

# **Expresiones explícitas de los autovectores ortonormalizados para materiales transversalmente isótropos en el formalismo de Stroh. Aplicación al análisis de singularidades en uniones adhesivas**

**A. Barroso, V. Mantič y F. París**

Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla, España

## **RESUMEN**

La resolución de problemas de elasticidad lineal anisótropa, utilizando el formalismo de Stroh, se basa en el conocimiento de los autovalores y autovectores de la matriz de elasticidad fundamental  $\mathbf{N}$ . En el presente trabajo se presenta el conjunto completo de expresiones explícitas de dichos autovalores y autovectores para materiales transversalmente isótropos. Puesto que el comportamiento de las láminas unidireccionales de materiales compuestos fibrosos es típicamente transversalmente isótropo, los resultados obtenidos permiten el análisis de problemas con este tipo de materiales. Se presentan aplicaciones para uniones adhesivas entre metales y materiales compuestos.

## **1. INTRODUCCIÓN**

Para abordar el diseño y análisis de estructuras construidas con materiales compuestos (fibra larga y continua) se asume con frecuencia, en el marco de la teoría de la elasticidad lineal, un comportamiento transversalmente isótropo u ortótropo para los mismos. En el presente estudio se va a considerar un comportamiento transversalmente isótropo para las láminas unidireccionales de fibra.

El objetivo final del presente estudio es analizar la estructura del campo de tensiones singulares que típicamente aparece en uniones adhesivas entre materiales compuestos y metales, donde la estructura de apilado de los materiales compuestos da lugar a la aparición de puntos críticos - esquinas multimateriales - donde confluyen materiales de distinta naturaleza. El formalismo de Stroh (Stroh, 1958, 1962), herramienta fundamental para el análisis de problemas de elasticidad anisótropa, se basa en el problema de autovalores de la matriz de elasticidad fundamental  $\mathbf{N}$  (real,  $6 \times 6$ ) del material bajo análisis, Ting (1996). Por eso, el primer objetivo del presente trabajo es deducir las expresiones explícitas de los autovectores y autovalores, para materiales transversalmente isótropos, incluyendo todos los casos posibles de degeneración matemática. El conjunto completo de

expresiones explícitas de los autovectores normalizados se presenta en este trabajo por primera vez para materiales transversalmente isótropos. Tanuma (1996) obtuvo expresiones explícitas de la matriz de impedancia de superficie para estos materiales, obteniendo en algunos casos, como resultados intermedios, expresiones de los autovectores de dichos materiales, aunque no para todos los casos posibles y además no se presentan "normalizados", propiedad importante en la estructura del formalismo.

## 2. EL FORMALISMO DE STROH

La solución general en términos de desplazamientos,  $u_i$ , y de la función de tensiones,  $\varphi_i$ , para problemas de elasticidad lineal anisótropa, bajo un estado de deformación plana generalizada (DPG en adelante) ( $u_i = u_i(x_1, x_2)$ ,  $i=1,2,3$ ), se puede expresar, para  $\mathbf{N}$  simple o semisimple, como:

$$\mathbf{u} = \sum_{\alpha=1}^3 \{ \mathbf{a}_{\alpha} f_{\alpha}(z_{\alpha}) + \bar{\mathbf{a}}_{\alpha} f_{\alpha+3}(\bar{z}_{\alpha}) \}, \quad \boldsymbol{\varphi} = \sum_{\alpha=1}^3 \{ \mathbf{b}_{\alpha} f_{\alpha}(z_{\alpha}) + \bar{\mathbf{b}}_{\alpha} f_{\alpha+3}(\bar{z}_{\alpha}) \}, \quad (1)$$

donde  $z_{\alpha} = x_1 + p_{\alpha} x_2$ , siendo  $p_{\alpha}$  los autovalores complejos de  $\mathbf{N}$ . Las tensiones se obtienen de  $\sigma_{i1} = -\varphi_{i,2}$ ,  $\sigma_{i2} = \varphi_{i,1}$ . El vector  $\boldsymbol{\xi}^T = [\mathbf{a}^T, \mathbf{b}^T]$ , con  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$  y  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$ , es un autovector de  $\mathbf{N}$ , quedando el problema de autovalores:  $\mathbf{N}\boldsymbol{\xi}_{\alpha} = p_{\alpha}\boldsymbol{\xi}_{\alpha}$  ( $\alpha = 1, \dots, 6$ ). Para una explicación detallada del formalismo de Stroh y particularidades de expresiones análogas para  $\mathbf{N}$  no-semisimple, véase Ting (1996).

