XI Encuentro Andaluz de Geometría
IMUS (Universidad de Sevilla), 15 de mayo de 2015, págs. 15–21

Diferenciales cuadráticas holomorfas en superficies lineales de Weingarten elípticas

Antonio Bueno

Resumen. En este trabajo definimos una diferencial de Hopf para superficies lineales de Weingarten que además satisfacen una relación de tipo elíptico al ser vistas como grafo sobre sus planos tangentes. Como consecuencia damos un teorema de unicidad de tipo Hopf.

1. Introducción

Una de las herramientas más útiles en el estudio de propiedades globales de superficies es asignarles datos holomorfos, poniendo de manifiesto la conexión entre el Análisis Complejo y la Geometría Diferencial.

En 1955 Hopf [2] demostró que la complexificación de la parte sin traza de la segunda forma fundamental de una superficie inmersa M de curvatura media constante en $\mathbb{R}^3$, es una diferencial cuadrática holomorfa globalmente definida sobre M. Este resultado es consecuencia de la ecuación de Codazzi, y la demostración es análoga en $\mathbb{S}^3$ y $\mathbb{H}^3$.

Como corolario inmediato, la única esfera topológica de curvatura media constante en cualquier espacio modelo tridimensional es una esfera totalmente umbilical, ya que la diferencial de Hopf se anula sobre puntos umbilicales, y es bien sabido que sobre la esfera de Riemann no existen diferenciales cuadráticas holomorfas no nulas.

En la literatura se suele llamar 'diferencial de tipo Hopf' a cualquier diferencial cuadrática holomorfa definida geométricamente sobre una superficie, y 'teorema de tipo Hopf' a cualquier resultado de unicidad para esferas topológicas inmersas dentro de una cierta clase de superficies.

Las superficies con las que vamos a trabajar son las *superficies lineales de Weingarten*. Una superficie se dice lineal de Weingarten si su curvatura media H y su curvatura de Gauss K satisfacen una relación de la forma

$$\alpha + 2\beta H + \gamma K = 0,\ \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Antonio Bueno, *jabueno@ugr.es*

Si $\gamma = 0$ (resp. $\beta = 0$), entonces recuperamos las superficies de curvatura media constante (resp. de curvatura de Gauss constante).

Nuestro objetivo en esta sección es asignar a una familia de superficies dentro de las lineales de Weingarten, las de tipo elíptico, una diferencial cuadrática holomorfa.

2. Superficies lineales de Weingarten de tipo elíptico

En adelante M será una superficie lineal de Weingarten inmersa en $\mathbb{R}^3$. Sea $p \in M$. Entonces podemos escribir localmente alrededor de p la superficie M como un grafo sobre el plano afín tangente a p en M, $p + T_pM$. Tal grafo viene dada por una cierta función diferenciable f definida en un entorno de p en $p + T_pM$.

Lema 2.1. *Sea M superficie lineal de Weingarten en $\mathbb{R}^3$, y sea $p \in M$. Entonces alrededor de p, donde M se escribe como el grafo de una cierta función f, la condición* (1) *se escribe como la siguiente EDP para la función f:*

$$\alpha W^2 + 2\beta W^{\frac{1}{2}} \left((1+f_x^2) f_{yy} - 2 f_x f_y f_{xy} + (1+f_y^2) f_{xx} \right) + \gamma (f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2) = 0 \quad (2)$$

donde $W = 1 + f_x^2 + f_y^2$.

Dada una EDP podemos definir su comportamiento en elíptico, parabólico e hiperbólico de la siguiente forma:

Definición 2.1. *Sea $u = u(x,y)$ una función que satisface una EDP de la forma*

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}) = 0,$$

donde F es de clase C^1.

Llamemos r, s, t a u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} respectivamente. Entonces

i) La EDP se dice elíptica si $F_r F_t - \frac{1}{4} F_s^2 > 0$

ii) La EDP se dice parabólica si $F_r F_t - \frac{1}{4} F_s^2 = 0$

iii) La EDP se dice hiperbólica si $F_r F_t - \frac{1}{4} F_s^2 < 0$.

Como (2) es una EDP para la función f, podemos estudiar su carácter por la definición anterior. Siguiendo la misma notación,

$$F_r F_t - \frac{1}{4} F_s^2 = W^2(\beta^2 - \alpha\gamma).$$

Definición 2.2. *Sea M una superficie lineal de Weingarten. Entonces,*

i) M se dice de tipo elíptico si $\beta^2 - \alpha\gamma > 0$

ii) M se dice de tipo parabólico si $\beta^2 - \alpha\gamma = 0$

iii) M se dice de tipo hiperbólico si $\beta^2 - \alpha\gamma < 0$

2.1. Traslado paralelo en superficies lineales de Weingarten de tipo elíptico

Sea M una superficie lineal de Weingarten de tipo elíptico en $\mathbb{R}^3$. Dado $t \in \mathbb{R}$, llamamos traslado paralelo de M a la superficie dada por

$$M_t = M + t\eta,$$

donde $\eta : M \to \mathbb{S}^2$ es una aplicación de Gauss para M.

