XI Encuentro Andaluz de Geometría
IMUS (Universidad de Sevilla), 15 de mayo de 2015, págs. 41–46

Hipersuperficies isoparamétricas en el espacio hiperbólico complejo $\mathbb{C}H^n$

Víctor Sanmartín López

Resumen. Se presenta la clasificación de las hipersuperficies isoparamétricas del espacio hiperbólico complejo $\mathbb{C}H^n$, siguiendo el trabajo realizado en [2].

1. Introducción

Desde sus comienzos, el desarrollo de la geometría de Riemann ha estado ligado al estudio de la geometría de subvariedades. En nuestro caso, hemos centrado nuestra atención en un tipo concreto de las mismas, las hipersuperficies isoparamétricas. Estos objetos matemáticos han sido estudiados por prestigiosos matemáticos tales como Segre, Cartan o Levi-Civita. Para consultar los avances protagonizados por cada uno de ellos puede consultarse [3]. Ya con sus trabajos pudo adivinarse que estas hipersuperficies conectaban diferentes campos dentro de las matemáticas, pues aparece no solo involucrada la geometría de Riemann, sino que de manera natural surgen también conexiones con la topología algebraica, la geometría algebraica, la teoría de grupos de Lie o la teoría de ecuaciones diferenciales.

Con todo, el origen de las hipersuperficies isoparamétricas surge en el seno de la óptica geométrica, cuando el matemático italiano Carlo Somigliana se encontraba estudiando un problema de ondas, que pasamos a exponer muy brevemente a continuación. Si bien allí se aborda tal problema utilizando tres variables espaciales, esto es, $\mathbb{R}^3$, aquí lo presentaremos generalizándolo a una variedad riemanniana $\bar{M}$. Se comienza considerando una onda, que se define como una aplicación diferenciable $\varphi\colon \bar{M} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x,t) \to \varphi(x,t)$, solución de la ecuación de onda

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},$$

donde Δ denota el operador de Laplace-Beltrami respecto de x, $t \in \mathbb{R}$ representa la variable temporal y $x \in \bar{M}$ representa la variable espacial que, como hemos

Víctor Sanmartín López, *victor.sanmartin@usc.es*
Departamento de Geometría y Topología, Universidade de Santiago de Compostela.
El autor ha sido financiado por los proyectos EM2014/009, GRC2013-045, el programa de Formación del Profesorado Universitario (FPU) y la Fundación Barrié de la Maza.

dicho, en el problema inicial vivía en $\mathbb{R}^3$.

Se definen como frente de onda cada uno de los conjuntos formados por puntos en el mismo estado de fase en el instante de tiempo $t_0 \in \mathbb{R}$. Expresado en otros términos, si para cada $t_0 \in \mathbb{R}$ definimos la aplicación $f_{t_0} : \bar{M} \to \mathbb{R}$ mediante $f_{t_0}(x) = \varphi(x, t_0)$, los frentes de onda en el instante t_0 son precisamente los conjuntos de nivel de la función f_{t_0}. En este punto, se imponen dos condiciones sobre φ. En primer lugar, supondremos la onda estacionaria, es decir, asumiremos que los frentes de onda no dependen del tiempo. Esto se traduce en que el laplaciano de f, Δf, es constante a lo largo de los conjuntos de nivel de f. La otra condición consiste en imponer que la norma del gradiente, $||\nabla f||$, sea constante a lo largo de los conjuntos de nivel de f. Ello puede interpretarse, de un modo informal, como exigir que los conjuntos de nivel sean equidistantes entre si, donde aquí al hablar de distancia nos referimos a longitudes de geodésicas ortogonales a la hipersuperficie.

