

## LA METÁFORA DE LA REPRESENTACIÓN VECTORIAL

**Elizabeth Hernández Arredondo, Claudia M. Acuña Soto**

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. (México)

[eli\\_visual@hotmail.com](mailto:eli_visual@hotmail.com), [claudiamargarita\\_as@hotmail.com](mailto:claudiamargarita_as@hotmail.com)

**Palabras Clave:** Metáfora, signo, trabajo colaborativo, vector, cinemática

**Keywords:** Metaphor, sign, collaborative work, vector, kinematics

### RESUMEN

En este trabajo se hace un estudio sobre las metáforas usadas por universitarios cuando resuelven problemas de cinemática, en este proceso se observa también los usos que ellos hacen de los signos asociados a los vectores. En las actividades se usó lápiz y papel así como la computadora en el desarrollo de un trabajo colaborativo. Identificamos el uso continuo de la llamada *metáfora del camino* junto con otras que aparecen ocasionalmente. Encontramos que el empleo exitoso de las metáforas para modelar adecuadamente el movimiento en los problemas propuestos requiere además de la interpretación del vector como un símbolo matemático en un sentido semiótico, al mismo tiempo que una interpretación espacial adecuada.

### ABSTRACT

This paper is a study about metaphors construction in kinematic problems solved by university students, at the same time we observe the use of signs associated with the vector and its meanings in the solving process. The activities are supported by the use of pencil, paper and computer in a collaborative work, we're able to identify the use of the way metaphor simultaneously with other ones, we found that the successful use of this metaphor was not enough to model properly the movement on problems posed, given that objective it is required to use, besides, the vector as a mathematical symbol in the semiotic sense and at the same time an appropriate spatial interpretation for the solution of posed problems.

## ■ Introducción

El aprendizaje de los vectores es fundamental para interpretar las leyes físicas en el ambiente escolar, en el cual se utilizan una variedad de representaciones matemáticas del vector. Este uso hace necesario que los estudiantes aprendan su tratamiento y aplicación. Un primer conflicto que aparece en la enseñanza se refiere al énfasis de la representación de la flecha en el plano vectorial, representación que no siempre es la más adecuada en problemas situados en el contexto físico, en particular cuando se debe modelar fenómenos como el movimiento de acuerdo a Nguyen y Meltzer (2003).

Al inicio en el estudio de la física, el estudiante es introducido al trabajo con el vector representado como una flecha, lo que resulta útil para dar sentido a la posición, la magnitud, la dirección y el sentido de manera perceptual. Este trabajo se sitúa en dos entornos de conocimiento: el primero se relaciona con los fenómenos físicos de movimiento, y el segundo con la representación matemática de tales fenómenos.

Dos aproximaciones cognitivas apoyarán la presente investigación, por un lado estamos interesados en investigar qué tipo de metáforas son usadas por nuestros estudiantes cuando deben resolver problemas en un contexto de movimiento relativo uniforme, en particular con apoyo del espacio vectorial euclídeo en  $\mathbb{R}^2$ , en el sentido de Lakoff y Núñez (2000); y por otro lado, observamos el uso que éstos dan a los vectores como signos, cuyos usos permiten identificar distintos tipos de significado, en este sentido nos apoyaremos en la semiótica de Pierce (1931-1958).

## ■ Referencias teóricas

El entorno general que es observado en este trabajo se refiere al que proporciona la postura teórica de la Ciencia de la Cognición Personificada (Cience of Embodiment Cognition), que Núñez (2008) explica “como la organización de inferencias matemáticas emerge del mecanismo cognitivo cotidiano de la imaginación humana, la cual se verifica a través del mapeo conceptual encarnado, las metonimias, combinaciones conceptuales y otros” (p. 334). En particular, en este trabajo consideraremos el uso del pensamiento metafórico usado por nuestros estudiantes como la base de las interpretaciones que tienen por objeto resolver procesos de movimiento relativo.

