

Proyecto Fin de Máster

Máster en Ingeniería Industrial

Formulación Cuadrática del Flujo de Carga
Factorizado en Coordenadas Cartesianas

Autor: *Jose Manuel Ruiz Oltra*

Tutores: *Catalina Gómez Quiles*

Antonio Gómez Expósito

Dep. de Ingeniería Eléctrica
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2017



Proyecto Fin de Máster
Máster en Ingeniería Industrial

Formulación Cuadrática del Flujo de Carga Factorizado en Coordenadas Cartesianas

Autor:

Jose Manuel Ruiz Oltra

Tutores:

Catalina Gómez Quiles

Profesora Contratada Doctora

Antonio Gómez Expósito

Catedrático de Universidad

Dep. de Ingeniería Eléctrica
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla
Sevilla, 2017

Proyecto Fin de Máster: Formulación Cuadrática del Flujo de Carga Factorizado en Coordenadas Cartesianas

Autor: *Jose Manuel Ruiz Oltra*

Tutores: *Catalina Gómez Quiles*
Antonio Gómez Expósito

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2017

El Secretario del Tribunal

Sin duda alguna, la novedad más relevante que se introduce en este trabajo es la presentación de una formulación puramente cuadrática del flujo de cargas. Originalmente, el flujo de cargas en coordenadas cartesianas ya es de por sí cuadrático, pero este contiene los términos cruzados del tipo $x_i * x_j$, lo que dificulta el tratamiento y convergencia del problema. En este trabajo se introduce una idea totalmente original y novedosa que no se había realizado hasta ahora: una formulación cuadrática del flujo de cargas, en la que no existen términos cruzados, denominada con las siglas *FLFQ* (flujo de cargas factorizado cuadrático).

En [1] se obtuvo una solución factorizada para el flujo de cargas en coordenadas cartesianas, en la que se usaban logaritmos en sus ecuaciones. Esta solución originaba un problema de igualdad matemática a la hora de realizar logaritmos de números complejos con parte real negativa, por lo que se introdujo la idea del offset de carácter real como solución. Con afán de mejorar este algoritmo, en este trabajo se introduce la idea de usar un offset complejo. El uso de este tipo de offset se justifica en [2], con lo cual se obtendrían ciertas ventajas respecto a la situación anterior.

En este proyecto primero se recordará la aparición y la formulación de los métodos factorizados para la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales. Una vez visto esto, se pasará a introducir la nueva variante del flujo de cargas que se mencionó en el párrafo inicial, la cual poseerá ciertas ventajas y desventajas que se observarán en el capítulo 7.

Este trabajo concluirá con diversos estudios comparativos entre los cuatro métodos de resolución de sistemas de ecuaciones no lineales: el método convencional de Newton-Raphson (*NR*), el flujo de cargas factorizado en coordenadas polares (*FLF*), el flujo de cargas factorizado en coordenadas cartesianas (*FLFRC*) y el flujo de cargas factorizado cuadrático (*FLFQ*). Esta comparativa se recoge de nuevo en el capítulo 7.

ÍNDICE

| | |
|--|-------------|
| Resumen | vii |
| Índice | viii |
| Índice de Tablas | ix |
| Índice de Figuras | x |
| 1 Introducción | 1 |
| 2 Revisión del FLF en polares | 3 |
| 2.1. <i>Formulación</i> | 3 |
| 2.2. <i>Algoritmo de resolución</i> | 5 |
| 2.3. <i>La importancia del perfil de tensiones inicial</i> | 7 |
| 3 Revisión del FLFRC | 12 |
| 3.1. <i>Algoritmo de resolución con offset</i> | 16 |
| 4 El uso de un offset complejo | 19 |
| 5 Formulación cuadrática | 21 |
| 6 Formulación cuadrática con offset | 32 |
| 7 Resultados | 44 |
| 7.1. <i>Comportamiento ante perfil plano</i> | 44 |
| 7.2. <i>Comportamiento ante distintos perfiles</i> | 47 |
| 7.3. <i>Comportamiento ante perfiles aleatorios</i> | 52 |
| 8 Conclusiones | 67 |
| 9 Apéndice | 68 |
| Referencias | 75 |

ÍNDICE DE TABLAS

| | |
|--|----|
| Tabla 1. Comparación de cargas máximas de convergencia entre los tres métodos factorizados | 45 |
| Tabla 2. Distintas soluciones para el sistema de 2 nudos | 49 |
| Tabla 3. Comportamiento de <i>NR</i> para la red de 14 nudos con perfiles iniciales aleatorios del estudio <i>n° 1</i> | 54 |
| Tabla 4. Comportamiento del <i>FLF</i> para la red de 14 nudos con perfiles iniciales aleatorios del estudio <i>n° 1</i> | 55 |
| Tabla 5. Comportamiento del <i>FLFRC</i> para la red de 14 nudos con perfiles iniciales aleatorios del estudio <i>n° 1</i> | 56 |
| Tabla 6. Comportamiento del <i>FLFQ</i> para la red de 14 nudos con perfiles iniciales aleatorios del estudio <i>n° 1</i> | 57 |
| Tabla 7. Comportamiento de <i>NR</i> para la red de 14 nudos con perfiles iniciales aleatorios del estudio <i>n° 2</i> | 58 |
| Tabla 8. Comportamiento del <i>FLF</i> para la red de 14 nudos con perfiles iniciales aleatorios del estudio <i>n° 2</i> | 59 |
| Tabla 9. Comportamiento del <i>FLFRC</i> para la red de 14 nudos con perfiles iniciales aleatorios del estudio <i>n° 2</i> | 60 |
| Tabla 10. Comportamiento del <i>FLFQ</i> para la red de 14 nudos con perfiles iniciales aleatorios del estudio <i>n° 2</i> | 61 |
| Tabla 11. Comportamiento de <i>NR</i> para la red de 14 nudos con perfiles iniciales aleatorios del estudio <i>n° 3</i> | 62 |
| Tabla 12. Comportamiento del <i>FLF</i> para la red de 14 nudos con perfiles iniciales aleatorios del estudio <i>n° 3</i> | 63 |
| Tabla 13. Comportamiento del <i>FLFRC</i> para la red de 14 nudos con perfiles iniciales aleatorios del estudio <i>n° 3</i> | 64 |
| Tabla 14. Comportamiento del <i>FLFQ</i> para la red de 14 nudos con perfiles iniciales aleatorios del estudio <i>n° 3</i> | 65 |

ÍNDICE DE FIGURAS

| | |
|---|----|
| Figura 1. Estados de un sistema eléctrico según su seguridad | 1 |
| Figura 2. Algoritmo de resolución del <i>FLF</i> | 7 |
| Figura 3. Sistema de 2 nudos (versión 1) | 8 |
| Figura 4. Región de atracción con el método de <i>Newton-Raphson</i> | 9 |
| Figura 5. Región de atracción con <i>FLF</i> | 9 |
| Figura 6. Evolución de la tensión en nudos PQ en un sistema de 14 nudos ante caso factible, empezando desde $U_0 = K_0 = 1 + j0.0001$ | 10 |
| Figura 7. Evolución de la tensión en nudos PQ en un sistema de 14 nudos ante caso factible, empezando desde $U_0 = K_0 = 0.5 + j0.5$ | 11 |
| Figura 8. Evolución de la tensión en nudos PQ en un sistema de 14 nudos ante caso infactible, empezando desde $U_0 = K_0 = 1 + j0.0001$ para $\lambda = 4.2$ | 11 |
| Figura 9. Evolución de la tensión en nudos PQ en un sistema de 14 nudos ante caso infactible, empezando desde $U_0 = K_0 = 0.5 + j0.5$ para $\lambda = 4.2$ | 12 |
| Figura 10. Algoritmo de resolución del <i>FLFRC</i> | 18 |
| Figura 11. Iteraciones frente a la variación de la carga para la red de 2 nudos | 19 |
| Figura 12. Iteraciones frente a la variación de la carga para la red de 14 nudos | 20 |
| Figura 13. Iteraciones frente a casos infactibles para la red de 2 nudos | 20 |
| Figura 14. Iteraciones frente a casos infactibles para la red de 14 nudos | 21 |
| Figura 15. Comparación de iteraciones entre los tres métodos factorizados para la red de dos nudos: casos factibles | 44 |
| Figura 16. Comparación de iteraciones entre los tres métodos factorizados para la red de dos nudos: casos infactibles | 45 |
| Figura 17. Iteraciones frente a la variación de la <i>S.I.</i> y de la carga de la red para la red de 14 nudos, usando el <i>FLF</i> | 46 |
| Figura 18. Iteraciones frente a la variación del offset y de la carga de la red para la red de 14 nudos, usando el <i>FLFRC</i> | 46 |
| Figura 19. Iteraciones frente a la variación del offset y de la carga de la red para la red de 14 nudos, usando el <i>FLFQ</i> | 47 |
| Figura 20. Sistema de 2 nudos | 48 |
| Figura 21. Región de atracción con el método de <i>Newton-Raphson</i> para el sistema de 2 nudos | 48 |
| Figura 22. Región de atracción con <i>FLF</i> para el sistema de 2 nudos | 49 |
| Figura 23. Iteraciones con <i>FLF</i> para el sistema de 2 nudos | 49 |
| Figura 24. Región de atracción con <i>FLFRC</i> para el sistema de 2 nudos | 50 |
| Figura 25. Iteraciones con <i>FLFRC</i> para el sistema de 2 nudos | 50 |
| Figura 26. Región de atracción con <i>FLFQ</i> para el sistema de 2 nudos | 51 |
| Figura 27. Iteraciones con <i>FLFQ</i> para el sistema de 2 nudos | 51 |
| Figura 28. Áreas excluyentes para los perfiles iniciales | 52 |

| | |
|---|----|
| Figura 29. Sistema de 2 nudos (versión 2) | 68 |
| Figura 30. Iteraciones frente a la variación de la S.I. y de la carga de la red para la red de 118 nudos, usando el <i>FLF</i> | 72 |
| Figura 31. Iteraciones frente a la variación del offset y de la carga de la red para la red de 118 nudos, usando el <i>FLFRC</i> | 72 |
| Figura 32. Iteraciones frente a la variación del offset y de la carga de la red para la red de 118 nudos, usando el <i>FLFQ</i> | 73 |
| Figura 33. Iteraciones frente a la variación de la S.I. y de la carga de la red para la red de 300 nudos, usando el <i>FLF</i> | 73 |
| Figura 34. Iteraciones frente a la variación del offset y de la carga de la red para la red de 300 nudos, usando el <i>FLFRC</i> | 74 |
| Figura 35. Iteraciones frente a la variación del offset y de la carga de la red para la red de 300 nudos, usando el <i>FLFQ</i> | 74 |

1 INTRODUCCIÓN

Una de las herramientas más utilizadas e importantes en el área de la ingeniería eléctrica es el flujo de cargas o *load flow*, el cual consiste en obtener las condiciones de operación en régimen permanente de un sistema de energía eléctrica. Concretamente, dados los consumos en cada nudo, y la potencia generada por los alternadores, se trata de encontrar las tensiones en los nudos y los flujos de potencia por las líneas y transformadores.

En la operación diaria, constituye la base del análisis de seguridad del sistema o análisis de contingencias. Esta herramienta se ejecuta periódicamente para identificar posibles problemas de sobrecargas o tensiones inaceptables, como consecuencia de la evolución de la carga, o cuando ocurre algún cambio brusco (inesperado o programado) en la topología de la red. En la planificación, permite simular el estado en que se encontrarán los distintos escenarios que se están analizando ante una demanda estimada. En la siguiente figura (Figura 1) se especifica los posibles estados de un sistema eléctrico en función de la seguridad, en el que la aplicación del flujo de cargas es vital para analizar cada estado, ya sea de manera preventiva o correctiva.

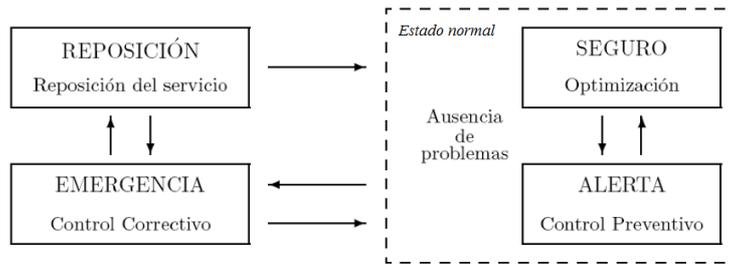


Figura 1. Estados de un sistema eléctrico según su seguridad

El flujo de cargas consta básicamente de dos etapas: la primera y más decisiva consiste en obtener las tensiones complejas en todos los nudos eléctricos. Para este propósito no es posible utilizar las herramientas convencionales de análisis de circuitos lineales, porque las restricciones de contorno no se especifican en términos de impedancias (cargas) y fuentes de tensión (generadores) sino de potencias, lo cual conduce a un sistema no lineal de ecuaciones. La segunda etapa consiste simplemente en el cálculo de todas las magnitudes de interés, como flujos de potencia activa y reactiva, pérdidas, etc., lo cual es inmediato.

El problema del flujo de cargas consiste en resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$P_i^{esp} = V_i \sum_{j=1}^n V_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) \quad (1)$$

$$i = 1, 2, \dots, n_D + n_G$$

$$Q_i^{esp} = V_i \sum_{j=1}^n V_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}) \quad (2)$$

$$i = 1, 2, \dots, n_D$$

Y una vez resueltas las ecuaciones anteriores, es posible calcular cualquier otra magnitud eléctrica deseada.

Para resolver estas ecuaciones, el método más usado es el *Método de Newton-Raphson*, aunque también cabe destacar a su predecesor, el *Método de Gauss-Seidel* cuya convergencia es bastante pobre.

En general, estos métodos consisten en encontrar el vector x que satisface el sistema no lineal

$$f(x) = 0 \quad (3)$$

Atendiendo al método de *Newton-Raphson* la ecuación (3) se aproxima por su desarrollo en serie alrededor del punto x^k :

$$f(x) \cong f(x^k) + F(x^k)(x^{k+1} - x^k) = 0 \quad (4)$$

donde $F = \frac{\partial f}{\partial x}$ es el jacobiano de $f(x)$. Partiendo del valor inicial x^0 se obtienen correcciones Δx^k resolviendo el sistema lineal:

$$-F(x^k)\Delta x^k = f(x^k) \quad (5)$$

y nuevos valores x^{k+1} de:

$$x^{k+1} = x^k + \Delta x^k \quad (6)$$

El proceso iterativo se detiene cuando se cumple que:

$$\max_i |f_i(x^k)| \leq \varepsilon$$

para un ε suficientemente pequeño (como por ejemplo, 10^{-5}). Para valores x^0 próximos a la solución, el método de *Newton-Raphson* converge cuadráticamente (cuando diverge también lo hace cuadráticamente). En el caso concreto del flujo de cargas, con independencia del tamaño de la red, el número de iteraciones oscila habitualmente entre 3 y 5 partiendo de perfil plano [3], aunque la actualización de variables de control descrita en [4] puede aumentar significativamente este número.

Para casos donde la velocidad de la solución es más importante que la fiabilidad de la misma, se desarrollaron nuevos métodos computacionalmente menos costosos, como son el '*Flujo de cargas en continua*' [5] y el '*Método desacoplado rápido*' [6] (*Fast decoupled load flow method* en inglés), siendo éste último el más popular. La principal diferencia entre estos dos métodos y el método convencional de *Newton-Raphson* reside en el tratamiento del jacobiano, el cuál se mantiene constante en las dos metodologías anteriormente citadas y es calculado únicamente al principio.

La principal ventaja del método de *Newton-Raphson* sobre los métodos anteriormente descritos, es que éste posee convergencia cuadrática cuando la solución está lo suficientemente cerca. Esto explica por qué el número de iteraciones suele resultar independiente del tamaño del sistema cuando se adopta un perfil inicial plano. Sin embargo, si la suposición inicial no está lo suficientemente cerca de la solución, como ocurre cuando la red está muy cargada, el método de *Newton-Raphson* diverge a la misma velocidad (divergencia cuadrática), aunque el caso que se esté resolviendo se encuentre en zona factible. Es por ello por lo que las herramientas comerciales suelen permitir al usuario adoptar distintas alternativas como perfil de inicio, basadas en métodos iterativos más simples ([5] y [6]).

En los últimos años ha emergido una aproximación muy prometedora para la solución de sistemas sobredeterminados gracias a la idea de desglosar el sistema no lineal original en dos subsistemas, uno de ellos lineal, el cual es resuelto en dos pasos [7].

Recientemente ha sido demostrado que la misma idea anterior también puede ser aplicada en el problema del flujo de cargas (ver [8]), denominado '*Flujo de cargas factorizado*' (*FLF*), cuya convergencia es más fiable que el método convencional de *Newton-Raphson*, particularmente en casos cercanos al límite de máxima

cargabilidad del sistema. El *FLF* implica la solución de dos sistemas de ecuaciones por cada iteración, siendo el primero un problema lineal de mínima distancia, y el segundo, un paso similar al de *Newton-Raphson*.

La versión del anterior *FLF* utiliza coordenadas polares de las tensiones nodales, en [1] se desarrolla y se analiza el mismo método factorizado, pero usando coordenadas cartesianas (el denominado *FLFRC*). Esta última versión presenta ciertas ventajas y desventajas sobre la versión en coordenadas polares, todas ellas recogidas en [1]. Este método tiene como principal característica el uso de logaritmos para la resolución de sus ecuaciones, en este trabajo se presenta el mismo método pero cambiando la versión logarítmica por una versión cuadrática-lineal, presentando ciertas ventajas que se verán en la sección de Resultados.

