

## Stabilità di strutture ad arco e regole costruttive nel XVI<sup>o</sup> e XVIII<sup>o</sup> secolo

Anna Sinopoli

Le formulazioni delle prime teorie scientifiche sulle volte, sugli archi e sulle cupole risalgono solo al XVIII<sup>o</sup> secolo. Già da secoli però la tecnica costruttiva aveva offerto capolavori architettonici, in cui tali strutture particolari avevano dimostrato di essere state progettate secondo criteri di grande stabilità. E' allora di estremo interesse ricercare quali potessero essere stati codesti criteri, dal momento che non era ancora disponibile una precisa giustificazione di tipo statico o meccanico per la loro consistenza.

Si tratta di individuare quelle regole che appartenevano ai maestri di cantiere, all'esperienza del *fabbricare*, che furono lo strumento pratico e l'espressione della cultura della tradizione costruttiva. Si era allora in un'epoca —ci riferiamo ai secoli del Medioevo, dell'Umanesimo e del Rinascimento— in cui ingegneri ed architetti non svelavano le proprie maestrie, e il *meravigliare* che essi perseguivano con le loro opere era coperto da segreto: se si vuole conoscere la «norma» che assisteva la tecnica e l'intuizione che la guidava, si incombene nell'impedimento arrecato dal tempo che ha consentito la perdita di tale cultura, lasciando di essa solo tracce.

Alcune regole possono essere rintracciate in antichi trattati, non sempre riferibili ad un medesimo autore; la loro derivazione è spesso ignota, poiché tali regole appartenevano a quel patrimonio di nozioni segrete del mestiere, che era gelosamente tramandato da una generazione all'altra di costruttori.

In questo lavoro, partendo dall'analisi del patrimonio di regole costruttive di tradizione gotico-rinasci-

mentale attribuite allo spagnolo Gil de Hontañón, sarà analizzata la nota regola per il dimensionamento dei piedritti, spesso attribuita a padre Derand.

Codesta regola non è metodologicamente diversa da molte altre - eredità della cultura prescientifica - spesso esposte come problemi geometrici, in cui, fissate alcune dimensioni tipiche dell'arco o della struttura voltata, le altre dimensioni sono definite in base a rapporti di proporzionalità, di natura prevalentemente geometrica, emergenti dalle caratteristiche delle strutture medesime.

Scopo dell'analisi è quello di rianalizzare la correttezza di tale antica regola e di quantificare la stabilità conseguente per la struttura attraverso l'uso del Teorema dei Lavori Virtuali nella sua formulazione ridotta, in cui protagonisti dell'equilibrio sono i pesi e la geometria del sistema.

L'ipotesi che soggiace è che la norma costruttiva, prima dell'assiomatizzazione della Meccanica, avesse un fondamento empirico, sperimentale e sostanzialmente geometrico.

L'indagine, infatti, si inserisce in un quadro molto più ampio di ricerca, il cui intento principale è quello di dare consistenza formale e teorica a quelle regole pratico-costruttive, che vedono nella geometria il loro fondamento, con la speranza di scorgervi il proemio ad una possibile e corretta concezione cinematica della Meccanica.

La rilettura storica diventa allora l'occasione per «dar voce» alle teorie meccaniche perdenti, quelle che piuttosto che privilegiare come unico cammino

quello dell'assiomatizzazione della Meccanica fondata sul concetto di forza, strada praticata da Eulero in poi, tentavano il cammino duale attraverso un più consistente fondamento nell'evento fisico e nelle grandezze direttamente misurabili.

La delineazione di tale cammino duale potrebbe condurre a nuove riflessioni e riconsiderazioni sull'importanza della geometria e della stereotomia come «norma guida» delle tecniche costruttive della maggior parte delle strutture monumentali edificate prima della sistematizzazione Euclidea della Meccanica.

La rilettura in chiave moderna della regola per il dimensionamento del piedritto sarà effettuata come analisi limite di un sistema rigido, soggetto a vincoli unilaterali ed attrito, privilegiando un approccio cinematico attraverso l'uso della formulazione ridotta del Teorema dei Lavori Virtuali. Responsabili dell'equilibrio e della stabilità del sistema sono in tal caso gli spostamenti virtuali e i pesi propri, trattati come aree e, cioè, ridotti anch'essi ad enti geometrici.