## 3. MATERIALES TRANSVERSALMENTE ISÓTROPOS Y SISTEMAS DE COORDENADAS EN EL FORMALISMO DE STROH

En el presente trabajo, el sistema de referencia ( $x_i$ ,  $i=1,2,3$ ) se fija a los ejes que definen el estado de DPG. Un material con comportamiento elástico transversalmente isótropo tiene un plano en el que todas las direcciones contenidas en él tienen las mismas propiedades elásticas, o lo que es lo mismo, un plano de comportamiento isótropo. Definamos un sistema de coordenadas solidario al material ( $\hat{x}_i$ ,  $i=1, 2, 3$ ), con el eje  $\hat{x}_3$  perpendicular a este plano. En materiales compuestos fibrosos, con comportamiento transversalmente

isótropo,  $\hat{x}_3$  coincide con la dirección de la fibra y es un eje de simetría elástica de rotación. El tensor de constantes elásticas  $\hat{C}_{ijkl}$  ( $i,j,k,s=1,2,3$ ) expresado en notación contraída  $\hat{C}_{ij}$  ( $i,j=1, \dots, 6$ ), en los ejes del material  $\hat{x}_i$  toma la forma (2) (en la nomenclatura de Tanuma, 1996). Las 5 constantes elásticas que

$$\hat{C}_{ij} = \begin{bmatrix} A & N & F & 0 & 0 & 0 \\ N & A & F & 0 & 0 & 0 \\ F & F & C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(A-N) \end{bmatrix} \quad (2)$$

definen el comportamiento elástico de un material transversalmente isótropo ( $A, N, C, F$  y  $L$ ) deben cumplir las siguientes condiciones, que aseguran que la energía de deformación es definida positiva:  $L > 0$ ,  $\frac{1}{2}(A - N) > 0$ ,  $A + C + N > 0$  y  $(A + N)C > 2F^2$ . Las matrices  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]$  y  $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]$  y los autovalores  $p_\alpha$  para un material transversalmente isótropo con una orientación genérica definida por los ángulos  $\phi$  y  $\theta$  respecto al sistema de coordenadas  $x_i$ , ver Figura 1a, se pueden evaluar partiendo de las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ , y los autovalores del mismo material, asociados a una orientación  $\phi$  y  $\theta=0$ , ver Figura 1b y 1a, debido al hecho de que  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  se comportan como tensores de orden 1 girando alrededor del eje  $x_3$ , Ting (1982).

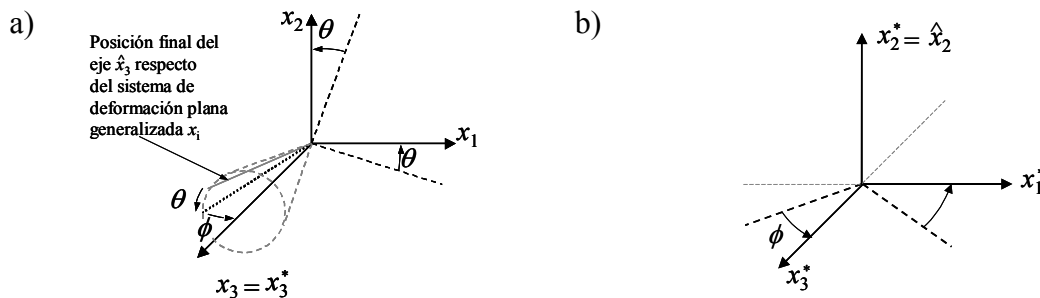


Fig. 1 - Sistemas de referencia a) con  $\phi$  y  $\theta$  genéricos y con  $\theta=0$

Definiendo por simplicidad a estas matrices como  $\mathbf{A}^*$  y  $\mathbf{B}^*$ , las relaciones se expresan:

$$\mathbf{A}(\phi, \theta) = \Omega_3(\theta)\mathbf{A}(\phi, 0) = \Omega_3(\theta)\mathbf{A}^*, \quad \mathbf{B}(\phi, \theta) = \Omega_3(\theta)\mathbf{B}(\phi, 0) = \Omega_3(\theta)\mathbf{B}^*, \quad (3)$$