2 REVISIÓN DEL FLF EN POLARES

Como novedad de este método (*FLF*) se demuestra que, con una inicialización acertada puede converger fiablemente a dos tipos de soluciones, una real y otra compleja. La solución real se alcanza cuando el sistema se encuentra en zona factible, y la solución compleja cuando se trata de un caso infactible. En [9] se analizan y se prueban distintas estrategias de inicialización, con el objetivo de reducir el número de iteraciones en cuanto sea posible, ante distintos estados de carga en la red.

2.1. Formulación

Una forma compacta de escribir el sistema de ecuaciones del flujo de cargas por el método de *Newton-Raphson* es:

$$h(x) = p \quad (7)$$

donde,

p es el vector de potencias activa y reactiva especificadas. En la expresión polar contiene la potencia activa inyectada en todos los nudos, menos en el nudo slack, y la potencia reactiva inyectada en todos los nudos de consumo (nudos PQ). Luego, el vector p viene dado por:

$$p = [P_1, P_2, \dots, P_{N-1} | Q_1, Q_2, \dots, Q_{N_{PQ}}]^T \quad (8)$$

x es el vector de estado. En la formulación polar convencional contiene: ángulos de desfase de todos los nudos, menos el slack, y módulos de las tensiones de todos los nudos de consumo (nudos PQ). Luego este vector es de la forma:

$$x = [V_1, V_2, \dots, V_{N_{PQ}} | \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{N-1}]^T \quad (9)$$

Partiendo de un valor inicial, x_0 , el método de *Newton-Raphson* devuelve una solución resolviendo de forma iterativa el siguiente sistema:

$$H_k \Delta x_k = \Delta p_k = p - h(x_k) \quad (10)$$

donde $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, H_k es el jacobiano de $h(\cdot)$, calculado en el punto actual x_k , y Δp_k es la diferencia de potencias o vector de residuos.

La solución del *FLF* recurre a un vector de estado ligeramente modificado, x , y requiere la introducción de dos vectores auxiliares, u e y , como se ve en [8]:

- El vector de estado x , compuesto por $n = 2N - 1$ elementos, en el que los módulos de las tensiones han sido reemplazados por una expresión equivalente:

$$x = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N | \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{N-1}]^T \quad (11)$$

donde $\alpha_i = \ln V_i^2$.

- Vector y :

$$y = \{U_i, K_{ij}, L_{ij}\} \quad (12)$$

donde $U_i = V_i^2$ y, para cada rama que conecta el nudo i con el nudo j , la pareja de variables K_{ij}, L_{ij} viene dada por:

$$K_{ij} = V_i V_j \cos \theta_{ij} \quad (13)$$

$$L_{ij} = V_i V_j \sin \theta_{ij} \quad (14)$$

Este vector y está compuesto por m variables, donde $m = 2b + N$, siendo b el número de ramas y N el número de nudos.

- Vector u , compuesto también por m variables:

$$u = \{\alpha_i, \alpha_{ij}, \theta_{ij}\} \quad (15)$$

donde

$$\alpha_{ij} = \alpha_i + \alpha_j \quad (16)$$

$$\theta_{ij} = \theta_i - \theta_j \quad (17)$$

El *FLF* desglosa el sistema original (7) en los siguientes problemas más simples [10]:

$$Ey = p \quad (18)$$

$$u = f(y) \quad (19)$$

$$Cx = u \quad (20)$$

donde E y C son matrices rectangulares de tamaño $n \times m$ y $m \times n$, respectivamente, y el vector $f(\cdot)$ está definido en términos de funciones elementales no lineales, que pueden ser fácilmente invertidas, obteniéndose así:

$$y = f^{-1}(u) \quad (21)$$

El sistema aumentado de arriba, puede ser expresado de manera más compacta, eliminando el vector u :

$$Ey = p \quad (22)$$

$$Cx = f(y) \quad (23)$$

Resaltar que (22) es un sistema lineal subdeterminado, mientras que (23) es sobredeterminado. Entre las infinitas soluciones de (22), sólo la que satisface (23) constituye una solución para el problema original no lineal (7). Cuando el vector auxiliar restante y es eliminado, se obtiene el sistema original:

$$Ef^{-1}(Cx) = p \quad (24)$$

obteniendo una solución parecida al sistema original de *Newton-Raphson*:

$$[EF_k^{-1}C]\Delta x_k = p - Ef^{-1}(Cx) = \Delta p_k \quad (25)$$

donde F es el jacobiano de $f(\cdot)$.

2.2. Algoritmo de resolución

Como vimos anteriormente, el *FLF* puede dividirse en dos problemas, uno lineal y otro no lineal. El primero de ellos es un problema de mínima distancia, y el último es un procedimiento muy similar al de *Newton-Raphson*. Las dos fases del procedimiento surgen de la representación factorizada de sistemas no lineales, luego puede ser formalmente ejecutado como sigue, asumiendo la no singularidad del jacobiano ([8], [10]):

Paso 0: inicialización

Para un valor inicial, x_0 , construir $y_0 = f^{-1}(Cx_0)$. A diferencia del método de *Newton-Raphson*, en el *FLF* es posible inicializar directamente con $y_k = y_0$, pudiendo resultar ventajoso a la hora de enfrentarse a casos mas complejos.

Paso 1:

1.1. Calcular λ resolviendo el sistema lineal,

$$(EE^T)\lambda = p - Ey_k \quad (26)$$

1.2. Obtener \tilde{y} de:

$$\tilde{y}_k = y_k + E^T \lambda \quad (27)$$

1.3. Calcular $\tilde{u}_k = f(\tilde{y}_k)$

Paso 2:

2.1. Obtener x_{k+1} resolviendo:

$$\tilde{H}x_{k+1} = E\tilde{F}^{-1}\tilde{u}_k \quad (28)$$

donde $\tilde{H} = E\tilde{F}^{-1}C$, calculado en $\tilde{u}_k = f(\tilde{y}_k)$.

2.2. Actualizar $y_{k+1} = f^{-1}(Cx_{k+1})$.

2.3. Comprobar la convergencia: si $\|p - Ey_{k+1}\|_\infty$ es lo suficientemente pequeño, entonces parar. En caso contrario, volver al paso 1.

En la figura de la siguiente página (Figura 2) se muestra un diagrama de flujo que recoge de manera mas visual toda la información anterior.

Cabe destacar que el coste computacional del paso 1 es muy alto, aunque si se realiza la descomposición de Cholesky de EE^T y se guarda de una iteración a la siguiente, este paso pasa a tener un coste moderado. Aún así, este esfuerzo extra es compensado por el paso 2, siendo este menos costoso que el paso convencional de *Newton-Raphson*. En general, cada iteración (que incluye la resolución de los dos pasos anteriores) ha mostrado ser más rápida que el procedimiento de *Newton-Raphson* para problemas reales complejos y grandes [8].

Además, se conoce que la matriz del jacobiano de *Newton-Raphson* se convierte singular cuando se alcanza el punto crítico o “curva de la nariz” (bifurcación). Después de ese punto, no existen soluciones físicas y el proceso iterativo de *Newton-Raphson* deja de funcionar [8].

Resultados mostrados en [8] demuestran que para sistemas muy grandes, el *FLF* es más robusto en términos de convergencia que el método tradicional de *Newton-Raphson*, particularmente en escenarios muy cargados, en el borde del límite de cargabilidad.

Otra gran ventaja, además novedosa, del *FLF* es que las soluciones físicamente posibles (caso factible) pueden ser siempre alcanzadas en el dominio real, mientras que cuando se va superando el límite de máxima cargabilidad del sistema, empiezan a surgir componentes imaginarias en la solución (ver [9]).

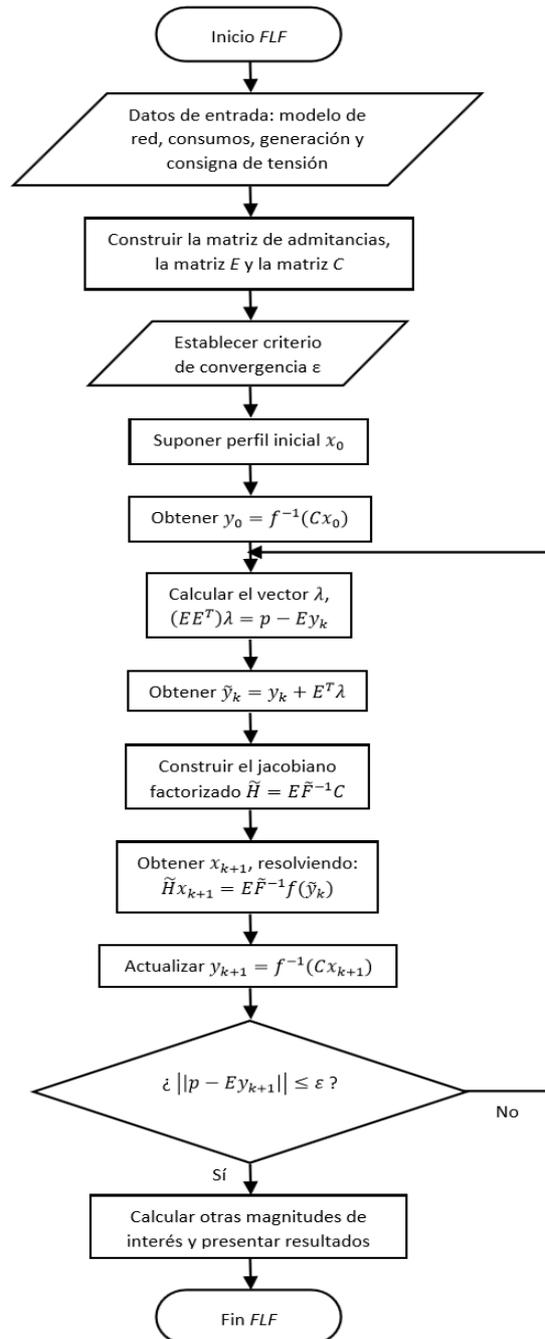


Figura 2. Algoritmo de resolución del *FLF*

2.3. La importancia del perfil de tensiones inicial

Como se explicó en el Capítulo 1, al tratarse de un problema iterativo, es necesario empezar suponiendo una solución (perfil inicial), generalmente en las variables del problema (tensiones y fases). Existen muchas posibilidades de perfiles iniciales, dando lugar a varias posibilidades como solución. La primera opción posible es que el proceso converja a una solución real, tras más o menos iteraciones. Otra posibilidad es que el proceso iterativo converja a soluciones físicamente imposibles o inviábiles, o incluso que no converja a ninguna solución, debido a la lejanía entre la suposición inicial y una posible solución del problema. Es por ello por lo que la elección de un perfil inicial correcto es muy importante, marcando la diferencia entre resolver el problema o no.

La elección del perfil no es trivial, debido a la cantidad de soluciones matemáticas posibles. Afortunadamente, en la explotación normal del sistema eléctrico, las tensiones se mantienen muy próximas al valor en por unidad (oscilan en una banda muy pequeña) y los desfases entre nudos adyacentes se mueven en márgenes estrechos. Por este motivo la elección de un perfil inicial plano es casi siempre la mejor opción para iniciar el proceso iterativo, y consiste en hacer $\theta_i^0 = 0$ para todos los nudos y $V_i^0 = 1$ (pu) para los nudos de consumo (nudos PQ).

Aunque el perfil plano funciona en la mayoría de los casos, la convergencia nunca está garantizada. Como se ve en [11], la única forma de saber si un valor inicial es adecuado para obtener una solución, es determinar la zona de atracción del perfil inicial. Estas zonas pueden ser de tres tipos:

1. El perfil inicial está en el interior de la región de atracción de la solución y el método numérico converge.
2. El perfil inicial está fuera del área de atracción de la solución. El método numérico diverge si se parte de dicha suposición inicial.
3. Aunque el perfil inicial se encuentre dentro de la región de atracción, el método numérico diverge.

Desgraciadamente no es posible definir analíticamente la región de atracción, por lo que para definirla se usan métodos numéricos. Una forma de hacerlo es crear una malla en el plano XY , de manera que cada punto sea un perfil inicial distinto. Por ejemplo, se usará el eje de ordenadas como módulo de tensiones (V_i^0) y el eje de abscisas como ángulo de fase (θ_i^0), en grados. Una vez que se tiene la malla con todos los perfiles iniciales, basta con aplicar en cada punto el método numérico escogido y representar en la misma malla el resultado en términos de iteraciones para analizar la convergencia.

A continuación, se presenta un ejemplo que pone en práctica lo dicho anteriormente (Figura 3). El sistema de estudio consta de dos nudos, uno de ellos es el nudo slack, por lo que el problema queda resuelto al obtener la tensión del otro nudo, siendo ésta de $V_2 = 0.9209 - j0.0913$ pu, conociendo que su potencia compleja demanda es de $S_2 = 0.9 + j0.6$ pu. La malla de valores iniciales que se toma es bastante amplia, el eje de abscisas (ángulo de fases) está comprendido entre -150 y 150 grados, y el eje de ordenadas (módulo de tensiones) comprende los valores desde 0 a 10 en pu.

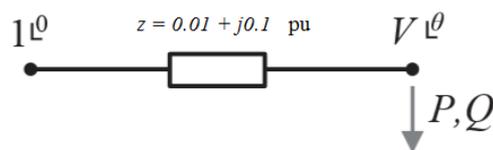


Figura 3. Sistema de 2 nudos (versión 1)

Esta idea se ha aplicado a dos métodos numéricos distintos, el primero (Figura 4) es el método convencional de *Newton-Raphson*, y el segundo (Figura 5), el *FLF*. Cabe destacar que la región de atracción depende del algoritmo de resolución o del método numérico que se aplique.

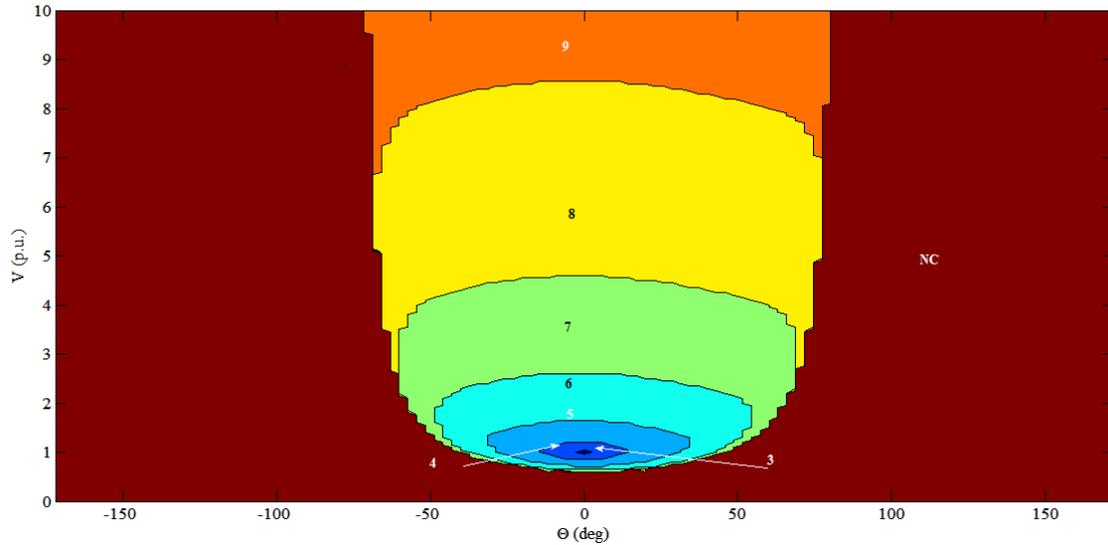


Figura 4. Región de atracción con el método de *Newton-Raphson*

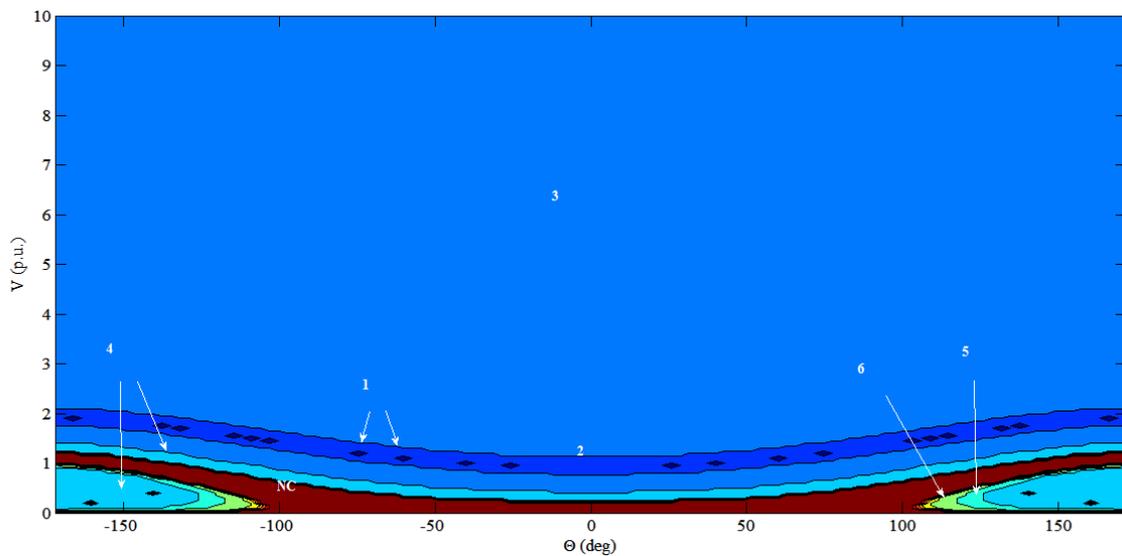


Figura 5. Región de atracción con *FLF*

Nota: para ambos métodos se ha aplicado la misma tolerancia o criterio de convergencia, 10^{-5} , y las dos figuras han sido extraídas de [12].

Los diferentes colores significan el número de iteraciones necesarias para obtener una solución, mientras que la zona más oscura o marrón significa que el método no converge.

