amazings.es

#2

Equipo Amazings

Javier Peláez
www.irreductible.es | @Irreductible | irreductible@amazings.es

Antonio Martínez
www.fogonazos.es | @aberron | fogonazos@gmail.com

Miguel Artime
www.maikelnai.es | @Maikelnaiblog | miguel.artime@gmail.com

José Cuesta
www.inerciacreativa.com | @inerciacreativa | info@inerciacreativa.com

Diseño gráfico y editorial

Alejandro Polanco
www.alpoma.net | @alpoma | alpoma@gmail.com

amazings.es

www.amazings.es
#2 verano 2012

Imagen de portada: Plasma, de Carla Isabel Ribeiro.

La vida secreta de los números

SOBRE LA CONSTRUCCIÓN Y LA VERDADERA HISTORIA DE LOS DIFERENTES TIPOS DE NÚMEROS

José Antonio Prado Bassas
eliatron.blogspot.com.es | @eliatron

INTRODUCCIÓN

Cuando uno ve un número, automáticamente piensa en Matemáticas. Se podría decir que son el alfabeto de esta ciencia. Sin embargo, cuando uno se adentra en su conocimiento le produce algo de respeto. En este artículo pretendemos despojarlos de ese temor que suelen infundir y presentarlos tal y como surgieron. Para ello, vamos a ver su construcción y a contemplar la verdadera historia de los números, de la forma más cronológica posible. ¿Estáis preparados para conocer (una parte) de la verdad?

¿QUÉ ES UN NÚMERO?

Comencemos por el principio, que para algo vamos a contar. ¿Qué es un número? Se trata de una pregunta muy simple… pero cuya respuesta no parece serlo.

Los números son esos símbolos que utilizamos para contar, podríamos pensar. Esta definición, quizás la más intuitiva (la que daría cualquier niño), puede satisfacer a muchos, pero si lo pensamos bien, sólo contempla a los números naturales (1, 2, 3,…) ¿Qué pasa con los negativos? ¿Y con el 0? ¿Qué ocurre con las fracciones? Hay que ampliar este concepto.

Según la Real Academia Española, en su primera acepción (la correspondiente a matemáticas), un número es la *expresión de una cantidad con relación a su unidad*. Esta definición puede resultar bastante satisfactoria. Nuestra intuición puede que nos deje tranquilos: ya tenemos la respuesta. Pero si uno busca la definición de *cantidad*, la sexta acepción (de nuevo, la matemática) nos dice que se trata del *número que resulta de una medida u operación*. Vaya, una definición circular: un número es una cantidad, y una cantidad es un número. Bueno, no nos pongamos quisquillosos. Todo tiene arreglo.

Para centrar ideas, podemos pensar que un número es la representación matemática de una cierta magnitud (longitud, área, volumen…), y en cierto modo esta definición sí aparece en el Diccionario de la Real Academia Española (primera acepción de *cantidad*: porción de una magnitud). Pero si la aceptamos, ¿qué significa una longitud o un área negativa? Parece que algo sigue fallando.

Tener una definición concreta y exacta de lo que es un número parece, pues, una ardua tarea. Lo es. Euclides, Leibniz, Kant… son tres ejemplos de pensadores que trataron de dar una respuesta. Según el Nobel de Literatura Bertrand Russell, la respuesta no llega hasta que Frege la proporciona en sus *Fundamentos de la Aritmética* (1884). Pero esta definición es poco manejable. *Un número es cualquier cosa que es el número-de-clase de alguna clase*, donde un *número-de-clase es la clase de todas aquellas clases que son semejantes a ellas*.

De la necesidad de contar, a la filosofía, pasando por la geometría. El concepto de número resulta algo esquivo. Vamos a conformarnos con ir construyendo nuestros números de una forma consistente y luego veremos cómo van surgiendo históricamente.

LA CONSTRUCCIÓN DE LOS NÚMEROS

Para construir nuestro edificio, debemos partir de lo más básico. Y en nuestro caso se trata de los números naturales. Dijo Leopold Kronecker que *Dios inventó los naturales, el resto es cosa del hombre*. Posiblemente, Kronecker tuviera en mente lo que vamos a ver a continuación.

Nuestra construcción parte de los números naturales (que se denotan por $\mathbb{N}$), es decir, 1, 2, 3, 4,… Estos números surgen de la necesidad que tiene el hombre de contar (de ahí la ausencia del 0). Sin embargo, a la hora de construir un edificio consistente, conviene incluir el 0 en este conjunto.

Varios han sido los matemáticos que han intentado fundamentar el concepto de número natural. En particular, destacamos a Cantor, quien se basó en su Teoría de Conjuntos para definir los naturales a partir del conjunto vacío; y a Peano, quien desarrolló una definición axiomática de los naturales, partiendo de la existencia de un primer elemento (el cero, por ejemplo) y estableciendo una serie de reglas de *sucesores*.

Los números naturales los podemos sumar y el resultado es otro número natural (más grande, obviamente). Podemos decir que la suma es una operación que se comporta bien con los números naturales. El siguiente paso consiste en *restar*. Si a un número natural le restamos otro más pequeño volvemos a obtener un número natural. Pero si le restamos otro más grande, el resultado ya no es un natural: obtenemos un número *negativo*. En este caso, decimos que la resta no es una *operación interna* en el conjunto de los naturales.

La solución a este problema es *inventar* un nuevo conjunto numérico, los números enteros (que representaremos por $\mathbb{Z}$). Este nuevo conjunto contiene a todos los naturales y todos los números negativos. Ahora sí que podemos hacer restas de todo tipo entre los números enteros con la seguridad de que el resultado seguirá estando en $\mathbb{Z}$. En este conjunto, la resta sí es una operación interna.

Perfecto, los números enteros los podemos sumar y restar. Incluso los podemos multiplicar, si atendemos a la regla de los signos. Pero, ¿qué ocurre si queremos repartir cosas? O dicho de otro modo, ¿qué pasa con la división? En $\mathbb{Z}$ hay muchas divisiones cuyo resultado son de nuevo enteros, por ejemplo $4/2=2$, $6/(-3)=-2$ ó $27852969751/115327=241513$. Pero hay muchos otros cocientes, cuyo resultado se escapa de nuestro conjunto $\mathbb{Z}$ y ¿cuál es la solución? Crear un nuevo conjunto.

