



“Revista Virtual Universidad Católica del Norte”. No. 29, (febrero – mayo de 2010, Colombia), acceso: [<http://revistavirtual.ucn.edu.co/>], ISSN 0124-5821 - Indexada Publindex-Colciencias, Latindex, EBSCO Information Services y Actualidad Iberoamericana. [pp. 66-81]

Contextos de descubrimiento y justificación en la clase de matemáticas

Discovery and Justification Contexts in Mathematics Class

Contextes de découvertes et justification dans le cours de mathématiques

Mónica Marcela Parra Zapata

Licenciada en Educación Básica con énfasis en Matemáticas

Universidad de Antioquia

Correo: monikampz@gmail.com

Mónica Mercedes Zapata Jaramillo

Estudiante Licenciatura en Educación Básica

con énfasis en Matemáticas Universidad de Antioquia

Correo: monizapata25@gmail.com

Jorge Andrés Toro Uribe

Estudiante Licenciatura en Educación Básica

con énfasis en Matemáticas Universidad de Antioquia

Correo: andrectoro@gmail.com

John Henry Durango Urrego

Licenciado en Matemáticas y Física

Magíster en Educación Matemática, Universidad de Antioquia

Integrante Grupo de investigación en Educación Matemática e Historia

Universidad de Antioquia-Universidad Eafit

Correo: jhdurango@gmail.com

Tipo de artículo: Reflexión derivado de investigación

Recepción: 2009-11-18

Revisión: 2009-12-28

Aprobación: 2010-01-12



"Revista Virtual Universidad Católica del Norte". No. 29, (febrero – mayo de 2010, Colombia), acceso: [<http://revistavirtual.ucn.edu.co/>], ISSN 0124-5821 - Indexada Publindex-Colciencias, Latindex, EBSCO Information Services y Actualidad Iberoamericana. [pp. 66-81]

Contenido

1. Introducción
2. Pruebas, conjeturas y refutaciones como un camino hacia el desarrollo del razonamiento matemático
3. Descubrimiento y justificación en los lineamientos curriculares y estándares básicos de competencias en Colombia
4. Algunas reflexiones sobre el papel en el aula de los contextos de descubrimiento y justificación
5. A modo de cierre
6. Lista de referencias

Resumen. En este artículo de reflexión, resultado de investigación, se presentan algunos conceptos que caracterizan los contextos de descubrimiento y justificación en clase de matemáticas. Particularmente, se valora su consolidación en las matemáticas escolares en Colombia por medio del análisis de las disposiciones del Ministerio de Educación Nacional a través de los Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas y los Estándares Básicos de Competencias. Finalmente, se discuten elementos que caracterizan estos contextos y los procesos que ellos involucran, para establecer algunas reflexiones de trabajo futuro sobre éstos en el contexto colombiano.

Palabras Clave: Contexto de descubrimiento y Justificación, Conjetura, Prueba, Demostración, Refutación.

Abstract. In this reflection article, result of research activities, we present some characteristic discovery and justification concepts in mathematics class. Particularly, is valued their consolidation in school mathematics in Colombia through the analysis of the National Education Department regulations through Curricula Guidelines for the Mathematics area and the Competences Basic Standards. As a final point, we discuss about the characteristic elements of these contexts and the process they involve, in order to set some future work reflections about them in the Colombian context.



"Revista Virtual Universidad Católica del Norte". No. 29, (febrero – mayo de 2010, Colombia), acceso: [<http://revistavirtual.ucn.edu.co/>], ISSN 0124-5821 - Indexada Publindex-Colciencias, Latindex, EBSCO Information Services y Actualidad Iberoamericana. [pp. 66-81]

Keywords: Discovery and Justification Context, Conjecture, Proof, Demonstration, Refutation.

Résumé. Cet article de réflexion, résultat des activités de recherche, présente quelques concepts qui caractérisent les contextes de découverte et justification dans le cours de mathématiques. Particulièrement, on estime leur consolidation dans les mathématiques scolaires en Colombie au moyen de l'analyse des dispositions du Ministère d'Éducation Nationale à travers des Directives Curriculaires pour le domaine des Mathématique et les Standards Essentiels des Compétences. Pour en finir, on discute sur des éléments qui caractérisent ces contextes et les processus qu'ils impliquent, pour établir quelques réflexions de travail futur sur eux dans le contexte colombien.