Como conclusión podemos extraer que las ondas estacionarias con frentes de onda equidistantes permiten determinar una función diferenciable f verificando que tanto $||\nabla f||$ como Δf son constantes a lo largo de sus conjuntos de nivel. Pues bien, una función diferenciable no constante $f\colon \bar{M} \to \mathbb{R}$ se dice isoparamétrica precisamente cuando su laplaciano y la norma de su gradiente son constantes a lo largo de los conjuntos de nivel de f . Asimismo, una colección de conjuntos de nivel de una función isoparamétrica f, $\{f^{-1}(c)\}_{c\in\mathbb{R}}$, se dice una familia isoparamétrica de hipersuperficies. Por otra parte, una hipersuperficie se dice isoparamétrica si ella y sus hipersuperficies equidistantes tienen curvatura media constante. El siguiente teorema expresa de forma precisa la relación entre función isoparamétrica e hipersuperficie isoparamétrica.

Teorema 1.1. *Sea $\bar{M}$ una variedad riemanniana. Sea $f\colon \bar{M} \to \mathbb{R}$ una función isoparamétrica y $c \in \mathbb{R}$ un valor regular de f. En estas condiciones, $M = f^{-1}(c)$ es una hipersuperficie isoparamétrica de $\bar{M}$. Recíprocamente, si M es una hipersuperficie isoparamétrica de $\bar{M}$, entonces, para cada $p \in M$, podemos escoger un entorno abierto U de p en M tal que U es un conjunto de nivel regular de una función isoparamétrica $f\colon V \to \mathbb{R}$, para algún abierto V en $\bar{M}$.*

Uno de los problemas centrales de la geometría de Riemann es precisamente el de la clasificación de las hipersuperficies isoparamétricas de una variedad riemanniana. Sin ir más lejos, por ejemplo, en el caso euclídeo fue Segre el que, tras las clasificaciones de Somigliana y Levi-Civita en $\mathbb{R}^3$, completó la clasificación en $\mathbb{R}^n$, demostrando que cada hipersuperficie isoparamétrica tendría una o dos curvaturas principales y sería una parte abierta de un hiperplano $\mathbb{R}^{n-1}$ de $\mathbb{R}^n$, o de una esfera $\mathbb{S}^{n-1}$, o, por último, de un cilindro generalizado $\mathbb{S}^k \times \mathbb{R}^{n-k-1}$, donde $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

Otro ejemplo notable es el del caso hiperbólico real, $\mathbb{R}H^n$, resuelto por Cartan, que probó que aquí las hipersuperficies isoparamétricas eran partes abiertas o de una horosfera, o de una esfera geodésica, o de un hiperespacio hiperbólico totalmente geodésico $\mathbb{R}H^{n-1}$ de $\mathbb{R}H^n$, o de una de sus hipersuperficies equidistantes, o de un tubo alrededor de un subespacio hiperbólico real $\mathbb{R}H^k$, con $k \in \{1, \dots, n-2\}$.

Para finalizar esta primera sección, y dado que hemos estado hablando de tubos alrededor de subvariedades, explicamos brevemente este concepto, que será de gran importancia en posteriores secciones. Dada una subvariedad de codimensión mayor que uno $M \subset \bar{M}$, denominamos el tubo M^r de radio r alrededor de M a los puntos de $\bar{M}$ que se encuentran todos a la misma distancia r de M. Matemáticamente, $M^r = \{\exp(r\xi) \mid \xi \in \nu^1 M\}$, donde $\nu^1 M$ denota el fibrado normal unitario de M. La subvariedad de partida recibe el nombre de subvariedad focal.

2. Hipersuperficies isoparamétricas en el espacio hiperbólico complejo $\mathbb{C}H^n$

En las siguientes líneas construiremos, omitiendo algunos detalles, el espacio hiperbólico complejo $\mathbb{C}H^n$, deteniéndonos posteriormente en los aspectos de su estructura necesarios para la comprensión de los ejemplos de hipersuperficies isoparamétricas involucrados en el Teorema Principal.