En efecto, como la división no es una operación interna en los enteros, surgen los números racionales y que denotaremos por $\mathbb{Q}$. Estos números son aquéllos que se pueden escribir como cociente (fracciones) de dos números enteros, con la salvedad de que el 0 no puede ser el divisor (denominador). De esta forma, la división se convierte en una operación interna en los racionales (exceptuando el 0, que siempre se quita al hablar de cociente para evitar problemas).

Con los racionales hemos llegado a una de las metas principales: ahora tenemos un conjunto de números en el que podemos sumar, restar multiplicar y dividir (excepto entre cero) sin necesidad de preocuparnos por si el resultado se sale fuera de nuestros límites. Además, estas operaciones se comportan muy bien unas con otras, tanto que el conjunto $\mathbb{Q}$ con las operaciones + (suma) y * (producto) adquiere una estructura de *cuerpo*. Y esto en matemáticas implica que tiene buenas propiedades.

Pero los racionales, a pesar de todo lo dicho, no son lo mejor que podemos conseguir, ya que siguen teniendo problemas. Quizás el más importante aparece cuando efectuamos las divisiones. Si procedemos por el método que nos enseñan a todos en el colegio (el de Euclides), nos damos cuenta de que los decimales que obtenemos o son finitos o son periódicos. Antes o después se repiten los mismos decimales. ¿Qué ocurre si pienso en un número cuyos decimales estén desordenados? O mejor dicho, ¿qué ocurre si los decimales carecen totalmente de un patrón de repetición determinado? Así, el número 0,123456789101112131415161718192021 22… no es un número racional, pues ni es finito, ni sus decimales se repiten a partir de cierto momento. Nos hemos salido de los racionales.

Si hacemos un ejercicio mental y ponemos a todos los elementos de $\mathbb{Q}$ en línea recta, nos percatamos de que ésta tiene agujeros. Agujeros muy pequeños, infinitesimales, pero agujeros. Eso sí, siempre seremos capaces de encontrar un racional tan cerca como queramos de cada agujero. Y viceversa, tan cerca como queramos de un racional, hay un agujero. Los matemáticos decimos que tanto los racionales como los *agujeros* son *densos* en la recta.

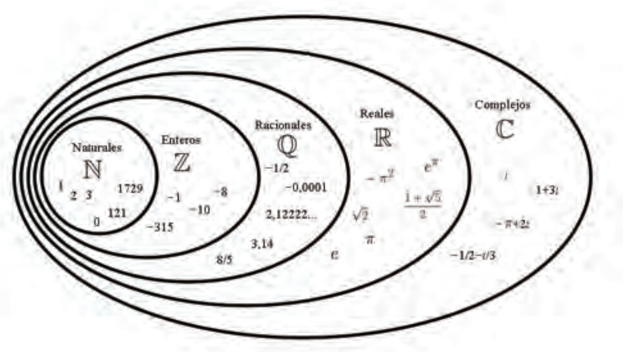
El problema de los *agujeros* pone de manifiesto que se hace necesario ampliar el conjunto de los racionales. Y la idea de terminar de llenar la recta se nos presenta como la más adecuada. Ahora disponemos de un nuevo conjunto, los números reales $\mathbb{R}$, en el que están incluidos los racionales y cualquier decimal infinito y sin patrón de repetición definido. Estos últimos números, los *irracionales*, son precisamente estos *agujeros* que faltaban a los racionales para completar la recta.

Pero los reales, a pesar de seguir teniendo buenas propiedades (también tienen estructura de cuerpo), no resuelven todos los problemas. Elevar un número real al cuadrado es fácil, basta multiplicarlo por sí mismo. Sin embargo, si pretendemos extraer raíces cuadradas, esto no siempre es posible. Y el fallo surge con ejemplos muy sencillos: $\sqrt{-1}$. Esta simple operación no puede resolverse dentro del cuerpo real y se hace necesario ampliar nuestro conjunto.

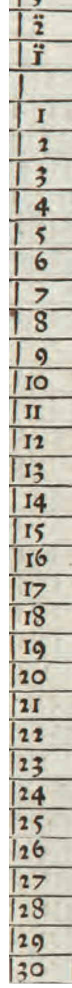
Los números complejos, que se denotan por $\mathbb{C}$, son la suma de un número real y otro imaginario. Si llamamos i a la unidad imaginaria ($i = \sqrt{-1}$), los podremos escribir como $a+bi$, donde a y b son números reales. Los complejos contienen a los reales y además también tienen estructura de cuerpo. Por el camino no hemos tenido que pagar un precio demasiado alto. Los complejos son un cuerpo *no ordenado*. Podemos encontrar formas de ordenar los complejos, pero estos *órdenes* no pueden ser compatibles con el producto (más concretamente, con la regla de los signos).

La llegada de los complejos trae consigo uno de esos resultados que deberían enmarcarse en cualquier clase de matemáticas: el Teorema Fundamental del Álgebra. Este teorema afirma que cualquier polinomio (una expresión del tipo $-5x^4+3x^3-2x+3$) con coeficientes complejos, posee exactamente tantas raíces (soluciones, iguales o no, de la ecuación resultante de igualar el polinomio a 0) como grado tenga el polinomio.

Vamos a detenernos aquí. La construcción que hemos visto de los diferentes conjuntos numéricos, a veces se cuenta como historia. Quizás desde un punto de vista didáctico y a niveles básicos de enseñanza, pueda resultar interesante contar esta construcción de forma simplificada. Sin embargo, lo que hemos visto



Esquema de los diferentes conjuntos de números.



es una abstracción matemática. El resultado final de un elaborado proceso de pensamiento. La cronología de la aparición de los diferentes tipos de números no sigue esta lógica matemática. ¿Quieres hacer un viaje a través de los números y del tiempo?