Mots-clés: Contexte de découverte et justification, Conjecture, Preuve, Démonstration, Réfutation.

1. Introducción

*"¿Necesitamos la prueba en las matemáticas escolares? ¡Por supuesto!
¿Debo decir algo más? ¡Por supuesto!"
Schoenfeld (1994)*

Durante las últimas décadas investigadores en Educación Matemática se han cuestionado por el rol del descubrimiento y la justificación en clase de matemáticas, centrandose su interés en cómo a través de los procesos que éstos involucran puede promoverse la construcción de los conceptos matemáticos y el desarrollo de habilidades como la observación, la exploración y el análisis. Dentro de estas investigaciones se puede hacer referencia a trabajos como los de Imre Lakatos, Nicolás Balacheff, Raymond Duval Paolo Boero, Alessandra Mariotti; Kristina Reiss, Ángel Gutiérrez, Juan D. Godino, Ángel M. Recio, Yasuhiro Sekiguchi, Patricio Herbst, Harel y Sowder, Víctor Larios, Lulu Healy, Saddo Ag Almouluod y Carmen Samper.

Según Godino & Recio (2001) "el interés parece justificado por el papel esencial de las situaciones y procesos de validación en la propia matemática y el bajo nivel que muestran los estudiantes en la comprensión y elaboración de pruebas" (p.405). En investigaciones realizadas en diferentes países se ha reflejado la inclusión del razonamiento matemático en los currículos, incorporando en ellos situaciones de aprendizaje que propicien los procesos de conjeturar, probar y refutar desde los primeros años de escolaridad.



"Revista Virtual Universidad Católica del Norte". No. 29, (febrero – mayo de 2010, Colombia), acceso: [<http://revistavirtual.ucn.edu.co/>], ISSN 0124-5821 - Indexada Publindex-Colciencias, Latindex, EBSCO Information Services y Actualidad Iberoamericana. [pp. 66-81]

La exploración y la búsqueda de conjeturas y pruebas son esenciales para que los estudiantes logren darle sentido a la demostración matemática y puedan potenciar su competencia demostrativa y argumentativa, entendiéndose ésta como la capacidad que desarrollan los estudiantes para aplicar diferentes tipos de razonamiento y plantear argumentos y justificaciones en la actividad demostrativa. Su desarrollo comienza en la educación básica promoviendo un ambiente de aprendizaje en el cual los procesos de argumentación y justificación hagan parte de la clase de matemáticas.

En los Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas en Colombia (MEN, 1998) se plantea como base de una estructura curricular adecuada para el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes, cinco procesos generales: "el razonamiento; la resolución y planteamiento de problemas; la comunicación; la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos" (p. 35), dejando ver así el razonamiento como eje que debe articularse y aparecer en las actividades matemáticas de los estudiantes.

Tras la indagación en los Lineamientos se halla que aunque el razonamiento es considerado como un proceso en la construcción del conocimiento matemático, se presenta poca inclusión de los contextos de descubrimiento y justificación, y no se muestra cómo y por qué deben ser llevados al aula por el docente.

Con base en lo anterior, en este artículo presentamos un rastreo bibliográfico sobre los contextos de descubrimiento y justificación en el aula de clase, a la luz de algunas de las investigaciones experimentales y teóricas realizadas en diferentes países del mundo, considerando al estudiante en la elaboración de conjeturas, pruebas, demostraciones y refutaciones, y en el desarrollo de su razonamiento; al docente en este proceso y en la construcción y validación del conocimiento matemático; y a la geometría como objeto de conocimiento propicio para desarrollar el razonamiento en el aula de clase. Se presentan además las nociones que hacen parte de los Lineamientos Curriculares y Estándares Básicos de Competencias del **MEN** en relación con los contextos de descubrimiento y justificación, y los procesos que ellos involucran, y se presenta una discusión sobre algunos elementos que requieren una revisión con respecto a la profundidad de éstos.

