RESUMEN

El propósito de este artículo es divulgar los resultados del trabajo de investigación desarrollado en el marco del programa de Maestría en Educación en la línea de Educación Matemática de la Universidad de Antioquia. El estudio indagó por la manera cómo los estudiantes del grado quinto razonan cuando se enfrentan a situaciones de tipo proporcional en contextos geométricos. Para determinar y analizar los razonamientos que los estudiantes exhibían, se diseñó, refinó e implementó una entrevista de carácter socrático, en la cual el mecanismo de visualización geométrica propuesto estuvo centrado en el establecimiento de relaciones proporcionales entre segmentos. Este mecanismo permitió observar cuáles eran los razonamientos que los estudiantes manifestaban al momento de dar solución a dichas situaciones y permitió consolidar unos descriptores que caracterizaron los razonamientos que exhiben estos estudiantes.

### ABSTRACT

The purpose of this paper is to present the results of a research carried out in the framework of the Master program of Education line at the University of Antioquia. The study inquired by the way how fifth grade students reason when they were faced with situations of proportional representation in geometric contexts. To determine and analyze the arguments that students exhibited, was designed, refined and implemented an interview Socratic character, in which the mechanism proposed geometric visualization focused on the establishment of proportional relationships between segments, this mechanism allowed to observe what were the reasoning when students demonstrating for resolving such situations and allowed to consolidate descriptors that characterized the reasoning shown by these students.

### ■ Planteamiento del problema

El contexto escolar en el cual se desarrolló el estudio fue la Institución Educativa Antonio Roldán Betancur, ubicada en el municipio de Briceño, Antioquia–Colombia. Específicamente, en los estudiantes del grado quinto, se observó que existían dificultades cuando resolvían situaciones de tipo proporcional, es importante mencionar que desde los planteamientos del Ministerio de Educación Nacional (2006), las situaciones de tipo proporcional son un aspecto importante en este nivel educativo. Además, se observa que hay poca claridad en la manera como los estudiantes razonan cuando resuelven situaciones proporcionales en un contexto geométrico. Teniendo en cuenta lo anterior y la revisión de antecedentes investigativos al respecto, la pregunta de investigación que orientó el estudio fue: *¿Cómo son los razonamientos que exhiben los estudiantes de 5° de la Institución Educativa Antonio Roldán Betancur, con respecto a las relaciones proporcionales entre segmentos, en el contexto del modelo de van Hiele?*, en correspondencia con la pregunta el objetivo abordado fue: Caracterizar el nivel de razonamiento que exhiben los estudiantes de 5° de la Institución Educativa Antonio Roldán Betancur, con respecto a las relaciones proporcionales entre segmentos, en el contexto del modelo de van Hiele.

### ■ El modelo educativo de van Hiele

Este modelo fue propuesto por Pierre Marie van Hiele y Dina van Hiele-Geldof, en el año de 1957, inicialmente centro sus aplicaciones en el campo de la geometría, sin embargo, en las últimas décadas ha tenido una extensión al campo de conceptos del pensamiento matemático avanzado. El modelo educativo de van Hiele está compuesto por tres aspectos (van Hiele, 1986): el insight, los niveles de razonamiento, que son el aspecto descriptivo del modelo, y las fases de aprendizaje, que son el aspecto prescriptivo.

Para determinar y caracterizar los razonamientos que los estudiantes exhibían en lo referente al concepto objeto de estudio, se hizo énfasis en los niveles de razonamiento, que describen con claridad el grado de comprensión que un estudiante tiene ante un determinado concepto. Para esto, van Hiele propone 5 niveles de razonamiento, que para el presente estudio serán retomados desde Jaramillo y Esteban (2006), a continuación se hará una descripción de los niveles de razonamiento articulados al objeto de estudio de esta investigación.

Nivel 0, predescriptivo: el alumno percibe las figuras geométricas como una totalidad, limitándose a describir su aspecto físico. Establecen semejanza con otros objetos de la vida cotidiana y, en general, no reconocen las partes de las que están compuestas ni sus propiedades matemáticas. (Jaramillo y Esteban, 2006, p. 115)

Para el concepto de proporcionalidad, en este nivel, el estudiante percibe y describe características de la línea recta y del segmento, conocimientos previos necesarios para abordar las relaciones proporcionales que se establecen entre segmentos.

Nivel 1, de reconocimiento visual: el alumno es capaz de reconocer las partes que componen las figuras geométricas y, de manera informal, propiedades matemáticas de las que están dotadas. Es decir, reconocen mediante la observación, sus elementos y algunas de sus propiedades. Aunque todavía no relacionan las propiedades entre sí ni realizan clasificaciones lógicas a partir de las figuras. (Jaramillo y Esteban, 2006, p. 115).