L'equilibrio e la stabilità dipendono allora soltanto dalla geometria, ed in particolare dal valore assegnato ad uno dei parametri geometrici del sistema, trattato come parametro di stabilità, variando il quale può essere raggiunta la condizione di collasso; il rapporto fra il valore particolare del parametro geometrico e quello critico, corrispondente alla condizione di collasso, consente di definire un coefficiente di sicurezza per la struttura, di natura sostanzialmente geometrica.

#### RODRIGO GIL DE HONTAÑÓN ED IL COMPENDIO DE ARCHITECTURA

È nel XVI° secolo che si sviluppa e si sistematizza ad opera degli architetti italiani un nuovo vocabolario classico per definire la «norma» estetica degli edifici. Tale rivoluzione formale ha mascherato il contributo degli architetti tardo-gotici, cosicché tutte le innovazioni dell'arte edificatoria del XVI° secolo sono state spesso attribuite *tout court* al movimento culturale del Rinascimento. Anche Robert Mark, un risoluto sostenitore delle acquisizioni strutturali del periodo Gotico, considera il Tardo Gotico, con le sue codificazioni di leggi progettuali, responsabile di un processo di soffocamento della sperimentazione strutturale.

Certamente, il picco della sperimentazione strutturale intuitiva era stato raggiunto molto prima con la costruzione delle grandi cattedrali gotiche del XIII° e XIV° secolo; ed in quell'epoca, la Scolastica, con il suo maggior esponente Giordano Nemorario, non era in grado di fornire alcun contributo all'analisi di edifici così grandi e complessi.

Tuttavia, come afferma Sanabria, il XVI° secolo non può essere considerato come un periodo di declino nell'invenzione strutturale, caratterizzato soltanto dall'introduzione di nuove forme, in assenza di sperimentazione e di progressi nell'analisi teorica.

Gli sciti dell'architetto spagnolo Rodrigo Gil de Hontaflón, pervenuti attraverso la riscrittura ad opera di Simon Garcia nel *Compendio de Architectura y Simetria de los Templos*, sono testimonianza dello sviluppo del pensiero strutturale nel XVI° secolo, che, sulla base della tradizione gotica e delle nuove idee umaniste, adotta i nuovi strumenti matematici per un incipiente approccio sperimentale ad una teoria di carattere sostanzialmente geometrico.

Infatti, sebbene le regole che Rodrigo propone per la distribuzione degli spazi interni di un edificio facciano riferimento a due metodi di proporzionalità —il primo, che stabilisce una analogia fra l'edificio ed il corpo umano, in accordo ad una tradizione Vitruviana, ripresa in seguito da Francesco di Giorgio e Albert Dürer; il secondo, di tipo geometrico, basato su antiche regole gotiche— l'intento di Rodrigo è di dimostrare che il più nuovo e più ricco in tipologie formali sistema di proporzionamento umano non è in contraddizione con il più antico metodo geometrico di tradizione gotica. Una simile idea è presente anche in *Le premier tome de l'architecture* (1568) di Philibert de L'Orme, che propose di ridurre il disordinato e confuso libro di Vitruvio alla teoria e metodologia geometrica di Euclide.

Più interessanti, comunque, come testimonianza dello sviluppo del pensiero strutturale nel XVI° secolo ed in accordo alla tesi che soggiace a tale lavoro, sono le regole che Rodrigo propone per il dimensionamento degli elementi strutturali: esse sono formulate in modo indipendente dalle regole di distribuzione degli spazi di un edificio, e con l'intento di garantire che lo spessore di ogni elemento strutturale sia né maggiore né minore di quello necessario alla sua stabilità.