Las reflexiones presentadas en este artículo hacen parte de las discusiones realizadas en los diferentes Espacios de Conceptualización de la Licenciatura en Educación básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad de Antioquia y del trabajo de investigación presentado por Cadavid et al. (2009) titulado "Investigación documental referida a contextos de



"Revista Virtual Universidad Católica del Norte". No. 29, (febrero – mayo de 2010, Colombia), acceso: [<http://revistavirtual.ucn.edu.co/>], ISSN 0124-5821 - Indexada Publindex-Colciencias, Latindex, EBSCO Information Services y Actualidad Iberoamericana. [pp. 66-81]

descubrimiento y justificación en la clase de matemáticas". En dicha investigación, Cadavid y sus colaboradores realizan una investigación cualitativa en la que se indaga sobre los aportes investigativos realizados en **Francia, Italia, Alemania, España, Japón, Estados Unidos, México, Brasil y Colombia** en torno a los contextos de descubrimiento y justificación en clase de matemáticas.

En la investigación en mención se presenta un estudio de las definiciones y categorías propuestas en cada país sobre el razonamiento empleado por los estudiantes ante situaciones de validación; realizándose interpretaciones sobre los aportes de las investigaciones en cuanto al estudiante en el desarrollo de argumentos, conjeturas, pruebas, demostraciones y refutaciones; al docente en los contextos implícitos en la enseñanza de éstos; y la geometría como objeto de conocimiento propicio para el desarrollo de los mismos.

2. Pruebas, conjeturas y refutaciones como un camino hacia el desarrollo del razonamiento matemático

Los contextos de descubrimiento y justificación matemática propician la comunicación y la comprensión de las matemáticas y de los conceptos matemáticos al interior de la clase. En ellos se requiere de la observación, la verificación, la explicación, la descripción y la argumentación para sustentar las proposiciones matemáticas. Estos contextos implican los procesos de conjetura, prueba, demostración y refutación.

El **contexto de descubrimiento** en la clase de matemáticas es entendido como los espacios en los que el estudiante, utilizando el razonamiento matemático, construye enunciados de los que se desconoce su validez. De este contexto hacen parte los procesos de conjetura y refutación.

Por su parte, el **contexto de justificación** hace referencia a las actividades y procesos en los que el estudiante emplea argumentos matemáticos para validar los enunciados. Aquí se incluyen las pruebas y las demostraciones.

A continuación se delimitarán los términos, los procesos de conjetura, prueba, demostración y refutación, mostrando cómo mediante una adecuada estrategia de intervención, se puedan incorporar en las prácticas educativas, haciendo posible el desarrollo del razonamiento matemático en los estudiantes.



"Revista Virtual Universidad Católica del Norte". No. 29, (febrero – mayo de 2010, Colombia), acceso: [<http://revistavirtual.ucn.edu.co/>], ISSN 0124-5821 - Indexada Publindex-Colciencias, Latindex, EBSCO Information Services y Actualidad Iberoamericana. [pp. 66-81]

Conjeturas

Las conjeturas matemáticas son proposiciones que pueden ser verdaderas o falsas, son establecidas tras observaciones; éstas se suponen ciertas o no, pero no poseen una prueba ni refutación hasta el momento de su elaboración.

Según Boero (2002) la conjetura es asumida como un proceso, el cual abarca la exploración de la situación problema, identificación de regularidades, identificación de condiciones bajo las cuales tales regularidades ocurren, identificación de argumentos para la plausibilidad de la conjetura producida, entre otros.

Pruebas

Las pruebas son los primeros indicios de los estudiantes para dar cuenta de sus argumentos matemáticos, éstas son producidas por los estudiantes antes de dominar la demostración matemática formal.

Es un proceso que incluye los intentos de los estudiantes para explicar, verificar o justificar, con miras de convencerse a sí mismo, a otros estudiantes y al profesor de la veracidad de una afirmación matemática.

Balacheff (2000) define la prueba como una justificación no exhaustiva que explicita afirmaciones, es además un proceso social aceptado por una comunidad, por el cual un discurso que asegura la validez de una proposición cambia de posición.

Demostraciones

La demostración se asume, según Balacheff (2000), como una experiencia intelectual que revela una actividad cognitiva específica e implica procesos lógicos, heurísticos, pruebas mentales y reconocimiento de las funciones del lenguaje.