Se considerará a la metáfora como un mecanismo cognitivo que permite la abstracción de entidades por medio de experiencias corporales, y es interpretada como la comprensión de un objeto, cosa o dominio en términos de otro (Lakoff y Johnson, 1991; Lakoff y Núñez, 2000; Bolite, Acevedo y Font, 2005); en otras palabras, la metáfora crea una relación conceptual entre un dominio de salida y uno de llegada a partir de la proyección de propiedades.

Los autores anteriores suelen distinguir dos tipos de metáforas conceptuales: 1) Grounding, el dominio de partida era fuera de las matemáticas mientras el de llegada está dentro de las matemáticas; y 2) Linking, el dominio de partida y llegada está dentro de las matemáticas. El proceso cognitivo que vincula una idea con su representación será estudiado a partir de los esquemas imagen usados por los estudiantes, así como el tipo de metáforas involucradas en la interpretación de los procesos físicos mencionados.

El vector como representación matemática nos permite considerar dos aspectos básicos que se vinculan a través del pensamiento metafórico, por un lado se trata de un objeto matemático bien definido y por otro cuenta con una representación perceptual muy sugestiva como una flecha. Los esquemas imagen puestos en funcionamiento deben vincular nuestras sensaciones corporales de carácter dinámico al tiempo que las estructuras matemáticas, tal como sugieren Lakoff y Johnson (1991) en el caso del vector.

Para entender los signos asociados al vector en la interpretación de los estudiantes, se hace uso de las consideraciones de Peirce respecto a los distintos tipos de signos y sus usos. En principio, un signo o “representamen”, *es algo que está para alguien, por algo, en algún aspecto o disposición (...)* Charles S. Peirce (1998). En particular, la representación del vector como una flecha muestra propiedades como: magnitud, dirección y sentido, pero este signo o representación puede ser usado como un índice, un ícono o un símbolo; sin embargo, el simple uso no asegura que éste se pueda constituir en un mediador para conocimiento (Radford, 2001). De hecho, el uso que los principiantes dan a los signos en un primer momento está apoyado por ideas llamadas idiosincráticas (Berger, 2005) y es hasta que este uso se transforma en funcional cuando está en condiciones de asumir no sólo las propiedades matemáticas asociadas a las definiciones, sino también los procedimientos vinculados.

Los vectores que aparecen en su forma gráfica como flechas también son considerados en su forma algebraica para operarlos, lo que establece un vínculo entre estas dos formas de representarlos para describir y explicar el comportamiento vectorial del movimiento, esta actividad nos coloca ante la tarea de construir un modelo del fenómeno observado (Doerr y English, 2003); la construcción de tal modelo será la base de la interpretación del fenómeno y la solución del problema.

## ■ Metodología

El tratamiento metodológico de este trabajo está fundamentado en la corriente descriptiva-interpretativa y corresponde a un estudio con universitarios; de acuerdo con Cohen, Manion y Morrison (2007), de tipo no participante. Trabajamos con 20 estudiantes (edad promedio de 19 años) en 9 sesiones semanales de dos horas en la materia de Física, con el apoyo del docente titular y del investigador, en el segundo semestre de la carrera de Ingeniería en Computación en la Universidad Autónoma del Estado de México-Campus Valle de Chalco, haciendo uso de la computadora, en una investigación en tres momentos:

- 1) propusimos actividades iniciales de introducción a las propiedades de los vectores tanto algebraicas como gráficas con apoyo en lápiz y papel, y en computadora, la cual fue usada como dispositivo de ensayo de las propuestas de los estudiantes. Las actividades fueron un cuestionario diagnóstico, tres de ellas semi-guiadas (cuestionario previo, uno computacional y otro posterior).
- 2) se requirió del uso de la computadora para apoyar la interpretación de los problemas de movimiento, estas fueron dos actividades semi-guiadas (cuestionario previo, uno computacional y otro posterior) y problemas libres.
- 3) la interpretación de un problema de movimiento relativo, resuelto de manera grupal y en una entrevista final por equipo de trabajo.