UNA HISTORIA CRONOLÓGICA DE LOS NÚMEROS

Ya os he dicho que lo que acabáis de leer no es la verdadera cronología de la aparición de los números. Lo que vais a leer a continuación tampoco lo será en un sentido estricto. Los diferentes conceptos numéricos han tenido muy diversos orígenes tanto en el espacio como en el tiempo. Desde un punto de vista formal, sería una historia de los números bajo la mirada de occidental (de Europa, concretamente). Y es que aunque nos sintamos el centro de la historia, al menos en matemáticas (que es de lo que yo sé, y no demasiado) resulta que hay muchas culturas con aportaciones tremendamente importantes y sin las cuales las matemáticas no podrían haberse desarrollado.

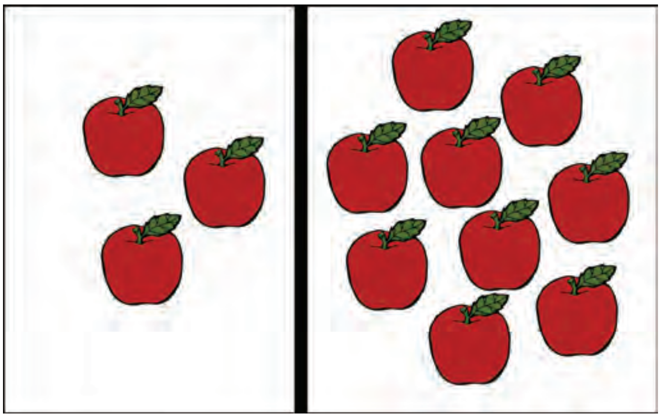
Y EL HOMBRE CREÓ LOS NÚMEROS NATURALES

Históricamente, los primeros números de los que se tienen noción son los naturales y surgen de la necesidad del hombre de contar. Pero estos números no aparecen tal y como los conocemos ahora, es decir, como todos los miembros de la sucesión 1, 2, 3, 4… sin fin. Ante las necesidades propias del hombre primitivo, tan sólo los primeros naturales son los que verdaderamente se hacen necesarios. Más allá del 7 o el 8, todo se convierte en un simple *muchos*.

Hoy en día se pueden encontrar tribus aisladas cuyo sistema de numeración (o mejor dicho, su forma de expresar verbalmente los números) es bastante rudimentario. Así, algunos nativos del Estrecho de Torres (que separa Australia de Nueva Guinea) utilizan el vocablo *urapun* para representar la unidad y *okosa* para representar la paridad (el dos); cuando quieren decir *tres* no tiene más que sumar y decir *okosa-urapun* y si lo que les preocupa son 5 pescados, basta con decir *okosa-okosa-urapun*. Es muy posible que algo similar ocurriera con nuestros antepasados.

De todas formas, el hecho de que los hombres primitivos sólo tuvieran percepción de unos pocos números naturales no es nada extraño. También nos pasa a todos nosotros. Vamos a poner a prueba nuestra propia percepción de los números.

A continuación voy a mostrar un dibujo dividido en dos partes. En cada una de ellas hay una cantidad determinada de objetos (manzanas, en particular). El objetivo es el siguiente: sin *contarlos*, es decir, a simple vista, ¿cuántas manzanas hay en la imagen de la izquierda? ¿Y en la de la derecha?

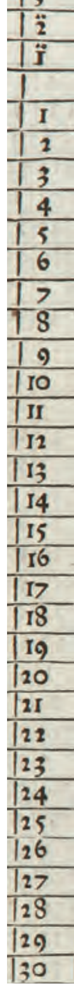


Prácticamente a todos los lectores les habrá resultado sencillo *ver* que eran 3 las manzanas de la imagen de la izquierda, mientras que no creo que hayáis sido muchos los que hayáis dicho que en la imagen de la derecha había 9. Y si lo habéis dicho, muchos de vosotros sois unos mentirosos por haber *contado*.

Pues esto mismo ocurría en la antigüedad. El hecho de que no seamos capaces de percibir visualmente las cantidades hizo necesario el surgimiento de los números: los naturales. Podríamos decir que el dedo es más poderoso que el ojo.

Poco a poco, las necesidades del hombre hicieron que se necesitara algo más elaborado que los sistemas *okosa-urapun*. Esta nueva contabilidad se llevaba a cabo mediante piedras: 1 por cada objeto a ser contado. El uso de piedras o *calculi* en el conteo, da origen etimológico a nuestro *cálculo* actual.

Hueso de Ishango.



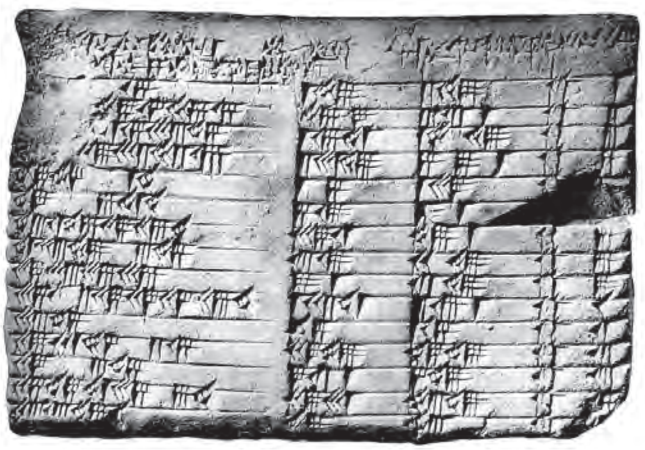
Y tras la contabilidad llega la escritura numérica. Pronto se aprendió que en vez de poner piedras por cada objeto a contar, era posible hacer señales en algún otro objeto, como un hueso de animal o utilizar cuerdas con piedras (precursoras del ábaco). Uno de los más importantes ejemplos es el Hueso de Ishango (hueso de babuino con inscripciones, hallado en el área de Ishango –entre Uganda y Congo-, data del paleolítico superior y se encuentra en el Royal Belgian Institute of Natural Sciences de Bruselas). Según algunos expertos, las inscripciones van más allá de la mera contabilidad y sugieren el conocimiento de algunas operaciones aritméticas. Pero repito, esto último es sólo una hipótesis.

Con esta forma de llevar la contabilidad es claro que se impone ir agrupando los símbolos (o piedras) para no acabar con un buen montón de ellas. Así surgen los sistemas de numeración que combinan el principio aditivo (ir sumando símbolos de la unidad) con el multiplicativo, creando símbolos nuevos para grupos de 5, 10, 50, 60… unidades. Uno de los más conocidos es el clásico sistema de numeración romano (aunque con reglas más complicadas en las que también interviene, en cierto modo, la posición).