La demostración es vista como un componente clave en el desarrollo del razonamiento matemático y en el cuestionamiento objetivo del conocimiento matemático, ya que conlleva al alumno a generar una enculturación matemática.



"Revista Virtual Universidad Católica del Norte". No. 29, (febrero – mayo de 2010, Colombia), acceso: [<http://revistavirtual.ucn.edu.co/>], ISSN 0124-5821 - Indexada Publindex-Colciencias, Latindex, EBSCO Information Services y Actualidad Iberoamericana. [pp. 66-81]

Refutaciones

Según Lakatos (1978), las refutaciones matemáticas se dan cuando el estudiante debate con razones o argumentos una proposición que se quiere probar. Para ello debe exponer de una manera clara y precisa sus argumentos, las razones que lo apoyan, y concluir reafirmando su propia tesis.

Entre las refutaciones aparecen los contraejemplos que son casos particulares de un enunciado, que debilita la cuantificación universal de un enunciado conjeturado por un estudiante.

En el desarrollo de los contextos de descubrimiento y de justificación, así como en sus respectivos procesos, el estudiante es el centro, es quien pone de manifiesto su razonamiento matemático en la medida en que evidencia sus habilidades al enfrentarse a la actividad demostrativa.

Como sujeto social el estudiante explora, explica, verifica, conjetura, argumenta, justifica, refuta sus decisiones al intentar convencer a los demás de la veracidad de ellas, mostrando toda su creatividad y capacidad argumental al enfrentarse a situaciones problemas de demostración.

Por su parte, el docente es un mediador, orientador, investigador de diferentes estrategias de intervención; genera un clima de clase en el que se promueve en los estudiantes la conjeturación, la confrontación y la exploración. Toma los procesos como herramientas que movilizan el razonamiento matemático y la construcción de los conceptos matemáticos.

Otra función del docente es la de promover la discusión matemática entre sus estudiantes, reconocer las necesidades cognitivas de ellos e incluir los procesos desde la básica primaria, así como generar capacidad de análisis y crítica ante las diversas situaciones argumentativas y demostrativas de la escuela y de la vida en general.

La conformación de los temas de estudio relativos a los contextos de descubrimiento y justificación en clase de matemáticas ha llamado la atención de investigadores en diversos países. En la tabla 1 se presenta una síntesis sobre el tipo de proceso privilegiado en cada país y los principales conceptos abordados.

“Revista Virtual Universidad Católica del Norte”. No. 29, (febrero – mayo de 2010, Colombia), acceso: [<http://revistavirtual.ucn.edu.co/>], ISSN 0124-5821 - Indexada Publindex-Colciencias, Latindex, EBSCO Information Services y Actualidad Iberoamericana. [pp. 66-81]

	Proceso privilegiado en sus investigaciones					Conceptos destacados	Razonamiento	
	Argumentación	Conjetura	Prueba	Demostración	Refutación		Inductivo	Deductivo
FRANCIA	X		X	X	X	Tipos de prueba. Interacción Social.	X	
ITALIA		X	X			Cultura de teoremas. Unidad cognitiva de teoremas. Campos de experiencias.		X
ALEMANIA	X			X		Competencia demostrativa. Tipos de argumentación.	X	X
ESPAÑA	X		X	X		Funciones y significados de la prueba. Esquemas de prueba. S.G.D.	X	
JAPÓN	X			X		Argumentación. Resolución de problemas.	X	
ESTADOS UNIDOS			X			Instrucción. Sociología de la prueba.		X
MÉXICO		X		X		Resolución de problemas. Exploración, observación y formulación de conjeturas.	X	
BRASIL			X			Formación del profesorado. Conocimiento: Sintáctico. Pedagógico. Curricular.		X
COLOMBIA	X	X	X			Dificultad en el contexto de justificación y descubrimiento. Camino a la argumentación. Tipos de conjetura.	X	

Tabla 1. Tendencias investigativas

3. Descubrimiento y justificación en los Lineamientos Curriculares y Estándares Básicos de Competencias en Colombia

En Colombia, los Lineamientos y Estándares Curriculares para el área de matemáticas (MEN, 1998; 2006) ofrecen elementos para la conceptualización del razonamiento.

