Modelos para lógicas modales normales

Francisco José Salguero Lamillar
Universidad de Sevilla

1. La noción de conjunto modelo.

Definición 1: El conjunto F de las fórmulas bien formadas (abreviadamente fbfs.) es el más pequeño conjunto de secuencias de signos del lenguaje que cumple las siguientes condiciones:

A) $\perp$ es una fbf.

B) Si t y s son términos y Q una letra predicativa entonces:

a) $t=s$ es una fbf.

b) $Qt_1t_2...t_n$ es una fbf.

C) Si α y β son fbfs. entonces:

a) $\neg\alpha$ es una fbf.

b) $\alpha\wedge\beta$ es una fbf.

c) $\alpha\vee\beta$ es una fbf.

d) $\alpha\rightarrow\beta$ es una fbf.

D) Si $\alpha(x)$ es una fbf. entonces:

a) $\forall x\alpha(x)$ es una fbf.

b) $\exists x\alpha(x)$ es una fbf.

E) Toda fbf. precedida por un operador modal es también una fbf.

F) Nada más es una fbf.

Definición 2: Un conjunto modelo (que será designado por una de las letras minúsculas del alfabeto griego λ, μ, ν, susceptibles de llevar subíndice) es un conjunto no vacío de fórmulas sin variables libres (sentencias) que satisface las siguientes condiciones:

(C. $\perp$): Para todo $\mu\in\Omega$, $\perp\notin\mu$.

(C.$\neg$): Si $\alpha\in\mu$ entonces $\neg\alpha\notin\mu$.

(C.$\vee$): Si $(\alpha\vee\beta)\in\mu$ entonces $\alpha\in\mu$ o $\beta\in\mu$.

(C.$\wedge$): Si $(\alpha\wedge\beta)\in\mu$ entonces $\alpha\in\mu$ y $\beta\in\mu$.

(C.$\rightarrow$): Si $(\alpha\rightarrow\beta)\in\mu$ entonces $\neg\alpha\in\mu$ o $\beta\in\mu$.

(C.=): Si $\alpha(a)\in\mu$ y $(a=b)\in\mu$ entonces $\alpha(b)\in\mu$.

(C.$\exists$): Si $\exists x\alpha(x)\in\mu$ entonces $\alpha(b)\in\mu$ para al menos una constante individual $b\in\mathsf{D}(\mu)$.

(C.$\forall$): Si $\forall x\alpha(x)\in\mu$ entonces $\alpha(b)\in\mu$ para toda constante individual $b\in\mathsf{D}(\mu)$.

(C.$\Diamond$): Si $\Diamond\alpha\in\mu\in\Omega$ entonces hay al menos un $\lambda\in\Omega$ tal que $\mu\Re\lambda$ y $\alpha\in\lambda$.

(C.$\Box$): Si $\Box\alpha\in\mu\in\Omega$ y si $\lambda\in\Omega$ y $\mu\Re\lambda$ entonces $\alpha\in\lambda$.

Definición 3: Una clase modelo Ω es un conjunto no vacío de conjuntos modelos.

Definición 4: Un sistema modelo (S-modelo) es una cuádrupla ordenada $<\Omega,\Re,\mathsf{D},\prec>$ donde Ω es una clase modelo, $\Re$ es una relación llamada de alternatividad que se establece entre los conjuntos modelos pertenecientes a Ω de modo que $\Re\subseteq\Omega^2$, D es una función definida en Ω tal que, para cada conjunto modelo $\mu\in\Omega$, $\mathsf{D}(\mu)$ es el conjunto de las constantes individuales que aparecen en las fórmulas de μ y $\prec$ es una relación que se establece entre los elementos de Ω y del conjunto F de las fbfs. tal que:

$\mu\prec\alpha$ sii $\alpha\in\mu$

$\mu\prec\neg\alpha$ sii no $\mu\prec\alpha$

$\mu\prec\neg(a=a)$ sii $\mu\prec\perp$

$\mu\prec\alpha\wedge\beta$ sii $\mu\prec\alpha$ y $\mu\prec\beta$

$\mu\prec\alpha\vee\beta$ sii $\mu\prec\alpha$ ó $\mu\prec\beta$

$\mu\prec\alpha\rightarrow\beta$ sii $\mu\prec\neg\alpha$ ó $\mu\prec\beta$

$\mu\prec(a=b)$ sii $\mu\prec\alpha(a)\leftrightarrow\alpha(b)$

$\mu\prec\exists x\alpha(x)$ sii $\mu\prec\alpha(b)$ para algún $b\in D(\mu)$

$\mu\prec\forall x\alpha(x)$ sii $\mu\prec\alpha(b)$ para todo $b\in D(\mu)$

$\mu\prec\Diamond\alpha$ sii $\exists\lambda\in\Omega$ $\mu\Re\lambda$ y $\lambda\prec\alpha$

$\mu\prec\Box\alpha$ sii $\forall\lambda\in\Omega$ $\mu\Re\lambda$, $\lambda\prec\alpha$

No debe confundirse un S-modelo con un modelo que satisface una fórmula. En general, un S-modelo no es una interpretación, sino un marco general para las interpretaciones semánticas de los enunciados modales. Dicho de otro modo, un S-modelo es un sistema de conjuntos modelos relacionados entre sí y son precisamente los conjuntos modelos (en tanto que pertenecientes a una clase modelo) los que determinan un modelo para un enunciado concreto; el S-modelo provee de interpretaciones pero no es él mismo una interpretación. Si así no fuera, sería fácil despojar de toda relevancia lógica a los operadores modales. Por ejemplo, si se dijera siguiendo la definicición de S-validez que el enunciado

$$\Box\exists x\alpha(x) \tag{1}$$

es válido sii para toda interpretación $\Im$, $\exists x\alpha(x)_{\Im}=1$, se estaría tratando el operador modal de necesidad en el mismo sentido en el que se dice que el enunciado modalizado es válido. Esto significa que (1) sería lo mismo que

$$\models\exists x\alpha(x) \tag{1'}$$

y en verdad para ese viaje no se necesitaban tales alforjas.

Definición 5: Una fórmula α es S-satisfactible sii para algún S-modelo hay un $\mu\in\Omega$ tal que $\alpha\in\mu$.

Definición 6: Una fórmula α es S-válida (abreviadamente $|=_S\alpha$) sii para todo S-modelo y para todo conjunto modelo $\mu\in\Omega$, $\alpha\in\mu$.

Definición 7: Una fórmula α es consecuencia lógica de un conjunto no vacío de fórmulas Γ en el sistema S (abreviadamente $\Gamma|=_S\alpha$) sii hay una fórmula γ que es la fórmula que se consigue al conjuntar mediante el signo $\wedge$ todas las fórmulas de un subconjunto finito $\Gamma'\subset\Gamma$ tal que $|=_S\gamma\rightarrow\alpha$.

Con el aparato semántico descrito es fácil dar cuenta de los sistemas axiomáticos más importantes de la lógica modal. Sea un conjunto de axiomas cualquiera para la lógica de proposiciones similar al de la base axiomática de los Principia Mathematica {PM} y los siguientes axiomas y reglas de inferencia:

[K]: $\Box(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\Box\alpha\rightarrow\Box\beta)$

[D]: $\Box\alpha\rightarrow\Diamond\alpha$

[T]: $\Box\alpha\rightarrow\alpha$

[B]: $\alpha\rightarrow\Box\Diamond\alpha$

[S4]: $\Box\alpha\rightarrow\Box\Box\alpha$

[S5]: $\Diamond\alpha\rightarrow\Box\Diamond\alpha$

(MP): $|\text{-}\alpha,\ |\text{-}\alpha\rightarrow\beta \Rightarrow |\text{-}\beta$

(N): $|\text{-}\alpha \Rightarrow |\text{-}\Box\alpha$

(E): $|\text{-}\alpha\leftrightarrow\beta \Rightarrow |\text{-}\Box\alpha\leftrightarrow\Box\beta$

Kripke denomina sistema normal de lógica modal a todo aquél que sea una extensión del sistema cuya base axiomática es la siguiente:

{PM}+[K]+[T]+(MP)+(N).