Y LLEGARON LOS RACIONALES: FRACCIONES BABILÓNICAS Y EGIPCIAS

En cuanto las civilizaciones avanzaron, pronto surgió la necesidad de expresar numéricamente partes de un todo. No pensemos en los típicos trozos de tarta, porque dudo que a orillas del Nilo hubiese. Pensemos mejor en partes de terrenos, o cualquier otra cuestión relacionada con la agrimensura.

En los pueblos mesopotámicos, en concreto en la Babilonia de Hammurabi, ya hay constancia del uso de fracciones. En algunas tablillas de la época (estamos hablando de los años 1800 a 1600 antes de nuestra era) se puede observar cómo los babilonios disponían de un sistema de numeración *posicional* en base 60. Tenían un símbolo para la unidad y otro para el 10 y mediante yuxtaposición de ellos, formaban los símbolos para los números del 1 al 59.



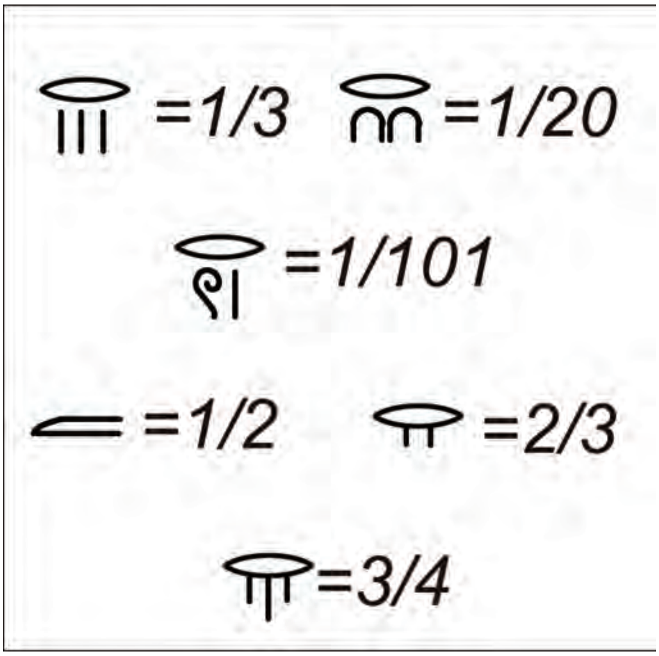
Ejemplo de tablilla babilonia: Plimpton 322.

A partir de aquí, la posición del símbolo indica su valor (clave del sistema posicional): en primera posición el símbolo significa el número que representa; en segunda (a la izquierda de la primera), significa ese valor multiplicado por 60; en tercera, multiplicado por $60^2=3600$, etc… Pero lo más curioso es que, según el contexto, podían tener una (o incluso varias) posición *previa* a la primera, es decir, a la derecha de ésta, y que representaría el número multiplicado por 60^{-1}. Esto es, utilizaban fracciones con denominador 60 o *decimales* escritos en base 60. Sin embargo, se les presentaba un grave problema: no disponían de *coma de-*

cimal para separar la parte entera de la decimal. Además, durante casi toda su existencia carecieron de símbolo para el *cero*, lo que les supuso un problema añadido, ya que no podían marcar la ausencia de una posición. Para entender esto mejor, veamos un ejemplo escrito con nuestros números (y posiciones) actuales. El número 1-0-59 representa, en base 60, a 1*3600+0*60+59=3659. Pero como los babilonios carecían del símbolo cero, lo escribirían 1-59 (a lo más dejarían un hueco mayor entre el 1 y el 59), lo que podría confundirse con el número 1*60+59=119. El contexto, en esta cultura, era fundamental para diferenciar un número de otro. Y lo mismo podríamos hablar de la ausencia de la coma decimal. El contexto dice si el primer dígito de la izquierda es la primera posición o la posición previa.

Papiro de Rhind (también conocido como de Ahmes).

El segundo lugar en el que aparecen las fracciones es en Egipto alrededor del año 1600 antes de nuestra era. El Papiro de Rhind es probablemente uno de los documentos matemáticos escritos más importantes de la época. Los egipcios disponían de un sistema de numeración en base 10 (curiosamente, el símbolo para 1.000.000 es un hombre arrodillado con los brazos levantados: ¿Quién no se pondría así al ver 1.000.000 € hoy en día?), pero también eran capaces de escribir algunas fracciones. Las más habituales (y las que hoy se conocen como fracciones egipcias) son las de numerador 1 (1/2, 1/3, 1/4…), aunque también consideraban las fracciones 2/3, 3/4 y algunas más del tipo n/(n+1). A través de sumas de este tipo de fracciones se puede expresar cualquier racional entre 0 y 1, por lo que los egipcios tenían la capacidad de trabajar con cualquier fracción. Hoy en día se puede utilizar un método basado en la llamada sucesión de Sylvester para encontrar la forma de escribir una fracción como suma de fracciones con numerador 1. Sin embargo, los egipcios, según indican algunos estudiosos de los diferentes papiros matemáticos, utilizaban otro tipo de técnicas en las que se diferenciaban los casos en que el denominador es un primo *pequeño*, un primo *grande* o un número compuesto. Pero sin duda lo más curioso de todo es que la forma de denotar estas fracciones es muy similar a la nuestra: un jeroglífico en forma de boca abierta se situaba encima del número correspondiente al denominador.

