

La circunferencia: Herramienta para descubrir, verificar y justificar propiedades en Educación Básica Primaria

Camargo Uribe, Leonor - Rozo Gutiérrez, Liliana - Cañón Gutiérrez, Mario A.
Universidad Pedagógica Nacional, (Colombia)

1. Descripción

El curso presenta una experiencia innovadora para el trabajo en geometría, en donde se estimula la participación de los estudiantes de Básica Primaria en la resolución de problemas de construcción geométrica con el apoyo de programas de geometría dinámica. Específicamente, se describe, fundamenta y ejemplifica un experimento de enseñanza en donde niños de quinto de primaria usan la circunferencia como herramienta para construir segmentos congruentes, verificar la congruencia de segmentos y justificar dicha congruencia.

La propuesta es fruto de una reflexión sostenida por más de 10 años en el equipo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría, $A \cdot G$ de la Universidad Pedagógica Nacional —producto de sus estudios acerca del aprendizaje de la geometría en la formación de profesores de matemáticas— y de la orientación de algunos trabajos de grado del programa de Maestría en Docencia de la Matemática, realizados por profesores de primaria y secundaria. Las actividades propuestas y el análisis de las mismas hacen parte del trabajo de grado que Liliana Rozo y Mario Cañón adelantan.

2. Objetivos

- Promover la reflexión sobre el aprendizaje de las matemáticas visto como participación en prácticas valoradas social y culturalmente.
- Impulsar una transformación en las prácticas de aula de geometría en primaria hacia el desarrollo de procesos de resolución de problemas, representación y argumentación.
- Ilustrar el provecho que puede sacarse de una figura geométrica como herramienta de construcción, verificación y justificación.

3. Sesiones

Sesión 1: Fundamentación conceptual

La propuesta se desarrolla a partir de los siguientes presupuestos que la fundamentan:

Presupuesto 1: El aprendizaje es un proceso social de participación en prácticas que las comunidades en las que nos desenvolvemos consideran relevantes. En particular, una clase es un espacio social en donde los estudiantes participan en actividades colectivas y discuten acerca del significado de dichas actividades, que hacen parte de las prácticas matemáticas escolares.

Específicamente, una clase de geometría es un espacio de participación en prácticas culturales en las que interactuamos con formas geométricas bi y tridimensionales, sus relaciones y sus transformaciones, la localización y la trayectoria recorrida por objetos o por nosotros mismos. Estas experiencias brindan a las personas la posibilidad de desarrollar el sentido espacial y el razonamiento matemático. Avanzar en el desarrollo del sentido espacial y del razonamiento geométrico implica una evolución en los recursos que usamos como comunidad, no exenta de tensiones, que va desde maneras intuitivas o informales como accedemos a información visual, la usamos y aceptamos su validez, hasta formas más sofisticadas de procesar y comunicar información, que usan recursos propios de la cultura matemática de nuestra

sociedad. La clase de geometría puede proponerse como empresa, descubrir y validar hechos científicos articulando dos tipos de prácticas: descubrir y justificar. El descubrimiento lleva a proponer enunciados de carácter general, fundamentados en la exploración, de los que se tiene certeza. Justificar significa argumentar su validez en un sistema de conocimientos aceptado por la comunidad.

Presupuesto 2: Las acciones humanas, tanto en el plano individual como en el plano social están mediadas por herramientas y signos. Este es un principio central en el ámbito educativo. Al usar mediadores en diseños didácticos cuidadosamente planeados, se despliega una rica actividad experimental, fuente de ideas y conjeturas y, a la vez, se generan vías de acceso al conocimiento a través de la comunicación.

En particular, los programas de geometría dinámica son potentes mediadores que favorecen una interacción de los estudiantes con representaciones geométricas y el trabajo colectivo alrededor de tales representaciones con las cuales descubrir propiedades y especialmente identificar relaciones de dependencia que llevan a formular enunciados condicionales. Como lo mencionan Sáenz-Ludlow y Athanasopoulou (2008), los programas de geometría dinámica son herramientas técnico-simbólicas que median el paso de la construcción a la representación y a la figura, median la comunicación sobre geometría entre el profesor y los estudiantes, e inducen y facilitan los procesos de clasificación.