Le regole che Rodrigo propone possono essere suddivise in due categorie:

- Quelle di natura aritmetica, risultato di una lenta assimilazione di un vocabolario matematico reso disponibile in Italia ancora nel XIV° secolo;
- Quelle di natura geometrica, che rappresentano un avanzato sviluppo della tradizione geometrica gotica, dal momento che esse sono articolate in sequenze grafico-costruttive progressive, orientate alle nuove tipologie strutturali Rinascimentali e formulate utilizzando più sofisticati strumenti del linguaggio matematico.

Entrambe comunque si configurano come formulazioni teoriche di problemi strutturali, cui si richiede un carattere di generalità e di sufficienza, che risulta essere non analizzato né giustificato.

L'unica regola che Rodrigo propone (Prima Regola Geometrica), fortemente radicata nella tradizione geometrica gotica e sopravvissuta, anche se non giustificata, attraverso i secoli nella pratica di cantiere, è la regola del dimensionamento del piedritto, che propone un rapporto 1:4 fra spessore del piedritto e luce dell'arco.

Tale regola è stata spesso attribuita a Francois Derand, che nel 1643 la incluse nel suo trattato di stereotomia; essa, anche se elegante ed apparentemente molto adattabile, rappresenta un arrestato sviluppo del pensiero geometrico strutturale tardo gotico, dal momento che ignora sia lo spessore dell'arco sia l'altezza del piedritto. Integrazioni a tale regola sono state fornite infatti dallo stesso Rodrigo che, nella sua Terza Formula Geometrica, tiene in qual-

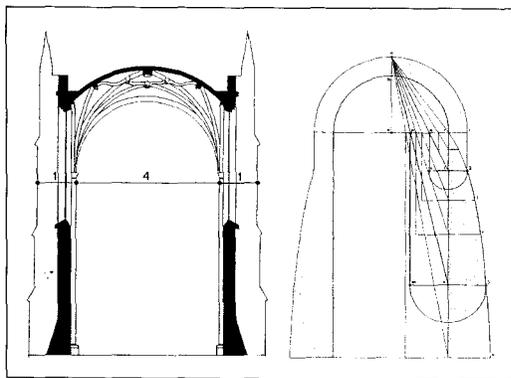


Figura 1  
La Prima e la Terza Formula Geometrica di Rodrigo Gil de Hontañón

che modo in considerazione le suddette variabili, suggerendo un sofisticato, anche se inesatto, andamento iperbolico per lo spessore del piedritto all'aumentare della sua altezza. Viollet Le Due considera la regola di Padre Derand come la più antica e radicata nella pratica costruttiva, ma impone un'altezza limite del piedritto per una corretta applicabilità della formula.

Il problema generale dell'equilibrio e della stabilità di un portale, costituito di conci lapidei, sarà analizzato in codesto lavoro, adottando il modello meccanico di sistema rigido soggetto a vincoli unilaterali ed attrito; la condizione limite che separa l'equilibrio dal collasso verrà individuata come funzione di ciascuno dei parametri geometrici caratterizzanti la struttura.

Il valore critico di tali parametri consentirà di rivisitare la Prima Formula Geometrica di Rodrigo, nota come regola di Padre Derand, e di quantificare il corrispondente coefficiente di sicurezza; sarà inoltre analizzato, in relazione a tale regola che non definisce né lo spessore dell'arco né l'altezza del piedritto, il limite superiore suggerito da Viollet Le Due per l'altezza del piedritto.

#### ANALISI LIMITE E STABILITÀ DEL PORTALE LAPIDEO

Si consideri il portale lapideo di fig. 2, modellato come sistema di conci rigidi soggetti a vincoli unilaterali sulle facce di contatto, e caratterizzato da attrito sufficiente ad impedire slittamenti relativi fra conci contigui.

Si indichi con  $\delta q$  lo spostamento generalizzato, che corrisponde alla formazione del meccanismo caratterizzato da cinque cerniere alternate, rispettivamente, all'estradosso e all'intradosso; tali cerniere sono simmetricamente collocate alla chiave e alle imposte del portale, e al generico giunto di rottura dell'arco, individuato dall'angolo  $\alpha$  considerato variabile con continuità da  $0^\circ$  a  $90^\circ$ . Con un'ottica orientata alla ricerca della condizione di collasso, si considera soltanto il meccanismo a cinque cerniere, dal momento che il meccanismo di collasso è caratterizzato dal numero minimo di cerniere.