#### 4. EXPRESIONES ORTONORMALIZADAS DE A Y B

Centrando, por las razones anteriormente expuestas, el estudio en materiales con orientación  $\theta=0$ , los tres autovalores del material, en función del ángulo  $\phi$  y las constantes elásticas del material, quedan:

$$p_1 = i \left( \cos^2 \phi + \frac{2L}{A - N} \sin^2 \phi \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4)$$

$$p_2 = i \left( \cos^2 \phi + \sin^2 \phi \left[ (AC - F^2 - 2FL) + \sqrt{(AC - (F + 2L)^2)(AC - F^2)} \right] \frac{1}{2AL} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5)$$

$$p_3 = i \left( \cos^2 \phi + \sin^2 \phi \left[ (AC - F^2 - 2FL) - \sqrt{(AC - (F + 2L)^2)(AC - F^2)} \right] \frac{1}{2AL} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6)$$

Siguiendo la clasificación de Ting (1999) de la matriz  $\mathbf{N}$ , y en función de los valores concretos de  $\phi$  y  $A, N, C, F$  y  $L$ , los siguientes casos son posibles (Tanuma 1996):

1.  $N$  es no-semisimple si y sólo si:

1.a)  $\phi=0$  o  $\phi=\pm\pi$ , (7)

$$1.b) \sqrt{AC} - F - 2L = 0, \quad 1.b.1) \frac{2L}{A-N} \neq \sqrt{\frac{C}{A}}, \quad 1.b.2) \frac{2L}{A-N} = \sqrt{\frac{C}{A}}. \quad (8)$$

2. Con  $\phi \neq 0$ ,  $\pi$  y  $\sqrt{AC} - F - 2L \neq 0$ ,  $N$  es semisimple si y sólo si:

$$AL \left( \frac{2L}{A-N} \right)^2 - (AC - F^2 - 2FL) \frac{2L}{A-N} + CL = 0. \quad (9)$$

3. En cualquier otro caso,  $N$  es simple.

En lo que sigue,  $\mathbf{a}^*$  y  $\mathbf{b}^*$  definen las componentes de  $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}(\phi, 0)$  y  $\mathbf{B}^* = \mathbf{B}(\phi, 0)$ . Sólo es necesario aplicar el giro recogido en las relaciones (3) a las matrices  $\mathbf{A}^*$  y  $\mathbf{B}^*$ , para obtener  $\mathbf{A}(\phi, \theta)$  y  $\mathbf{B}(\phi, \theta)$ .

**Caso 1.a.** ( $\phi = 0$  o  $\phi = \pm\pi$ ). Se cumple:  $p_1 = p_2 = p_3 = p = i$  con dos autovectores linealmente independientes asociados. Para este caso particular, las expresiones de  $\mathbf{a}^*$  y  $\mathbf{b}^*$  quedan:

$$\mathbf{a}_1^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \sqrt{2iL} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2^* = k \begin{bmatrix} \pm 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3^* = k \left( \frac{3A-N}{2(A+N)} \right) \begin{bmatrix} \mp i \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$\mathbf{b}_1^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ iL \\ \sqrt{2iL} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2^* = k(A-N) \begin{bmatrix} \pm i \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_3^* = k \left( \frac{A-N}{2} \right) \begin{bmatrix} \pm 1 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

El signo  $\pm$  depende del valor de  $\cos \phi = \pm 1$  y se define  $k = \left[ \frac{A+N}{4A(A-N)} \right]^{\frac{1}{2}} > 0$ .

**Caso 1.b.1** ( $\sqrt{AC} - F - 2L = 0$  y  $\frac{2L}{A-N} \neq \sqrt{\frac{C}{A}}$ ). Los autovalores (22-24) son:

$$p_1 = i \left( \cos^2 \phi + \frac{2L}{A-N} \sin^2 \phi \right)^{\frac{1}{2}}, \quad p_2 = p_3 = i \left( \cos^2 \phi + \sqrt{\frac{C}{A}} \sin^2 \phi \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (12)$$