Los Estándares Básicos de Competencias, por ejemplo, son explícitos en plantear la necesidad de “usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios para validar y rechazar conjeturas y avanzar en el camino a la demostración” (MEN, 2006, p.51); sin embargo, a la hora de plasmar estos elementos en los descriptores de



"Revista Virtual Universidad Católica del Norte". No. 29, (febrero – mayo de 2010, Colombia), acceso: [<http://revistavirtual.ucn.edu.co/>], ISSN 0124-5821 - Indexada Publindex-Colciencias, Latindex, EBSCO Information Services y Actualidad Iberoamericana. [pp. 66-81]

los estándares que se deben desarrollar en cada pensamiento y grado, se observa que se le da prioridad a la justificación y en algunos casos a la conjetura, privilegiando el desarrollo del razonamiento inductivo, pero procesos como la validación, la refutación y la demostración, con los cuales los estudiantes dejan ver su razonamiento, no se desarrollan de manera explícita en tal documento.

De otro lado, desde los Lineamientos Curriculares se plantea como base de una estructura curricular adecuada para el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes cinco procesos generales, entre ellos el razonamiento, asumiéndose este como "un proceso que consiste en ordenar las ideas en la mente hasta llegar a una conclusión" (MEN, 1998, p. 77) proceso que aparece inmerso dentro del contexto de planteamiento y resolución de problemas, mencionándose que "el razonamiento matemático tiene que ver estrechamente con las matemáticas como comunicación, como modelación y como procedimientos" (MEN, 1998, p. 77).

Desde la perspectiva de los lineamientos, en el razonamiento matemático es necesario "tener en cuenta de una parte, la edad de los estudiantes y su nivel de desarrollo y, de otra, que cada logro alcanzado en un conjunto de grados se retoma y amplía en los conjuntos de grados Sigüientes" (MEN, 1998, p. 77). Así mismo, se propone que el razonamiento matemático esté presente en todo el trabajo matemático de los estudiantes y por consiguiente en todas sus actividades matemáticas.

Razonar en matemáticas tiene que ver con:

Dar cuenta del cómo y del porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones.

Justificar las estrategias y los procedimientos puestos en acción en el tratamiento de problemas.

Formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos.

Encontrar patrones y expresarlos matemáticamente.

Utilizar argumentos propios para exponer ideas, comprendiendo que las matemáticas, más que una memorización de reglas y algoritmos, son lógicas y potencian la capacidad de pensar.



"Revista Virtual Universidad Católica del Norte". No. 29, (febrero – mayo de 2010, Colombia), acceso: [<http://revistavirtual.ucn.edu.co/>], ISSN 0124-5821 - Indexada Publindex-Colciencias, Latindex, EBSCO Information Services y Actualidad Iberoamericana. [pp. 66-81]

Para favorecer el desarrollo de este eje se debe:

Propiciar una atmósfera que estimule a los estudiantes a explorar, comprobar y aplicar ideas. Esto implica que los maestros escuchen con atención a sus estudiantes, orienten el desarrollo de sus ideas y hagan uso extensivo y reflexivo de los materiales físicos que posibiliten la comprensión de ideas abstractas.

Crear en el aula un ambiente que sitúe el pensamiento crítico en el mismo centro del proceso docente. Toda afirmación hecha, tanto por el maestro como por los estudiantes, debe estar abierta a posibles preguntas, reacciones y reelaboraciones por parte de los demás.

Aunque tanto en los Lineamientos como en los Estándares aparece el razonamiento como un proceso que debe tenerse en cuenta en desarrollo de los cinco pensamientos, y aunque se sugiere su incorporación en todos los niveles educativos colombianos, sobre dicho proceso sólo se menciona el cómo los estudiantes de los primeros años lo obtienen de manera intuitiva y es sólo hasta los grados de Educación Media que se comienza a trabajar explícitamente con proposiciones, teorías y cadenas argumentativas. El MEN en este documento plantea el desarrollo del razonamiento pero no explicita la función que cumplen los contextos de descubrimiento y justificación en este desarrollo.