Investigadores como Laborde (1996), Jones (1999), Mariotti (2001), de Villiers (2004), entre otros, señalan los beneficios de usar programas de geometría dinámica en el aula para la conceptualización de objetos geométricos: no solo permiten representar objetos geométricos sino que permiten realizar acciones sobre las representaciones, es decir, proporcionan un dominio de experimentación mediante la animación y el movimiento del arrastre sobre dichas representaciones bajo una teoría geométrica. Por ejemplo, el arrastre de elementos de una construcción, como lo menciona Olivero (2003) desde un punto de vista fenomenológico, tiene funciones como: i). Retroalimentar las acciones que realiza el usuario, permitiéndole tener el control sobre la representación. ii). Mediar entre la figura y la representación, permitiéndole al usuario hacer una distinción entre ambas nociones. iii). Examinar representaciones y buscar propiedades invariantes.

Sin embargo, la representación y manipulación de las representaciones en la pantalla por sí solas, haciendo uso de las herramientas del menú predeterminado o del arrastre, no necesariamente lleva a entender y apreciar las propiedades de los objetos geométricos. Por lo tanto, el diseño de tareas se convierte en una prioridad para desarrollar una adecuada mediación. Las tareas para desarrollar en los programas de geometría dinámica deben ser diferentes de las tareas geométricas para entornos de papel y lápiz, ya que cambiar las herramientas conduce a cambiar la manera en que las tareas son realizadas; las facilidades ofrecidas por los programas pueden brindar una interacción fuerte entre la visualización y el conocimiento en geometría (Laborde 1996). Es decir, las tareas propuestas deben permitir la exploración, las preguntas abiertas, la elaboración de conjeturas, entre otras, necesarias para que su resolución conduzca a un tratamiento geométrico.

Presupuesto 3: La contribución de una persona más experimentada, como guía durante el aprendizaje es fundamental; esta persona brinda apoyo gradual según se van desarrollando las competencias del aprendiz. La interacción entre el aprendiz y el experto activa funciones mentales que no han madurado en el aprendiz, pero que yacen en una región intermedia entre los niveles potencial y real de su desarrollo.

Mediante dicha relación, el aprendiz inicia un proceso de acercamiento a la condición de experto, a través de su participación en actividades compartidas. En el ámbito educativo, es el profesor, como miembro experto en la clase, quien introduce a los estudiantes en los estándares del conocimiento ‘oficial’, a través de la coordinación entre las ideas que los alumnos son capaces de producir y aquellas admitidas por la comunidad académica de referencia, a las que potencialmente los estudiantes pueden acceder. Gracias al impulso que hace el profesor de un ambiente indagativo favorece la evolución de las formas discursivas desde formas intuitivas hasta formas científicas de comunicar y justificar. En particular, el profesor es el responsable de promover normas para regular los criterios compartidos, por ejemplo, sobre las representaciones adecuadas de las figuras geométricas.

Para crear una microcultura de aula que busque el establecimiento de significados compartidos, se necesita un esfuerzo explícito tanto de los estudiantes como del profesor para establecer normas sociomatemáticas que la promuevan (Yackel y Cobb, 1996). Las normas sociomatemáticas son

aspectos normativos establecidos en el transcurso de las interacciones en el aula entre los estudiantes y el docente y entre los estudiantes (de manera implícita o explícita), que regulan las acciones e interacciones de la microcultura del aula de matemáticas. Normas sociomatemáticas como las siguientes regulan las prácticas en el aula de una manera favorable: en el momento de explorar un dibujo es necesario observar lo que cambia, lo que no cambia y lo que cambia simultáneamente; en los dibujos geométricos en lápiz y papel se debe hacer alusión a las propiedades geométricas de la figura geométrica que se está representando; las justificaciones deben aludir al uso de los hechos geométricos establecidos en el aula, entre otras.