Para este caso sólo existe un autovector linealmente independiente asociado a  $p_2 = p_3$ . Los autovectores una vez normalizados son:

$$\mathbf{a}_1^* = k_1 \begin{bmatrix} \cos \phi \\ \cos \phi \\ p_1 \\ \sin \phi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2^* = k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ p_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3^* = \frac{k_2}{2p_2 \sin^2 \phi (F+L)} \begin{bmatrix} 4Ap_2^2 \cos^2 \phi + \Delta \\ -p_2 \Delta \\ 4Ap_2^2 \cos \phi \sin \phi \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\mathbf{b}_1^* = k_1 \cos \phi (A-N) \begin{bmatrix} p_1 \\ -1 \\ \frac{\cot \phi}{2p_1} [p_1^2 (tg^2 \phi - 1) - 1] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2^* = k_2 p_1^2 (A-N) \begin{bmatrix} -p_2 \\ 1 \\ p_2 \cot \phi \left( 1 + \frac{1}{p_1^2} \right) \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$\mathbf{b}_3^* = \frac{k_2(A-N)}{(F+L)\sin^2\phi} \begin{bmatrix} Ap_2^2 \cos^2\phi - \frac{p_1^2 \sin^2\phi}{2}(F+L) \\ p_2 \left[ Ap_2^2 \cos^2\phi - \frac{p_1^2 \sin^2\phi}{2}(F+L) \right] \\ \cot\phi \left[ Ap_2^2 \sin^2\phi - \frac{(1+p_1^2)}{2}(\Delta + 2Ap_2^2) \right] \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$k_1 = \frac{i}{\sin\phi} \sqrt{\frac{p_1}{2L}}, \quad k_2 = \frac{i}{2p_2} \sqrt{\frac{F+L}{AL}}, \quad \Delta = A\cos^2\phi + L\sin^2\phi - Ap_2^2. \quad (16)$$

**Caso 1.b.2** ( $\sqrt{AC} - F - 2L = 0$  y  $\frac{2L}{A-N} = \sqrt{\frac{C}{A}}$ ). En este caso,  $p_1$  se hace igual a  $p_2 = p_3$ , ver (4)-(6), de manera que aparece un autovalor triple con dos autovectores linealmente independientes asociados. Este caso es como el Caso 1a, con la diferencia de que en este caso el autovalor triple no es la unidad imaginaria  $i$ .

$$p = p_1 = p_2 = p_3 = i \left( \cos^2\phi + \frac{2L}{A-N} \sin^2\phi \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (17)$$

$$\mathbf{a}_1^* = k_1 \begin{bmatrix} \cos\phi \\ -\cos\phi \\ p \\ \sin\phi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_1^* = k_1 \cos\phi(A-N) \begin{bmatrix} p \\ -1 \\ \frac{\cot\phi}{2p} [p^2(\tan^2\phi - 1) - 1] \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$\mathbf{a}_2^* = k_2 k \begin{bmatrix} 1 \\ p \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2^* = k_2 k p^2(A-N) \begin{bmatrix} -p \\ 1 \\ p \cot\phi \left( 1 + \frac{1}{p^2} \right) \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$\mathbf{a}_3^* = k_2 \begin{bmatrix} \Psi + \cos\phi \left( 1 + \frac{1}{2p^2} \right) \\ -p\Psi - \frac{\cos\phi}{2p} \\ \sin\phi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_3^* = k_2 \begin{bmatrix} \left( \frac{A-N}{2} \right) p \cos\phi - \frac{(A+N)Lp \sin^2\phi}{4A \cos\phi} \\ - \left( \frac{A-N}{2} \right) \cos\phi - \frac{(A+N)L \sin^2\phi}{4A \cos\phi} \\ \left( \frac{A-N}{2} \right) p \sin\phi + \frac{(A+N)L(1+p^2) \sin\phi}{4Ap} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$k = \left( \frac{A+N}{A-N} \right) \frac{L \sin^2\phi}{2Ap \cos\phi}, \quad k_1 = \frac{i}{\sin\phi} \sqrt{\frac{p_1}{2L}}, \quad k_2 = \frac{i \cos\phi}{L \sin^2\phi} \sqrt{\frac{A(A-N)}{A+N}}, \quad \Psi = \frac{(3A-N)L \sin^2\phi}{(A-N)4Ap^2 \cos\phi} \quad (21)$$