Es inmediato comprobar que si M satisface la ecuación (1), entonces M_t satisface

$$\alpha + 2(\beta + \alpha t)H_t + (\gamma + 2\beta t + \alpha t^2)K_t = 0,$$

donde H_t y K_t son, respectivamente, la curvatura media y la curvatura de Gauss de M_t. A M_t la llamaremos *superficie paralela a M a distancia t.*

Proposición 2.1. *Sea Muna superficie lineal de Weingarten de tipo elíptico en $\mathbb{R}^3$. Entonces existe $t \in \mathbb{R}$ tal que la superficie paralela M_t tiene curvatura media constante.*

Demostración. Para que M_t tenga curvatura media constante hay que imponer que el coeficiente que acompaña a K_t valga cero. Esto se tiene para el siguiente valor de t:

$$t = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha}, \quad \text{si } \alpha \neq 0, \quad t = \frac{-\gamma}{2\beta}, \quad \text{si } \alpha = 0.$$

La curvatura media de la superficie paralela es

$$H_t = \frac{-\alpha}{2(\beta + \alpha t)}, \text{ si } \alpha \neq 0, \quad H_t = 0, \text{ si } \alpha = 0.$$

□

El traslado paralelo además relaciona las formas fundamentales de M y M_t de la siguiente forma:

Proposición 2.2. *Sea M una superficie inmersa en $\mathbb{R}^3$. Llamemos I, II a su primera y segunda forma fundamental respectivamente. Si M_t es una superficie paralela a distancia t entonces se cumple*

$$I_t = (1 - t^2 K)I + 2t(Ht - 1)II,$$

$$II_t = tKI + (1 - 2Ht)II.$$

Demostración. La aplicación que lleva M en M_t es $\phi : p \longmapsto p + t\eta_p$.

Dados u, v vectores tangentes en un punto a M, la primera forma fundamental I_t de M_t viene dada por

$$\langle d\phi(u), d\phi(v)\rangle = \langle u + td\eta(u), v + td\eta(v)\rangle =$$

$$= \langle u, v\rangle + 2t\langle d\eta(u), v\rangle + t^2\langle d\eta(u), d\eta(v)\rangle =$$

$$= I(u, v) - 2tII(u, v) + t^2 III(u, v) =$$

$$= I(u, v) - 2tII(u, v) + t^2(2HII(u, v) - KI(u, v)) =$$

$$= (1 - t^2 K)I(u, v) + 2t(Ht - 1)II(u, v).$$

De forma similar, II_t viene dada por

$$II_t(u, v) = -\langle d\phi(u), d\eta_t(v)\rangle = -\langle u, d\eta(v)\rangle - t\langle d\eta(u), d\eta(v)\rangle =$$

$$= II - t(2HII - KI) = tKI + (1 - 2Ht)II.$$

□

Lo interesante es que podemos obtener información de I, II a partir de I_t, II_t para cada superficie paralalela M_t

Proposición 2.3. *Sea M una superficie en $\mathbb{R}^3$, y sea M_t una superficie paralela a distancia t. Entonces I, II vienen dadas en función de I_t, II_t por*

$$I = \frac{1}{1 - 2tH + t^2 K}\left((1 - 2Ht)I_t - 2t(Ht - 1)II_t\right),$$

$$II = \frac{1}{1 - 2tH + t^2 K}\left(-tKI_t + (1 - t^2 K)II_t\right).$$

Nótese que el denominador $1 - 2tH + t^2 K$ nunca puede ser cero, ya que esa condición, junto con la relación (1) daría que tanto H como K son constantes en M; ésto solo es posible si M es un abierto de un plano, una esfera o un cilindro, los cuales son casos triviales.

3. Estructuras conformes y datos holomorfos

Dado que se satisface

$$I = \frac{1}{1-2tH+t^2K}\big((1-2Ht)I_t - 2t(Ht-1)II_t\big) = \frac{1}{1-2tH+t^2K}\sigma_t$$

y I es una métrica Riemanniana, entonces σ_t es una métrica Riemanniana conforme a I. Como consecuencia, si z es una coordenada holomorfa para I, lo será también para σ_t.