Sesión 2: Descripción de la secuencia de actividades

La propuesta está compuesta por cinco tareas, dirigidas a estudiantes de quinto de primaria utilizando el programa de geometría dinámica GeogebraPrim. Están encaminadas a la construcción, verificación y justificación de congruencia entre segmentos. Las tareas están organizadas de acuerdo con la siguiente trayectoria de enseñanza. (Ver figura 1).

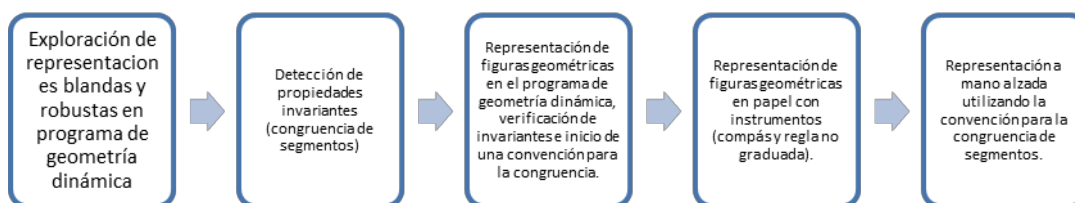


Figura 1. Trayectoria de enseñanza sugerida.

Para que los estudiantes reconozcan a la circunferencia como una herramienta para determinar, verificar y establecer congruencia entre segmentos se invita a los estudiantes a: i). Observar las características que hacen que a partir de un segmento se dibuje una circunferencia. ii). Realizar en GeogebraPrim el trazo de una circunferencia a través de la propiedad de equidistancia entre el centro y cualquier punto de la misma. iii). Detectar invariantes de la figura geométrica circunferencia (congruencia de radios y equidistancia de los puntos de la circunferencia al centro de la misma). iv). Establecer la relación entre la herramienta circunferencia del programa

de geometría dinámica y el instrumento de trazo compás. En la figura 2 se presentan cuatro tareas que se ajustan a la trayectoria de enseñanza.

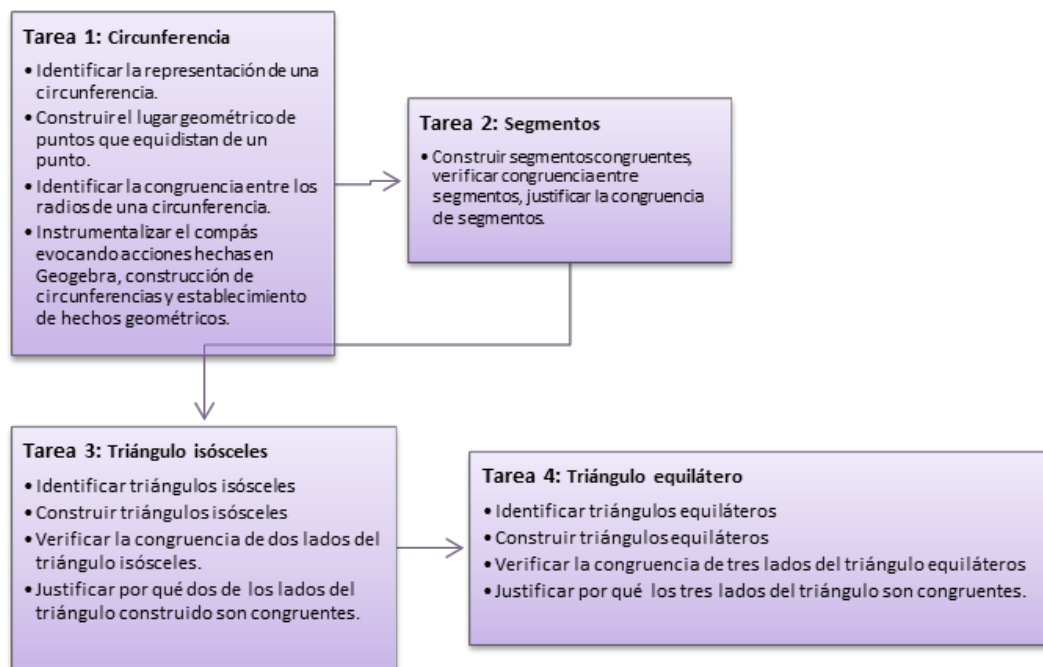


Figura 2. Secuencia de cuatro tareas que se ajustan a la trayectoria de enseñanza.