**Casos 2.1 y 3.1** (Casos simple y semisimple con  $F+L=0$ ). Para los casos simple ( $p_1 \neq p_2 \neq p_3 \neq p_1$ ) y semisimple ( $p_1 = p_2 \neq p_3$ ), se tiene respectivamente:

$$p_1 = p_2 = i \left( \cos^2\phi + \frac{2L}{A-N} \sin^2\phi \right)^{\frac{1}{2}}, \quad p_3 = i \left( \cos^2\phi + \frac{L}{A} \sin^2\phi \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (22)$$

$$p_1 = i \left( \cos^2\phi + \frac{2L}{A-N} \sin^2\phi \right)^{\frac{1}{2}}, \quad p_2 = i \left( \cos^2\phi + \frac{C}{L} \sin^2\phi \right)^{\frac{1}{2}}, \quad p_3 = i \left( \cos^2\phi + \frac{L}{A} \sin^2\phi \right)^{\frac{1}{2}} \quad (23)$$

Y para ambos casos, utilizando (22) ó (23), según corresponda:

$$\mathbf{a}_1^* = k_1 \frac{\cos^2 \phi}{\sin \phi} \begin{bmatrix} -1 \\ 1/p_1 \\ -tg\phi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_1^* = k_1 \frac{(A-N)\cos^2 \phi}{\sin \phi} \begin{bmatrix} -p_1 \\ 1 \\ \frac{\cos^2 \phi (1+2p_1^2) - p_1^2}{2p_1 \cos \phi \sin \phi} \end{bmatrix}, \quad (24)$$

$$\mathbf{a}_2^* = k_2 \begin{bmatrix} \sin \phi \\ 0 \\ -\cos \phi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2^* = k_2 \begin{bmatrix} Lp_2 \sin \phi \\ -L \sin \phi \\ -Lp_2 \cos \phi \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$\mathbf{a}_3^* = k_3 \begin{bmatrix} \cos^2 \phi \\ p_3 \\ \sin \phi \cos \phi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_3^* = k_3 (\cos^2 \phi - p_1^2) \left( \frac{A-N}{2} \right) \begin{bmatrix} p_3 \\ -1 \\ p_3 \cot \phi \left( \frac{2}{\cos^2 \phi - p_1^2} - 1 \right) \end{bmatrix}, \quad (26)$$

$$k_1 = \frac{i}{\cos \phi} \sqrt{\frac{p_1}{2L}}, \quad k_2 = \frac{1}{\sqrt{2Lp_2}}, \quad k_3 = \frac{i}{\sin \phi} \sqrt{\frac{1}{2p_3L}}. \quad (27)$$

**Casos 2.2 y 3.2** (Casos simple y semisimple con  $F+L \neq 0$ ). Los autovalores son los de (4)-(6), con  $p_1 = p_2$  para el caso semisimple. Los vectores  $\mathbf{a}_\alpha^*$  y  $\mathbf{b}_\alpha^*$  se pueden obtener de

Ting (1996) o Tanuma (1996) y tras la normalización, se obtiene, con  $k_1 = \frac{i}{\cos \phi} \sqrt{\frac{p_1}{2L}}$ :

$$\mathbf{a}_1^* = k_1 \frac{\cos^2 \phi}{\sin \phi} \begin{bmatrix} -1 \\ 1/p_1 \\ -tg\phi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_1^* = k_1 \frac{(A-N)\cos^2 \phi}{\sin \phi} \begin{bmatrix} -p_1 \\ 1 \\ \frac{\cos^2 \phi (1+2p_1^2) - p_1^2}{2p_1 \cos \phi \sin \phi} \end{bmatrix}, \quad (28)$$

y para  $i=2,3$ , con:

$$k_i = \left( 2p_i AL (\cos^2 \phi + p_i^2) \{ A(\cos^2 \phi + p_i^2) + 2L \sin^2 \phi \} - 2p_i FL \sin^4 \phi (F+2L) \right)^{-1/2}, \quad (29)$$

$$\mathbf{a}_i^* = k_i \begin{bmatrix} -(F+L)\cos^2 \phi \sin \phi + A \sin \phi (\cos^2 \phi + p_i^2) + L \sin^3 \phi \\ -(F+L)p_i \sin \phi \\ -(F+L)\cos \phi \sin^2 \phi - A \cos \phi (\cos^2 \phi + p_i^2) - L \cos \phi \sin^2 \phi \end{bmatrix}, \quad (30)$$