Como respuesta a las propuestas del MEN, y a los avances que se observan a nivel internacional, algunos docentes e investigadores en Educación Matemática han dedicado sus esfuerzos al estudio de los contextos de descubrimiento y justificación en la clase de matemáticas en nuestro país y a la creación de estrategias que posibiliten la apropiación de estos por parte de los estudiantes.

4. Algunas reflexiones sobre el papel en el aula de los contextos de descubrimiento y justificación

Las demostraciones ocupan una posición central en la actividad matemática, ya que constituyen el método de validación de las afirmaciones de esta ciencia, de otro lado la prueba sirve para responder a la pregunta de por qué un enunciado es verdadero; en lugar de explicar por qué el enunciado es verdadero, la prueba sirve para mostrar cómo es que el enunciado ha llegado a ser verdadero.



"Revista Virtual Universidad Católica del Norte". No. 29, (febrero – mayo de 2010, Colombia), acceso: [<http://revistavirtual.ucn.edu.co/>], ISSN 0124-5821 - Indexada Publindex-Colciencias, Latindex, EBSCO Information Services y Actualidad Iberoamericana. [pp. 66-81]

La exploración y la búsqueda de conjeturas, pruebas y refutaciones son esenciales para que los estudiantes logren darle sentido a la demostración matemática y que puedan potencializar su competencia demostrativa y argumentativa, entendiendo que a través del mejoramiento en sus procesos se adquieren habilidades de abstracción, análisis, síntesis, comparación, clasificación, particularización y generalización.

Para que los estudiantes logren valorar lo anterior es necesario un ambiente de clase en el cual se promuevan el razonamiento y la argumentación. Y para esto se requiere que desde los primeros años de enseñanza se cree una cultura argumentativa que inicia con pequeñas justificaciones verbales, gráficas, escritas de las proposiciones matemáticas y que generan en los estudiantes consciencia sobre el por qué y para qué argumentar y demostrar, y que conciban la prueba como parte fundamental del proceso de resolución de problemas. Al respecto Gutiérrez (2007) afirma que:

(...) No podemos esperar al bachillerato para enseñar a los estudiantes a razonar y demostrar formalmente, sino que esta formación debe iniciarse desde el primer momento de la enseñanza obligatoria (...) (de esta manera) (...) los estudiantes practicarán las matemáticas de forma creativa (...) y entenderán el razonamiento como herramienta del razonamiento riguroso, que les será útil en cualquier contexto docente, familiar, laboral (p. 2,22).

En la enseñanza y aprendizaje de la demostración y en la búsqueda del mejoramiento de las competencias demostrativa y argumentativa y de la habilidad conjetural de los estudiantes el docente debe valorar los procesos empíricos por ser estos intuitivos. Debe promover la interacción social por ser esta un motor en los procesos de validación (Balacheff, 1999).

Es necesario también que el docente reconozca las variables que pueden aparecer en el desarrollo de una demostración por parte de los estudiantes de secundaria. Ellas pueden ser individuales o relativas a la clase y se caracterizan así:

- i. Existen variables individuales, ya sea cognitivas o no cognitivas, que influyen en la competencia demostrativa de los estudiantes.
- ii. Los diferentes estilos que caracterizan una clase de matemáticas influyen directamente en que se dé o no el desarrollo de la competencia demostrativa. Al respecto, los investigadores presentan una propuesta de solución heurística de ejemplos, donde el docente brinda a los estudiantes la oportunidad de explorar, reconocer y utilizar explícitamente las diferentes fases requeridas en la realización de una prueba.



"Revista Virtual Universidad Católica del Norte". No. 29, (febrero – mayo de 2010, Colombia), acceso: [<http://revistavirtual.ucn.edu.co/>], ISSN 0124-5821 - Indexada Publindex-Colciencias, Latindex, EBSCO Information Services y Actualidad Iberoamericana. [pp. 66-81]

iii. Las variables sujetas a los estilos de la clase y las variables que tienen que ver con los procesos individuales que desarrolla el estudiante están relacionadas de manera interdependiente. Se destaca la importancia de la comprensión de conceptos matemáticos para que el estudiante pueda desarrollar la competencia demostrativa, la cual no se puede asumir como un aspecto independiente de las bases conceptuales.