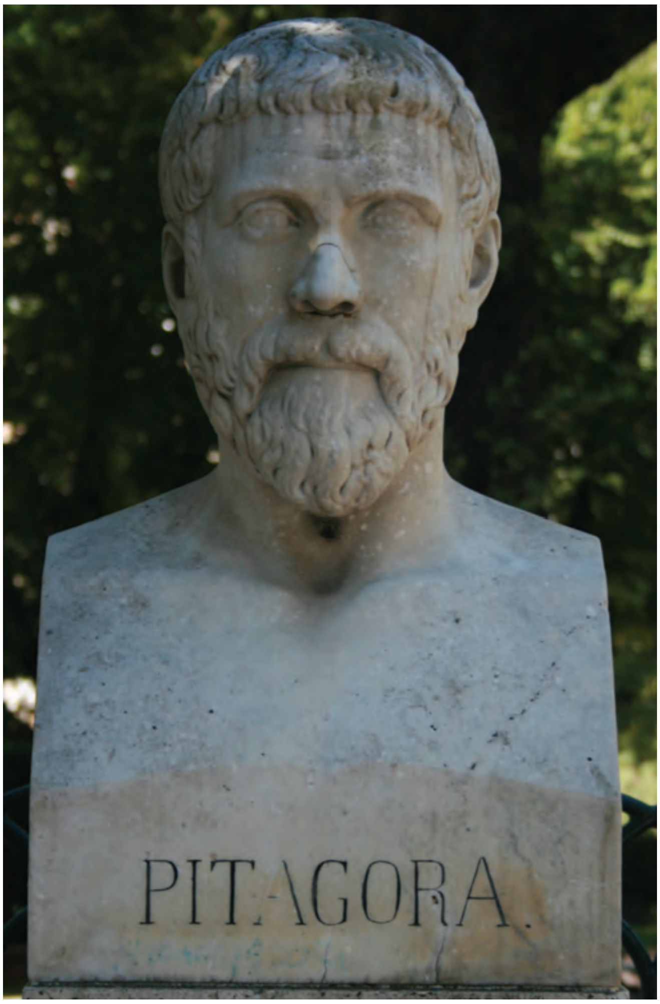


Ejemplos de fracciones egipcias.

Y SE PERDIÓ LA RAZÓN: LOS NÚMEROS IRRACIONALES

Acabamos de ver que los egipcios, a través de su particular forma de escribir las fracciones, podían trabajar con cualquiera de ellas. Las bases de los números racionales estaban sentadas. Estos conceptos fueron poco a poco extendiéndose hasta llegar a la cultura griega, en donde adquirieron una nueva dimensión.

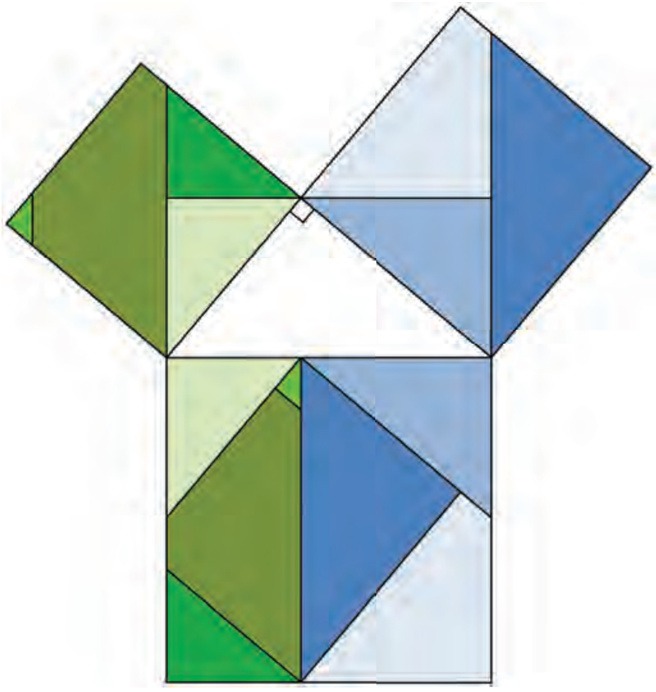
En la Grecia clásica, los números tenían un claro significado geométrico al ir asociados a medidas. Los números racionales, es decir, las fracciones, eran algo natural en esta cultura, pues representaban *razones* (cocientes) entre medidas. Pero las *razones* no eran cualesquiera, sino que tenían que ser *exactas*, es decir, del tipo 2:1, 4:3 ó 5:7.



Busto de Pitágoras. Jardines de la Villa Borghese, Roma.

Un grupo que se significó mucho en las cuestiones numéricas (y en otras menos científicas) fueron los integrantes de la escuela pitagórica, seguidores de Pitágoras de Samos. El lema de los pitagóricos es "todo es número", lo que podemos interpretar como "todo era mensurable" o expresable en términos de números naturales y sus razones, los números racionales. Es a partir de este momento que la razón entre dos medidas, es decir, una medida racional, pasa a ser algo común en la cultura griega. Los racionales ya se han integrado en nuestras vidas.

Pero la gran aportación de los griegos y de los pitagóricos en particular (en torno al año 500 antes de nuestra era), es el descubrimiento de los números irracionales. La filosofía pitagórica, hemos visto, estipulaba que todo en el mundo era expresable a través de naturales o sus razones. Sin embargo la aparición del famoso Teorema de Pitágoras cambiaría esta visión del mundo.



Demostración visual del Teorema de Pitágoras.

El Teorema de Pitágoras establece que si tenemos un triángulo rectángulo y levantamos un cuadrado sobre cada uno de los tres lados, la suma de las áreas de los cuadrados levantados sobre los catetos (los que forman el ángulo recto) coincide con el área del cuadrado levantado sobre la hipotenusa (la diagonal). Este resultado ya aparece en algunas tablillas babilónicas como mera enumeración de ternas pitagóricas (es decir, números naturales m, n y p que cumplen $p^2=m^2+n^2$). Pero no es hasta la llegada de la matemática griega (y de la escuela pitagórica) cuando se establece como enunciado general. Pasa de ser una colección de *casos particulares* a ser un teorema cierto en todos los casos.