Comenzamos definiendo sobre el espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^{n+1}$ la métrica $\langle z, w\rangle = \mathrm{Re}(-z_0\bar{w}_0 + \sum_{k=1}^n z_k\bar{w}_k)$, donde $z, w \in \mathbb{C}^{n+1}$. Se define el espacio anti-De Sitter de radio r como $H_1^{2n+1}(r) = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \langle z, z\rangle = -r^2\}$. Se trata de una variedad lorentziana de curvatura negativa constante. Por ello, puede entenderse como el análogo Lorentziano del espacio hiperbólico real. Sobre el espacio de anti-De Sitter puede definirse una relación de equivalencia que identifique aquellos puntos que difieren en un elemento de la circunferencia unitaria, $\mathbb{S}^1$. Pasando al cociente, obtenemos la aplicación de Hopf $\pi\colon H_1^{2n+1} \to \mathbb{C}H^n$, asociada al espacio hiperbólico complejo n-dimensional. La terna $(H_1^{2n+1}, \pi, \mathbb{C}H^n)$ constituye un $\mathbb{S}^1$-fibrado principal, lo cual permite identificar el subespacio del tangente al espacio de anti-De Sitter ortogonal a la fibra con el tangente al espacio hiperbólico complejo, pudiendo de esta manera definir una métrica en $\mathbb{C}H^n$, la que convierte a π en una sumersión semi-riemanniana, así como introducir una estructura compleja J para el espacio hiperbólico complejo. Además, este puede ser descrito como el espacio simétrico $\mathbb{C}H^n = \frac{SU(1,n)}{S(U(1)\times U(n))}$.

En este punto, y de cara a una mejor comprensión de los ejemplos que aparecen en la clasificación, identificaremos $\mathbb{C}H^n$ con un grupo de Lie. Para ello, consideramos el álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(1,n)$ de la componente conexa de la identidad del grupo de isometrías del espacio hiperbólico complejo, $G = SU(1,n)$.

En este sentido, si fijamos $o \in \mathbb{C}H^n$, podemos considerar el subgrupo de isotropía de o, $K \subset G$. Ahora bien, en este caso $\mathfrak{g}$ se descompone de manera natural como suma directa de espacios vectoriales $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, donde $\mathfrak{k}$ es el álgebra de Lie de K (pensada como espacio vectorial) y $\mathfrak{p}$ su complemento ortogonal en $\mathfrak{g}$ con respecto a la forma de Killing B de $\mathfrak{g}$, que resulta ser definida positiva en $\mathfrak{p}$ y definida negativa en $\mathfrak{k}$; luego con un cambio de signo obtenemos un producto interior para $\mathfrak{g}$, producto interior respecto al cual la anterior descomposición es ortogonal. En este punto, escogemos $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ un subespacio abeliano maximal, que resulta ser 1-dimensional. Por ello, los operadores del conjunto $\{\mathrm{ad}(H) \mid H \in \mathfrak{a}\}$ conmutan. Además, son autoadjuntos respecto al producto interior inducido por la forma de Killing. Luego todos ellos diagonalizan simultáneamente. Como consecuencia, $\mathfrak{g}$ puede descomponerse como suma directa de estos autoespacios comunes $\mathfrak{g}_\lambda = \{X \in \mathfrak{g} = \mathfrak{su}(1,n) \mid \mathrm{ad}(H)X = \lambda(H)X, \quad \forall H \in \mathfrak{a}\}$, con $\lambda \in \mathfrak{a}^*$. En este caso particular obtenemos la descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-2\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$, cuyos elementos están sujetos a la relación $[\mathfrak{g}_\gamma, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\gamma+\beta}$. Además, puede comprobarse que $\mathfrak{g}_\alpha$ es un espacio vectorial complejo $(n-1)$- dimensional, isomorfo por tanto a $\mathbb{C}^{n-1}$. En este punto, podemos definir un álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$, que es de hecho isomorfa al álgebra de Heisenberg de dimensión $2n-1$. Pues bien, el teorema de descomposición de Iwasawa [1, Proposición 6.43], afirma que podemos escribir $\mathfrak{g}$ como la suma directa $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$. Ahora bien, si uno se restringe a $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, resulta que el subgrupo conexo de G asociado a este álgebra de Lie, AN, actúa libre y transitivamente en el espacio hiperbólico complejo, lo cual permite definir un difeomorfismo entre AN y $\mathbb{C}H^n$, pudiendo entonces entender este último como un grupo de Lie. De hecho, un grupo de Lie resoluble con métrica invariante a la izquierda. Esto nos permite reescribir toda la geometría de $\mathbb{C}H^n$ en términos de álgebras de Lie.