Si indichi con  $Q$  il vettore generalizzato, le cui componenti rappresentano i pesi dei quattro conci in cui il portale resta suddiviso dal meccanismo considerato. Sia  $\delta q$  sia  $Q$  ovviamente dipendono dai valori

dei parametri geometrici caratterizzanti il portale e dal meccanismo considerato, e cioè da:

- il valore dell'angolo del giunto di rottura  $\alpha$ ;
- il raggio di intradosso dell'arco  $r$ ;
- lo spessore dell'arco  $s$ ;
- lo spessore del piedritto  $l$ ;
- l'altezza del piedritto  $h$ .

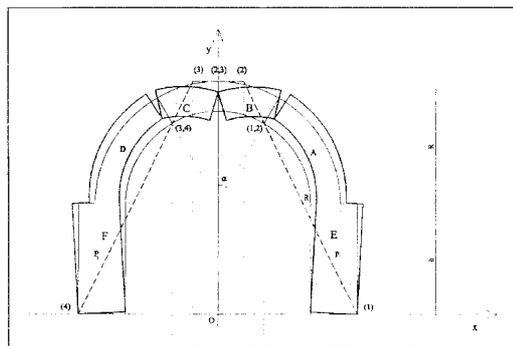


Figura 2  
Schema del portale lapideo e meccanismo a quattro concetti

Condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio del sistema, in relazione al meccanismo considerato, è che il lavoro virtuale  $\delta L^{(a)}$  delle forze attive soddisfi la disuguaglianza:

$$\delta L^{(a)} = \mathbf{Q} \times \delta \mathbf{q} \leq 0 \quad (1)$$

La condizione di collasso è raggiunta quando esiste un meccanismo  $\delta \mathbf{q}^{(c)} \neq \mathbf{0}$ , per cui il lavoro virtuale  $\delta L^{(a)}$  risulti nullo; tale meccanismo è unico, esso è il meccanismo di collasso.

Fissata la geometria del sistema, e a partire da una configurazione di equilibrio stabile, la ricerca della condizione di collasso può essere effettuata diminuendo un unico e generico parametro geometrico  $p$ , in accordo al seguente teorema (Sinopoli, Corradi, Foce, 1998):

**Teorema del Limite Inferiore:** Per  $p \geq p^{(c)}$ , sia  $DL$  l'insieme di meccanismi  $\delta \mathbf{q} \neq \mathbf{0}$  che soddisfano la (1). Diminuendo  $p$ , si indichi con  $HL$  l'insieme dei valori di  $p$ , per cui la (1) è soddisfatta  $\forall \delta \mathbf{q} \in D_L$ . La

condizione di collasso come funzione di  $p$  corrisponde a:

$$\max_{p \in HL} [\delta L^{(a)} = \mathbf{Q} \times \delta \mathbf{q}] \quad \forall \delta \mathbf{q} \in D_L \quad (2)$$

La soluzione della (2) identifica l'unico meccanismo  $\delta \mathbf{q}^{(c)} \neq \mathbf{0}$ , per cui il massimo lavoro è nullo ( $\delta L^{(a)} = 0$ ), cosicché l'equilibrio ancora esiste;  $\delta \mathbf{q}^{(c)}$  è il meccanismo di collasso, associato ad un valore critico  $p^{(c)}$  del parametro  $p$  e ad un particolare valore  $\alpha^{(c)}$  dell'angolo del giunto di rottura. Per tutti gli altri meccanismi, il massimo lavoro è strettamente negativo ( $\delta L^{(a)} < 0$ ).

In accordo alla formulazione esposta, la condizione di collasso del portale lapideo sarà individuata come funzione dello spessore del piedritto, considerato come parametro di crisi, in relazione a valori diversi, ma costanti, del raggio di intradosso  $r$ , dello spessore dell'arco  $s$  e dell'altezza del piedritto  $h$ . Sarà inoltre analizzato il caso corrispondente al valore limite di  $h$ , suggerito da Viollet Le Duc per l'applicabilità della regola di Padre Derand.