En general se puede decir que un sistema normal de lógica modal es toda extensión del sistema K que sea cerrada respecto de la regla (N) de necesariedad. Esto deja a un lado, por ejemplo, el sistema estándar de lógica deóntica D, cuya base axiomática se define por:

$$\{PM\}+[K]+[D]+(MP)+(E),$$

pero no a los denominados sistemas básicos de lógica deóntica, cuyo principal exponente es el sistema KD, que sí son cerrados respecto de (N).

Volviendo a la semántica descrita, determinados cambios en la definición de la relación diádica $\Re$, por ejemplo, aportarían diferentes sistemas modelos de acuerdo con los principales sistemas axiomáticos normales. Con $\Re$ reflexiva se obtiene un S-modelo que conviene al sistema T propuesto por Feys en 1937 (así como al sistema M de Von Wright, equivalente a T como demostró en 1953 Sobocinski). Igualmente, si $\Re$ es reflexiva y transitiva se obtiene un S-modelo semántico del sistema axiomático propuesto por Lewis en 1932 que conocemos como S4, y si es reflexiva y simétrica se tiene el sistema B (o Sistema Brouweriano) propuesto por Kripke en 1963. Del mismo modo, si $\Re$ es euclidiana (o, paralelamente, reflexiva, simétrica y transitiva) se tiene el equivalente semántico de S5 de Lewis, etcétera. El siguiente cuadro ofrece la definición de la relación de alternatividad para algunos de los sistemas modales normales más importantes:

Sistema	**Propiedad**	**Cláusulas que cumple la relación $\Re$**
K	--------------	------------------
KD	Serialidad	$\forall\lambda\exists\mu(\lambda\Re\mu)$
T	Reflexividad	$\forall\mu(\mu\Re\mu)$
B	Reflexividad Simetría	$\forall\mu(\mu\Re\mu)$ $\forall\lambda\mu(\lambda\Re\mu\Rightarrow\mu\Re\lambda)$
S4	Reflexividad Transitividad	$\forall\mu(\mu\Re\mu)$ $\forall\lambda\mu\nu(\lambda\Re\mu\&\mu\Re\nu\Rightarrow\lambda\Re\nu)$
S5	Euclidianeidad	$\forall\lambda\mu\nu(\lambda\Re\mu\&\lambda\Re\nu\Rightarrow\mu\Re\nu)$

Cada uno de los S-modelos semánticos que surgen de definir en un sentido o en otro la relación de alternatividad como en el cuadro anterior puede recibir el nombre, respectivamente, de K-modelo, T-modelo (o M-modelo), D-modelo, y así sucesivamente.

2. Algunos resultados con conjuntos modelos y mundos posibles.

Teorema 1, (Lema de Hintikka): Todo conjunto modelo μ es simultáneamente S-satisfactible.

Demostración: El teorema es evidente por la definiciones de conjunto modelo y S-satisfactibilidad. Sea $<\Omega,\Re,D,\prec>$ un S-modelo cualquiera tal que $\mu\in\Omega$. Luego para todo $\alpha\in\mu$, α es S-satisfactible por la definición 5. ■

Definición 8: Un conjunto Γ finito de fórmulas es semánticamente consistente sii es simultáneamente S-satisfactible.

Definición 9: Un conjunto máximamente consistente en sentido semántico M es un conjunto de fórmulas semánticamente consistente y ejemplificado (es decir, para toda fbf. de la forma $\exists x\delta(x)$, si $\exists x\delta(x)\in M$ entonces hay al menos una constante individual b tal que $\delta(b)\in M$) tal que ninguna extensión propia de M es semánticamente consistente.