Deben valorarse los diferentes intentos de los estudiantes por justificar sus procedimientos y su razonamiento matemático, considerando las diferentes significaciones y esquemas de prueba producidas por los estudiantes.

Es importante también que los docentes planteen diferentes situaciones experimentales que permitan a sus estudiantes avanzar hacia el rigor matemático. Al respecto Boero (2000) plantea unas fases de construcción de teoremas realizada por los matemáticos profesionales, pero adaptándola al proceso que efectúan los estudiantes, reconociendo en todo momento que éste realiza pruebas empíricas.

1 **Producción de conjeturas:** incluye la identificación de regularidades y la caracterización de argumentos para la credibilidad de la conjetura producida, esta fase pertenece a la esfera privada del trabajo del matemático.

2 **Formulación del enunciado:** de acuerdo con convenciones culturales compartidas.

3 **Exploración del contenido y límites de validez de la conjetura:** incluye las elaboraciones heurísticas y semánticas acerca de las relaciones entre la hipótesis y la tesis; además la identificación de argumentos apropiados para la validación, relacionados con la teoría de referencia.

4 **Selección y encadenamiento de argumentos teóricos coherentes en una cadena deductiva:** bajo la guía de analogías o casos específicos.

5 **Organización de la cadena de argumentos:** en la forma de una prueba que es aceptable desde el punto de vista de los estándares matemáticos del **NCTM** vigentes. Ésta conduce a la producción de un texto para su publicación.

6 **Aproximación a la prueba formal:** esta fase puede faltar en los teoremas matemáticos, pues las pruebas formales están fuera de alcance y son en su mayoría irrelevantes, ya que existen procesos humanos para controlar la validez matemática.



"Revista Virtual Universidad Católica del Norte". No. 29, (febrero – mayo de 2010, Colombia), acceso: [<http://revistavirtual.ucn.edu.co/>], ISSN 0124-5821 - Indexada Publindex-Colciencias, Latindex, EBSCO Information Services y Actualidad Iberoamericana. [pp. 66-81]

Estas situaciones experimentales pueden diseñarse haciendo uso de herramientas didácticas como las situaciones problema o desde los software de Geometría Dinámica (**SGD**).

Según Larios (2006) el docente debe asumir los problemas como parte medular de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Es por este motivo que el docente debe elegir problemas que propicien la adquisición significativa del conocimiento, desarrollando conjuntamente estrategias que les faciliten la implementación de los problemas matemáticos en el aula de clase, teniendo contacto con el contexto.

5. A modo de cierre

La revisión y análisis realizados, ponen de manifiesto que en diversas investigaciones a nivel nacional e internacional:

Se plantea que históricamente el aprendizaje de la demostración ha sido un proceso complejo. Las rupturas que a lo largo de la historia ha tenido la demostración han influido en sus procesos de enseñanza y de aprendizaje. Cada cambio en la noción matemática de demostración ha implicado replantear la forma, estilo y técnicas en que ésta es llevada al aula de clase.

Se asume la demostración matemática en el campo de la Educación Matemática como instrumento formal para validar las proposiciones y enunciados matemáticos, y la prueba como los intentos de los estudiantes por producir demostraciones.

Para los investigadores es evidente la utilización de la prueba como herramienta que posibilita la construcción de conceptos y el desarrollo de habilidades matemáticas en el aula de clase. Por esto en todas las investigaciones se plantean propuestas para llevar al aula la demostración considerándola como proceso, analizando las fases por las que pasan los estudiantes, teniendo en cuenta lo didáctico y lo cognitivo.

Según las investigaciones, el desarrollo de las situaciones de demostración debe comenzar en la educación básica, promoviendo un ambiente de aprendizaje en el cual los procesos de argumentación y justificación hacen parte de la clase de matemáticas, creándose así una cultura argumentativa y demostrativa. Al respecto puede abordarse en futuras investigaciones: ¿cuáles son las características que debe poseer una propuesta didáctica que incluya los procesos de argumentación y justificación desde la educación básica?