En la figura donde se aplica el método de *Newton-Raphson* (Figura 4), vemos que la región de atracción es bastante amplia, siendo el perfil plano ($V_i^0 = 1 + 0j$) el área que requiere menos iteraciones. Si la comparamos con la figura en la que se aplica el *FLF* (Figura 5) notamos que la región de atracción es enormemente más amplia que en el caso anterior y que la zona de no convergencia se ha reducido notablemente. También merece destacar que en este último caso, en general, son pocas las iteraciones que se usan para alcanzar la solución (tres iteraciones en una zona bastante amplia) por lo que, como conclusión, podríamos decir que el *FLF* tiene una región de atracción mucho más amplia que la del método de *Newton-Raphson*, y que además necesita menos iteraciones para alcanzar la solución. Esto último lo convierte, de nuevo, en un método más robusto y fiable que el método de *Newton-Raphson*.

Más adelante (Sección 3), se aplicará esta misma idea al mismo sistema, pero haciendo uso del ‘*Flujo de Cargas Factorizado en Coordenadas Cartesianas*’ (*FLFRC*), obteniendo distintas conclusiones muy interesantes. El método anteriormente nombrado, *FLFRC*, es un algoritmo de resolución algo distinto que el anterior *FLF*, el cual se definirá y se explicará detalladamente en el próximo capítulo.

Hasta ahora se ha hablado sobre la estrategia de inicialización para el flujo de cargas, concretamente para el caso base del sistema. Sin embargo, a medida que la cargabilidad del sistema va aumentando y usamos el método convencional de *Newton-Raphson*, el perfil inicial plano va perdiendo las ventajas que indicamos anteriormente, debido a que las tensiones van disminuyendo desde su valor nominal. Incluso cuando nos acercamos al límite de máxima cargabilidad, si empezamos con perfil plano, es muy posible que no converja a una solución.

Como se dijo, el *FLF* ofrece más robustez que el método convencional de *Newton-Raphson*. Gracias a esta nueva técnica, adoptar un perfil plano como perfil de inicio sigue siendo una buena opción a la hora de ir aumentando la carga del sistema, incluso funciona bien si nos acercamos al límite de máxima cargabilidad, tal y como se demuestra en [9].

Por otra parte, cuando superamos el límite de máxima cargabilidad del sistema, el método de *Newton-Raphson* no converge a ninguna solución, a diferencia del *FLF* que sí converge, obteniendo resultados con componentes imaginarias. En este caso, si se sigue haciendo uso del perfil inicial plano, se alcanza un número alto de iteraciones; sin embargo, si se usa un perfil inicial con una cierta componente imaginaria, como se demuestra en [9], mejora bastante el comportamiento del *FLF* ante casos infactibles (mas allá del límite de máxima cargabilidad), reduciendo el número de iteraciones. A continuación se exponen algunos ejemplos recogidos en [9] sobre lo mencionado anteriormente:

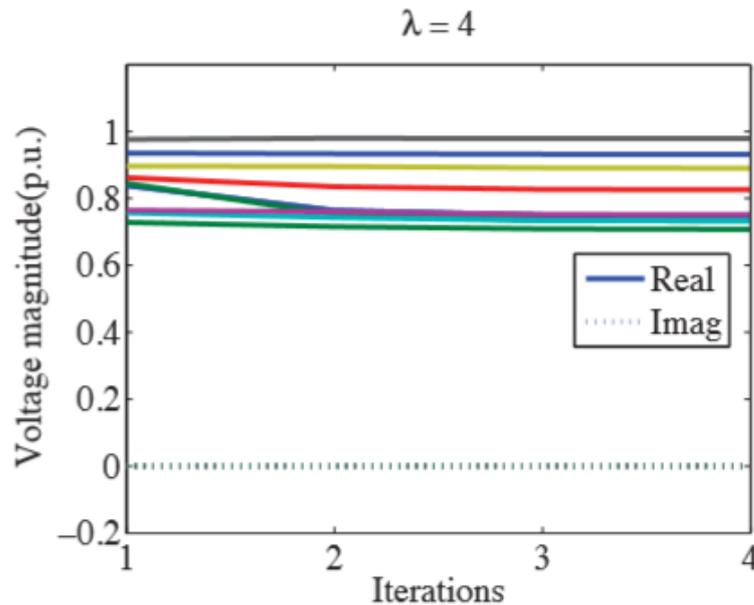


Figura 6. Evolución de la tensión en nodos PQ en un sistema de 14 nodos ante caso factible, empezando desde $U_0 = K_0 = 1 + j0.0001$

En la Figura 6 se ha fijado el nivel de carga en $\lambda = 4$, justo antes del límite de máxima cargabilidad de esta red (éste es de $\lambda = 4.03$). Se observa que adoptando un perfil inicial plano con una componente imaginaria casi nula, el número de iteraciones es bastante bajo, a pesar de que nos encontramos casi en el límite de máxima cargabilidad, lo que demuestra la robustez del método.

En la Figura 7 se analiza el mismo caso anterior, pero esta vez se ha tomado un perfil inicial distinto, en el que la componente imaginaria es mayor, siendo este $U_0 = K_0 = 0.5 + j0.5$.

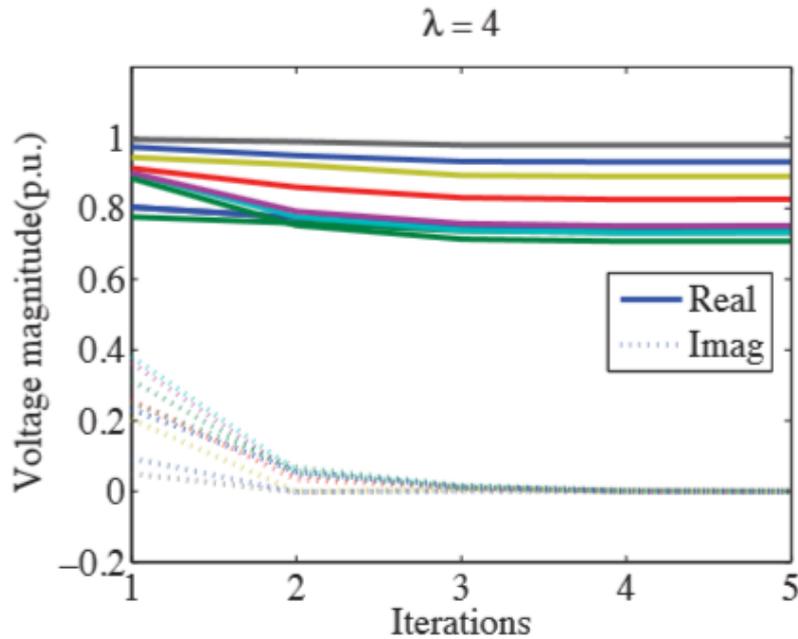


Figura 7. Evolución de la tensión en nodos PQ en un sistema de 14 nodos ante caso factible, empezando desde $U_0 = K_0 = 0.5 + j0.5$

En la figura anterior observamos que a pesar de empezar con una cierta componente imaginaria más elevada, el método converge, aunque en una iteración más que en el caso anterior (Figura 6). A medida que se va avanzando en las iteraciones, notamos como las componentes imaginarias de los módulos de tensiones se van anulando poco a poco, ya que nos encontramos ante un caso factible. Cabe destacar que aunque el perfil inicial es distinto al anterior, se alcanza la misma solución en ambos casos.

Ahora, analizemos de nuevo los dos casos anteriores, pero esta vez cambiando la carga a $\lambda = 4.2$, carga que supera el límite de máxima cargabilidad para esta red de 14 nodos:

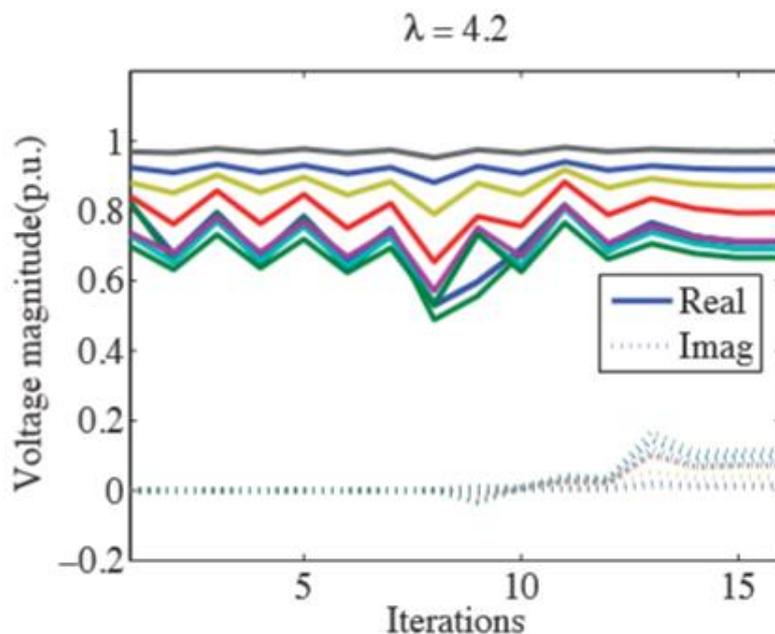


Figura 8. Evolución de la tensión en nodos PQ en un sistema de 14 nodos ante caso infactible, empezando desde $U_0 = K_0 = 1 + j0.0001$ para $\lambda = 4.2$

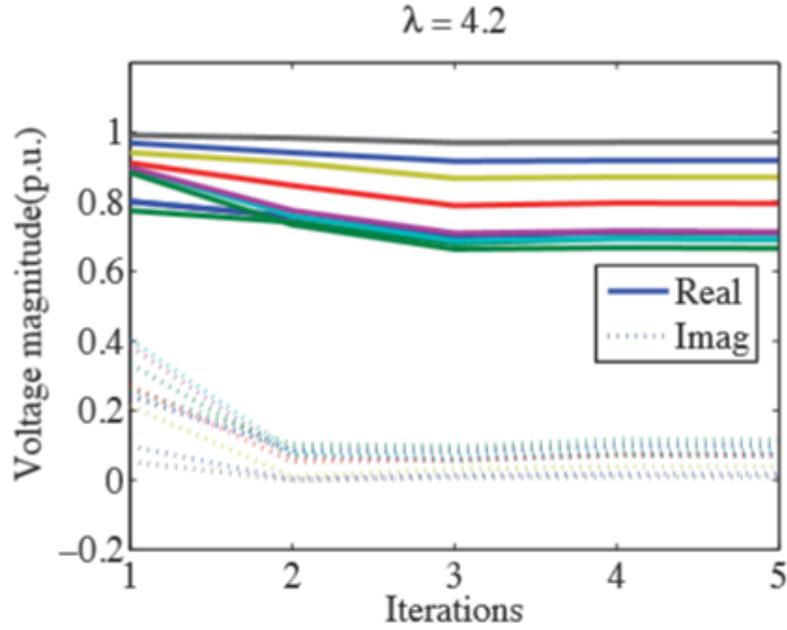


Figura 9. Evolución de la tensión en nudos PQ en un sistema de 14 nudos ante caso infactible, empezando desde $U_0 = K_0 = 0.5 + j0.5$ para $\lambda = 4.2$

Observamos que en la Figura 8 se alcanza una solución compleja en 16 iteraciones, notando un comportamiento oscilatorio, mientras que en la Figura 9 se consigue la misma solución compleja, pero esta vez en bastantes menos iteraciones, 5. También se puede apreciar como en este caso la componente imaginaria de cada módulo de las tensiones de los nudos es distinta de cero, ya que nos encontramos ante un caso infactible.

Como conclusión de lo anterior, si se recurre a un inicio complejo, aumenta significativamente el área de convergencia del *FLF* ante casos infactibles. En cambio, si se usa este mismo tipo de perfil ante casos factibles, se empeora un poco la convergencia del método, pudiendo tardar algo más en converger el *FLF* (normalmente una iteración más). Para más información acerca de la estrategia de inicialización, consultar [9].

3 REVISIÓN DEL FLFRC

La versión del *FLFRC* que recordaremos será la versión con offset vista en [2]. Cabe resaltar y recordar el uso del offset como solución para evitar que aparezcan partes reales negativas de un número a , y que la propiedad $\ln(a * b) = \ln(a) + \ln(b)$ sea siempre válida, tal y como se desarrolla en la sección 4.1 de [2]. Una vez recordado el uso necesario de un offset, la formulación del *FLFRC* queda de nuevo:

Sustituyendo el vector de tensiones u_i por u'_i :

$$u_i = e_i + jf_i \rightarrow u'_i = e'_i + jf'_i = (e_i + m) + j(f_i + m)$$

donde m es el valor del offset. Luego, las variables nuevas son ahora $e'_i = e_i + m$ y $f'_i = f_i + m$

Recordemos que la introducción del offset se realiza cuando se construye el perfil inicial de tensiones, y que cuando el problema converge, basta con obtener $[e'_1, e'_2, \dots, e'_N | f'_1, f'_2, \dots, f'_N]$ y deshacer el cambio de la siguiente forma:

$$e_i = e'_i - m \quad (29)$$

$$f_i = f'_i - m \quad (30)$$

En este caso, el sistema de ecuaciones a resolver sigue siendo el mismo visto en la Sección 2.1:

$$Ey = p \quad (31)$$

$$u = f(y) \quad (32)$$

$$Cx = u \quad (33)$$

La introducción del offset hace que vuelva a cambiar el vector de estado x , y con ello todas las variables del problema, las cuales se definen de la siguiente forma:

- El vector de estado x , compuesto por $2N$ elementos:

$$x = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N | \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N]^T \quad (34)$$

donde

$$\alpha_i = \ln e'_i = \ln(e_i + m) \quad (35)$$

$$\beta_i = \ln f'_i = \ln(f_i + m) \quad (36)$$

- Vector y , cuya dimensión es ahora $4(N + b)$:

$$y = \{e_i'^2, f_i'^2, e'_i, f'_i, e'_i e'_j, f'_i f'_j, e'_i f'_j, f'_i e'_j\} \quad (37)$$

- El vector u , también de dimensión $4(N + b)$, se obtiene de una forma más sencilla de la que se vió en la formulación anterior:

$$u = \ln y = \{\ln(e_i'^2), \ln(f_i'^2), \ln e'_i, \ln f'_i, \ln(e'_i e'_j), \ln(f'_i f'_j), \ln(e'_i f'_j), \ln(f'_i e'_j)\} \quad (38)$$

volviéndose a cumplir la relación

$$y = \exp(u) = f^{-1}(u)$$

- Vector p , de $2N - 1$ componentes:

$$p = [U_{slack}, U_1, U_2, \dots, U_{N_{PV}} | P_1, P_2, \dots, P_{N-1} | Q_1, Q_2, \dots, Q_{N_{PQ}}]^T \quad (39)$$

Sin embargo, a la hora de resolver $p = Ey$, no se usa el vector p . En su lugar, se recurre a un vector p modificado, \hat{p} , como sigue a continuación :

$$\hat{p} = p - p_I \quad (40)$$

donde p_I es un vector que contiene los términos independientes que resultan al aplicar las siguientes ecuaciones:

$$U_i^{SP} = U_i \quad (\text{para nudos PV}) \quad (41)$$

$$P_i^{SP} = G_{ii}U_i + \sum_{j \neq i}^{N-1} [G_{ij}U_{ij} + B_{ij}W_{ij}] \quad (42)$$

$$Q_i^{SP} = -B_{ii}U_i + \sum_{j \neq i}^{NPQ} [G_{ij}W_{ij} - B_{ij}U_{ij}] \quad (43)$$

donde

$$U_i = V_i^2 = e_i^2 + f_i^2 \quad (44)$$

$$U_{ij} = e_i e_j + f_i f_j \quad (45)$$

$$W_{ij} = -e_i f_j + f_i e_j \quad (46)$$

Los términos independientes citados anteriormente son aquellos que no dependen de ninguna variable contenida en el vector y , definido en (37). Todo esto se verá mas claramente en un ejemplo de aplicación del *FLFRC* con offset.

- Al cambiar el vector auxiliar y , la construcción de la matriz E también cambia drásticamente, pues esta expresa la relación del vector y con el vector p . Esta relación viene dada por las ecuaciones (41), (42) y (43) para las cuales es necesario transformar las variables $\{U_i, U_{ij}, W_{ij}\}$, para que estén dadas en función de e'_i y f'_i , ya que originalmente están escritas en función de e_i y f_i :

Sustituyendo (29) y (30) en (44), (45) y (46), se obtienen las siguientes expresiones en función de las variables e'_i y f'_i de $\{U_i, U_{ij}, W_{ij}\}$:

$$U_i = e_i'^2 + f_i'^2 - 2me'_i - 2mf'_i + 2m^2 \quad (47)$$

$$U_{ij} = e'_i e'_j + f'_i f'_j - me'_i - me'_j - mf'_i - mf'_j + 2m^2 \quad (48)$$

$$W_{ij} = -e'_i f'_j + f'_i e'_j + me'_i - me'_j - mf'_i + mf'_j \quad (49)$$

Aplicando las ecuaciones anteriores a (41), (42) y (43) ya es posible construir la nueva matriz E , de dimensiones $n \times 4(N + b)$.

- Matriz C , obtenida igual que anteriormente, de dimensiones $4(N + b) \times 2N$ y definida por las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}\ln e_i'^2 &= 2 \ln e_i' = 2\alpha_i \\ \ln f_i'^2 &= 2 \ln f_i' = 2\beta_i \\ \ln e_i' &= \alpha_i \\ \ln f_i' &= \beta_i \\ \ln e_i' e_j' &= \ln e_i' + \ln e_j' = \alpha_i + \alpha_j \\ \ln f_i' f_j' &= \ln f_i' + \ln f_j' = \beta_i + \beta_j \\ \ln e_i' f_j' &= \ln e_i' + \ln f_j' = \alpha_i + \beta_j \\ \ln f_i' e_j' &= \ln f_i' + \ln e_j' = \beta_i + \alpha_j\end{aligned}$$

Cabe destacar que las igualdades anteriores sólo son ciertas si no existen logaritmos con parte real negativa.