En este nivel de razonamiento, producto de la comparación de las longitudes de los segmentos, el estudiante percibe diferencias o similitudes entre éstos, por ejemplo: que el  $\overline{AB}$  es más grande que el  $\overline{AC}$ , el  $\overline{AC}$ , es más pequeño que el  $\overline{AB}$ , o incluso decir que el  $\overline{AC}$ , cabe “tantas veces” en el  $\overline{AB}$ , lo que quiere decir, que identifica las características que le permitirán establecer las relaciones proporcionales entre estos.

De igual manera, para el “Nivel 2, de análisis: el alumno establece relaciones entre las propiedades que tiene una figura”. (Jaramillo y Esteban, 2006, p. 115). A medida que el estudiante avanza en su nivel de razonamiento logra establecer la razón entre segmentos a través de la comparación entre sus longitudes, como el número de veces que un segmento contiene a otro, logrando identificar la propiedad fundamental para reconocer las relaciones proporcionales presentes entre dichos segmentos.

En tanto que para el “Nivel 3, de clasificación o de relaciones: el alumno emplea propiedades que tiene una figura para deducir otras, utilizando el razonamiento formal” (Jaramillo y Esteban, 2006, p. 115). Un estudiante que razona en este nivel logra reconocer la relación de equivalencia que deben tener las razones entre segmentos para que estos sean proporcionales.

Por último, en el “Nivel 4, de deducción formal: el alumno puede establecer similitudes y diferencias entre distintas estructuras a partir de las propiedades que las definen”. (Jaramillo y Esteban, 2006, p. 115). Este es un nivel avanzado en tanto que se le exige al estudiante un grado de profundización, en el cual debe plantear los conocimientos matemáticos con el rigor que corresponde, de tal manera que sus razonamientos sean formales. Teniendo en cuenta el grado de escolaridad en que se desarrolla la investigación sólo se retoma del modelo hasta el nivel 3 que corresponde al de clasificación o de relaciones.

### ■ Relaciones proporcionales entre segmentos

El mecanismo visual geométrico por el cual se llega a establecer la proporcionalidad entre segmentos, es a través de la comparación entre sus tamaños. Para iniciar un proceso de razonamiento que permita establecer el concepto de razón entre segmentos que son conmensurables, primero se determina la razón para un segmento dividido en dos partes iguales, luego para tres partes iguales, hasta  $k$  partes iguales. A continuación se muestra el proceso de razonamiento, que se llevó a cabo en el trabajo de investigación.

División de un segmento en dos partes iguales:

Imagen 1. Segmento dividido en dos partes iguales.



La razón entre el  $\overline{AC}$  y  $\overline{AB}$  es  $\frac{1}{2}$  y entre el  $\overline{AB}$  y  $\overline{AC}$  es 2, por lo tanto:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2} \quad y \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = 2$$

División de un segmento en tres partes iguales:

Imagen 2. Segmento dividido en tres partes iguales.

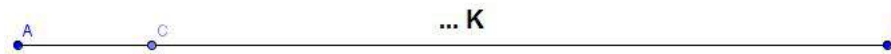


La razón entre el  $\overline{AC}$  y  $\overline{AB}$  es  $\frac{1}{3}$  y entre el  $\overline{AB}$  y  $\overline{AC}$  es 3, por lo tanto:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{1}{3} \quad y \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = 3$$

De manera general, el proceso de división de un segmento en  $K$  partes iguales:

Imagen 3. Segmento dividido en k partes iguales.



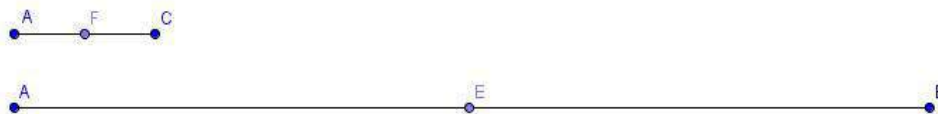
La razón entre el  $\overline{AC}$  y  $\overline{AB}$  es  $\frac{1}{k}$  y entre el  $\overline{AB}$  y  $\overline{AC}$  es  $k$  por lo tanto:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{1}{k} \quad y \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = k$$

De la misma manera como se inicia el proceso de razonamiento para el concepto de razón, también, se realiza para el concepto de proporcionalidad, pero dividiendo dos segmentos de diferentes tamaños e incurriendo en un proceso de comparación entre ellos.

División de dos segmentos de diferentes longitudes en dos partes iguales:

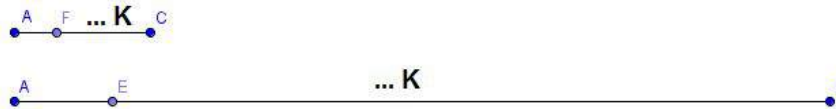
Imagen 4. Dos segmentos divididos en dos partes iguales.