Definición 10: Un conjunto veritativo V es un conjunto de sentencias tal que para cualesquiera sentencias α y β:

a) $\perp\notin V$

b) $\alpha\in V$ sii $\neg\alpha\notin V$

c) $(\alpha\vee\beta)\in V$ sii $\alpha\in V$ o $\beta\in V$

d) $(\alpha\wedge\beta)\in V$ sii $\alpha\in V$ y $\beta\in V$

e) $(\alpha\rightarrow\beta)\in V$ sii $\neg\alpha\in V$ o $\beta\in V$

f) $\exists x\alpha(x)\in V$ sii hay al menos una constante individual b tal que $\alpha(b)\in V$

g) $\forall x\alpha(x)\in V$ sii para toda constante individual b, $\alpha(b)\in V$

h) $\Diamond\alpha\in V$ sii, para algún conjunto veritativo V' tal que $\{\Diamond\delta|\delta\in V'\}\subseteq V$, $\alpha\in V'$

i) $\Box\alpha\in V$ sii, para todo conjunto veritativo V' tal que $\{\delta|\Box\delta\in V\}\subseteq V'$, $\alpha\in V'$

Lema 1: Para todo conjunto modelo μ hay un conjunto veritativo V tal que $\mu\subset V$.

Demostración: Extendiendo el conjunto modelo μ a un conjunto veritativo.

Sean $A=<\alpha_1,...>$ la secuencia de todas las fórmulas de F con una y sólo una variable libre, $P=<a_1,...>$ la secuencia de todos los parámetros que no ocuren en μ y $B=<\beta_1,...>$ la secuencia de todas las sentencias del lenguaje.

Sea $V_w=V_0\cup V_1\cup...$, donde $V_0=\mu$ y $V_{n+1}=V_n\cup\{\exists x\delta(x)\rightarrow\delta(b/x)\}$, siendo δ la enésima fórmula de A y b el primer parámetro de P que no está ni en V_n ni en δ.

Sea $V^w=V^0\cup V^1\cup...$, donde $V^0=V_w$ y $V^{n+1}=V^n\cup\{\beta_n\}$ si no se da que $V^n|=_S\neg\beta_n$ o bien $V^{n+1}=V^n$ en caso contrario, siendo β_n la enésima sentencia de B.

Se obtiene de este modo un conjunto V^wdel que se puede probar:

1º V^w es simultáneamente S-satisfactible. En efecto, V_0 es simultáneamente S-satisfactible por el teorema 1. Ahora bien, si V_n es simultáneamente S-satisfactible entonces V_{n+1} también lo es. Supóngase que V_{n+1} no es simultáneamente S-satisfactible. Entonces, como por hipótesis V_n sí lo es, es que $V_n|=_S\neg(\exists x\delta(x)\rightarrow\delta(b/x))$. Por tanto, $V_n|=_S\exists x\delta(x)$ y $V_n|=_S\neg\delta(b/x)$. Pero, como b es un parámetro nuevo con respecto a V_n y δ, entonces se tiene que $V_n|=_S\forall x\neg\delta(x)$ y de aquí que $V_n|=_S\neg\exists x\delta(x)$, lo que hace que V_n no sea simultáneamente S-satisfactible, contra la hipótesis. De todo esto se sigue que V_w es simultáneamente S-satisfactible y por tanto lo es V^0, por definición. Basta entonces con demostrar que si V^n es simultáneamente S-satisfactible también lo es V^{n+1}, lo que es evidente por el propio proceso de construcción.

2º V^w es un conjunto veritativo. En efecto:

a) $\perp\notin V^w$, puesto que V^w es simultáneamente S-satisfactible.

b) $\alpha\in V^w$ sii $\neg\alpha\notin V^w$, puesto que, en el supuesto de que $\alpha\in V^w$ entonces, si también $\neg\alpha\in V^w$ entonces V^w no es simultáneamente S-satisfactible, contrariamente a la hipótesis, y en el supuesto de que $\neg\alpha\notin V^w$ entonces, por el criterio de construcción de V^w, $\alpha\in V^w$.