Una vez obtenidas estas expresiones, la relación entre u y x es inmediata:

$$\begin{bmatrix} \ln e_i'^2 \\ \ln f_i'^2 \\ \ln e_i' \\ \ln f_i' \\ \ln e_i' e_j' \\ \ln f_i' f_j' \\ \ln e_i' f_j' \\ \ln f_i' e_j' \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_N \end{bmatrix}$$

Finalmente, se obtiene el mismo sistema de ecuaciones que se obtuvo anteriormente, pero este presenta algunas diferencias:

$$[E\tilde{F}^{-1}C']x'_{k+1} = E\tilde{F}^{-1}\hat{u} \quad (50)$$

- 1) C' es la matriz reducida de C y se usa para que el producto $[E\tilde{F}^{-1}C']$ sea invertible. Esta matriz se obtiene suprimiendo la columna correspondiente a β_{slack} de C , pero, al ser no nulo β_{slack} debido a que $\beta_{slack} = \ln f'_{slack} = \ln(f_{slack} + m) = \ln m$ (suponiendo que f_{slack} es nulo), hay que hacer una corrección en el vector u .
- 2) \hat{u} es una versión corregida del vector u , producto del problema anterior. Este se obtiene restando a u la columna correspondiente a β_{slack} de la matriz C :

$$\hat{u} = u - C(:, \beta_{slack}) \ln(m) \quad (51)$$

En este caso, el jacobiano de $f(\cdot)$ es de una forma más simple que la vista en el *FLFRC* sin offset:

$$\tilde{F}^{-1} = \text{diag}(y) \quad (52)$$

donde $\text{diag}(y)$ es una matriz diagonal, de tamaño $4(N + b) \times 4(N + b)$, cuyos elementos son los del vector auxiliar y .

Por último, decir que del sistema de ecuaciones final (50) se obtiene x'_{k+1} , siendo x' un vector reducido del vector de estado x . Para obtener éste último vector, habría que añadir β_{slack} a x' , siendo $\beta_{slack} = \ln(m)$ (con la suposición que se vió anteriormente).

En [2] se expone un ejemplo numérico de aplicación directa de esta metodología a una red de 2 nudos, en el apartado Apéndice se muestra este ejemplo.

3.1. Algoritmo de resolución con offset

De forma muy similar al algoritmo de resolución del *FLF*, se definen los siguientes pasos de resolución:

Paso 0: inicialización

Se escoge un perfil inicial de tensiones, normalmente un perfil plano, además es necesario fijar un valor para el offset distinto de 0, ya que sin él, el proceso no podría ejecutarse debido a que el producto EE' se convierte en singular. Con él se obtiene el vector de estado $x'_0 = [\ln e'_1, \ln e'_2, \dots, \ln e'_N \mid \ln f'_1, \ln f'_2, \dots, \ln f'_N]^T$.

Una vez se tiene x'_0 , se construye $y_0 = f^{-1}(Cx'_0)$.

Paso 1:

1.1. Construir $\hat{p} = p - p_I$

1.2. Calcular $\Delta\hat{p}_k = \hat{p} - \hat{p}_k$, donde $\hat{p}_k = Ey_k$

1.3. Obtener Δy_k , resolviendo:

$$\Delta\hat{p}_k = E\Delta y_k$$

1.4. Obtener \tilde{y}_k de:

$$\tilde{y}_k = y_k + \Delta y_k$$

Paso 2:

1.1. Calcular u_k , transformarlo en \hat{u}_k y calcular el jacobiano \tilde{F}^{-1} :

$$u_k = \ln \tilde{y}_k$$

$$\tilde{F}^{-1} = \text{diag}(\tilde{y}_k)$$

Paso 3:

3.1. Obtener x'_{k+1} , resolviendo:

$$[E\tilde{F}^{-1}C']x'_{k+1} = E\tilde{F}^{-1}\hat{u}_k$$

3.2. Completar x'_{k+1} con $\ln m$, para obtener x_{k+1}

3.3. Obtener y_{k+1} :

$$y_{k+1} = \ln u_{k+1}$$

donde, $u_{k+1} = Cx_{k+1}$

Paso 4:

4.1. Comprobar la convergencia, si $\|\hat{p} - Ey_{k+1}\|_\infty$ es lo suficientemente pequeño, entonces seguir con el paso 5. En caso contrario, volver al paso 1.2.

Paso 5:

5.1. Obtener:

$$[e'_1, e'_2, \dots, e'_N | f'_1, f'_2, \dots, f'_N]^T = \exp(x')$$

5.2. Deshacer el cambio, restando el valor del offset m a cada componente del vector anterior, obteniendo:

$$[e_1, e_2, \dots, e_N | f_1, f_2, \dots, f_N]^T$$

5.3. Construir el vector de tensiones en forma rectangular:

$$u = \begin{bmatrix} e_1 + jf_1 \\ e_2 + jf_2 \\ \vdots \\ e_N + jf_N \end{bmatrix}$$

En la Figura 10 se muestra un diagrama de flujo que resume todo el proceso de manera más gráfica, al igual que se hizo con el *FLF*.

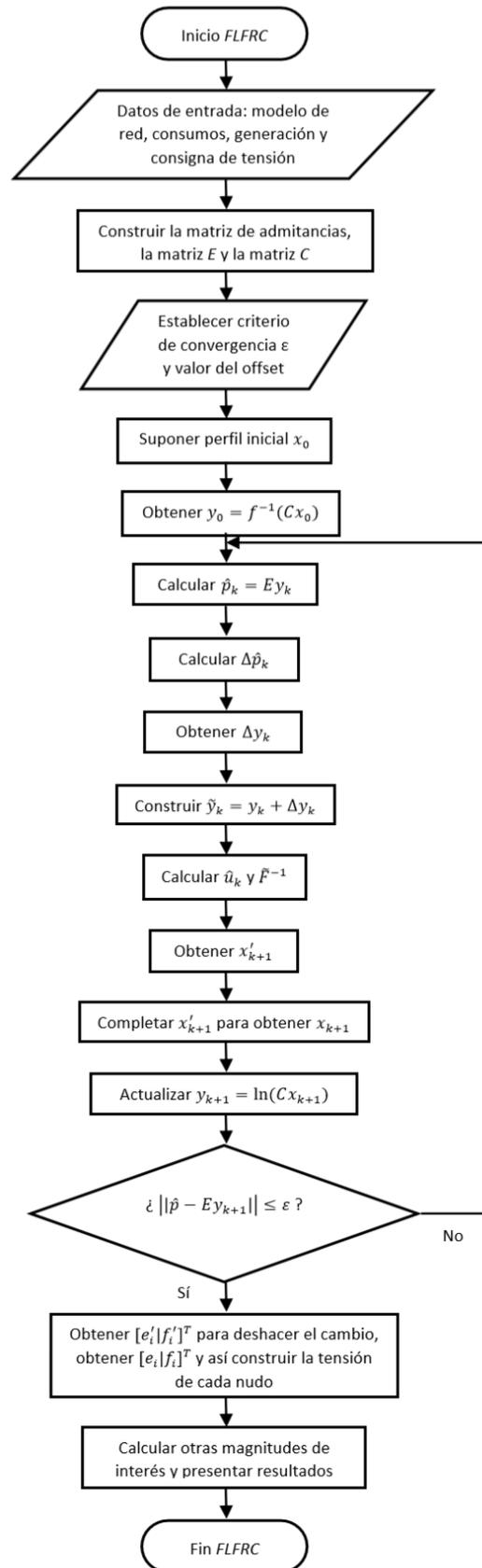


Figura 10. Algoritmo de resolución del FLFR

4 EL USO DE UN OFFSET COMPLEJO

Hasta ahora, en todos los estudios realizados del *FLFRC* se ha usado un offset real con el objetivo de evitar hacer logaritmos de números con parte real negativa, tal y como se vio en [2]. En este apartado, veremos que el uso de un offset complejo en vez de real puede ser beneficioso en algunos casos.

Como se demuestra en [1], el uso de un offset real, las distintas soluciones positivas y negativas de un sistema de ecuaciones pueden ser alcanzadas igualmente. Sin embargo, si no existen soluciones reales o si se está interesado en encontrar soluciones complejas, el uso de un offset complejo es aconsejable para mejorar la cuenca de atracción de estos tipos de soluciones, y así ser más eficiente en la búsqueda de éstas.

En los sistemas de ecuaciones que originan las redes eléctricas, el uso de un offset complejo puede ser también beneficioso, aunque antes de seguir con este tipo de offset es necesario diferenciar entre casos factibles e infactibles. Ante casos factibles, el uso de un offset complejo no es necesario, ya que las soluciones que se buscan (soluciones reales, ingenieriles) son de por sí reales, aunque es posible usar un offset complejo ya que esto último no tiene consecuencias apenas en la convergencia en casos factibles, tal y como se verá a continuación.

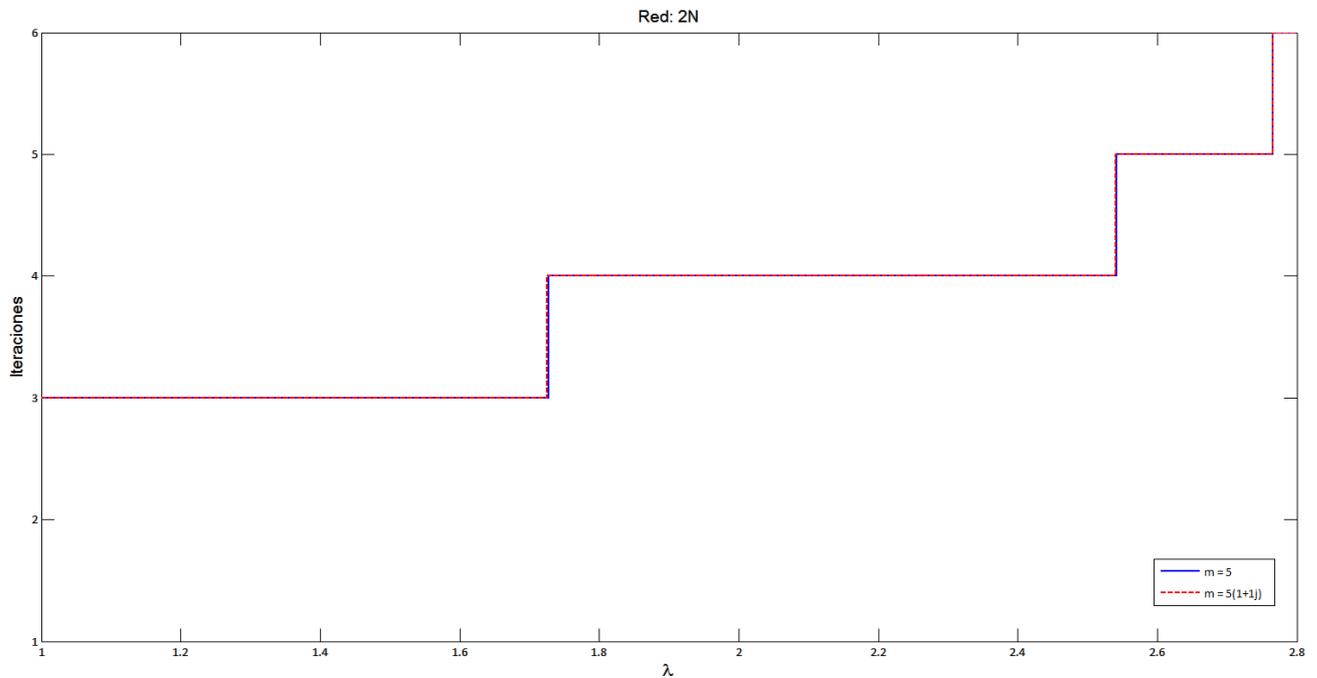


Figura 11. Iteraciones frente a la variación de la carga para la red de 2 nudos

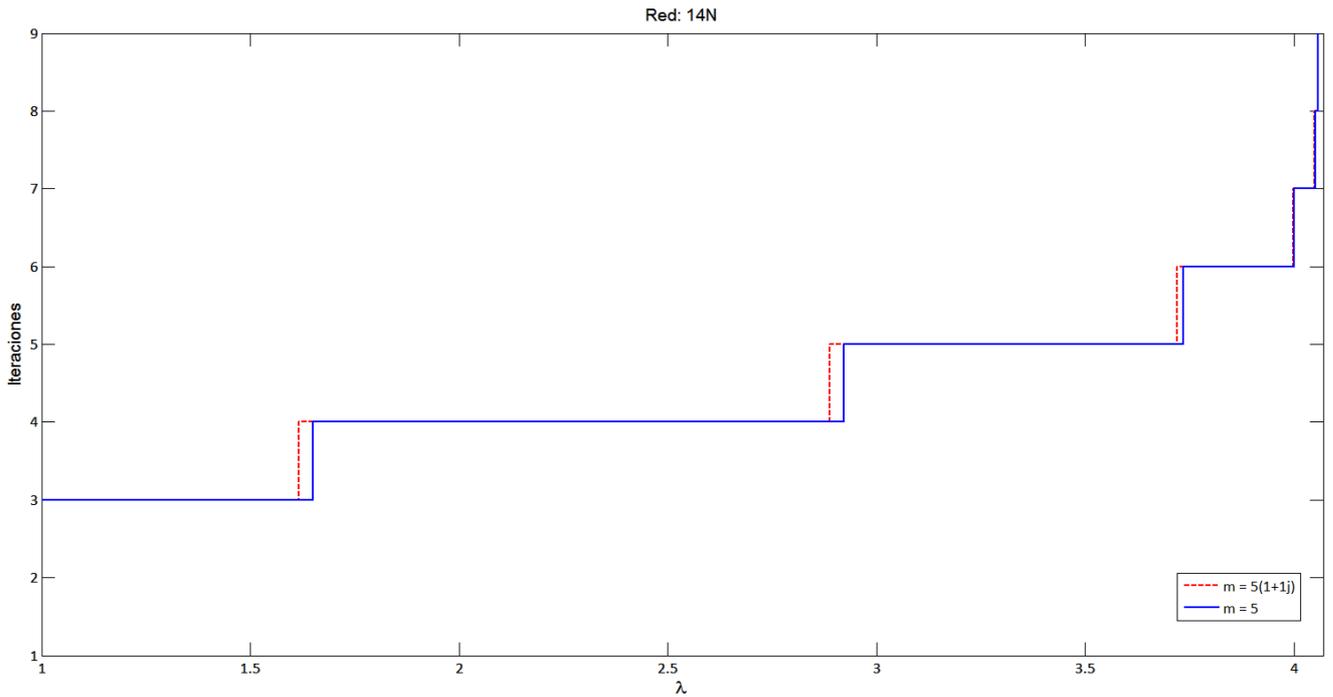


Figura 12. Iteraciones frente a la variación de la carga para la red de 14 nudos

La importancia de un offset complejo en la resolución de las ecuaciones de redes eléctricas aparece cuando se resuelven casos infactibles, en los cuales no existen soluciones reales. En estos casos, el uso de este tipo de offset ayuda a mejorar la cuenca de atracción de estas soluciones, mejorando la convergencia del algoritmo. En la Figura 13 y en la Figura 14 se muestra este último comportamiento.