3. Teorema Principal

Comenzamos esta sección enunciando el Teorema de Clasificación y, a continuación, pasamos a explicar la construcción de los ejemplos involucrados en el mismo.

Teorema Principal. *Sea M una hipersuperficie conexa real en el espacio hiperbólico complejo $\mathbb{C}H^n$, $n \geq 2$. Entonces, M es una hipersuperficie isoparamétrica si y solo si M es congruente a una parte abierta de:*

(I) *un tubo alrededor de un espacio hipérbolico complejo totalmente geodésico $\mathbb{C}H^k$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$,*

(II) *un tubo alrededor de un espacio hiperbólico real totalmente geodésico $\mathbb{R}H^n$,*

(III) *una horosfera,*

(IV) *una hipersuperficie de Lohnherr reglada minimal homogénea* W^{2n-1}, *o alguna de sus hipersuperficies equidistantes,*

(V) *un tubo alrededor de una subvariedad reglada minimal homogénea* W_{φ}^{2n-k}, *construida por Berndt-Brück, para* $k \in \{2, \ldots, n-1\}$, $\varphi \in (0, \pi/2]$,

(VI) *un tubo alrededor de una subvariedad reglada minimal homogénea* $W_{\mathfrak{w}}$, *para algún subespacio propio* $\mathfrak{w}$ *de* $\mathfrak{g}_\alpha \cong \mathbb{C}^{n-1}$ *tal que* $\mathfrak{w}^\perp$, *el complemento ortogonal de* $\mathfrak{w}$ *en* $\mathfrak{g}_\alpha$, *tiene ángulo de Kähler no constante.*

Los ejemplos (I), (II), (III) del Teorema Principal se corresponden con los ejemplos de la lista de Montiel, que son ejemplos de hipersuperficies Hopf y por tanto homogéneas. Nótese que, con la notación del Teorema, de manera natural, podemos pensar en $\mathbb{C}^{k+1}$ incluido en $\mathbb{C}^{n+1}$ (respectivamente $\mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$); luego también es natural pensar en $\mathbb{C}H^k$ como subvariedad de $\mathbb{C}H^n$ (respectivamente $\mathbb{R}H^n \subset \mathbb{C}H^n$). De esta manera, construyendo tubos alrededor de estas dos subvariedades obtenemos ejemplos de hipersuperficies isoparamétricas. Así quedan descritos los ejemplos (I) y (II) del Teorema Principal. Las horosferas, (III), se construyen haciendo actuar N, el subgrupo de Lie asociado al álgebra de Lie $\mathfrak{n}$ de la descomposición de Iwasawa.

Ahora, teniendo en cuenta las consideraciones de la sección anterior, pasamos a introducir un método para construir otros ejemplos de hipersuperficies isoparamétricas en $\mathbb{C}H^n$. Escogemos para ello $\mathfrak{w} \subset \mathfrak{g}_\alpha$ un subespacio real, pensando $\mathfrak{g}_\alpha$ como espacio vectorial real de dimensión $2n-2$. A continuación, construimos el álgebra de Lie $\mathfrak{s}_{\mathfrak{w}} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{w} \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$ y pasamos a considerar el subgrupo conexo $S_{\mathfrak{w}} \subset G$ asociado al álgebra de Lie $\mathfrak{s}_{\mathfrak{w}}$. En este punto, definimos $W_{\mathfrak{w}}$ como la órbita de $S_{\mathfrak{w}}$ a través del punto $o \in \mathbb{C}H^n$ escogido para inducir la anterior descomposición de Iwasawa. Esta subvariedad $W_{\mathfrak{w}}$ es una subvariedad homogénea minimal. Pues bien, los tubos alrededor de esta subvariedad son ejemplos de hipersuperficies isoparamétricas. Esta técnica sirve para construir los ejemplos (IV), (V) y (VI). La primera de estas tres familias, que está formada por hipersuperficies homogéneas, (IV), se obtiene cuando tomamos $\mathfrak{w}$ un hiperplano real en $\mathfrak{g}_\alpha$. Sin embargo, para distinguir las dos familias restantes de ejemplos, se hace necesario introducir la noción de ángulo de Kähler.