Si M es una superficie de curvatura media constante y z es una coordenada holomorfa para I, entonces $I^{(2,0)} = 0$ y por tanto se tiene

$$I_t^{(2,0)} = \frac{2t(Ht-1)}{1-2Ht} II_t^{(2,0)}$$

Si ahora calculamos $II^{(2,0)}$, usando la relación anterior y simplificando, llegamos a

$$II^{(2,0)} = \frac{1}{1-2Ht} II_t^{(2,0)}. \tag{3}$$

Nota. Si $1-2Ht = 0$ entonces $II_t^{(2,0)} = 0$ y lo que se tiene es que z es una coordenada holomorfa para $II_t^{(2,0)}$. En tal caso, siguiendo el mismo argumento a desarrollar, la diferencial $I_t^{(2,0)}dz^2$ es holomorfa para la métrica inducida por la segunda forma fundamental.

Así pues hemos llegado al siguiente resultado:

Teorema 3.1. *Sea M una superficie de curvatura media constante H y sea M_t una superficie paralela a distancia t. Entonces se tiene que $II_t^{(2,0)}dz^2$ es una diferencial cuadrática holomorfa para la estructura conforme inducida por σ_t.*

Demostración. Como M tiene $H \equiv$ cte la ecuación de Codazzi implica que $II^{(2,0)}$ es una diferencial cuadrática holomorfa, y por tanto $II_t^{(2,0)}$ es también diferencial cuadrática holomorfa. □

En el caso en que M tenga curvatura media constante, la métrica σ_t en la superficie paralela M_t es combinación lineal con coeficientes constantes de su primera y segunda forma fundamental.

Vamos a aplicar todo esto a nuestra superficie lineal de Weingarten elíptica.

Teorema 3.2. *Sea M una superficie lineal de Weingarten elíptica. Consideramos la métrica*

$$\sigma = \beta I + \gamma II$$

y sea z un parámetro conforme para tal métrica. Entonces, para esta estructura conforme inducida, $II^{(2,0)}dz^2$ es una diferencial cuadrática holomorfa.

Demostración. Sabemos que existe un cierto t tal que, al trasladar M a una distancia t, obtenemos una superficie, M_0, de curvatura media constante H. Supongamos que $\alpha \neq 0$, ya que el otro caso es análogo.

Arrancamos entonces de esta superficie de curvatura media constante. Para volver a nuestra superficie lineal de Weingarten elíptica, tendremos que trasladar el opuesto del valor t. Para este caso, tal t vale

$$t = \frac{\beta \mp \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha}.$$

Si sustituímos en las expresiones $1 - 2Ht$ y $-2t(Ht - 1)$ obtenemos

$$1 - 2Ht = \frac{\beta}{\pm\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}, \qquad -2t(Ht - 1) = \frac{\gamma}{\pm\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}.$$

Es decir, la métrica σ_t es exactamente la métrica (salvo la raíz cuadrada)

$$\beta I_t + \gamma II_t.$$

Por tanto, en vista del teorema 3.1 y llamando $I_t = I$, $II_t = II$ a la primera y segunda forma fundamental de M respectivamente, obtenemos que $II^{(2,0)}dz^2$ es una diferencial cuadrática holomorfa con respecto a la estructura conforme inducida por σ sobre la superficie lineal de Weingarten M inical.

□

Como corolario tenemos el siguiente teorema de tipo Hopf para esferas lineales de Weingarten

Teorema 3.3. *Sea M una esfera topológica inmersa en $\mathbb{R}^3$ que satisface una relación lineal de Weingarten de tipo elíptico. Entonces, M es una esfera umbilical.*

Demostración. Definimos la métrica $\sigma = \beta I + \gamma II$. Para la estructura conforme inducida por σ sabemos que la diferencial de Hopf $II^{(2,0)}dz^2$ es una diferencial cuadrática holomorfa que se anula en puntos umbilicales.

Pero sobre una esfera topológica no existen diferenciales cuadráticas holomorfas salvo las idénticamente nulas, como consecuencia del teorema de Liouville. Por tanto, M es una esfera totalmente umbilical. □

Agradecimientos

Parcialmente financiado por MTM2013-43970-P.

Referencias

[1] J.A. Gálvez, A. Martínez, F. Milán, *Linear Weingarten surfaces in* R^3. Monatsh. Math. **138** (2003), 133–144.

[2] H. Hopf, *Differential geometry in the large.* Lecture Notes in Mathematics, 1000. Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[3] J. Weingarten, *Uber eine Klasse auf einander abwickelbarer Flachen.* J. Reigen Angew. Math. **59** (1861), 382–393.