Tabla 1. Las cinco actividades propuestas y su finalidad.
Las actividades 1, 2, 3 y 5 se llevan a cabo en GeogebraPrim.

Actividad 1

Dibujar un segmento.

Activar el rastro a uno de los extremos del segmento.

Conservando la longitud del segmento, mover el extremo que tiene activo el rastro.

Discutir: ¿Qué se dibujó en la pantalla? ¿Por qué a unos les quedó mejor el dibujo que a otros? ¿Qué se debe tener en cuenta para que quede bien hecho el dibujo?

Finalidad

- Identificar en la representación de una circunferencia el lugar geométrico de puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro.
- Justificar que para que se dibuje una circunferencia es necesario que la longitud del segmento se mantenga fija.

Actividad 2

Dibujar un segmento.

Activar el rastro a uno de los extremos del segmento.

Dibujar los puntos por donde debe pasar el extremo con rastro para que la circunferencia quede bien dibujada.

Pasar el extremo con rastro por los puntos que se dibujaron.

Discutir: ¿Quedó bien dibujada la circunferencia? ¿Qué se debe tener en cuenta para que quede bien dibujada? ¿Qué condiciones deben cumplir los puntos que dibuje para que la circunferencia quede bien?

Finalidad

- Identificar la equidistancia entre cualquier punto de la circunferencia y el centro de la misma (primer hecho geométrico).

Actividad 3

Dibujar una circunferencia utilizando la herramienta del programa GeogebraPrim.

Identificar los elementos que aparecen en la pantalla (centro, circunferencia y punto sobre circunferencia¹).

Discutir: ¿Qué objetos aparecen en la pantalla? ¿Dónde están ubicados los puntos? Mover los puntos para observar: qué cambia, qué no cambia y qué cambia simultáneamente.

Construir un segmento que una los dos puntos (centro y punto sobre circunferencia).

Volver a mover los objetos y observar qué cambia, qué no cambia y qué cambia simultáneamente.

Construir otro radio, mover nuevamente los objetos y observar qué cambia, qué no cambia y qué cambia simultáneamente.

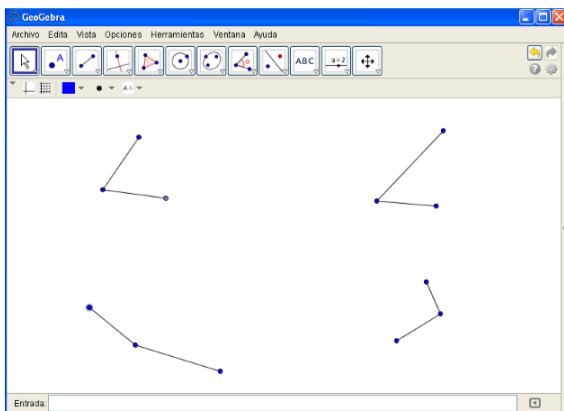
Finalidad

- Identificar la congruencia entre los radios de una circunferencia (segundo hecho geométrico).

Actividad 4

Se les entrega a los estudiantes una fotocopia con las siguientes actividades.

1. ¿Cuál pareja de segmentos, al activar el rastro, forma una circunferencia? ¿Por qué?



2. Ubicar seis puntos que estén a la misma distancia del punto dado y construir una circunferencia en cada caso. Utilizar el compás para marcar y luego para trazar la figura.

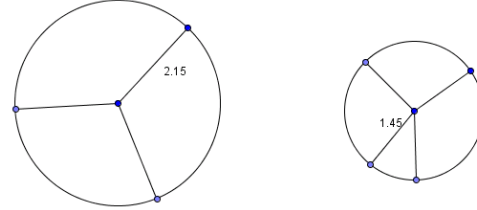


¹ En GeogebraPrim cuando se utiliza la herramienta predeterminada para construir una circunferencia, en la pantalla aparecen los objetos centro, circunferencia y punto sobre circunferencia.