El carácter interpretativo de la actividad fue enriquecido por la adopción de un trabajo colaborativo en el sentido de Murillo (2001), donde la solución de los problemas enfrenta la crítica general, a lo que se

sumó la necesidad de hacer un esfuerzo adicional para comunicar claramente las propuestas de solución, y lograr el consenso de los participantes dando por resultado comunicación ágil y precisa sobre el fenómeno de movimiento explicado con base en el uso de vectores. En este entorno es que se manifiestan las metáforas usadas para dar sentido a los problemas para lograr su solución.

### ■ Análisis de resultados y conclusiones

Para el análisis de los resultados se usaron dos puntos de vista: 1) la metáfora que dirigía la interpretación general, y 2) el tratamiento de los signos involucrados; además, bajo la idea de que estos dos elementos están vinculados, se analiza de manera conjunta un tercer punto de vista: 3) el pensamiento metafórico vinculado a los signos.

#### 1. La metáfora usada en la interpretación del problema

Los resultados sobre la construcción de las metáforas, producto de los problemas propuestos, nos sugieren un desarrollo de distintos tipos de metáforas. En un inicio, con una metáfora estática del vector, la que era el reflejo de la definición que los estudiantes habían aprendido y que en el transcurso de la investigación fue incorporando elementos del entorno de trabajo volviéndose de tipo dinámico. Durante todo el proceso de interpretación de los problemas de movimiento se manifiesta la metáfora que será llamada del *camino*, la que fue más evidente a partir del uso del arrastre en la computadora; está metáfora es considerada de tipo ontológico, pues con ella los estudiantes le dan sentido a la orientación espacial requerida en problemas de movimiento a partir de su propio cuerpo en 3D. Enseguida, se presenta la proyección del esquema imagen del camino observada durante la investigación.

Tabla 1. Proyección del esquema imagen del camino

DOMINIO DE PARTIDA ESQUEMA DEL CAMINO	DOMINIO DE LLEGADA
Camino (desplazamiento, movimiento)	Magnitud
Estar sobre el camino	Dirección
Origen del camino	Origen del vector o (0,0)
Final del camino	Punto final del vector
Recorrido del camino	Sentido
Fuera del camino	Elementos que no pertenecen al vector

En la parte de las actividades en donde se exploraban propiedades del álgebra vectorial, las metáforas presentes eran de tipo Grounding, en este caso abundaban las referencias de comandos de la computadora vinculándolas a la experiencia corporal del movimiento. Iniciaron explicando con base en un dominio de partida fuera de las matemáticas, como se muestra en el siguiente ejemplo de la figura 1. Durante las discusiones va tendiendo a colocarse en contextos y lenguaje que son reconocidos como propiamente matemáticos, tanto para el vector como para los procedimientos usados.

Figura 1. Ejemplo de una metáfora tipo Grounding por el estudiante (16)

Estudiante 16. Miren el vector, lo planteo pensando en que me *muevo derecho*, así.  
El estudiante indica con su mano un desplazamiento.



En la segunda parte de las actividades, en donde se exploraban problemas de movimiento relativo, aparecieron nuevamente metáforas tipo Grounding y se incorporaron las de tipo Linking, las cuales tienen su dominio de partida y de llegada en las matemáticas, en este momento ya son el recurso usado para modelar, como en la siguiente figura.