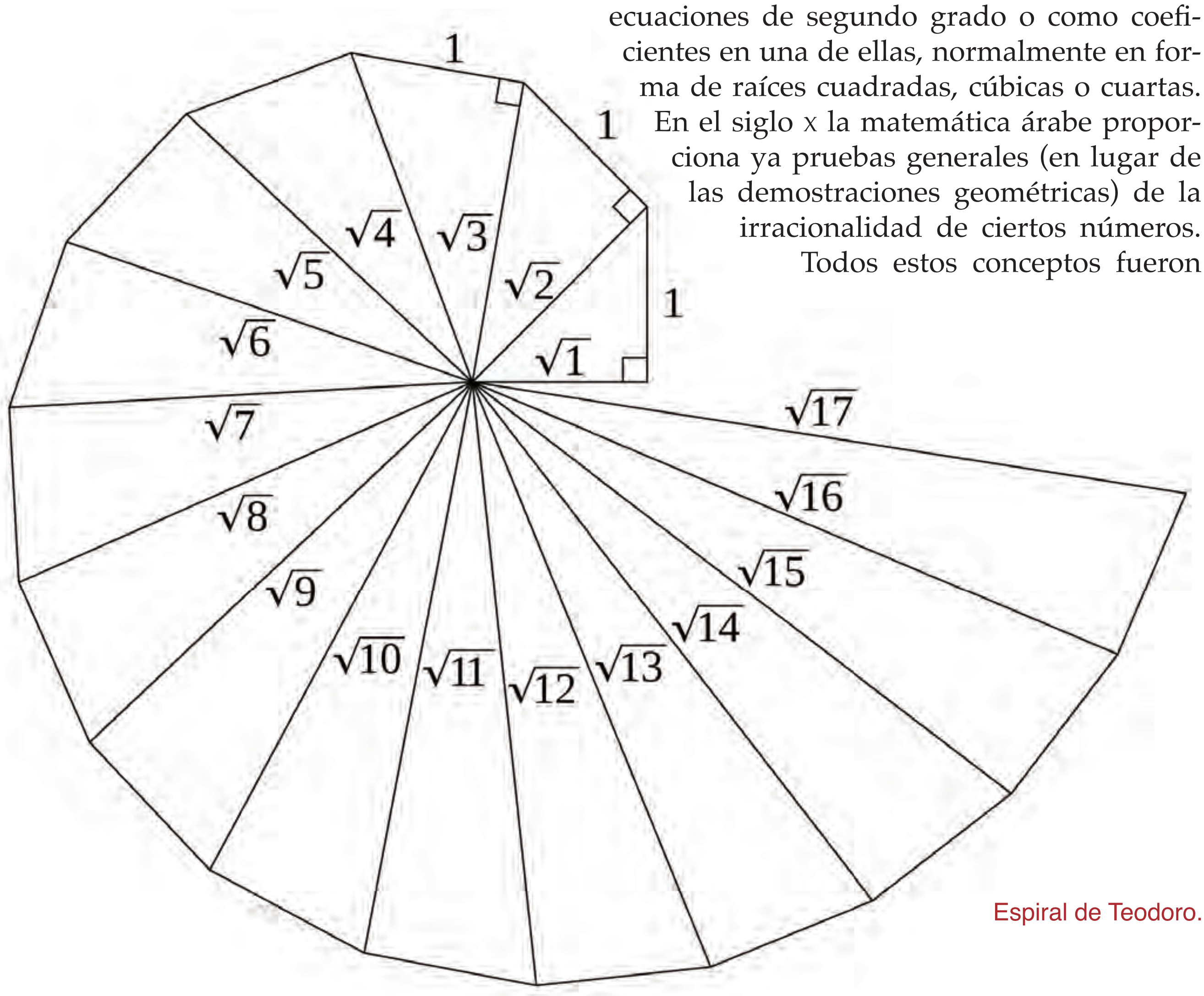
Si tomamos un cuadrado de lado 1, el Teorema de Pitágoras asegura que su diagonal es un número cuyo cuadrado es 2. Hoy en día lo conocemos como $\sqrt{2}$, pero en aquella época era algo bastante extraño. Durante mucho tiempo, y siguiendo su lema de "todo es mensurable" los pitagóricos trataron de encontrar una forma de expresar esta cantidad como cociente de números naturales. Todo intento resultó infructuoso. Pero tanto trabajo dejó como fruto la asombrosa conclusión de que $\sqrt{2}$ no es racional. Todo un terremoto intelectual.

Este descubrimiento atacaba la línea de flotación de su idea numérica del mundo, iba contra toda lógica. De ahí que comenzaran a llamar a estas cantidades *alogos* (sin-lógica o sin-razón, es decir, irracionales). Pero no quedó ahí la cosa. Los pitagóricos eran una suerte de secta matemática y sus descubrimientos (en particular los que atentaban contra sus ideas) no podían ser desvelados.

Al parecer, uno de los miembros de la escuela, Hipaso de Metaponto, no cumplió el voto de silencio que pesaba sobre la irracionalidad de $\sqrt{2}$, por lo que la hermandad pitagórica lo habría expulsado de la escuela. Cuentan las leyendas que para demostrar al mundo que Hipaso estaba muerto para los pitagóricos, se levantó una tumba con su nombre. Otras versiones afirman que los propios miembros de la hermandad pitagórica hicieron que el barco en el que Hipaso huyó de su ciudad naufragase. Pero claro, esto entra en el mundo de las leyendas. Quizás sólo fuese expulsado por meras discrepancias de carácter político y su naufragio se tratase de un terrible accidente.

De todas formas, según dice Platón en *Teeteto*, parece ser que Teodoro de Cirene ya habría probado también la irracionalidad de $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, hasta $\sqrt{17}$. Con la llegada de Eudoxo de Cnido se estableció rigurosamente el concepto de irracional a través de una teoría general de proporciones que permitía trabajar con los *inconmensurables*.

Bastante después, el matemático egipcio Abu Kamil (entre el año 850 y el 930 de nuestra era) se considera que fue el primero en aceptar los números irracionales como soluciones de ecuaciones de segundo grado o como coeficientes en una de ellas, normalmente en forma de raíces cuadradas, cúbicas o cuartas. En el siglo x la matemática árabe proporciona ya pruebas generales (en lugar de las demostraciones geométricas) de la irracionalidad de ciertos números. Todos estos conceptos fueron

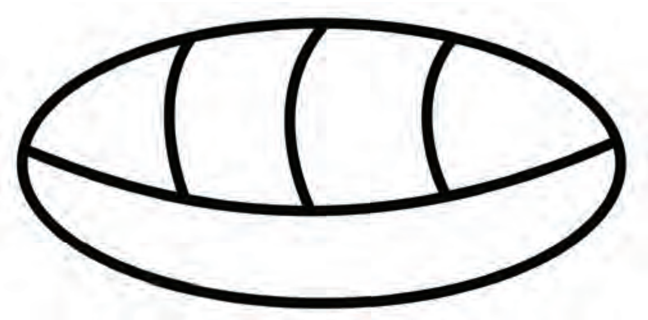


Espiral de Teodoro.

llegando a Europa a través de las traducciones latinas del siglo XII.