3. Construir una circunferencia en cada caso, según la medida de cada radio.



4. Escribir cuál es la medida de los demás radios de cada circunferencia. Explicar por qué es esa la medida.



Finalidad

- Evocar en un contexto de lápiz y papel los dos hechos geométricos de la circunferencia.
- Utilizar el compás como instrumento de construcción en papel y lápiz.
- Relacionar la función del compás con los hechos geométricos de la circunferencia.

Actividad 5

Se presenta en GeogebraPrim un archivo con diferentes segmentos de longitud fija y una circunferencia con radio fijo². Se les pide a los estudiantes que identifiquen los segmentos congruentes con el segmento d (el segmento d es congruente con el radio de la circunferencia). Luego, en lápiz y papel se presentan diferentes segmentos y se les pide que determinen los que son congruentes; esta actividad busca que utilicen el compás.

Finalidad

- Utilizar los dos hechos geométricos para establecer congruencia entre segmentos.
- Utilizar el compás como instrumento para transportar medidas.

Sesión 3: Ejemplos ilustrativos del trabajo de estudiantes de quinto de primaria

Los ejemplos con los que ilustramos la propuesta han sido tomados de una investigación en desarrollo, en la línea Argumentación y prueba en geometría, de la Universidad Pedagógica Nacional, realizada con estudiantes de grado quinto de educación básica primaria, que indaga por el establecimiento de aspectos normativos relacionados con la construcción de un criterio compartido sobre cuál dibujo es una representación adecuada de una figura geométrica.

² Los segmentos de longitud fija están estáticos. La circunferencia de radio fijo se puede mover por toda la interfaz.

La implementación de las tareas se llevó a cabo en el Colegio Distrital Ciudadela de Bosa, en la jornada mañana en el grado quinto, con 39 estudiantes entre los 10 y los 12 años de edad. La profesora titular de la asignatura de matemáticas participó en el diseño e implementación de la secuencia aunque no hizo parte del equipo investigador. La implementación se realizó en el cuarto período del año escolar durante dos clases de geometría que tenían una intensidad horaria de dos horas semanales cada una de 45 minutos.

Se conformaron grupos de trabajo que utilizaron el programa GeogebraPrim instalado en computadores portátiles. Las producciones de los estudiantes fueron videograbadoras en los computadores por medio del programa Camtasia. Los registros de las socializaciones fueron registrados en una cámara de video. Además se recolectaron producciones de los estudiantes en lápiz y papel. Para la interpretación y análisis tomamos las producciones relevantes de los estudiantes y las socializaciones del grupo durante la solución de la secuencia de tareas.

A continuación interpretamos el desempeño de algunos estudiantes frente al desarrollo de las cinco actividades propuestas.

Actividad 1

Cuando los estudiantes se enfrentaron a esta actividad se observó que algunos olvidaron la instrucción de mantener fija la longitud del segmento y movieron el extremo sin tener clara la finalidad. En este caso, parece que el uso del rastro está relacionado con el uso del programa Paint puesto que la mayoría de estudiantes intentaron utilizar el rastro como el lápiz de dibujo de este programa. En este momento fue necesario que la profesora interviniera para recordar las instrucciones dadas y la finalidad de estar trabajando en un SGD. Lo anterior alude a los conocimientos previos que los estudiantes tenían sobre programas en el computador.

Luego de superar la situación anterior, se observó que los estudiantes tenían dificultad para conservar la longitud del segmento y esto llevó a que en la pantalla no apareciera lo que se esperaba (una circunferencia). Al observar esto, los estudiantes veían como un error el dibujo que allí aparecía y cada vez que terminaban, y no veían una forma que pudieran reconocer “bien

hecha”, borran toda su construcción sin detenerse a observar qué era lo que hacía que su dibujo no quedara como lo esperaban; esto hace ver que conciben el error como algo malo de lo que no se puede aprender.