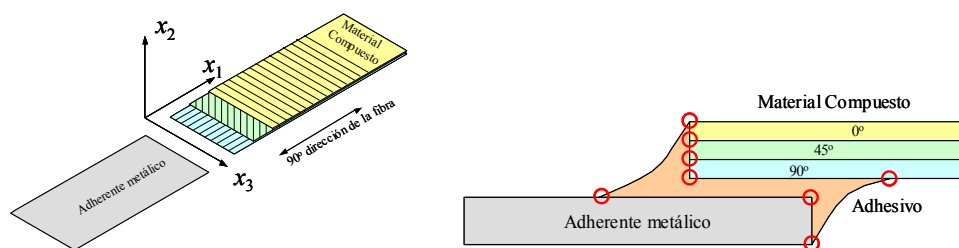
$$\mathbf{b}_i^* = k_i \begin{bmatrix} -(A-N)(F+L)p_i \cos^2 \phi \sin \phi - Lp_i \sin \phi (F \sin^2 \phi - A \cos^2 \phi - Ap_i^2) \\ \{ AF - (F+L)N \} \cos^2 \phi + FL \sin^2 \phi - ALp_i^2 \sin \phi \\ -(A-N)(F+L)p_i \cos \phi \sin^2 \phi + Lp_i \cos \phi (F \sin^2 \phi - A \cos^2 \phi - Ap_i^2) \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Una vez evaluados  $\mathbf{A}^*$  y  $\mathbf{B}^*$  para todos los casos posibles en un material transversalmente isótropo, sólo queda aplicar la ley de giro alrededor de  $x_3$ , usando (3), para obtener las expresiones finales de  $\mathbf{A}=\mathbf{A}(\phi, \theta)$  y  $\mathbf{B}=\mathbf{B}(\phi, \theta)$  para cualquier orientación genérica del material respecto a los ejes que definen el estado de DPG.

## 5. APLICACIÓN: ANÁLISIS DE SINGULARIDADES EN UNIONES ADHESIVAS

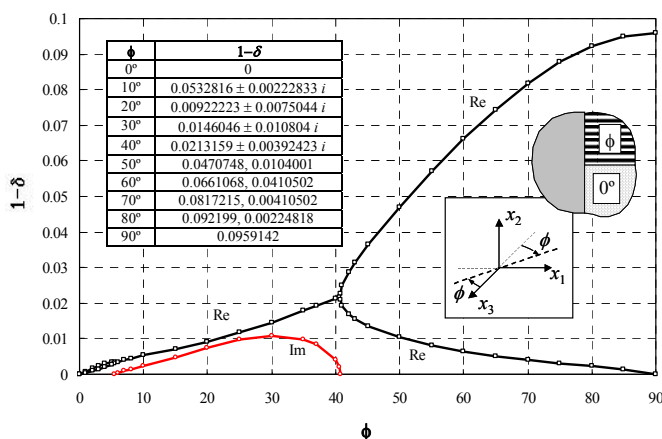
En uniones adhesivas entre materiales compuestos y de éstos con metales, uniones que típicamente aparecen en la industria aeronáutica, existen numerosos ejemplos de esquinas multimateriales con materiales transversalmente isótropo (las láminas unidireccionales de los laminados). Se presenta el análisis del estado singular de tensiones que se induce en este tipo de esquinas, utilizando los resultados previamente obtenidos.

El campo de desplazamientos y tensiones se puede obtener de (1), sin más que calcular  $\mathbf{a}_\alpha$  y  $\mathbf{b}_\alpha$  y los órdenes de singularidad en tensiones. Para la obtención de los órdenes de singularidad en tensiones  $\delta-1$  ( $\sigma_{ij}(r, \theta) \approx r^{\delta-1} f_{ij}(\theta)$   $r \rightarrow 0_+$ ) en el entorno de esquinas multimateriales anisótropas, se va a hacer uso de una herramienta de cálculo, desarrollada por los autores del presente trabajo, Barroso et al. (2002) que necesita del conocimiento de  $\mathbf{a}_\alpha$  y  $\mathbf{b}_\alpha$ , que se van a tomar del presente estudio. Consideremos (Figura 2) una unión a solape simple entre un metal y un material compuesto. El compuesto tiene tres láminas de orientaciones ( $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ ) y se une al metal mediante una capa de adhesivo. Los círculos indican las esquinas multimateriales.