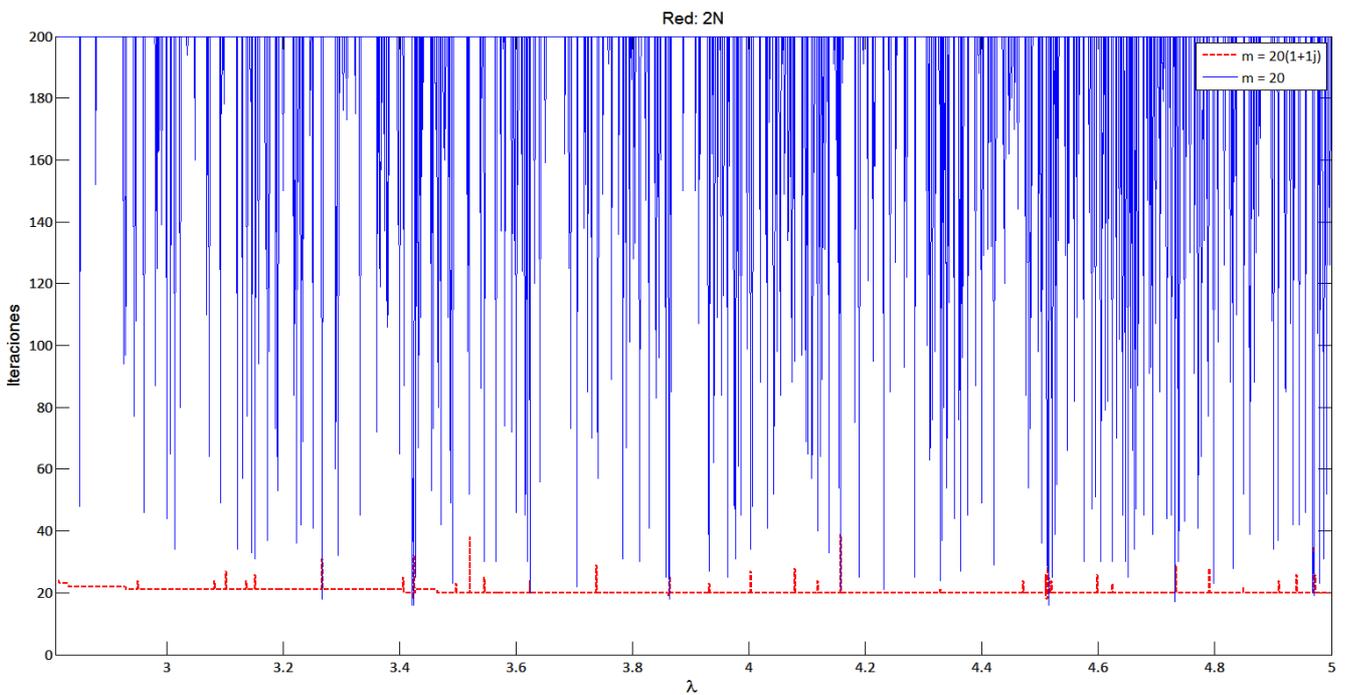


Figura 13. Iteraciones frente a casos infactibles para la red de 2 nudos

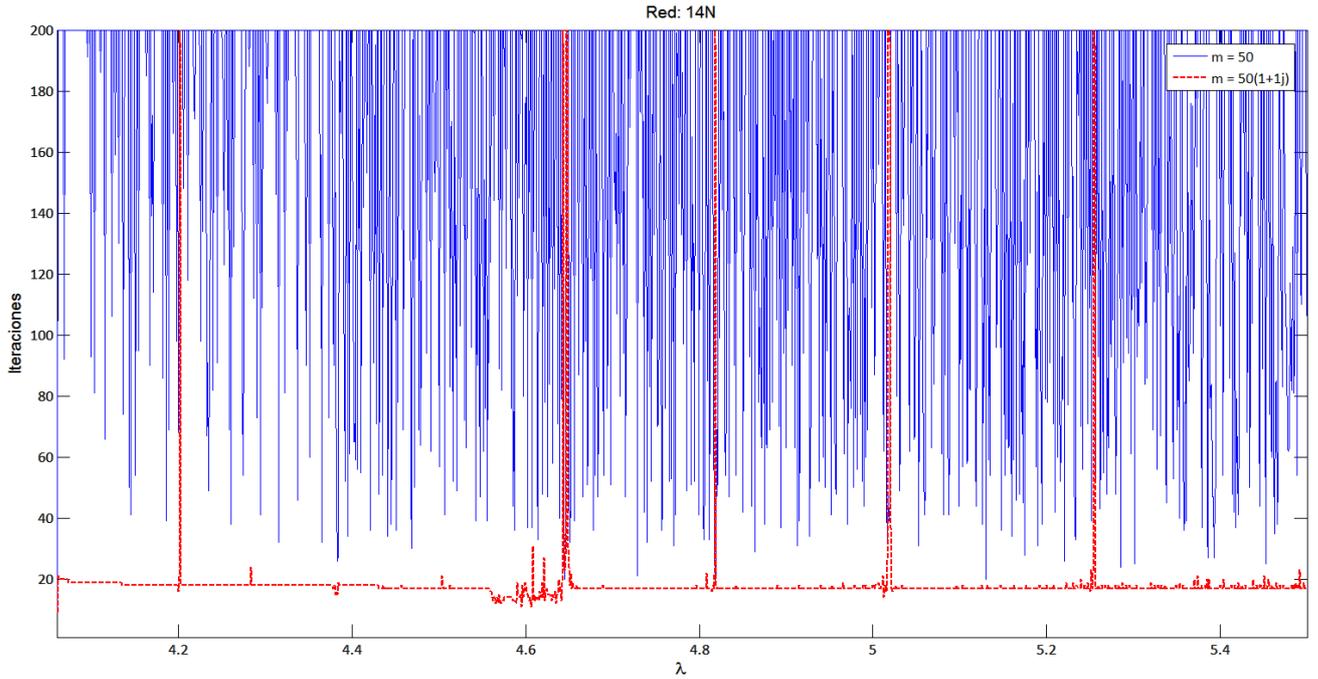


Figura 14. Iteraciones frente a casos infactibles para la red de 14 nudos

5 FORMULACIÓN CUADRÁTICA

En este trabajo se introduce una nueva versión en cuanto a la formulación del *FLFRC*, la cual denominaremos a partir de ahora *FLFQ* (*flujo de cargas factorizado cuadrático*). La principal diferencia con el *FLFRC* es que en esta nueva versión, la relación no lineal entre el vector u e y es perfectamente cuadrática, mientras que en el caso anterior era logarítmica. Con esto último evitamos la asíntota que tiene el logaritmo en el cero, por lo que se espera un mejor comportamiento para valores positivos próximos a este. Aunque en realidad, cuando tratamos con valores negativos del argumento (por lo que se obtienen valores complejos), el comportamiento de ambos métodos son parecidos ya que las raíces negativas se obtienen con exponenciales complejas.

El objetivo de esta nueva versión, como se ha dicho anteriormente, es explorar nuevas formulaciones para mejorar el comportamiento del *FLFRC*, y así hacer comparaciones entre el método de *Newton-Raphson* para el análisis de redes, el anterior *FLF*, el *FLFRC* y el *FLFQ* y demostrar así las ventajas y desventajas de esta nueva versión.

A continuación se desarrolla la formulación correspondiente a esta nueva versión cuadrática (*FLFQ*):

Partiendo del vector de tensiones \mathcal{U}_i en forma cartesiana:

$$\mathcal{U}_i = e_i + jf_i$$

El sistema de ecuaciones a resolver sigue siendo el siguiente, con la diferencia en este caso de que la relación no lineal entre el vector u e y es perfectamente cuadrática, tal y como se verá a continuación:

$$Ey = p \quad (53)$$

$$u = f(y) \quad (54)$$

$$Cx = u \quad (55)$$

- El vector de estado x , compuesto por $2N$ elementos:

$$x = [e_1, e_2, \dots, e_N | f_1, f_2, \dots, f_N]^T \quad (56)$$

- Vector y , cuya dimensión es ahora $2N + 4b$:

$$y = \{e_i^2, f_i^2, e_i e_j, f_i f_j, e_i f_j, f_i e_j\} \quad (57)$$

Inicialmente este vector contiene términos no lineales de la forma $a * b$. Para transformar esta relación en una relación cuadrática, se aplicará la siguiente propiedad:

$$a * b = \frac{1}{2} [(a + b)^2 - a^2 - b^2] \quad (58)$$

Obteniendo las siguientes relaciones:

$$e_i e_j = \frac{1}{2} [(e_i + e_j)^2 - e_i^2 - e_j^2]$$

$$f_i f_j = \frac{1}{2} [(f_i + f_j)^2 - f_i^2 - f_j^2]$$

$$e_i f_j = \frac{1}{2} [(e_i + f_j)^2 - e_i^2 - f_j^2]$$

$$f_i e_j = \frac{1}{2} [(f_i + e_j)^2 - f_i^2 - e_j^2]$$

Por lo que a partir de este momento, el vector y (todavía de dimensión $2N + 4b$), pasa a ser:

$$y = \{e_i^2, f_i^2, (e_i + e_j)^2, (f_i + f_j)^2, (e_i + f_j)^2, (f_i + e_j)^2\}$$

siendo este último vector perfectamente cuadrático.

Antes de continuar, cabe resaltar que existe otro tipo de transformación cuadrática, Este caso se trata de realizar estas transformaciones con restas en vez de sumas (como se hizo con la propiedad 58):

$$a * b = -\frac{1}{2} [(a - b)^2 - a^2 - b^2]$$

Esta última propiedad se ha descartado su uso ya que, al introducir el offset, este se cancelaría haciendo la operación $(a - b)^2$, por lo que perderíamos la ventaja que obtenemos al introducir el offset: evitar que aparezcan variables negativas. Es por esto por lo que se ha escogido la versión con sumas (ecuación 58), en vez de la versión con restas.

- El vector u (también de dimensión $2N + 4b$), gracias a la transformación cuadrática anterior, cumple con la siguiente relación:

$$u_i = \sqrt{y_i} = \{e_i, f_i, e_i + e_j, f_i + f_j, e_i + f_j, f_i + e_j\} \quad (59)$$

volviéndose a cumplir la relación

$$y_i = u_i^2 = f^{-1}(u_i)$$

- Vector p , de $2N$ componentes:

$$p = [e_{slack}^2, f_{slack}^2, U_1, U_2, \dots, U_{N_{PV}} | P_1, P_2, \dots, P_{N-1} | Q_1, Q_2, \dots, Q_{N_{PQ}}]^T \quad (60)$$

donde cada componente del vector anterior es de la forma:

$$U_i^{SP} = U_i \quad (\text{para nudos PV}) \quad (61)$$

$$P_i^{SP} = G_{ii}U_i + \sum_{j \neq i}^{N-1} [G_{ij}U_{ij} + B_{ij}W_{ij}] \quad (62)$$

$$Q_i^{SP} = -B_{ii}U_i + \sum_{j \neq i}^{N_{PQ}} [G_{ij}W_{ij} - B_{ij}U_{ij}] \quad (63)$$

donde

$$U_i = V_i^2 = e_i^2 + f_i^2 \quad (64)$$

$$U_{ij} = e_i e_j + f_i f_j \quad (65)$$

$$W_{ij} = -e_i f_j + f_i e_j \quad (66)$$

Las variables U_{ij} y W_{ij} son de nuevo no cuadráticas, por lo que se transformarán en cuadráticas aplicando la propiedad (Ecuación 58). Una vez aplicada esta propiedad, se obtiene:

$$U_i = V_i^2 = e_i^2 + f_i^2 \quad (67)$$

$$U_{ij} = \frac{1}{2} [(e_i + e_j)^2 + (f_i + f_j)^2 - e_i^2 - e_j^2 - f_i^2 - f_j^2] \quad (68)$$

$$W_{ij} = \frac{1}{2} [-(e_i + f_j)^2 + (f_i + e_j)^2 + e_i^2 - e_j^2 - f_i^2 + f_j^2] \quad (69)$$

Una vez realizadas las transformaciones cuadráticas anteriores, las ecuaciones de datos especificados quedan de la siguiente forma, en función de las variables del vector y :

$$U_i^{SP} = e_i^2 + f_i^2 \quad (\text{para nudos PV}) \quad (70)$$

$$\begin{aligned}
P_i^{SP} &= G_{ii}(e_i^2 + f_i^2) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{j \neq i}^{N-1} [G_{ij}(e_i + e_j)^2 + G_{ij}(f_i + f_j)^2 - B_{ij}(e_i + f_j)^2 + B_{ij}(f_i + e_j)^2 \\
&+ (-G_{ij} + B_{ij})e_i^2 - (G_{ij} + B_{ij})f_i^2 - (G_{ij} + B_{ij})e_j^2 + (-G_{ij} + B_{ij})f_j^2]
\end{aligned} \tag{71}$$

$$\begin{aligned}
Q_i^{SP} &= -B_{ii}(e_i^2 + f_i^2) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{j \neq i}^{N_{PQ}} [-G_{ij}(e_i + f_j)^2 + G_{ij}(f_i + e_j)^2 - B_{ij}(e_i + e_j)^2 - B_{ij}(f_i + f_j)^2 \\
&+ (G_{ij} + B_{ij})e_i^2 + (-G_{ij} + B_{ij})f_i^2 + (-G_{ij} + B_{ij})e_j^2 + (G_{ij} + B_{ij})f_j^2]
\end{aligned} \tag{72}$$

- Matriz E : matriz de coeficientes constantes que relaciona directamente el vector y con el vector p . Esta relación viene dada por las ecuaciones 70, 71 y 72. Esta matriz E es de dimensiones $2N \times (2N + 4b)$.
- Matriz C , de dimensiones $(2N + 4b) \times 2N$. Esta matriz es la relación directa entre las variables u y x :

$$\begin{bmatrix} e_i \\ f_i \\ e_i + e_j \\ f_i + f_j \\ e_i + f_j \\ f_i + e_j \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_N \\ f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix}$$

Finalmente, se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$[E\tilde{F}^{-1}C]x_{k+1} = E\tilde{F}^{-1}u \tag{73}$$

En este caso, el jacobiano de $f(\cdot)$ vuelve a ser bastante simple:

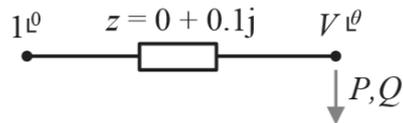
$$\tilde{F}^{-1} = \left[\frac{\partial y}{\partial u} \right] = 2 * \text{diag}(u) \tag{74}$$

donde $\text{diag}(u)$ es una matriz diagonal, de tamaño $(2N + 4b) \times (2N + 4b)$, cuyos elementos son los del vector u .

Tras analizar esta versión, además de los problemas que se presentan en el siguiente capítulo, nos encontramos con que a la hora de evaluar el jacobiano, si alguna de las variables del vector u es nula, una de sus filas será nula. El caso más común donde aparece este problema es cuando tomamos como origen de ángulos el valor 0 (siendo esto una gran desventaja de esta versión). Esto último hace que el jacobiano sea singular, por lo tanto la última ecuación del sistema de ecuaciones no tendría solución. Una posible solución sería rotar todas las fases un cierto valor para evitar partir del origen de ángulos 0, pero esta solución lleva consigo muchos problemas de convergencia para redes lo suficientemente grandes.

Ejemplo. Aplicación del FLFQ a un sistema de 2 nudos

Para ilustrar mejor la formulación vista anteriormente, se resolverá el siguiente problema:



El objetivo del problema es obtener la tensión del nudo dos, $V \angle \theta$, sabiendo que la potencia demandada en ese punto es de 200 MW y la reactiva demandada de 50 MW . Sabemos que la solución es:

$$V_2 = 0.922 \text{ pu} \quad \text{y} \quad \theta_1 - \theta_2 = 12.528 \text{ deg} \quad (\text{donde } \theta_1 \text{ es el origen de ángulos, valor conocido})$$

- Primero, establecemos un criterio de convergencia, ya que se trata de un proceso iterativo. Se escoge: $\Delta p_k \leq 0.001$

- A continuación, obtenemos los datos de la red:

$$\mathcal{Y} = \begin{bmatrix} G_{11} + jB_{11} & G_{12} + jB_{21} \\ G_{21} + jB_{21} & G_{22} + jB_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j10 & j10 \\ j10 & -j10 \end{bmatrix}, \text{ donde } \mathcal{Y} \text{ es la matriz de admitancias.}$$

- Tal y como se explicó anteriormente, para evitar la singularidad del jacobiano se rotan las fases de todos los nudos un cierto valor α , para este caso se escoge $\alpha = 30 \text{ deg}$.
- Cálculo de p (vector de datos especificados):

$$p = \begin{bmatrix} e_1^2 \\ f_1^2 \\ P_2 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (V_{1sp} \cos(\alpha))^2 \\ (V_{1sp} \sin(\alpha))^2 \\ P_2/100 \\ Q_2/100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 \\ 0.25 \\ -2 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

- Ahora, definamos el vector de estado x y los vectores auxiliares u e y :

$$x = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}; \quad y = \begin{bmatrix} e_1^2 \\ e_2^2 \\ f_1^2 \\ f_2^2 \\ (e_1 + e_2)^2 \\ (f_1 + f_2)^2 \\ (e_1 + f_2)^2 \\ (f_1 + e_2)^2 \end{bmatrix}; \quad u = \sqrt{y} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ f_1 \\ f_2 \\ (e_1 + e_2) \\ (f_1 + f_2) \\ (e_1 + f_2) \\ (f_1 + e_2) \end{bmatrix}$$

- Cálculo de las matrices E y C , matrices que se mantienen constante durante todo el problema:

$$P_2 = G_{22}(e_2^2 + f_2^2) + \frac{1}{2}[G_{21}(e_2 + e_1)^2 + G_{21}(f_2 + f_1)^2 - B_{21}(e_2 + f_1)^2 + B_{21}(f_2 + e_1)^2 \\ + (-G_{21} + B_{21})e_2^2 - (G_{21} + B_{21})f_2^2 - (G_{21} + B_{21})e_1^2 + (-G_{21} + B_{21})f_1^2]$$

$$Q_2 = -B_{22}(e_2^2 + f_2^2) + \frac{1}{2}[-G_{21}(e_2 + f_1)^2 + G_{21}(f_2 + e_1)^2 - B_{21}(e_2 + e_1)^2 - B_{21}(f_2 + f_1)^2 \\ + (G_{21} + B_{21})e_2^2 + (-G_{21} + B_{21})f_2^2 + (-G_{21} + B_{21})e_1^2 + (G_{21} + B_{21})f_1^2]$$

$$p = Ey \rightarrow \begin{bmatrix} e_1^2 \\ f_1^2 \\ P_2 \\ Q_2 \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} e_1^2 \\ e_2^2 \\ f_1^2 \\ f_2^2 \\ (e_1 + e_2)^2 \\ (f_1 + f_2)^2 \\ (e_1 + f_2)^2 \\ (f_1 + e_2)^2 \end{bmatrix}$$

luego:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 5 & -5 & 0 & 0 & 5 & -5 \\ 5 & 15 & 5 & 15 & -5 & -5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para el cálculo de la matriz C :

$$u = Cx \rightarrow \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ f_1 \\ f_2 \\ (e_1 + e_2) \\ (f_1 + f_2) \\ (e_1 + f_2) \\ (f_1 + e_2) \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}; \quad \text{luego } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Una vez obtenido todo lo necesario, empieza el proceso iterativo:

Primera iteración:

- Suponiendo un perfil inicial plano (y teniendo en cuenta el ángulo de rotación α):

$$u^0 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \text{ L}30 \\ 1 \text{ L}30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.866 + 0.5j \\ 0.866 + 0.5j \end{bmatrix} \rightarrow x_0 = \begin{bmatrix} 0.866 \\ 0.866 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \rightarrow y_0 = \begin{bmatrix} 0.75 \\ 0.75 \\ 0.25 \\ 0.25 \\ 3 \\ 1 \\ 1.866 \\ 1.866 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \Delta p_0 = p - p_0 = p - Ey_0 = \begin{bmatrix} 0.75 \\ 0.25 \\ -2 \\ -0.5 \end{bmatrix} - E \begin{bmatrix} 0.75 \\ 0.635 \\ 0.25 \\ 0.335 \\ 3.005 \\ 1.005 \\ 1.766 \\ 1.966 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