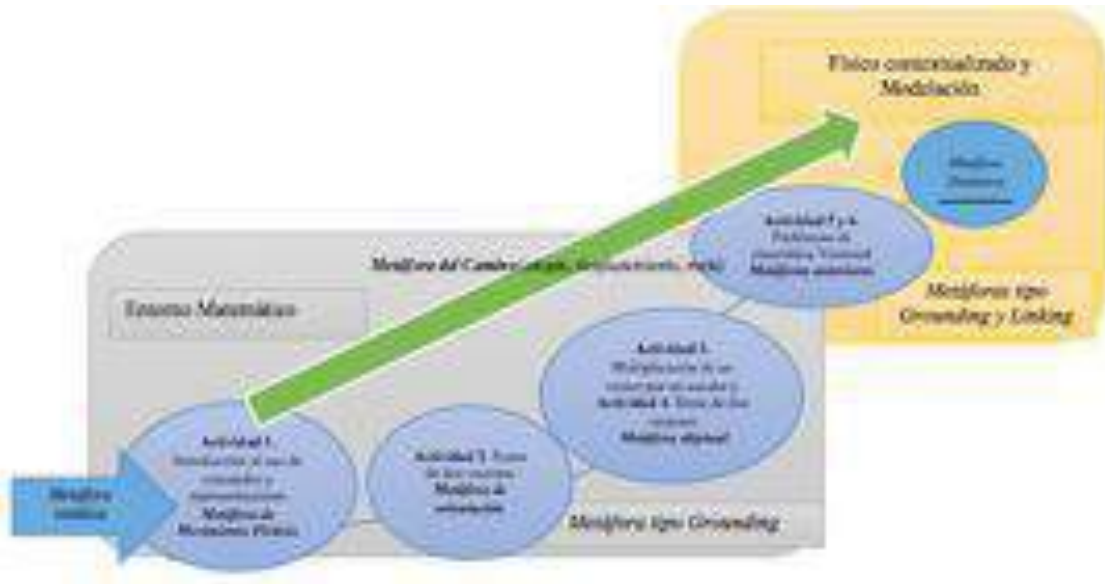
Figura 2. Ejemplo de una metáfora tipo Linking por el estudiante (16)

Estudiante 20. Entonces va así y tiene que ser forzosamente un *triángulo*.  
El estudiante está indicando con las manos la orientación de los vectores involucrados en el fenómeno del problema que resuelve, en donde el sistema vectorial tiene forma de un triángulo en su interpretación.



Proponemos un diagrama que de manera conjunta establece las actividades y el tipo de metáforas que desarrollaron los estudiantes a lo largo de la investigación.

Figura 3. Esquema de las metáforas que aparecieron en la mayoría de estudiantes



## 2. El tratamiento de los signos

Respecto a los signos, se puede decir que los íconos, índices y símbolos aparecen continuamente en el proceso de interpretación de los problemas y los estudiantes no detectan la diferencia, ello conlleva a un obstáculo cuando operan con ellos. Las siguientes imágenes dan cuenta del tipo de tratamiento dado por los estudiantes.

Figura 4. Imágenes del tratamiento con los signos del vector

Ícono	Índice	Símbolo
		<p>La ley de cosenos es <math>C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \alpha</math> entonces si para medir su distancia <math>AC^2</math> es:                  Distancia <math>AC^2 = \text{sqrt}(\text{distancia } AB^2 + \text{distancia } BC^2 - 2 \text{ distancia } AB * \text{distancia } BC \cos \alpha)</math>; entonces para determinar el valor los componentes de <math>Z</math>, mediante la ley de cosenos es:  <math>Zx = \text{distancia } AC^2 * \cos(\text{Angulo}[\text{distancia } AB^2 + \text{distancia } BC^2 - 2 \text{ distancia } AB * \text{distancia } BC \cos \alpha]) = Zx = -0.91</math> y  <math>Zy = \text{distancia } AC^2 * \sin(\text{Angulo}[\text{distancia } AB^2 + \text{distancia } BC^2 - 2 \text{ distancia } AB * \text{distancia } BC \cos \alpha]) = Zy = 2.18</math></p>
Estudiante 1	Estudiante 21	Estudiante 16

En la serie de imágenes de la figura 4 puede observarse que el estudiante (1) hace uso de los vectores como un ícono puesto que captura la imagen de la pantalla de la computadora y es la información que

recupera; mientras que al estudiante (21) no le parece importante el valor de las medidas, sino indicar las relaciones entre los vectores y deja muestra de ello al usar una notación diferente a la de la computadora, en este caso usa como indicador la notación de segmentos de recta. Por su parte, el estudiante (16) hace uso de los signos como símbolos porque recupera información de la escritura de la computadora, pero considera importante mostrar cómo se están operando estos vectores.

### 3. El pensamiento metafórico y los signos

Encontramos que aunque el mismo tipo de metáforas fue la base de las interpretaciones de nuestros estudiantes, la diferencia estuvo en el uso que le dan a los signos en cada momento. Los estudiantes que logran interpretar los problemas correctamente fueron aquellos que usaron los signos gráficos y algebraicos como símbolos matemáticos.