#### IL COLLASSO COME FUNZIONE DELLO SPESSORE DEL PIEDRMO

Fissata la luce dell'arco, e cioè il raggio di intradosso  $r$ , poiché l'equilibrio e la stabilità del portale dipendono dallo spessore  $s$  dell'arco, dall'altezza  $h$  e dallo spessore  $l$  del piedritto, la ricerca della condizione di collasso corrispondente al Teorema del Limite Inferiore (2) è stata perseguita fissando alcuni valori di  $r$ ; per ciascuno di essi, si sono considerati diversi valori di  $h$ , variando  $l$  alla ricerca dello spessore critico  $l_{cr}$  corrispondente alla condizione di collasso. I valori assunti per lo spessore dell'arco sono ovviamente superiori allo spessore critico corrispondente alla condizione di collasso dell'arco semicircolare in assenza di piedritti ( $s > 0.114r$ ); per ognuno di tali spessori, si sono considerati cinque diversi valori per le altezze del piedritto, corrispondenti rispettivamente a:

- $h_1 = h_{Der} = r \sqrt{3}/2$ , altezza del piedritto proposta da Padre Derand nel suo schema grafico;
- $h_2 = r$ ;
- $h_3 = 2 h_{Der} = r \sqrt{3}$ ;
- $h_4 = 2r$ ;
- $h_5 = 3r$ , altezza limite proposta da Viollet Le Duc.

Per ognuno dei casi considerati, è stato determinato in accordo alla (2) il valore dello spessore critico del piedritto  $l_{cr}$  ed il corrispondente valore  $\alpha_{cr}$  del giunto di rottura. I risultati ottenuti sono illustrati ne-

lle Tabelle 1 a, 1 b, 1 c e 1 d, da cui si può notare che, in ogni caso, il valore di  $\alpha_{cr}$  dipende soltanto dallo spessore dell'arco  $s$ , e non dalle caratteristiche del piedritto  $h$  e  $l$ .

$S = 0.15r$	$h_1 = h_{Der} = r \sqrt{3/2}$	$l_{cr} = 0.28043 r$	$\alpha_{cr} = 57.1^\circ$
	$h_2 = r$	$l_{cr} = 0.29341 r$	$\alpha_{cr} = 57.1^\circ$
	$h_3 = 2 h_{Der} = r \sqrt{3}$	$l_{cr} = 0.33788 r$	$\alpha_{cr} = 57.1^\circ$
	$h_4 = 2r$	$l_{cr} = 0.34774 r$	$\alpha_{cr} = 57.1^\circ$
	$h_5 = 3r$	$l_{cr} = 0.37115 r$	$\alpha_{cr} = 57.1^\circ$

Tab. 1a. Spessori critici del piedritto per  $s = 0.15r$ 

$S = 0.2r$	$h_1 = h_{Der} = r \sqrt{3/2}$	$l_{cr} = 0.27514 r$	$\alpha_{cr} = 59.6^\circ$
	$h_2 = r$	$l_{cr} = 0.29088 r$	$\alpha_{cr} = 59.6^\circ$
	$h_3 = 2 h_{Der} = r \sqrt{3}$	$l_{cr} = 0.34743 r$	$\alpha_{cr} = 59.6^\circ$
	$h_4 = 2r$	$l_{cr} = 0.36049 r$	$\alpha_{cr} = 59.6^\circ$
	$h_5 = 3r$	$l_{cr} = 0.39217 r$	$\alpha_{cr} = 59.6^\circ$

Tab. 1b. Spessori critici del piedritto per  $s = 0.2r$ .