$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AC}} = \frac{1}{2} \text{ y } \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2} \text{ por lo tanto } \frac{\overline{AF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}$$

División de dos segmentos de diferentes longitudes en  $K$  partes iguales:

Imagen 5. Dos segmentos divididos en  $k$  partes iguales.



$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{1}{K} \text{ y } \frac{\overline{AF}}{\overline{AC}} = \frac{1}{K} \text{ por lo tanto } \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AC}}$$

### ■ Metodología abordada

#### Entrevista de carácter socrático

La entrevista de carácter socrático en el contexto de van Hiele, permite revelar el nivel de razonamiento de un estudiante frente a un concepto matemático determinado (Jaramillo y Campillo, 2001). Este tipo de entrevista tiene una doble intencionalidad, por un lado, permite identificar el nivel de razonamiento de un estudiante en relación a un concepto matemático específico, y por otro lado, se convierte en una experiencia de aprendizaje que ayuda al estudiante a progresar en su nivel de razonamiento a medida que la va realizando. Cada pregunta debe estar diseñada de tal manera que permita la reflexión y la reorganización de las ideas, y al mismo tiempo, las asociaciones entre los conocimientos matemáticos que para el presente estudio están asociadas a las relaciones proporcionales entre segmentos.

El guion de entrevista diseñado para este estudio, tuvo en cuenta un mecanismo de visualización geométrica que estuviera acorde al nivel de escolaridad de la población participante, de acuerdo a lo planteado por el Ministerio de Educación Nacional (2006) en sus Estándares de Competencias Básicas.

Para la implementación del guion, se realizó un proceso de diseño, refinamiento y consolidación del mismo, de tal manera que permitiera que los estudiantes exhibieran sus razonamientos. De igual forma, para la caracterización de estos razonamientos se construyeron unos descriptores durante el desarrollo del trabajo de campo, los cuales fueron refinados durante el proceso de análisis de la información. Además, estos descriptores permitieron detectar y establecer las características del nivel de razonamiento en el que se encontraba cada estudiante participante de la investigación.

Los descriptores son criterios que se construyeron de manera hipotética teniendo en cuenta las características de cada uno de los niveles de razonamiento articulados al concepto matemático objeto de estudio. A medida que se va desarrollando el trabajo de campo, estos descriptores se van refinando y precisando acorde a las respuestas y el lenguaje utilizado por los estudiantes durante el desarrollo de la

entrevista, para finalmente consolidar aquellos que permiten establecer el nivel de razonamiento de un estudiante en un conocimiento matemático.

La investigación se abordó desde un enfoque cualitativo, a través de un estudio de casos que permitió comprender, interpretar y analizar en profundidad los razonamientos que los estudiantes de quinto grado exhibían cuando resolvían las situaciones propuestas en la entrevista de carácter socrático, lográndose una descripción de las características de estos razonamientos y la determinación del nivel de razonamiento en que se encontraba cada uno de ellos.

## ■ Resultados

La información recolectada fue analizada desde tres categorías establecidas a priori, que estaban en correspondencia con los niveles de razonamiento del modelo de van Hiele, estos niveles a su vez son caracterizados desde unos descriptores de nivel.

La siguiente tabla presenta las categorías, niveles y descriptores que permitieron el análisis y descripción de los razonamientos de éstos estudiantes.

**Tabla 1. Descriptores por nivel.**

Categorías	Niveles	Descriptores
Representación de segmentos	Nivel 0. Predescriptivo. Nivel 1. De reconocimiento visual.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Identifica y diferencia una línea recta de una línea curva.</li> <li>Representa gráficamente segmentos de recta.</li> <li>Representa simbólicamente segmentos de recta.</li> <li>Identifica la igualdad entre los tamaños de los segmentos.</li> <li>Reconoce el número de veces que un segmento está contenido en otro segmento.</li> </ul>
Comparación de segmentos de igual longitud.	Nivel 2. De análisis.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Reconoce la propiedad transitividad entre los segmentos.</li> <li>Establece la razón como el número de veces que un segmento está contenido en otro segmento.</li> <li>Reconoce la razón entre dos segmentos.</li> <li>Establece la razón entre dos segmentos expresándola en su forma simbólica.</li> <li>Establece la razón entre dos segmentos divididos en k partes iguales y la expresa en su forma simbólica correspondiente.</li> </ul>
Estableciendo segmentos proporcionales	Nivel 3. De clasificación o de relaciones.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Identifica la relación de equivalencia entre las razones.</li> <li>Reconoce y justifica la proporcionalidad entre segmentos.</li> <li>Reconoce y justifica la proporcionalidad entre segmentos divididos en k partes iguales.</li> </ul>

Los razonamientos que evidenciaron los cuatro estudiantes se analizaron, por un lado, conjuntamente para establecer de manera más aproximada los correspondientes descriptores de nivel y, por otro lado, individual para determinar el nivel de razonamiento en que se encontraba razonando cada uno de ellos y así poder caracterizar el nivel de razonamiento que tienen con respecto a las relaciones proporcionales entre segmentos.