Como $\max(|\Delta p_0|) > 0.001$, sigue el proceso iterativo:

$$\bullet \Delta p_0 = E\Delta y_0 \rightarrow \Delta y_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.115 \\ 0 \\ 0.085 \\ 0.005 \\ 0.005 \\ -0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} \rightarrow \tilde{y}_0 = y_0 + \Delta y_0 = \begin{bmatrix} 0.75 \\ 0.635 \\ 0.25 \\ 0.335 \\ 3.005 \\ 1.005 \\ 1.766 \\ 1.966 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \tilde{u}_0 = \sqrt{\tilde{y}_0} = \begin{bmatrix} 0.866 \\ 0.796 \\ 0.5 \\ 0.578 \\ 1.733 \\ 1.002 \\ 1.328 \\ 1.402 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \quad \tilde{F}^{-1} = 2 * \text{diag}(\tilde{u}_0) = \begin{bmatrix} 1.732 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.593 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.157 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.467 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.005 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.6571 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.8041 \end{bmatrix}$$

- Ahora, basta con resolver la siguiente ecuación, obteniendo x_1 :

$$[E\tilde{F}^{-1}C']x_1 = E\tilde{F}^{-1}\tilde{u}_0 \quad \rightarrow \quad x_1 = \begin{bmatrix} 0.866 \\ 0.996 \\ 0.5 \\ 0.337 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad u_1 = \begin{bmatrix} 0.866 \\ 0.996 \\ 0.5 \\ 0.337 \\ 1.862 \\ 0.837 \\ 1.203 \\ 1.496 \end{bmatrix}$$

Una vez obtenida la solución, calculamos el residuo de potencias:

- Continuando con la solución anterior:

$$y_1 = \begin{bmatrix} 0.75 \\ 0.992 \\ 0.25 \\ 0.114 \\ 3.468 \\ 0.701 \\ 1.448 \\ 2.239 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \quad \Delta p_1 = p - p_1 = p - Ey_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.057 \\ -1.25 \end{bmatrix}$$

Como $\max(|\Delta p_1|) > 0.001$, continuamos de nuevo con el proceso iterativo:

Segunda iteración:

$$\bullet \quad \Delta p_1 = E \Delta y_1 \rightarrow \Delta y_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.034 \\ 0 \\ -0.04 \\ 0.012 \\ 0.012 \\ 0.002 \\ -0.002 \end{bmatrix} \rightarrow \tilde{y}_1 = y_1 + \Delta y_1 = \begin{bmatrix} 0.75 \\ 0.958 \\ 0.25 \\ 0.073 \\ 3.48 \\ 0.714 \\ 1.451 \\ 2.236 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \quad \tilde{u}_1 = \sqrt{\tilde{y}_1} = \begin{bmatrix} 0.866 \\ 0.978 \\ 0.5 \\ 0.271 \\ 1.865 \\ 0.8451 \\ 1.204 \\ 1.495 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \quad \tilde{F}^{-1} = 2 * \text{diag}(\tilde{u}_1) = \begin{bmatrix} 1.732 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.957 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.542 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.731 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.69 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.409 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.99 \end{bmatrix}$$

- Resolviendo la siguiente ecuación, obtenemos x_2 :

$$[E\tilde{F}^{-1}C']x_2 = E\tilde{F}^{-1}\tilde{u}_1 \rightarrow x_2 = \begin{bmatrix} 0.866 \\ 0.884 \\ 0.5 \\ 0.279 \end{bmatrix} \rightarrow u_2 = \begin{bmatrix} 0.866 \\ 0.884 \\ 0.5 \\ 0.279 \\ 1.75 \\ 0.779 \\ 1.145 \\ 1.384 \end{bmatrix}$$

Una vez obtenida la solución, calculamos el residuo de potencias:

- Continuando con la solución anterior:

$$y_2 = \begin{bmatrix} 0.75 \\ 0.782 \\ 0.25 \\ 0.078 \\ 3.064 \\ 0.608 \\ 1.312 \\ 1.916 \end{bmatrix}$$

- $\Delta p_2 = p - p_2 = p - Ey_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.0001 \\ -0.046 \end{bmatrix}$

Como $\max(|\Delta p_2|) > 0.001$, continuamos con el proceso iterativo:

Tercera iteración:

- $\Delta p_2 = E\Delta y_2 \rightarrow \Delta y_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.001 \\ 0 \\ -0.001 \\ 0.0005 \\ 0.0005 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \tilde{y}_2 = y_2 + \Delta y_2 = \begin{bmatrix} 0.75 \\ 0.78 \\ 0.25 \\ 0.076 \\ 3.064 \\ 0.608 \\ 1.312 \\ 1.916 \end{bmatrix}$

- $\tilde{u}_2 = \sqrt{\tilde{y}_2} = \begin{bmatrix} 0.866 \\ 0.883 \\ 0.5 \\ 0.277 \\ 1.75 \\ 0.78 \\ 1.145 \\ 1.384 \end{bmatrix}$

- $\tilde{F}^{-1} = 2 * \text{diag}(\tilde{u}_2) = \begin{bmatrix} 1.732 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.767 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.554 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.501 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.56 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.291 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.768 \end{bmatrix}$

- De nuevo, resolviendo la siguiente ecuación, obtenemos x_3 :

$$[E\tilde{F}^{-1}C']x_3 = E\tilde{F}^{-1}\tilde{u}_2 \rightarrow x_3 = \begin{bmatrix} 0.866 \\ 0.879 \\ 0.5 \\ 0.276 \end{bmatrix} \rightarrow u_3 = \begin{bmatrix} 0.866 \\ 0.879 \\ 0.5 \\ 1.745 \\ 0.776 \\ 1.142 \\ 1.379 \end{bmatrix}$$

Una vez obtenida la solución, calculamos el residuo de potencias:

- Continuando con la solución anterior:

$$y_3 = \begin{bmatrix} 0.75 \\ 0.773 \\ 0.25 \\ 0.076 \\ 3.046 \\ 0.603 \\ 1.306 \\ 1.902 \end{bmatrix}$$

- $\Delta p_3 = p - p_3 = p - Ey_3 = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.045 \\ -0.857 \end{bmatrix}$

Como $\max(|\Delta p_3|) < 0.001$, finaliza el proceso iterativo, por lo que podemos decir que se ha encontrado la solución en 3 iteraciones completas, obteniendo la solución:

$$\begin{aligned} u_2 &= 0.879 - j0.276 \\ |u_2| &= 0.922 \text{ pu}; \quad \theta_2 = 17.471 \text{ deg} \\ \theta_1 - \theta_2 &= 30 - 17.471 = 12.529 \text{ deg} \end{aligned}$$

Fin de ejemplo

6 FORMULACIÓN CUADRÁTICA CON OFFSET

La nueva formulación cuadrática también presenta el problema de que durante el proceso iterativo es posible obtener valores negativos del argumento, por lo que nos adentraríamos en el dominio complejo, pudiendo obtener soluciones complejas incluso habiendo soluciones reales (tal y como se desarrolla en [1]). Para evitar este problema habría que encontrar un método que haga que todas las variables queden positivas a lo largo del proceso iterativo, y así evitar introducimos en el dominio complejo.

Como solución a esto último, añadimos de nuevo un offset lo suficientemente grande a las variables naturales del problema (e_i y f_i), al igual que en la versión *FLFRC* con offset. Por lo tanto, sustituyendo el vector de tensiones \mathcal{U}_i por \mathcal{U}'_i :

$$\mathcal{U}_i = e_i + jf_i \rightarrow \mathcal{U}'_i = e'_i + jf'_i = (e_i + m) + j(f_i + m)$$

donde m es el valor del offset. Luego, las variables nuevas son ahora $e'_i = e_i + m$ y $f'_i = f_i + m$

Recordemos que la introducción del offset se realiza cuando se construye el perfil inicial de tensiones, y que cuando el problema converge, basta con obtener $[e'_1, e'_2, \dots, e'_N | f'_1, f'_2, \dots, f'_N]$ y deshacer el cambio de la siguiente forma:

$$e_i = e'_i - m \quad (75)$$

$$f_i = f'_i - m \quad (76)$$

En este caso, el sistema de ecuaciones a resolver vuelve a ser el mismo que el que se desarrolló en la Sección 2.1:

$$Ey = p \quad (77)$$

$$u = f(y) \quad (78)$$

$$Cx = u \quad (79)$$

A continuación se desarrolla cada variable para observar su variación ante la introducción del offset:

- Vector de estado x , compuesto por $2N$ elementos:

$$x = [e'_1, e'_2, \dots, e'_N | f'_1, f'_2, \dots, f'_N]^T \quad (80)$$

- Vector y , cuya dimensión es ahora $4(N + b)$:

$$y = \{e_i'^2, f_i'^2, e'_i, f'_i, e'_i e'_j, f'_i f'_j, e'_i f'_j, f'_i e'_j\} \quad (81)$$

En este punto se realizan las mismas transformaciones cuadráticas que se desarrollaron en el capítulo 5, obteniéndose el vector:

$$y = \{e_i'^2, f_i'^2, e'_i, f'_i, (e'_i + e'_j)^2, (f'_i + f'_j)^2, (e'_i + f'_j)^2, (f'_i + e'_j)^2\} \quad (82)$$

- El vector u , ahora también es de dimensión $4(N + b)$ y se obtiene de la siguiente forma:

$$u_i = \sqrt{y_i} \quad \text{para elementos cuadráticos de } y \quad (83)$$

$$u_i = y_i \quad \text{para elementos lineales de } y \quad (84)$$

por lo que, con lo anterior, el vector u quedaría:

$$u = \{e'_i, f'_i, e'_i, f'_i, (e'_i + e'_j), (f'_i + f'_j), (e'_i + f'_j), (f'_i + e'_j)\}$$

- Vector p , de $2N$ componentes:

$$p = [e'^2_{slack}, f'^2_{slack}, U_1, U_2, \dots, U_{N_{PV}} | P_1, P_2, \dots, P_{N-1} | Q_1, Q_2, \dots, Q_{N_{PQ}}]^T \quad (85)$$

Sin embargo, y tal y como en versiones anteriores del *FLFRC* con offset, a la hora de resolver $p = Ey$ no se usa el vector p . En su lugar, se recurre a un vector p modificado, \hat{p} , como sigue a continuación :

$$\hat{p} = p - p_I \quad (86)$$

donde p_I es un vector que contiene los términos independientes que resultan al aplicar las siguientes ecuaciones:

$$U_i^{SP} = U_i \quad (\text{para nudos } PV) \quad (87)$$

$$P_i^{SP} = G_{ii}U_i + \sum_{j \neq i}^{N-1} [G_{ij}U_{ij} + B_{ij}W_{ij}] \quad (88)$$

$$Q_i^{SP} = -B_{ii}U_i + \sum_{j \neq i}^{N_{PQ}} [G_{ij}W_{ij} - B_{ij}U_{ij}] \quad (89)$$

donde

$$U_i = V_i^2 = e_i^2 + f_i^2 \quad (90)$$

$$U_{ij} = e_i e_j + f_i f_j \quad (91)$$

$$W_{ij} = -e_i f_j + f_i e_j \quad (92)$$

En las tres ecuaciones anteriores (ecuaciones 90, 91 y 92), primero se expresan en función de las variables con offset (e'_i y f'_i) y por último se realizan las transformaciones cuadráticas vistas en el capítulo anterior, obteniendo:

$$U_i = V_i^2 = e_i'^2 + f_i'^2 \quad (93)$$

$$U_{ij} = \frac{1}{2} [(e'_i + e'_j)^2 + (f'_i + f'_j)^2 - e_i'^2 - e_j'^2 - f_i'^2 - f_j'^2 - 2me'_i - 2me'_j - 2mf'_i - 2mf'_j + 4m^2] \quad (94)$$

$$W_{ij} = \frac{1}{2} [-(e'_i + f'_j)^2 + (f'_i + e'_j)^2 + e_i'^2 - e_j'^2 - f_i'^2 + f_j'^2 + 2me'_i - 2me'_j - 2mf'_i + 2mf'_j] \quad (95)$$

Desarrollando las ecuaciones 87, 88 y 89 y aplicando en ellas las variables anteriores (ecuaciones 93, 94 y 95), se obtiene directamente el valor del vector p_I :

$$U_i^{SP} - 2m^2 = e_i'^2 + f_i'^2 - 2me'_i - 2mf'_i \quad (\text{para nudos } PV) \quad (96)$$

$$\begin{aligned} & P_i^{SP} - 2m^2 \sum_{\forall j} G_{ij} \\ &= G_{ii}(e_i'^2 + f_i'^2) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j \neq i}^{N-1} [G_{ij}(e'_i + e'_j)^2 + G_{ij}(f'_i + f'_j)^2 - B_{ij}(e'_i + f'_j)^2 + B_{ij}(f'_i + e'_j)^2 \\ &+ (-G_{ij} + B_{ij})e_i'^2 - (G_{ij} + B_{ij})f_i'^2 - (G_{ij} + B_{ij})e_j'^2 + (-G_{ij} + B_{ij})f_j'^2 \\ &+ 2m(-G_{ij} + B_{ij})e'_i - 2m(G_{ij} + B_{ij})f'_i - 2m(G_{ij} + B_{ij})e'_j \\ &+ 2m(-G_{ij} + B_{ij})f'_j] \end{aligned} \quad (97)$$

$$\begin{aligned} & Q_i^{SP} + 2m^2 \sum_{\forall j} B_{ij} \\ &= -B_{ii}(e_i'^2 + f_i'^2) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j \neq i}^{N_{PQ}} [-G_{ij}(e'_i + f'_j)^2 + G_{ij}(f'_i + e'_j)^2 - B_{ij}(e'_i + e'_j)^2 - B_{ij}(f'_i + f'_j)^2 \\ &+ (G_{ij} + B_{ij})e_i'^2 + (-G_{ij} + B_{ij})f_i'^2 + (-G_{ij} + B_{ij})e_j'^2 + (G_{ij} + B_{ij})f_j'^2 \\ &+ 2m(G_{ij} + B_{ij})e'_i + 2m(-G_{ij} + B_{ij})f'_i + 2m(-G_{ij} + B_{ij})e'_j \\ &+ 2m(G_{ij} + B_{ij})f'_j] \end{aligned} \quad (98)$$

Luego el vector p_I , observando las tres últimas expresiones, sería de la forma:

$$p_I = [0 \mid 0 \mid 2m^2 O_{N-1}^T \mid 2m^2 G_{N-1}^T \mid -2m^2 B_{PQ}^T]^T$$

siendo:

O_{N-1}^T un vector de tamaño $(N - 1)$, cuyos componentes son todos 1.

G_{N-1}^T un vector de tamaño $(N - 1)$, cuyas entradas ' i ' son $\sum_{\forall j} G_{ij}$, recorriendo ' i ' todos los nudos PV .

B_{PQ}^T un vector de tamaño N_{PQ} , cuyas entradas ' i ' son $\sum_{\forall j} B_{ij}$, recorriendo ' i ' todos los nudos PQ .

- La matriz E , de dimensiones $2N \times 4(N + b)$ ahora, se construye con la relación directa entre \hat{p} e y . Estos coeficientes están recogidos en las expresiones 96, 97 y 98.

- Matriz C , de dimensiones $4(N + b) \times 2N$:

$$\begin{bmatrix} e_i \\ f_i \\ e_i + e_j \\ f_i + f_j \\ e_i + f_j \\ f_i + e_j \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_N \\ f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix}$$

Finalmente, se resuelve el mismo sistema de ecuaciones que se vio anteriormente:

$$[E\tilde{F}^{-1}C]x_{k+1} = E\tilde{F}^{-1}u \quad (99)$$

En esta versión, el jacobiano de $f(\cdot)$ varía con respecto a la versión sin offset que se vio en el capítulo 5:

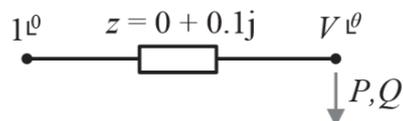
$$\tilde{F}^{-1} = \left[\frac{\partial y}{\partial u} \right] = 2 * \text{diag}(u) \quad \text{para los términos cuadráticos de } u \text{ e } y \quad (100)$$

$$\tilde{F}^{-1} = \left[\frac{\partial y}{\partial u} \right] = 1 \quad \text{para los términos lineales de } u \text{ e } y \quad (101)$$

donde $\text{diag}(u)$ es una matriz diagonal, de tamaño $(2N + 4b) \times (2N + 4b)$, cuyos elementos son los del vector u .