Y EL CERO ENCONTRÓ SU SITIO

El siguiente gran descubrimiento numérico es la aparición del cero. Son diversas las culturas antiguas (Egipto, Babilonia o Grecia) de las que se dispone de documentos matemáticos o astronómicos en los que aparecen símbolos indicativos de la nada, pero por diversas particularidades de sus sistemas de numeración no siguieron avanzando en el concepto numérico del cero. En particular, la primera aparición de un símbolo para este número tiene lugar en las postrimerías de la civilización babilónica. Aunque su sistema de numeración era de carácter posicional, ya vimos que ante la ausencia de una determinada posición, no escribían símbolo alguno. Sin embargo en sus dos últimos siglos de historia, alrededor del año 400 de nuestra era, aparece un rudimentario símbolo (dos cuñas) para indicar que en esa posición no hay número. El cero acaba de entrar en escena, al menos, como símbolo o *signo de puntuación*.



Glifo maya para el cero.

En la América precolombina también se tiene constancia del uso del cero. Concretamente, el calendario de tres posiciones de la cultura maya, implica el uso de algún símbolo (glifo) para la ausencia de unidades en determinadas posiciones. En cualquier caso, parece que el uso del cero en el continente americano es anterior a los mayas y se cree que su verdadero origen data de la cultura de los olmecas.

En Europa, el primer documento en el que aparece un símbolo para el cero (un círculo con una pequeña barra sobre él) es de Claudio Ptolomeo en el *Almagesto* (año 150 de nuestra era). Simplemente se trata de retomar el clásico sistema posicional babilónico con un símbolo específico. Sólo unos pocos astrónomos siguieron esta notación que pronto cayó en desuso.

Pero sin lugar a dudas la principal aportación al concepto de cero se produce en la cultura hindú (y que nos llega gracias a la civilización árabe). De hecho, la palabra *cero*, etimológicamente proviene de la transcripción del sánscrito (shunya) al árabe (sfir). En la obra *Brahmasphutasiddhanta* (en torno al 650 de nuestra era) es donde podemos decir que el cero es tratado, por primera vez, como número de pleno derecho. En ella se trata con detalle la numeración posicional y se estudian las diferentes operaciones aritméticas con respecto al cero (y a otros números). Quizás lo más sorprendente es que se afirma que $0/0=0$, mientras que $a/0$ (con $a\neq 0$) es simplemente *la fracción que tiene por denominador al 0* (os recuerdo que tanto $0/0$ como $a/0$, no tienen sentido como operaciones aritméticas). Todas estas aportaciones llegaron finalmente a occidente gracias al matemático árabe, Al-Juarizmi.

Y LLEGARON LAS DEUDAS: LOS NÚMEROS NEGATIVOS

Tal y como ocurre hoy en día en los colegios, la mejor forma de entender y aceptar los números negativos es hablar de deudas y beneficios. Y así surgen por primera vez estos números.

Sus primeros pasos los dan en la obra *Jiuzhang Suanshu* (*Nueve capítulos sobre el Arte de las Matemáticas*), un documento compilado a lo largo de varios años y que algunos investigadores datan en torno al comienzo de nuestra era. En esta obra se habla, entre otros muchos problemas, de temas de contabilidad y finanzas (capítulos VI y VII) y resolución de ecuaciones lineales (Capítulo VIII). En este último, se trata de explicar el concepto de número negativo. Como curiosidad, y al contrario que nuestras costumbres actuales, se utilizaban cuentas rojas para los números positivos y negras para los negativos.

Sin embargo, durante mucho tiempo, los números negativos no calaron en los matemáticos del momento. Y no lo hicieron porque las matemáticas se dedicaban a resolver problemas eminentemente geométricos, por lo que las soluciones negativas eran consideradas como *absurdas*, tal y como apostillara Diofanto en su *Arithmetica* sobre el siglo III de nuestra era.

Nuevamente la contabilidad hizo que los negativos volvieran a aparecer en la matemática hindú. Y lo hicieron gracias, en parte, al desarrollo que se hizo del concepto de cero. Otra vez en la obra *Brahmasphutasiddhanta* se tratan soluciones negativas de problemas geométricos y se utilizan los números negativos para obtener una fórmula para las soluciones de una ecuación de segundo grado, muy similar a la actual.

En occidente, sin embargo, los números negativos no llegan hasta que Leonardo de Pisa (Fibonacci) publica su *Liber Abaci* (alrededor del año 1202). En esta magnífica obra no sólo divulga las bondades del sistema de numeración posicional árabe (derivado del hindú y que usamos hoy en día) sino que de nuevo se tratan problemas financieros y busca soluciones de ecuaciones de tercer grado (usando, otra vez, números negativos). Estas técnicas le llegaron de sus viajes por los países árabes y de aprender los métodos hindúes a través de los libros de Al-Juarizmi.

Escultura de Fibonacci. Camposanto monumental, Pisa.

La aceptación final de los números negativos en Europa, surge a raíz de la aparición de las coordenadas cartesianas en geometría y su aplicación a los problemas de esta índole. Sin embargo, hasta el siglo XVIII aún era común descartar las soluciones negativas a los problemas de carácter geométrico, debido, en gran parte, a su relación con magnitudes de tipo longitud, área o volumen, en donde carecen de significado físico.

Y UNA VARIABLE NO FUE SUFICIENTE: LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Las primeras referencias conocidas a raíces de números negativos provienen del trabajo del matemático griego Herón de Alejandría (siglo I de nuestra era). Sin embargo, éstas surgen como resultado de un error de cálculo en la sección de una pirámide y rápidamente es descartada (los números negativos no tenían sentido para los griegos) y sustituida por la raíz del mismo número pero positivo.

En el siglo XV, Chouquet en su *Triparty* trata, entre otros temas, la resolución de ecuaciones. Y en algún caso concreto llega a la conclusión de que la solución debería ser la raíz de un cierto número negativo. Sin embargo para él, *tal número no tiene sentido*.