En esta actividad la profesora jugó un papel importante al crear un ambiente indagativo cuya finalidad era ayudar a sus alumnos a identificar formas geométricas sobre el dibujo final que aparecía en sus pantallas y como mejorarlo. Con el tratamiento que le dio la profesora a las intervenciones de los estudiantes, los estudiantes pasaron de relacionar el dibujo con formas de su entorno a relacionarlo con formas geométricas y empezar a pensar en figuras geométricas.

Actividad 2

Se observó que la mayoría de estudiantes no relacionaron la forma identificada en la Actividad 1 como una herramienta para resolver la tarea. Veían las actividades de manera aislada. Algunos estudiantes pasaron por alto que el segmento cambiaba de longitud al pasarlo por los puntos que dibujaron. Sin embargo, unos pocos estudiantes sí relacionaron la conclusión de la Actividad 1 con la realización de esta tarea y ubicaron los puntos teniendo en cuenta la longitud del segmento. Para explicar a los compañeros el mecanismo utilizado para dibujar los puntos, los estudiantes hacían alusión a una circunferencia mediante representaciones gestuales y gráficas.

Nuevamente se evidenció el papel mediador de la profesora al buscar que los estudiantes, que no solucionaron adecuadamente la actividad, relacionaran lo que concluyeron en la Actividad 1 y la utilidad de esa conclusión para realizar la actividad.

Actividad 3

Cuando los estudiantes se enfrentaron a esta actividad se observó la necesidad de utilizar un vocabulario geométrico adecuado y relacionar la terminología con las propiedades del objeto. Por ejemplo, se hizo evidente que los estudiantes se referían al punto que aparecía en la pantalla como el

centro de la circunferencia pero no podían explicar qué significaba que ese punto fuera el centro.

Cuando los estudiantes construyeron los dos radios de la circunferencia, en un primer momento, al explorar la construcción algunos no expresaron que los radios fueran congruentes. Por el contrario, dijeron que cada vez que se acercaban iban a parecer más congruentes, pero que si estaban alejados no eran congruentes. A través de varias preguntas la profesora se logró que los estudiantes recordaran lo que habían construido en las actividades anteriores y concluyeran que los radios de una circunferencia son congruentes.

Actividad 4

Algunos estudiantes evocaron las acciones realizadas en GeogebraPrim relacionadas al rastro, al solucionar el primer numeral de la actividad. Ellos mencionaron que la primera pareja de segmentos era la que cumplía que al activar el rastro se formara una circunferencia. Además, la mayoría de los estudiantes utilizaron los hechos geométricos para elegir la primera pareja de segmentos: unos hicieron alusión a la igualdad de distancia del centro a los extremos en ambos segmentos, y otros a la igualdad de medida entre ellos. En ambos casos, los estudiantes utilizaron el compás para verificar la congruencia de radios; además pudieron visualizar una circunferencia (en ausencia de ella) al reconocer segmentos congruentes.

Los estudiantes usaron el compás, tanto para construir circunferencias como para determinar equidistancias. Se observaron muchas dificultades para usar el compás por lo que fue necesario que la profesora lo explicara y, en ocasiones, llevara de la mano a algunos niños mientras lo usaban. También fue necesario que la profesora interviniera para que los estudiantes pudieran ver la relación entre la herramienta predeterminada del programa de geometría dinámica y el compás al construir una circunferencia, así como también relacionaran los movimientos tanto en uno (el efecto del arrastre) como en el otro (amplitud del compás). Para la solución del cuarto numeral los estudiantes hicieron uso de los hechos geométricos, mencionado además que no importaba la cantidad de radios que tuviera una circunferencia, todos iban a medir lo mismo.