"Revista Virtual Universidad Católica del Norte". No. 29, (febrero – mayo de 2010, Colombia), acceso: [<http://revistavirtual.ucn.edu.co/>], ISSN 0124-5821 - Indexada Publindex-Colciencias, Latindex, EBSCO Information Services y Actualidad Iberoamericana. **[pp. 66-81]**

No obstante, el trabajo de conjeturas, pruebas y refutaciones debe iniciarse con docentes, resignificando la concepción que éstos tienen de su rol y favoreciendo la comprensión del papel de las pruebas en el aprendizaje de las matemáticas.

Como en otros países del mundo y buscando ofrecer beneficios a la formación de los docentes colombianos en los procesos de enseñanza y aprendizaje del descubrimiento y la justificación en clase de matemáticas, se plantean las siguientes preguntas, que sugieren nuevos desarrollos investigativos en nuestro país sobre los contextos de descubrimiento y justificación y sobre los procesos que incluyen, como la conjetura, la prueba, la demostración y la refutación, de manera tal que se promueva una extensión de los actuales Lineamientos Curriculares y Estándares Básicos de Competencias en relación con dichos contextos y los procesos que incluyen, y se dé una mirada más reflexiva a la manera como se incorporan estos procesos en la clase de matemáticas:

- ¿Qué elementos o componentes de los programas de formación debe tener la formación de docentes en Colombia para que se posibilite la incorporación de los contextos de descubrimiento y justificación en las aulas?
- ¿En qué medida la utilización de software favorece la apropiación de contextos y procesos que desarrollan el razonamiento en los estudiantes?
- ¿Cuáles son las mayores dificultades que se presentan al abordar los contextos de descubrimiento y justificación en el aula de clase y cuáles las posibles estrategias para superar dichas dificultades?



"Revista Virtual Universidad Católica del Norte". No. 29, (febrero – mayo de 2010, Colombia), acceso: [<http://revistavirtual.ucn.edu.co/>], ISSN 0124-5821 - Indexada Publindex-Colciencias, Latindex, EBSCO Information Services y Actualidad Iberoamericana. [pp. 66-81]

6. Lista de referencias

Balacheff, N. (1999). *¿Es la argumentación un obstáculo? Invitación a un debate.* 1-7. Extraído 15 de noviembre del 2008 desde: <http://www.didactique.imag.fr/preuve/Newsletter/990506Theme/990506ThemeES.html>

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* Bogotá: Una Empresa Docente.

Boero, P. (2000). Approaching Mathematical Theories in Junior High School. Proceedings of Ninth International Congress on Mathematical Education ICME-9. Tokyo/Makuhari, Japan. Extraído el 7 de Noviembre de 2008 desde <http://academic.sun.ac.za/mathed/ICME/Boero.htm>

Boero, P. (2002). The approach to conjecturing and proving: cultural and educational choices. Proceedings of International Conference on Mathematics: Understanding proving and proving to understand. Extraído el 7 de Noviembre de 2008 desde http://www.math.ntnu.edu.tw/.../mathedu/me1/me1_2002_1/paoloboero.doc

Cadavid, D., Marulanda, L., Monsalve, L., Montoya, J., Parra, M., Toro, A., Vanegas, M., Zapata, M. (2009). Investigación documental referida a contextos de descubrimiento y justificación en la clase de matemáticas. Trabajo de investigación de Pregrado no publicado. Medellín: Universidad de Antioquia.

Godino, J.D. y Recio, A.M. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, 19(3), 405-414.

Gutiérrez, A. (2007). Geometría, demostración y ordenadores. Actas del 13 congreso del JAEM. Granada.

Lakatos, Imre. (1978) Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático. Alianza: Madrid.



"Revista Virtual Universidad Católica del Norte". No. 29, (febrero – mayo de 2010, Colombia), acceso: [<http://revistavirtual.ucn.edu.co/>], ISSN 0124-5821 - Indexada Publindex-Colciencias, Latindex, EBSCO Information Services y Actualidad Iberoamericana. [pp. 66-81]

Larios, V. (2006). *Demostrar es un problema o el problema es demostrar*. México: Universidad Autónoma de Querétaro.

Ministerio de Educación Nacional, MEN, (1998). *Lineamientos Curriculares de matemáticas*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional, MEN, (2006). *Estándares Básicos de Competencias*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.