Realmente la verdadera aparición de los números complejos tiene lugar en la Europa del siglo XVI. Tartaglia y Cardano buscaban soluciones a ecuaciones de tercer grado. Pero cuando la ecuación cúbica poseía tres raíces reales, las fórmulas obtenidas conducían a raíces de números negativos. Estos extraños números eran la clave para concluir su trabajo así que había que tratar de contar con ellos. En cualquier caso, Cardano los cataloga como *meras manipulaciones sutiles pero inútiles* y los llama *fantasmas de los números reales*. Sin embargo, otro colega suyo, Bombelli, tiene una *idea loca* y comenzó a trabajar con pares de estos números (hoy son los que llamamos *conjugados*, misma parte real y partes imaginarias opuestas). Es él quien concreta las reglas específicas para sumar y multiplicar números en los que intervienen raíces de negativos.

Girolamo Cardano.

Fue Descartes quien acuñó el término *imaginario* para raíces de números negativos en 1637. Se trataba de hacer notar que dicha operación era imposible, por lo que en un principio tenía la intención de que fuera algo despectivo. Unos años más tarde, Leibniz ya los trataba como *anfibios* que nadaban entre la existencia y la no existencia.

Un primer impulso a estos nuevos conceptos llegó de la mano de una de las más privilegiadas mentes matemáticas de toda la historia: Leonhard Euler. De él es la actual notación de i para representar a la unidad imaginaria $\sqrt{-1}$.

A partir de aquí resultó mucho más sencillo manipular expresiones en las que intervenían este tipo de números y así obtener resultados en el cuerpo de los reales. De esta forma, el propio Euler llegó a la identidad que hoy lleva su nombre y que, en un caso particular, también es conocida como la fórmula de Dios o *la fórmula más bella*.

Fórmula de Euler. Tatuadora: Icíar Orozco Bazán.

Pero el empujón final que terminó de popularizar el uso de los complejos fue la interpretación geométrica de estos números como puntos del plano. Esta idea había sido ya sugerida en 1685 en el *De Algebra Tractatus* de John Wallis, pero realmente fue

Caspar Wessel quien en 1799 la introdujera de forma rigurosa. Unos años más tarde, Jean-Robert Argand redescubría esta interpretación y gracias a él, Carl Friedrich Gauss la conoció y terminó de popularizarla. Hoy se conoce como Plano de Argand al plano formado por los números complejos.

Y SEGUIMOS MÁS ALLÁ: CUATERNIONES Y OCTONIONES

Hasta aquí hemos visto los números más conocidos. En la construcción de los conjuntos numéricos, nos detuvimos en este punto. Sin embargo los matemáticos no han parado y han continuado ampliando el concepto de número.

Placa conmemorativa de la invención de los cuaterniones. Broom Bridge, Dublin. (Imagen jaqian - CC).

El procedimiento que permite pasar de los reales a los complejos (la construcción de Cayley-Dickinson) puede aplicarse, partiendo de los complejos, para llegar a un nuevo conjunto numérico, los *cuaterniones*, definidos por Hamilton en 1843 y que tienen dimensión 4. Y si partimos de los cuaterniones, llegamos a otro conjunto de números llamados *octoniones* (Graves y Cayley 1843 y 1845), de dimensión 8. En cada uno de estos pasos, sin embargo, se pierden propiedades interesantes e importantes de los números, como conmutatividad del producto (el orden de los factores aquí sí que altera el producto) o la distributividad del producto (no es lo mismo a*(b*c) que (a*b)*c, el orden en que se hacen las operaciones sí influye). Y podríamos seguir aplicando este procedimiento y doblando en cada paso la dimensión. Pero estos conceptos dan ya para otro artículo.

CONCLUSIÓN

Queridos lectores, si habéis llegado hasta aquí, enhorabuena. Creo que habréis aprendido, como yo, muchas cosas de nuestros viejos conocidos los números. Nos habían hecho creer que su vida era demasiado estricta y rigurosa, pero en realidad su historia es la historia de las matemáticas. Asociado a cada descubrimiento numérico van de la mano muchos de los más importantes avances matemáticos. Podríamos concluir diciendo que la vida secreta de los números, su historia, nos revela la evolución de las Matemáticas. •

Dedicado a mi padre con motivo de su jubilación.

BIBLIOGRAFÍA

Bibliografía Principal:

- BOYER, Carl B. *Historia de la matemática.* Martínez Pérez, Mariano (trad.). Madrid: Alianza Editorial, 2007.
- GODEFROY, Gilles. *The adventure of numbers.* Kay, Leslie (trad.). Providence, (RI): American Mathematical Society, 2004.
- GUEDJ, Denis, *El imperio de las cifras y los números.* Serrano Crespo, Manuel (trad.). Barcelona: Ediciones B, 1998.
- IFRAH, Georges, *Las cifras, historia de una gran invención.* Madrid: Alianza Editorial, 1994.
- O'CONNOR, J.J y ROBERTSON, E.F. *Una historia del cero.* Hernán Capitán, Manuel (trad.). Mac Tutor History of Mathematics, 2000. (Disponible en Web: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Zero.html)

Bibliografía Complementaria:

- BOURBAKI, Nicolas, *Elementos de historia de las matemáticas.* Hernández, Jesús (trad.). Madrid: Alianza, 1972.
- CONANT, Levi Leonard, Contar. En: NEWMAN, James R. (ed.), *SIGMA, el mundo de las matemáticas* (vol. 4). Barcelona: Grijalbo, 1969.
- IFRAH, Georges, *Historia universal de las cifras: la inteligencia de la humanidad contada por los números y el cálculo.* Madrid: Espasa-Calpe, 1997.
- OUAKNIN, Marc-Alain, *El misterio de las cifras.* Salvetti, Jorge (trad.). Barcelona: Ediciones Robinbook, 2006.
- RUSSELL, Bertrand, *Definición de número.* En: NEWMAN, James R. (ed.), *SIGMA, el mundo de las matemáticas* (vol. 4). Barcelona: Grijalbo, 1969.

José Antonio Prado Bassas es Profesor Contratado Doctor en el Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Sevilla.