Ejemplo. Aplicación del FLFQ con offset a un sistema de 2 nudos

Para ilustrar mejor la formulación vista anteriormente, se resolverá de nuevo el siguiente problema:



El objetivo del problema es obtener la tensión del nudo dos, $V \angle \theta$, sabiendo que la potencia demandada en ese punto es de 200 MW y la reactiva demandada de 50 MW . Sabemos que la solución es:

$$V_2 = 0.922 \text{ pu} \quad \text{y} \quad \theta_1 - \theta_2 = 12.528 \text{ deg} \quad (\text{donde } \theta_1 \text{ es el origen de ángulos, valor conocido})$$

- Primero, establecemos un criterio de convergencia, ya que se trata de un proceso iterativo. Se escoge: $\Delta p_k \leq 0.001$

- A continuación, obtenemos los datos de la red:

$$\mathcal{Y} = \begin{bmatrix} G_{11} + jB_{11} & G_{12} + jB_{21} \\ G_{21} + jB_{21} & G_{22} + jB_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j10 & j10 \\ j10 & -j10 \end{bmatrix}, \text{ donde } \mathcal{Y} \text{ es la matriz de admitancias.}$$

- Además es necesario definir un valor de offset, se establece $m = 1(1 + j) = 1 + j$:

$$e'_i = e_i + m; \quad f'_i = f_i + m$$

- Cálculo de p (vector de datos especificados):

$$p = \begin{bmatrix} e_1'^2 \\ f_1'^2 \\ P_2 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + 4j \\ 2j \\ -2 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

- Ahora, definamos el vector de estado x y los vectores auxiliares u e y :

$$x = \begin{bmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ f'_1 \\ f'_2 \end{bmatrix}; \quad y = \begin{bmatrix} e_1'^2 \\ e_2'^2 \\ f_1'^2 \\ f_2'^2 \\ e'_1 \\ e'_2 \\ f'_1 \\ f'_2 \\ (e'_1 + e'_2)^2 \\ (f'_1 + f'_2)^2 \\ (e'_1 + f'_2)^2 \\ (f'_1 + e'_2)^2 \end{bmatrix}; \quad u = \begin{bmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ f'_1 \\ f'_2 \\ (e'_1 + e'_2) \\ (f'_1 + f'_2) \\ (e'_1 + f'_2) \\ (f'_1 + e'_2) \end{bmatrix}$$

- Cálculo de las matrices E y C , matrices que se mantienen constante durante todo el problema:

$$\begin{aligned} & P_2^{SP} - 2m^2(G_{21} + G_{22}) \\ &= G_{22}(e_2'^2 + f_2'^2) + \frac{1}{2}[G_{22}(e_2' + e_1')^2 + G_{21}(f_2' + f_1')^2 - B_{21}(e_2' + f_1')^2 \\ &+ B_{21}(f_2' + e_1')^2 + (-G_{21} + B_{21})e_2'^2 - (G_{21} + B_{21})f_2'^2 - (G_{21} + B_{21})e_1'^2 \\ &+ (-G_{21} + B_{21})f_1'^2 + 2m(-G_{21} + B_{21})e_2' - 2m(G_{21} + B_{21})f_2' \\ &- 2m(G_{21} + B_{21})e_1' + 2m(-G_{21} + B_{21})f_1'] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Q_2^{SP} + 2m^2(B_{21} + B_{22}) \\
&= -B_{22}(e_2'^2 + f_1'^2) + \frac{1}{2}[-G_{21}(e_2' + f_1')^2 + G_{21}(f_2' + e_1')^2 - B_{21}(e_2' + e_1')^2 \\
&- B_{21}(f_2' + f_1')^2 + (G_{21} + B_{21})e_2'^2 + (-G_{21} + B_{21})f_2'^2 + (-G_{21} + B_{21})e_1'^2 \\
&+ (G_{21} + B_{21})f_1'^2 + 2m(G_{21} + B_{21})e_2' + 2m(-G_{21} + B_{21})f_2' \\
&+ 2m(-G_{21} + B_{21})e_1' + 2m(G_{21} + B_{21})f_1']
\end{aligned}$$

El vector de términos independientes (cuyo desarrollo se muestra en este mismo capítulo) es:

$$p_I = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2m^2(G_{21} + G_{22}) \\ -2m^2(B_{21} + B_{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \hat{p} = p - p_I = \begin{bmatrix} 3 + 4j \\ 2j \\ -2 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

Quedando definida la matriz E por: $\hat{p} = Ey \rightarrow \begin{bmatrix} e_1'^2 \\ f_1'^2 \\ P_2 \\ Q_2 \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} e_1'^2 \\ e_2'^2 \\ f_1'^2 \\ f_2'^2 \\ e_1' \\ e_2' \\ f_1' \\ f_2' \\ (e_1' + e_2')^2 \\ (f_1' + f_2')^2 \\ (e_1' + f_2')^2 \\ (f_1' + e_2')^2 \end{bmatrix}$

luego:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 5 & -5 & -10 - 10j & 10 + 10j & 10 + 10j & -10 - 10j & 0 & 0 & 5 & -5 \\ 5 & 15 & 5 & 15 & 10 + 10j & -10 - 10j & 10 + 10j & -10 - 10j & -5 & -5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para el cálculo de la matriz C :

$$u = Cx \rightarrow \begin{bmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ f'_1 \\ f'_2 \\ e'_1 \\ e'_2 \\ f'_1 \\ f'_2 \\ (e'_1 + e'_2) \\ (f'_1 + f'_2) \\ (e'_1 + f'_2) \\ (f'_1 + e'_2) \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ f'_1 \\ f'_2 \end{bmatrix}; \quad \text{luego } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Una vez obtenido todo lo necesario, empieza el proceso iterativo:

Primera iteración:

- Suponiendo un perfil inicial plano:

$$u^0 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow x_0 = \begin{bmatrix} 2 + j \\ 2 + j \\ 1 + j \\ 1 + j \end{bmatrix} \rightarrow y_0 = \begin{bmatrix} 3 + 4j \\ 3 + 4j \\ 2j \\ 2j \\ 2 + j \\ 2 + j \\ 1 + j \\ 1 + j \\ 12 + 16j \\ 8j \\ 5 + 12j \\ 5 + 12j \end{bmatrix}$$

$$\bullet \Delta \hat{p}_0 = \hat{p} - p_0 = \hat{p} - E y_0 = \begin{bmatrix} 3 + 4j \\ 2j \\ -2 \\ -0.5 \end{bmatrix} - E \begin{bmatrix} 3 + 4j \\ 3 + 4j \\ 2j \\ 2j \\ 2 + j \\ 2 + j \\ 1 + j \\ 1 + j \\ 12 + 16j \\ 8j \\ 5 + 12j \\ 5 + 12j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

Como $\max(|\Delta p_0|) > 0.001$, continúa el proceso iterativo:

$$\bullet \quad \Delta \hat{p}_0 = E \Delta y_0 \rightarrow \Delta y_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.017 \\ 0 \\ 0.005 \\ 0.018 - 0.018j \\ -0.018 + 0.018j \\ -0.026 + 0.026j \\ 0.026 - 0.026j \\ 0.002 \\ 0.002 \\ -0.011 \\ 0.011 \end{bmatrix} \rightarrow \tilde{y}_0 = y_0 + \Delta y_0 = \begin{bmatrix} 3 + 4j \\ 2.983 + 4j \\ 2j \\ 0.005 + 2j \\ 2.018 + 0.981j \\ 1.981 + 1.018j \\ 0.974 + 1.026j \\ 1.026 + 0.974 \\ 12.002 + 16j \\ 0.002 + 8j \\ 4.988 + 12j \\ 5.011 + 12j \end{bmatrix}$$

$$\bullet \quad \tilde{u}_0 = \sqrt{\tilde{y}_0} = \begin{bmatrix} 2 + j \\ 1.996 + 1.001j \\ 1 + j \\ 1.001 + 0.998j \\ 2.018 + 0.981j \\ 1.981 + 1.018j \\ 0.974 + 1.026j \\ 1.026 + 0.974j \\ 4 + 2j \\ 2 + 2j \\ 2.998 + 2j \\ 3.001 + 2j \end{bmatrix}$$

$$\bullet \quad \tilde{F}^{-1} = 2 * \text{diag}(\tilde{u}_0)$$

• Ahora, basta con resolver la siguiente ecuación, obteniendo x_1 :

$$[E\tilde{F}^{-1}C']x_1 = E\tilde{F}^{-1}\tilde{u}_0 \rightarrow x_1 = \begin{bmatrix} 2 + j \\ 1.95 + j \\ 0.5 \\ 0.799 + j \end{bmatrix} \rightarrow u_1 = \begin{bmatrix} 2 + j \\ 1.95 + 0.999j \\ 1 + j \\ 0.799 + j \\ 2 + j \\ 1.95 + 0.999j \\ 1 + j \\ 0.799 + j \\ 3.95 + 1.999j \\ 1.799 + 2j \\ 2.799 + 2j \\ 2.95 + 1.999j \end{bmatrix}$$

Una vez obtenida la solución, calculamos el residuo de potencias:

- Continuando con la solución anterior:

$$y_1 = \begin{bmatrix} 3 + 4j \\ 2.804 + 3.898j \\ 2j \\ 0.362 + 1.599j \\ 2 + j \\ 1.95 + 0.999j \\ 1 + j \\ 0.799 + j \\ 11.606 + 15.796j \\ -0.765 + 7.199j \\ 3.833 + 11.2j \\ 4.706 + 11.798j \end{bmatrix}$$

$$\bullet \Delta \hat{p}_1 = \hat{p} - p_1 = \hat{p} - E y_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.007 - 0.005j \\ -0.43 + 0.007j \end{bmatrix}$$

Como $\max(|\Delta \hat{p}_1|) > 0.001$, continuamos de nuevo con el proceso iterativo:

Segunda iteración:

$$\bullet \Delta \hat{p}_1 = E \Delta y_1 \rightarrow \Delta y_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.005 \\ 0 \\ -0.005 \\ -0.003 + 0.003j \\ 0.003 - 0.003j \\ -0.003 + 0.003j \\ 0.003 - 0.003j \\ 0.001 \\ 0.001 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \tilde{y}_1 = y_1 + \Delta y_1 = \begin{bmatrix} 3 + 4j \\ 2.799 + 3.898j \\ 2j \\ -0.367 + 1.599j \\ 1.996 + 1.003j \\ 1.953 + 0.996j \\ 0.996 + 1.003j \\ 0.802 + 0.997j \\ 11.608 + 15.796j \\ -0.763 + 7.199j \\ 3.833 + 11.2j \\ 4.706 + 11.798j \end{bmatrix}$$

$$\bullet \quad \tilde{u}_1 = \sqrt{\tilde{y}_1} = \begin{bmatrix} 2 + j \\ 1.949 + j \\ 1 + j \\ 0.798 + 1.002j \\ 1.996 + 1.003j \\ 1.953 + 0.996j \\ 0.996 + 1.003j \\ 0.802 + 0.997j \\ 3.95 + 1.999j \\ 1.799 + 2j \\ 2.799 + 2j \\ 2.95 + 1.999j \end{bmatrix}$$

- $\tilde{F}^{-1} = 2 * \text{diag}(\tilde{u}_1)$
- Resolviendo la siguiente ecuación, obtenemos x_2 :

$$[E\tilde{F}^{-1}C']x_2 = E\tilde{F}^{-1}\tilde{u}_1 \quad \rightarrow \quad x_2 = \begin{bmatrix} 2 + j \\ 1.902 + j \\ 1 + j \\ 0.8 + j \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad u_2 = \begin{bmatrix} 2 + j \\ 1.902 + j \\ 1 + j \\ 0.8 + j \\ 2 + j \\ 1.902 + j \\ 1 + j \\ 0.8 + j \\ 3.902 + 2j \\ 1.8 + 2j \\ 2.8 + 2j \\ 2.902 + 2j \end{bmatrix}$$

Una vez obtenida la solución, calculamos el residuo de potencias:

- Continuando con la solución anterior:

$$y_2 = \begin{bmatrix} 3 + 4j \\ 2.619 + 3.805j \\ 2j \\ -0.36 + 1.6j \\ 2 + j \\ 1.902 + j \\ 1 + j \\ 0.8 + j \\ 11.23 + 15.61j \\ -0.76 + 7.199j \\ 3.839 + 11.2j \\ 4.425 + 11.61j \end{bmatrix}$$

- $\Delta\hat{p}_2 = \hat{p} - p_2 = \hat{p} - Ey_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0005 - 0.0003j \\ -0.021 - 0.0001j \end{bmatrix}$

Como $\max(|\Delta\hat{p}_2|) > 0.001$, seguimos con el proceso iterativo:

Tercera iteración:

- $\Delta\hat{p}_2 = E\Delta y_2 \rightarrow \Delta y_2 = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0 \\ -0.242 - 0.003j \\ 0 \\ -0.247 \\ -0.166 + 0.17j \\ 0.166 - 0.17j \\ -0.162 + 0.153j \\ 0.162 - 0.153j \\ 0.081 \\ 0.081 \\ 0.002 - 0.001j \\ -0.002 + 0.001j \end{bmatrix} \rightarrow \tilde{y}_2 = y_2 + \Delta y_2 = \begin{bmatrix} 3 + 4j \\ 2.619 + 3.805j \\ 2j \\ -0.36 + 1.6j \\ 1.999 + j \\ 1.902 + 0.999j \\ 0.999 + j \\ 0.8 + 0.999j \\ 11.23 + 15.61j \\ -0.76 + 7.199j \\ 3.839 + 11.2 \\ 4.425 + 11.61j \end{bmatrix}$

- $\tilde{u}_2 = \sqrt{\tilde{y}_2} = \begin{bmatrix} 2 + j \\ 1.902 + j \\ 1 + j \\ 0.799 + j \\ 1.999 + j \\ 1.902 + 0.999j \\ 0.999 + j \\ 0.8 + 0.999j \\ 3.902 + 2j \\ 1.8 + 2j \\ 2.8 + 2j \\ 2.902 + 2j \end{bmatrix}$

- $\tilde{F}^{-1} = 2 * \text{diag}(\tilde{u}_2)$

- De nuevo, resolviendo la siguiente ecuación, obtenemos x_3 :

$$[E\tilde{F}^{-1}C']x_3 = E\tilde{F}^{-1}\tilde{u}_2 \rightarrow x_3 = \begin{bmatrix} 2+j \\ 1.9+j \\ 1+j \\ 0.8+j \end{bmatrix} \rightarrow u_3 = \begin{bmatrix} 2+j \\ 1.9+j \\ 1+j \\ 0.8+j \\ 2+j \\ 1.9+j \\ 1+j \\ 0.8+j \\ 3.9+2j \\ 1.8+2j \\ 2.8+2j \\ 2.9+2j \end{bmatrix}$$

Una vez obtenida la solución, calculamos el residuo de potencias:

- Continuando con la solución anterior:

$$y_3 = \begin{bmatrix} 3+4j \\ 2.61+3.8j \\ 2j \\ -0.36+1.6j \\ 2+j \\ 1.9+j \\ 1+j \\ 0.8+j \\ 11.21+15.6j \\ -0.76+7.2j \\ 3.84+11.2j \\ 4.41+11.6j \end{bmatrix}$$

- $\Delta\hat{p}_3 = \hat{p} - p_3 = \hat{p} - Ey_3 = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.013 - 0.007j \\ -0.639 - 0.033j \end{bmatrix}$

Como $\max(|\Delta\hat{p}_3|) < 0.001$, finaliza el proceso iterativo, por lo que podemos decir que se ha encontrado la solución en 3 iteraciones completas, obteniendo la solución (restando el offset al vector de estado x):

$$\begin{aligned} e'_2 &= 1.9 + j \rightarrow e_2 = 0.9 \\ f'_2 &= 0.8 + j \rightarrow f_2 = -0.2 \\ u_2 &= e_2 + f_2j = 0.9 + 0.8j \\ |u_2| &= 0.922 \text{ pu}; \quad \theta_2 = -12.528 \text{ deg} \\ \theta_1 - \theta_2 &= 0 - (-12.528) = 12.528 \text{ deg} \end{aligned}$$

Fin de ejemplo

7 RESULTADOS

En este capítulo veremos los resultados más relevantes obtenidos del *FLFQ*, así como una comparación entre los distintos métodos vistos en este trabajo: *Newton-Raphson*, *FLF*, *FLFRC* y *FLFQ*. Para aplicar el método de Newton-Raphson se ha usado el programa de libre circulación *MatPower 6.0*, mostrándose los resultados obtenidos por este.

Antes de continuar, es necesario aclarar las distintas variables que se pueden controlar. Estas son: el perfil inicial de tensiones (en *pu*), la carga del sistema (λ), la semilla imaginaria (*SI*) para el caso del *FLF* y el offset para los métodos factorizados en cartesianas (*FLFRC* y *FLFQ*), el cuál puede ser complejo.

7.1. Comportamiento ante perfil plano

En las dos siguientes gráficas que se observan a continuación vemos el comportamiento de los tres métodos factorizados para la red de dos nudos (cuyo límite de máxima cargabilidad es $\lambda = 2.81$) al ir aumentando la carga de la red. Cabe resaltar que se ha escogido como semilla imaginaria para el *FLF* aquel valor que hace converger a este método a un mayor número de casos, es decir, la “mejor” semilla imaginaria encontrada, además siempre se parte de un perfil inicial plano de tensiones. En la primera de ellas (Figura 15) se observa que el comportamiento de los tres métodos factorizados es bastante parecido, mientras que en la siguiente (Figura 16) observamos que los métodos factorizados en cartesianas muestran un rango de convergencia mucho mayor que la versión en polares, ya que alcanzan mayores cargas sin diverger.

Antes de continuar cabe mencionar que en las dos gráficas (Figura 15 y Figura 16) no se han mostrado el comportamiento de *NR* puesto que en casos factibles es muy similar a los métodos factorizados, pero cuando se va acercando al límite de máxima cargabilidad va empeorando su comportamiento, hasta que lo alcanza y deja de converger. Es por esta última razón por la que en casos infactibles tampoco se muestra su comportamiento.