Los signos involucrados en las interpretaciones se refieren a diagramas de operaciones de vectores en su representación de flecha y las respectivas expresiones algebraicas; además se requiere de una adecuada organización espacial de la información del problema. Aquellos que usaban las metáforas les permitían una interpretación adecuada; sin embargo, quienes usaron solamente signos como íconos o índices, no llegaban a resolverlo pese a que tenían una idea general de lo que sucedía en el problema.

### ■ Conclusiones

En esta investigación el papel del pensamiento metafórico fue el de facilitar una interpretación de los problemas de movimiento relativo, donde el tipo de metáfora presente es guiada por la necesidad de interpretación.

Detectamos una metáfora básica que aparece durante todo el proceso de interpretación y solución llamada metáfora del Camino, ésta se fortaleció con el uso de la computadora, en particular a partir del uso del arrastre, en conjunto con referencias básicas al origen del plano vectorial, la dirección, el sentido y la magnitud. Simultáneamente aparecen los signos como símbolos en el tercer momento de la investigación, a diferencia de los dos primeros en los que tanto la gesticulación como los diagramas usados por los estudiantes dan cuenta de índices e iconos.

Sobre el proceso del uso de los signos influidos por el uso de GeoGebra, éste permitió al estudiante:

1. abandonar la idea de la flecha debido a los componentes rectangulares y la operatividad que proporciona la computadora,
2. unificar los entornos geométrico y algebraico apoyado en sus representaciones en lápiz y papel,
3. organizar y validar sus resultados, también extendió el lenguaje de la computadora a las actividades de lápiz y papel.

Las referencias y metáforas asociadas a los objetos matemáticos puestos en funcionamiento en esta investigación, así como las ideas que utiliza el estudiante cuando construye representaciones vectoriales de fenómenos de movimiento, se apoyan en referencias reiteradas a la dinámica de cuerpo, incluso cuando usan la computadora: el movimiento es visto como un desplazamiento en general y en particular del cursor en la computadora.



### ■ Referencias bibliográficas

- Berger, M. (2005). Vygotsky? is theory of concept formation and Mathematics education. *Proceedings of 29th conference of the psychology of Mathematics Education, Bergen, Norway*, 2,153-160.
- Bolite, J.; Acevedo J. I. y Font, V. (2005). Cognição corporificada e linguagem na sala de aula de matemática analisando matáforas na dinâmica. do processo de ensino de gráficos de funções. *Boletim GEPEM*, 46, 41-54.
- Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education*. USA: Taylor & Francis.
- Doerr, H. M., y English, L. D. (2003). A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. *Journal for Research in Mathematics Education*, 34, 110-136.
- Lakoff, G. y Johnson, M. (1991). *Metáforas de la vida cotidiana*. Madrid: Cátedra.
- Lakoff, G. y Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.
- Murillo, R. (2001). *Un entorno interactivo de aprendizaje con Cabri-actividades, aplicado a la enseñanza de la geometría en la E.S.O.* (Tesis Doctoral). Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals. Universitat Autònoma de Barcelona.
- Núñez R. (2008). Mathematics, The Ultimate Challenge to Embodiment: Truth and the Grounding of Axiomatic Systems. In P. Calvo & T. Gomila (Eds.), *Handbook of Cognitive Science: An Embodied Approach* (pp. 333-353). Amsterdam: Elsevier.
- Nguyen, N. L., & Meltzer, D. (2003). Initial understanding of vector concepts among students in introductory physics course. *American Association of Physics teachers American Association of Physics teachers*, 71(6), 630-638.
- Peirce, C. S. (1998). *In Peirce Edition Project (ed.), Volume 2. The Essential Peirce*. Bloomington, Indiana University Press.
- Radford, L. (2001). Signs And Meanings In Students' Emergent Algebraic Thinking: A Semiotic Analysis. *Educational Studies In Mathematics*, 42; 237–268.