Actividad 5

Para solucionar la actividad, los estudiantes observaron que los segmentos estaban fijos y exploraron varias estrategias antes de utilizar la circunferencia. Por ejemplo algunos de ellos trataron de construir un segmento, pero al moverlo para compararlo vieron que cambiaba de tamaño. Otros trataron de utilizar elementos externos al programa como reglas. Finalmente, luego de la exploración de los elementos que aparecían en la actividad, la mayoría de estudiantes realizaron primero una comparación del radio de la circunferencia con el segmento d y luego la utilizaron para hallar los demás radios congruentes. Para explicar las soluciones, los estudiantes hacen uso de los hechos geométricos establecidos en las anteriores actividades.

Finalmente en la actividad en lápiz y papel, los estudiantes relacionaron fácilmente la acción de comparar los segmentos en GeogebraPrim utilizando la circunferencia, con la acción de comparar la medida de los segmentos utilizando el compás. Entonces el compás se constituyó en una herramienta para comparar y transportar medidas.

4. Reflexiones

La aplicación de la secuencia de enseñanza permitió observar que aunque el programa de geometría dinámica proporciona una herramienta predeterminada para construir una circunferencia, la configuración de ésta carece de sentido para los estudiantes y es necesario que previamente se desarrollen actividades que contribuyan a establecer las relaciones geométricas implícitas en las herramientas que ofrece el programa. El uso de las herramientas predeterminadas de los programas de geometría dinámica no implica el reconocimiento de las propiedades geométricas que estas determinan.

Se ratifica la idea de que la identificación de la representación de una circunferencia no implica el reconocimiento de las relaciones entre los elementos que la componen. Se puede observar que al recorrer el camino hacia el reconociendo de las relaciones y propiedades de la circunferencia, éstas no son de fácil acceso para los estudiantes.

Aunque el uso de programas de geometría dinámica es un entorno útil para favorecer la enseñanza de la geometría, también introduce cuestionamientos y retos referidos a su función y uso los cuales es necesario conocer y abordar con la finalidad de mejorar la labor docente y aportar en la investigación de didáctica de las matemáticas, en temas relacionados con el uso significativo y comprensivo de las herramientas predeterminadas.

Insistimos en que es apropiado, conveniente y necesario que los estudiantes:

- i). Identifiquen los elementos de un dibujo.
- ii). Expresen lo que observan al arrastrar los elementos de un dibujo.
- iii). Comprendan los hechos geométricos con los cuales están configuradas las herramientas predeterminadas de los programas de geometría dinámica.

Además, es apropiado, conveniente y necesario que los profesores:

- i). Diseñen y propongan a sus estudiantes actividades de exploración para que ellos identifiquen invariantes y relaciones entre los elementos de una figura.
- ii). Acompañen los hallazgos de los estudiantes con cuestionamientos que ayuden a validar o refutar dichos hallazgos.
- iii). Diseñen secuencias que involucren el uso de los sistemas de geometría dinámica, instrumentos de trazo y las convenciones para la representación de figuras geométricas.

Referencias bibliográficas

- De Villiers, M. (2004). Using dynamic geometry to expand mathematics teachers' understanding of proof. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 35 (5), p. 703-724.
- Jones, K. (1999). Student interpretations of a dynamic geometry environment. *Proceedings of the First Conference of the European Society of Research in Mathematics Education I.I + I.II*. Web site: <http://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/cerme1-proceedings.html>. Consultado el 12 de marzo de 2014.
- Laborde, C. (1996). Cabri-Geometra o una nueva relación con la geometría. En Puig, L (Eds.), *Investigar y enseñar: Variedades de la educación matemática*. Colombia: Una empresa docente y Grupo editorial Iberoamérica.
- Mariotti, M.A. (2001). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics*. 44 (1), p. 25-53.

- Olivero, F. (2003). The proving process within a dynamic geometry environment. Tesis de doctorado, University of Bristol, Graduate School of Education, England.
- Sáenz-Ludlow, A., y Athanasopoulou, A. (2008). The GSP, as a technical-symbolic tool, mediating both geometric conceptualizations and communication. In L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education. Epistemology, history, classroom and culture*. p. 195–214. The Netherlands: Sense Publishers.
- Yackel, E., y Cobb, P. (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458. doi:10.2307/749877