Inicialmente las preguntas del guion estaban orientadas a indagar en los estudiantes por el concepto de segmento, el cual permitiría el desarrollo adecuado de la entrevista, del análisis realizado a este primer aspecto se pudo observar que los cuatro estudiantes logran reconocer, representar y simbolizar segmentos adecuadamente lográndose inferir que sus razonamientos están acordes a un nivel 1 de razonamiento.

Posteriormente el mecanismo de razonamiento propuesto permitía que el estudiante paulatinamente a través de las situaciones que se le presentaban, reconociera y estableciera la razón entre los segmentos, a través de la comparación entre los tamaños de éstos, como el número de veces que un segmento está contenido en otro, para esto, el guion diseñado tenía varias preguntas que permitían, por un lado que el estudiante exhibiera sus razonamientos al respecto y por otro que se convirtiera en una experiencia de aprendizaje, en la medida que cada pregunta le permitía refinar sus razonamientos, su lenguaje y ampliar la red de relaciones que tenían sobre este concepto.

Los análisis realizados en relación a esta categoría mostraron que tres de los cuatro estudiantes tenían razonamientos acordes al nivel dos, pues reconocían y establecían la razón como el número de veces que un segmento está contenido en otro, sin embargo, uno de los estudiantes exhibe en sus razonamientos dificultades al momento de establecer la razón entre segmentos, pues la comparación que hizo entre los tamaños de los segmentos era a través de expresiones como “diferente”, refiriéndose a que los tamaños de los segmentos eran diferentes y no al número de veces que el segmento está contenido en el otro.

Finalmente, en el nivel tres de razonamiento el estudiante establecía las relaciones proporcionales entre segmentos, al identificar la relación de equivalencia que debían tener las razones, al respecto se destaca que tres de los estudiantes identifican la relación de equivalencia entre las razones, reconocen y justifican la proporcionalidad que se establece entre los segmentos, identificándose que éstos estudiantes exhiben razonamientos acordes a un nivel 3.

## ■ Conclusiones

El diseño de una propuesta metodológica para abordar el estudio de la proporcionalidad, principalmente desde su aspecto geométrico y no desde su aspecto numérico, específicamente para segmentos proporcionales, permitió determinar la manera como razonan los estudiantes en relación a este concepto. Además, desde esta perspectiva, se convirtió en una experiencia de aprendizaje significativa para el estudio de la proporcionalidad, en el contexto del nivel de escolaridad de grado quinto.

Las situaciones proporcionales en contextos geométricos que se propusieron en el transcurso de la entrevista, permitieron abordar el estudio del concepto de proporcionalidad desde las raíces epistemológicas e históricas propias del concepto, donde se precisa que la razón es clave para adquirir la comprensión del concepto de proporcionalidad en este nivel de escolaridad. Las magnitudes, longitudes y las medidas conmensurables y no conmensurables relacionadas con los segmentos, que posteriormente fueron fundamentadas en el teorema de Thales, son algunos de los aspectos que se resaltan y dan paso a nuevos análisis en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, abordados desde su aspecto histórico-epistemológico.

Las propiedades y estructura de los niveles de razonamiento del modelo educativo de van Hiele, y la experiencia de la investigadora como docente, permitieron que se construyeran con anterioridad unos descriptores hipotéticos, que fueron refinados durante el desarrollo del trabajo de campo y la recolección y análisis de la información, los cuales dieron lugar a la caracterización del proceso de razonamiento que los estudiantes exhibían con respecto a las relaciones proporcionales entre segmentos.

Teniendo en cuenta lo anterior, la caracterización de la manera como razonan los estudiantes con respecto a las relaciones proporcionales entre segmentos, se logró realizar mediante: el diseño y aplicación de la entrevista de carácter socrático, las características y fundamentos teóricos de los niveles de razonamiento del modelo educativo de van Hiele, el mecanismo de visualización geométrico propuesto y los descriptores construidos en relación a estos aspectos.

### ■ Referencias bibliográficas

- Jaramillo, C y Campillo, L. (2001). Propuesta teórica de entrevista socrática a la luz del modelo de van Hiele. *Divulgaciones matemáticas*, 9 (1), 65-84.
- Jaramillo, C. y Esteban, P. (2006). Enseñanza y aprendizaje de las estructuras matemáticas a partir del modelo de Van Hiele. *Revista Educación y pedagogía*, 13 (45), 109-118.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá, D.C., Colombia: Editorial Magisterio.
- Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Orlando, Florida: Academic Press.