c) $(\alpha\vee\beta)\in V^w$ sii $\alpha\in V^w$ o $\beta\in V^w$, puesto que en el supuesto de que $(\alpha\vee\beta)\in V^w$, si $\alpha\notin V^w$ y $\beta\notin V^w$ entonces $\neg\alpha\in V^w$ y $\neg\beta\in V^w$; luego $V^w \models_S \neg\beta$. Pero es evidente que $(\alpha\vee\beta),\neg\alpha \models_S \beta$ y por tanto V^w no es simultáneamente S-satisfactible, contrariamente a lo ya demostrado. Y en el supuesto de que $\alpha\in V^w$ o $\beta\in V^w$, si $(\alpha\vee\beta)\notin V^w$ entonces $\neg(\alpha\vee\beta)\in V^w$ y por tanto $V^w \models_S \neg(\alpha\vee\beta)$; pero $\alpha \models_S (\alpha\vee\beta)$ y nuevamente V^w no sería simultáneamente S-satisfactible.

d) $(\alpha\wedge\beta)\in V^w$ sii $\alpha\in V^w$ y $\beta\in V^w$, puesto que en el supuesto de que $(\alpha\wedge\beta)\in V^w$, si $\alpha\notin V^w$ o $\beta\notin V^w$ entonces $\neg\alpha\in V^w$ o $\neg\beta\in V^w$; luego $V^w \models_S \neg\beta$ o $V^w \models_S \neg\alpha$, aunque es evidente que $(\alpha\wedge\beta) \models_S \alpha$ y $(\alpha\wedge\beta) \models_S \beta$, por lo que V^w no es simultáneamente S-satisfactible, contrariamente a lo ya demostrado. Y en el supuesto de que $\alpha\in V^w$ y $\beta\in V^w$, si $(\alpha\wedge\beta)\notin V^w$ entonces $\neg(\alpha\wedge\beta)\in V^w$ y por tanto $V^w \models_S \neg(\alpha\wedge\beta)$; pero $\alpha,\beta \models_S (\alpha\wedge\beta)$ y nuevamente V^w no sería simultáneamente S-satisfactible.

e) $(\alpha\rightarrow\beta)\in V^w$ sii $\neg\alpha\in V^w$ o $\beta\in V^w$, puesto que en el supuesto de que $(\alpha\rightarrow\beta)\in V^w$, si $\neg\alpha\notin V^w$ y $\beta\notin V^w$ entonces $\alpha\in V^w$ y $\neg\beta\in V^w$; luego $V^w \models_S \neg\beta$. Pero es evidente que $(\alpha\rightarrow\beta),\alpha \models_S \beta$ y por tanto V^w no es simultáneamente S-satisfactible, contrariamente a lo que ya ha sido demostrado. Y en el supuesto de que $\neg\alpha\in V^w$ o $\beta\in V^w$, si $(\alpha\rightarrow\beta)\notin V^w$ entonces $\neg(\alpha\rightarrow\beta)\in V^w$ y por tanto $V^w \models_S \neg(\alpha\rightarrow\beta)$; pero $\neg\alpha \models_S (\neg\alpha\vee\beta)$, o lo que es lo mismo $V^w \models_S (\alpha\rightarrow\beta)$ y nuevamente V^w no sería simultáneamente S-satisfactible.

f) $\exists x\alpha(x)\in V^w$ sii hay al menos una constante individual b tal que $\alpha(b)\in V^w$, puesto que en el caso de que $\exists x\alpha(x)\in V^w$, por el criterio de construcción debe haber al menos una fórmula del tipo $\exists x\alpha(x)\rightarrow\alpha(b)\in V^w$, y por tanto $V^w \models_S \alpha(b)$; y en el caso de que $\alpha(b)\in V^w$, si $\exists x\alpha(x)\notin V^w$ entonces

$\neg\exists x\alpha(x)\in V^w$ y, por tanto, $\forall x\neg\alpha(x)\in V^w$, de donde $V^w \models_S \neg\alpha(b)$, y V^w no es simultáneamente S-satisfactible, contrariamente a lo establecido.