Para ello, es crucial que la estructura compleja J de $\mathbb{C}H^n$, expresada en términos de álgebras de Lie, constituye una estructura compleja hermitiana para $\mathfrak{g}_\alpha$. Por tanto, si ahora, tal y como se hace en el Teorema Principal, consideramos $\mathfrak{w}^\perp$ el complemento ortogonal de $\mathfrak{w}$ en $\mathfrak{g}_\alpha$, es posible, para cada elemento $\xi \in \mathfrak{w}^\perp \setminus \{0\}$, medir el ángulo entre $J\xi$ y el subespacio $\mathfrak{w}^\perp$. Pues bien, este ángulo entre 0 y $\pi/2$ es lo que se conoce como ángulo de Kähler de ξ con respecto a $\mathfrak{w}^\perp$. Por otra parte, diremos que $\mathfrak{w}^\perp$ tiene ángulo de Kähler constante cuando todos sus elementos no nulos tengan el mismo ángulo de Kähler. Ahora, atendiendo a la constancia o no del ángulo de Kähler en $\mathfrak{w}^{\perp}$, podemos distinguir las familias (V) y (VI) de hipersuperficies isoparamétricas. Cuando $\mathfrak{w}^{\perp}$ tiene ángulo de Kähler constante, entonces obtenemos ejemplos de hipersuperficies isoparamétricas homogéneas y por tanto, con curvaturas principales constantes. Por otro lado, cuando $\mathfrak{w}^{\perp}$ tiene ángulo de Kähler no constante, obtenemos las únicas familias de hipersuperficies isoparamétricas no homogéneas y además, con curvaturas principales no constantes. De hecho, pese a que todas las subvariedades focales de los ejemplos (IV), (V) y (VI) son homogéneas, solo en los casos (IV) y (V) son homogéneos los tubos alrededor de las mismas.

4. Consecuencias del Teorema Principal

Dedicamos la presente sección a exponer algunas consecuencias del Teorema Principal. En primer lugar, y atendiendo a que en el ámbito de las hipersuperficies la propiedad de ser homogénea implica la propiedad de ser isoparamétrica, se obtiene como corolario de este resultado la clasificación de hipersuperficies homogéneas en espacios hiperbólicos complejos. Por contra, examinando la otra implicación, es evidente que no es cierta, pues se han hallado ejemplos de hipersuperficies isoparamétricas no homogéneas (VI). Sin embargo, se tiene:

Corolario 4.1. *Una hipersuperficie isoparamétrica de $\mathbb{C}H^n$ tiene curvaturas principales constantes si y solo si es una parte abierta de una hipersuperficie homogénea de $\mathbb{C}H^n$.*

Para finalizar presentamos un caso curioso. Nótese que para $\mathbb{C}H^2$, se tiene que $\mathfrak{g}_\alpha$ es isomorfo a la recta compleja $\mathbb{C}$. Por tanto, en este caso $0 \neq \mathfrak{w} \subset \mathfrak{g}_\alpha$ es siempre un hiperplano. Como consecuencia:

Corolario 4.2. *Una hipersuperficie isoparamétrica $\mathbb{C}H^2$ es parte abierta de una hipersuperficie homogénea.*

Referencias

[1] A. W. Knapp, *Lie groups beyond an introduction*, Second edition, Progress in Mathematics, **140**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2002.

[2] J. C. Díaz-Ramos, M. Domínguez-Vázquez, V. Sanmartín-López, *Isoparametric hypersurfaces in complex hyperbolic spaces*, *Adv. Math.* **314** (2017), 756–805.

[3] G. Thorbergsson, A survey on isoparametric hypersurfaces and their generalizations, *Handbook of differential geometry*, Vol. I, 963–995, North-Holland, Amsterdam, 2000.