$S = 0.15r$	$h_1 = h_{Der} = r \sqrt{3/2}$	$l_{cr} = 0.28043 r$	$\alpha_{cr} = 57.1^\circ$
	$h_2 = r$	$l_{cr} = 0.29341 r$	$\alpha_{cr} = 57.1^\circ$
	$h_3 = 2 h_{Der} = r \sqrt{3}$	$l_{cr} = 0.33788 r$	$\alpha_{cr} = 57.1^\circ$
	$h_4 = 2r$	$l_{cr} = 0.34774 r$	$\alpha_{cr} = 57.1^\circ$
	$h_5 = 3r$	$l_{cr} = 0.37115 r$	$\alpha_{cr} = 57.1^\circ$

Tab. 1c. Spessori critici del piedritto per  $s = 0.3r$ .

$S = 0.4r$	$h_1 = h_{Der} = r \sqrt{3/2}$	$l_{cr} = 0$	Portale sempre stabile
	$h_2 = r$	$l_{cr} = 0$	Portale sempre stabile
	$h_3 = 2 h_{Der} = r \sqrt{3}$	$l_{cr} = 0$	Portale sempre stabile
	$h_4 = 2r$	$l_{cr} = 0$	Portale sempre stabile
	$h_5 = 3r$	$l_{cr} = 0$	Portale sempre stabile

Tab. 1d. Spessori critici del piedritto per  $s = 0.15r$ .

Come si può notare, la stabilità del portale aumenta all'aumentare dello spessore dell'arco, tanto che nei casi della Tab. Id il sistema è sempre stabile; la stabilità din-ànuisce, invece, all'aumentare dell'altezza dei piedritto e, corrispondentemente, il collasso avviene per valori maggiori dello spessore critico del piedritto  $l_{cr}$ .

#### COEFFICIENTE GEOMETRICO DI SICUREZZA E CONCLUSIONI

Individuali i valori dello spessore critico del piedritto, in relazione a diversi valori degli altri parametri geometrici del portale, siamo ora in grado di rianalizzare sia la regola di Padre Derand, sia il limite imposto da Viollet Le Duc per l'altezza del piedritto:  $h=3r$ .

Per valutare la correttezza di tali criteri e per quantificare la stabilità conseguente per la struttura, si definisca come coefficiente di sicurezza  $C_s$  in relazione allo spessore del piedritto, il rapporto fra un valore assegnato di tale spessore e quello critico, corrispondente alla condizione di collasso:  $C_s = l/l_{cr}$ .

Fissato lo spessore dell'arco  $s$ , definito anche come  $k=R/r$ , e cioè come rapporto fra raggio di estradosso e raggio di intradosso dell'arco, sono stati calcolati i valori dei coefficienti di sicurezza, corrispondenti ad un'altezza prefissata del piedritto, come funzione del

suo spessore  $l$ . Al variare dell'altezza del piedritto sono state ottenute diverse curve, rappresentate in fig. 3, per il caso corrispondente a  $s=1.15$ .

Per un prefissato valore dell'altezza  $h$ , tutte le curve hanno andamento lineare, evidenziando una proporzionalità diretta fra coefficiente di sicurezza e spessore del piedritto. In fig. 3, lo spessore del piedritto corrispondente alla regola di Padre Derand ( $l=0.5r$ ) è stato evidenziato con una linea verticale. La linea orizzontale, invece, corrispondente a  $C_s=l$  consente di evidenziare per ogni valore dell'altezza dei piedritto  $h$  il corrispondente spessore critico  $l_{cr}$ .

Come si può notare da fig. 3, la regola di Padre Derand garantisce per le altezze considerate una buona stabilità per il portale, dal momento che il coefficiente di sicurezza varia tra 1.347 a 1.783; il valore più basso è ottenuto per l'altezza limite proposta da Viollet Le Duc:  $h=3r$ .

Andamenti simili si possono notare nelle figs. 4 e 5, ottenute rispettivamente per  $s=1.2$  e  $s=1.3$ . Può essere interessante notare che la variazione del coefficiente di sicurezza non ha andamento monotono rispetto all'altezza  $h$  del piedritto, all'aumentare dello spessore dell'arco.