g) $\forall x\alpha(x)\in V^w$ sii para toda constante individual, $\alpha(b)\in V^w$, puesto que en el caso de que $\forall x\alpha(x)\in V^w$ entonces $V^w \models_S \alpha(b)$; y en el caso de que $\alpha(b)\in V^w$, si $\forall x\alpha(x)\notin V^w$ entonces $\neg\forall x\alpha(x)\in V^w$ y, por tanto, $\exists x\neg\alpha(x)\in V^w$, de donde $V^w \models_S \neg\alpha(b)$ por el propio criterio de construcción, y V^w no es simultáneamente S-satisfactible, contrariamente a lo establecido.

h) $\Diamond\alpha\in V^w$ sii, para algún conjunto veritativo V tal que $\{\Diamond\delta|\delta\in V\}\subseteq V^w$, $\alpha\in V$, puesto que en el caso de que $\Diamond\alpha\in V^w$, si, para todo conjunto veritativo V como el caracterizado, $\alpha\notin V$ entonces $\neg\alpha\in V^w$. Por tanto, $V^w \models_S \neg\alpha$, lo que significa, por la definición 6 que para todo conjunto $\mu\in\Omega$ $\neg\alpha\in\mu$. Luego $V^w \models_S \Box\neg\alpha$ y de aquí que $V^w \models_S \neg\Diamond\alpha$, no siendo V^w S-satisfactible. Por otra parte, si hay un conjunto veritativo V del tipo descrito con respecto a V^w tal que $\alpha\in V$ entonces $\Diamond\alpha\in V^w$.

i) $\Box\alpha\in V^w$ sii, para todo conjunto veritativo V tal que $\{\delta|\Box\delta\in V^w\}\subseteq V$, $\alpha\in V$, puesto que si $\Box\alpha\in V^w$ entonces, por la propia caracterización del conjunto veritativo V, $\alpha\in V$. Por otro lado, si para todo conjunto veritativo V del tipo descrito $\alpha\in V$ entonces $V^w \models_S \alpha$ y, por la definición 6, $V^w \models_S \Box\alpha$ y por tanto $\Box\alpha\in V^w$. ■

Corolario: Todo conjunto veritativo V^w es un conjunto máximamente consistente en sentido semántico M.

Lema 2, (Lema de Lindenbaum): Todo conjunto modelo μ es un subconjunto de algún conjunto máximamente consistente en sentido semántico M.

Demostración: La demostración es directa a partir del lema 1 y su corolario.■

Teorema 2, (Teorema de compacidad): Dado un conjunto (finito o infinito) de fórmulas Γ, si para todo subconjunto finito $\Gamma_0\subset\Gamma$, Γ_0 es simultáneamente S-satisfactible entonces Γ es simultáneamente S-satisfactible.

Demostración: Sea Γ_0 un subconjunto finito cualquiera de Γ. Como por hipótesis Γ_0 es simultáneamente S-satisfactible entonces, por el teorema 1, Γ_0 puede ser extendido a un conjunto modelo. Por tanto, por el lema 2, hay un conjunto máximamente consistente en sentido semántico M, obtenido por el mismo procedimiento por el que se obtiene el conjunto V^w más arriba con la salvedad de que en este caso $A=<\alpha_1,...>$ es la secuencia de todas las fórmulas de Γ con una y sólo una variable libre, $P=<a_1,...>$ la secuencia de todos los parámetros que no ocuren en Γ_0 y $B=<<\gamma_1,...>,\beta_1,...>$ la secuencia de todas las sentencias del lenguaje cuyo primer elemento es la secuencia de todas las sentencias de Γ, tal que $\Gamma_0 \subset \Gamma \subseteq M$, por lo que Γ es al menos consistente en sentido semántico y por lo tanto, atendiendo a la definición 8, Γ es simultáneamente S-satisfactible. ■

Referencias

HINTIKKA, J. (1973). *Logic, language games and information.* The Clarendon Press, Oxford. (Trad. *Lógica, juegos de lenguaje e información,* Tecnos, Madrid, 1976).

JANSANA, R. (1990). *Una introducción a la lógica modal.* Tecnos, Madrid.

MANZANO, M. (1989). *Teoría de modelos.* Madrid: Alianza.

BENTHEM, J. van (1991). *Language in action. Categories, lambdas and dynamic logic.* North-Holland, Amsterdam.