**Fig. 2 - Unión adhesiva entre un metal y un material compuesto**

Las constantes elásticas del compuesto (un AS4/8552) con la fibra en la dirección 1, se han considerado transversalmente isótropas:  $E_{11}=141$  GPa,  $E_{22}=E_{33}=E=9.58$  GPa,  $\nu_{12}=\nu_{13}=0.3$ ,  $\nu_{23}=\nu=0.32$ ,  $G_{12}=G_{13}=5$  GPa,  $G_{23}=E/2(1+\nu)=3.629$  GPa. Para el metal (aluminio)  $E=68.6$  GPa y  $\nu=0.3$ , y el adhesivo  $E=3$  GPa y  $\nu=0.3$ . Desde el punto de vista del tratamiento matemático del problema, existe una gran diferencia entre considerar las láminas transversalmente isótropas u ortótropas (con una  $G_{23}$  ligeramente diferente a la del caso transversalmente isótropo), puesto que en el primer caso, la lámina orientada a  $0^\circ$  (según la dirección  $x_3$ ) sería un caso degenerado (caso 1.a, con  $\phi=0$ ) mientras que en el segundo sería un caso simple (caso 3.1). En la Figura 3 se presentan los órdenes de singularidad en tensiones de una esquina tri-material del esquema de la Figura 2.



**Fig. 3 - Problema de esquina con material transversalmente isótropo**

Se puede apreciar en la Figura 3, que para  $\phi=0^\circ$ , no existe formalmente una esquina, por lo que no se obtienen singularidades, después aparecen dos modos singulares hasta  $\phi=5.5^\circ$ , que se transforman en una pareja de valores complejos conjugados, hasta  $\phi=40.5^\circ$ . Finalmente aparecen de nuevo dos valores reales hasta la configuración *cross-ply* ( $0^\circ$ - $90^\circ$ ), donde se obtiene sólo un modo singular.

## 6. CONCLUSIONES

Se han obtenido expresiones explícitas para los autovectores de la matriz de elasticidad fundamental  $N$  para todos los casos de materiales transversalmente isótropos en el marco del formalismo de Stroh, sin limitación en el valor de las constantes elásticas ni la orientación del material. En todos los casos, los resultados han sido ortogonalizados y normalizados para cumplir las importantes relaciones de ortogonalidad de Stroh. Los resultados son directamente utilizables en la resolución de cualquier problema de elasticidad lineal anisótropa usando el formalismo de Stroh, donde la representación de las variables se realiza en los ejes definidos por el estado de deformación plana generalizada (Ting, 1996), lo que es típico en los problemas ingenieriles. Finalmente, como aplicación práctica, los órdenes de singularidad de tensiones se han obtenido en el entorno de una esquina con materiales transversalmente isótropos, en una unión adhesiva a solape simple.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a K. Tanuma, el envío de copia de su trabajo. El estudio está financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología (PROFIT 2001, Proy. EUREKA  $\Sigma$ 11882) y (Proy. No. 2000-1115). También se agradece la ayuda recibida por SACESA.

## REFERENCIAS

- BARROSO, A., MANTIČ, V. Y PARÍS, F., (2002) Singularity analysis of anisotropic multimaterial corners, *Int. J. of Fracture*, (aceptado para su publicación).  
 STROH, A.N., (1958), Dislocations and cracks in anisotropic elasticity, *Phil. Mag.* 3, pp. 625-646.



- 
- STROH, A.N., (1962), Steady state problems in anisotropic elasticity, *J. Math. Phys.* 41, pp. 77-103.
- TANUMA, K., (1996), Surface-impedance tensors of transversely isotropic elastic materials, *Q. J. Mech. Appl. Math.* 49, pp. 29-48.
- TING, T.C.T., (1982), Effects of change of reference coordinates on the stress analyses of anisotropic elastic materials, *Int. J. Solids Structures* 18, pp. 139-152.
- TING, T.C.T., (1996), *Anisotropic Elasticity - Theory and Application*, Oxford University Press, New York.
- TING, T.C.T., (1999), A modified Lekhnitskii formalism à la Stroh for anisotropic elasticity and classifications of the 6×6 matrix N, *Proc. R. Soc. Lond. A* 455, pp.69-89.