Tale circostanza può essere evidenziata osservando i valori di  $C_s$  corrispondenti alla regola di Padre Derand ( $l=0.5r$ ), al variare di  $s$ . In particolare, mentre per bassi valori di  $h$  il coefficiente di sicurezza,

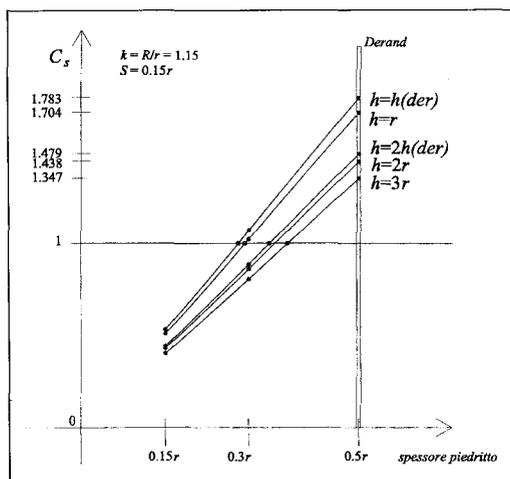


Figura 3  
Coefficiente di sicurezza per  $s=1.15$ .

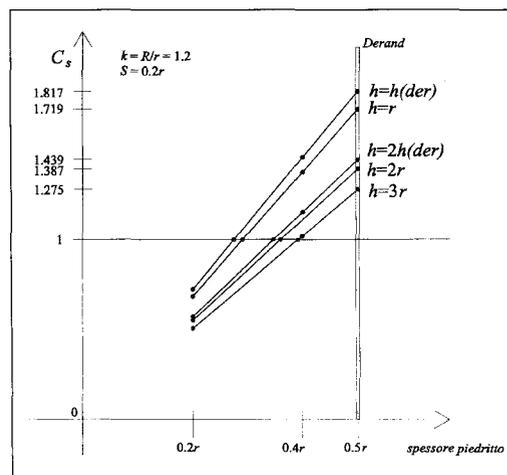


Figura 4  
Coefficiente di sicurezza per  $s=1.2$ .

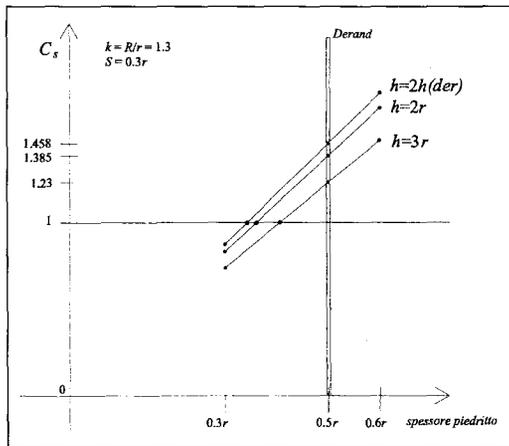


Figura 5  
Coefficiente di sicurezza per  $s = 1.3$ .

all'aumentare di  $s$ , aumenta tendendo all'infinito ( $l_{cr} = 0$ ), per più alti valori (ad esempio:  $h=3r$ ) il coefficiente di sicurezza diminuisce.

## BIBLIOGRAFÍA

- Derand, F.: *L'architecture des voûtes dans les édifices*, partie 1, chap. 6, Paris, 1743.
- Heyman, J.: «The safety of masonry arches», *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 11, pp. 363-385, 1969.
- Sanabria, S.L.: «The mechanization of Design in the 16th Century: The structural formulae of Rodrigo Gil de Hontañón», *Journal of the Society of Architectural Historians*, núm. 4, Vol. XLI, pp. 281-293, 1982.
- Sinopoli, A., Corradi, M., Foce, F.: «A modern formulation for pre-elastic theories on masonry arches», *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 2, pp. 204-213, 1997.
- Sinopoli, A., Corradi, M., Foce, F.: «Lower and upper bounds theorems for masonry arches as rigid systems with unilateral contacts», *Arch Bridges, History, Analysis, Assessment, Maintenance and Repair*, A.A. Balkema, Rotterdam, pp. 99-108, 1998.
- Viollet Le Duc, E.E.: *Dictionnaire raisonné de l'architecture française du XI<sup>e</sup> au XVI<sup>e</sup> siècle*, ed.it.: *L'architettura ragionata*, Jaka Book, Milano, 1982.