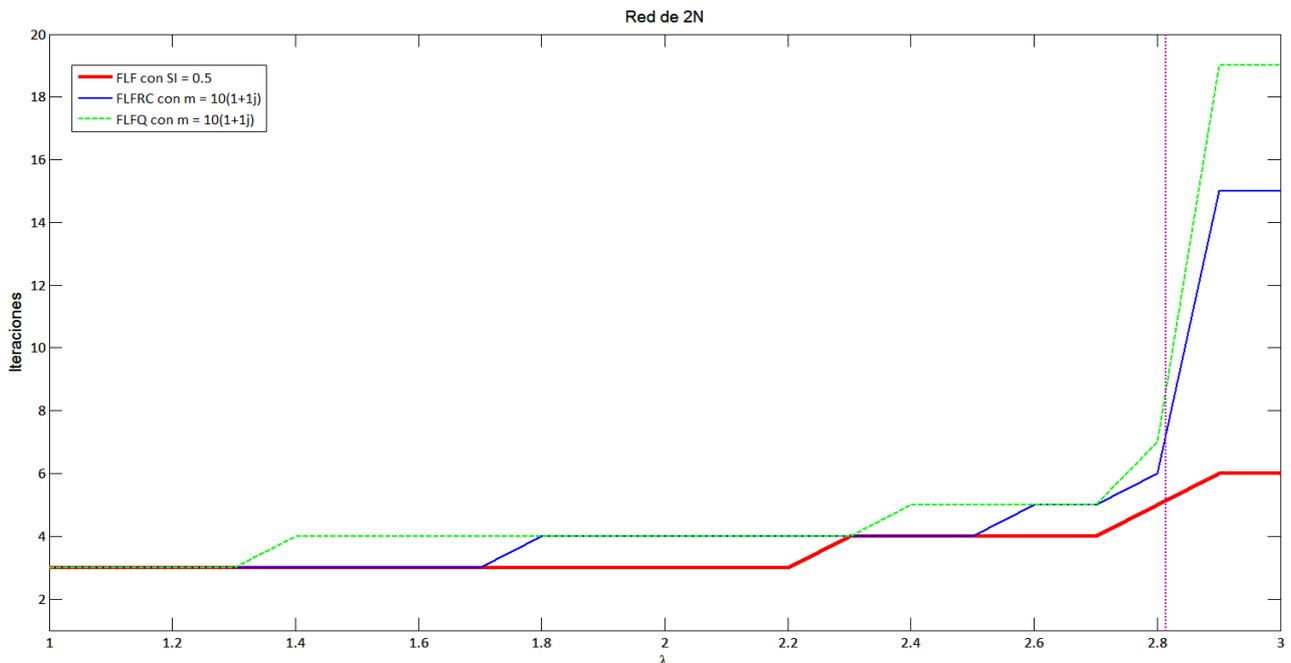


Figura 15. Comparación de iteraciones entre los tres métodos factorizados para la red de dos nudos: casos factibles

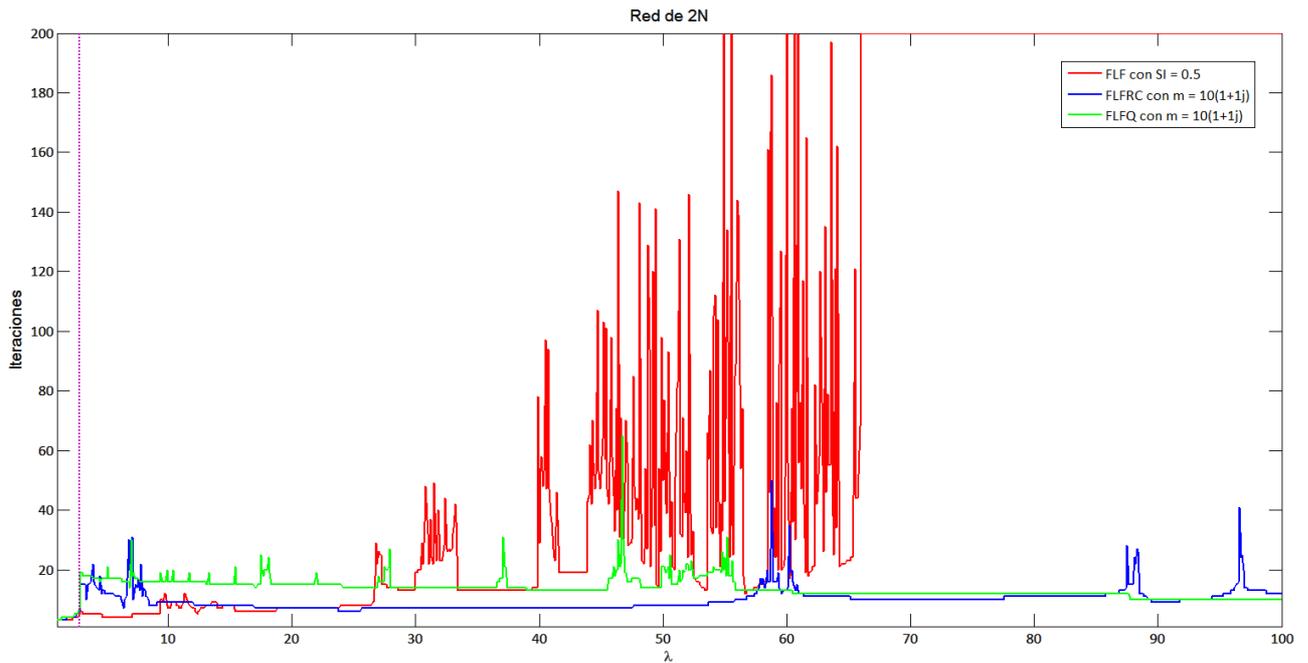


Figura 16. Comparación de iteraciones entre los tres métodos factorizados para la red de dos nudos: casos infactibles

La siguiente tabla va en la misma línea que la gráfica anterior, pero esta vez para las redes de 14, 118 y 300 nudos. Se observa para los distintos métodos factorizados la carga máxima que soporta cada red especificada en la columna de la izquierda. Esta carga se trata siempre de un caso infactible, y está más allá del respectivo límite de máxima cargabilidad para cada red. Se observa que para los métodos factorizados en cartesianas (*FLFRC* y *FLFQ*) se alcanza una carga máxima bastante mayor que para el caso del *FLF*, siendo el *FLFQ* el que soporta una mayor carga sin que diverja el algoritmo. Esto último es un indicio de que el *FLFQ* puede ser más robusto que el *FLFRC*, ya que viendo esta tabla, y junto a la gráfica anterior, podemos decir a priori que converge en mayores casos.

| Red | Límite de convergencia 0,0001 | | | | | |
|-----|-------------------------------|-----------------|--------------------------|-------------|-------------------------|-------------|
| | <i>NR</i> | <i>FLF</i> | <i>FLFRC m = 50(1+j)</i> | | <i>FLFQ m = 50(1+j)</i> | |
| | λ_{max} | λ_{max} | λ_{max} | Iteraciones | λ_{max} | Iteraciones |
| 14 | 4,06 | 8,16 | 21,85 | 20 | 28,04 | 23 |
| 118 | 3,18 | 5,05 | 3,84 | 15 | 6,07 | 29 |
| 300 | 1,42 | 2,40 | 1,96 | 17 | 3,53 | 23 |

Tabla 1. Comparación de cargas máximas de convergencia entre los tres métodos factorizados

Los resultados anteriores se han obtenido fijando un valor específico de semilla imaginaria para el *FLF* y otro valor de offset para el *FLFRC* y *FLFQ*. Con el objetivo de comprobar el comportamiento anterior y ver la robustez de estos métodos (partiendo siempre de un perfil inicial plano de tensiones), en las siguientes gráficas se muestran mapas de colores (para la red de 14 nudos) en los que se varía la semilla imaginaria o el offset y la carga de la red. Los distintos colores muestran las iteraciones en las que converge o no el algoritmo que se especifica. Esta prueba se realiza para los tres métodos factorizados:

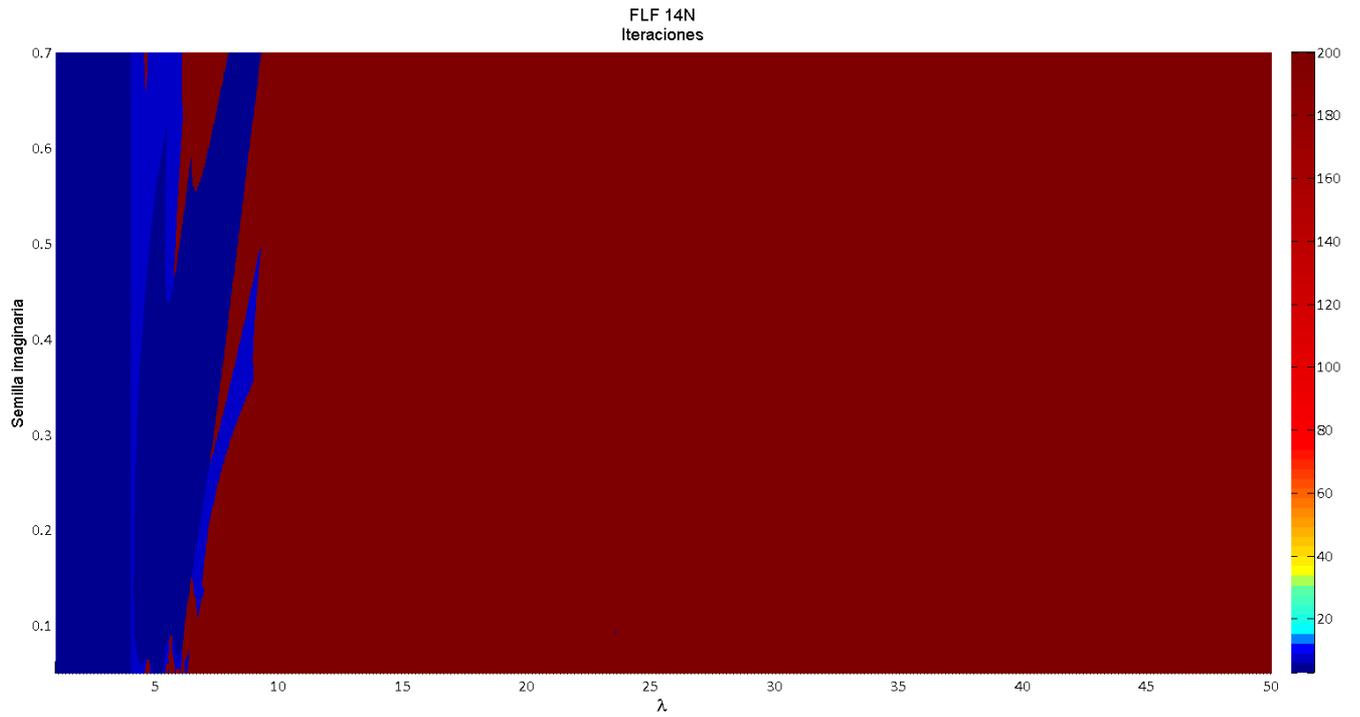


Figura 17. Iteraciones frente a la variación de la *S.I.* y de la carga de la red para la red de 14 nudos, usando el *FLF*

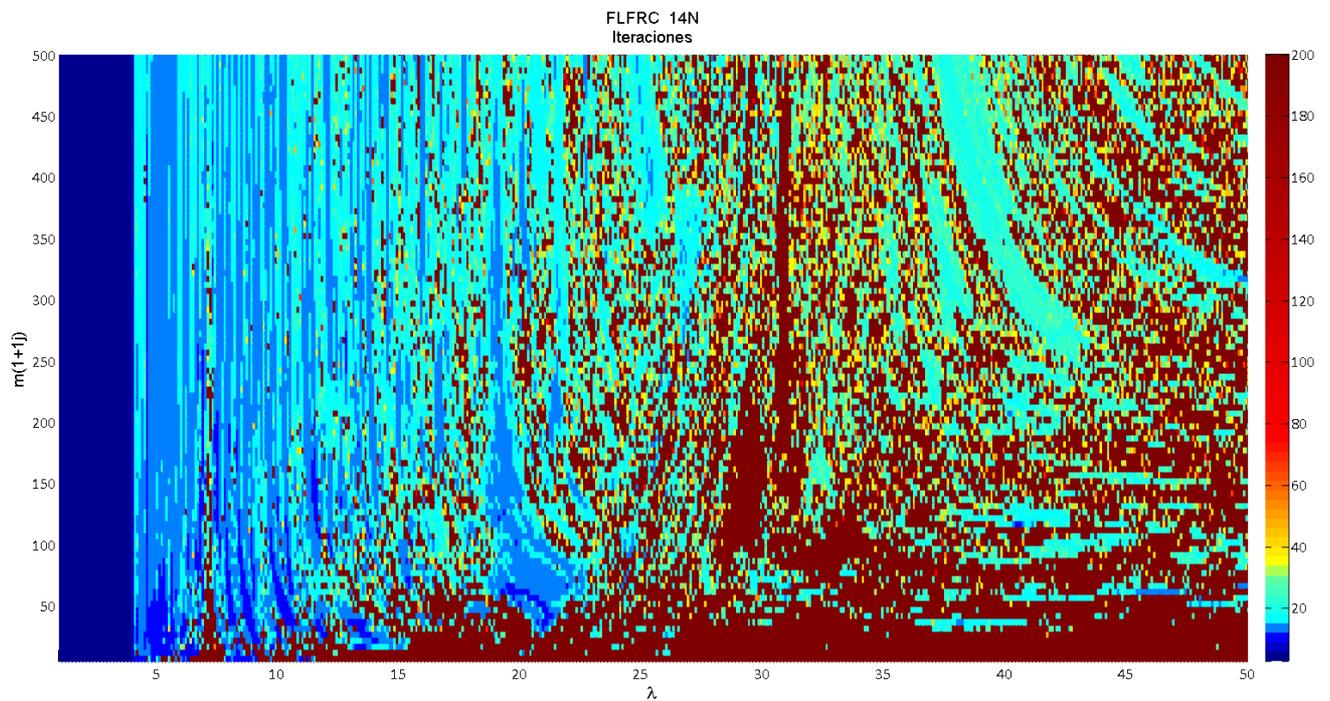


Figura 18. Iteraciones frente a la variación del offset y de la carga de la red para la red de 14 nudos, usando el *FLFRC*

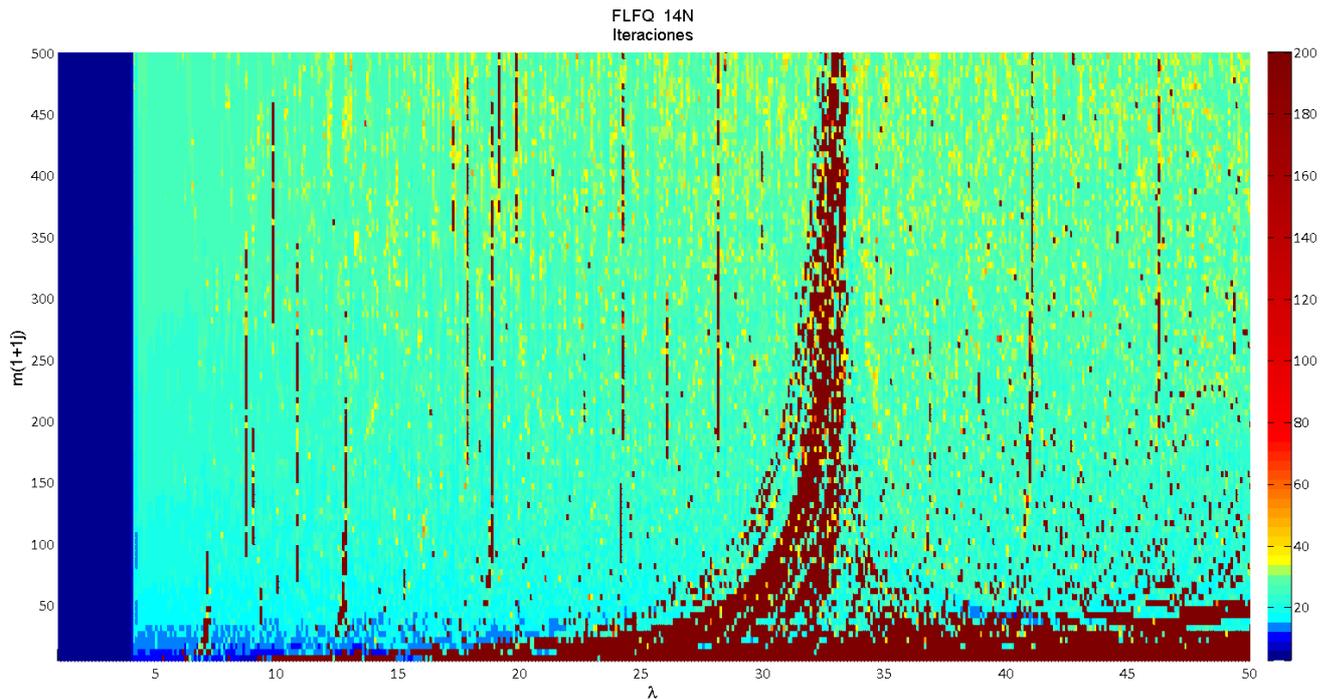


Figura 19. Iteraciones frente a la variación del offset y de la carga de la red para la red de 14 nudos, usando el *FLFQ*

Se observa que la primera figura (Figura 17), correspondiente al *FLF*, a partir de $\lambda = 10$ aproximadamente este método no consigue converger para la red de 14 nudos. En cambio, los métodos factorizados en cartesianas si que consiguen converger en un rango mucho mayor que la versión en polares.

En concreto, el *FLFQ*, consigue un mayor porcentaje de éxito que el *FLFRC* (como comprobamos al observar zonas mas claras en la Figura 19 que en la Figura 18). En cambio, este último presenta unas zonas mas azuladas (sinónimo de pocas iteraciones) que el *FLFQ*, lo cual significaría una desventaja para este pequeño rango de carga en el que se observa esta zona más azulada. En el Apéndice se muestran gráficas similares a la anterior, pero con las redes de 118 y 300 nudos.

7.2. Comportamiento ante distintos perfiles

Otro estudio interesante que puede analizarse es la cuenca de atracción de cada método para una determinada red. En estas cuencas podemos observar a que solución converge el algoritmo (dada la multiplicidad de soluciones de cada sistema) y en cuantas iteraciones lo hace, para distintos tipos de perfiles iniciales del cual se parte para la resolución del problema (identificado por V^0 para el módulo de la tensión inicial y por θ^0 para la fase inicial de la misma) . Para aplicar esta idea se escoge una red de 2 nudos, esta se especifica a continuación:

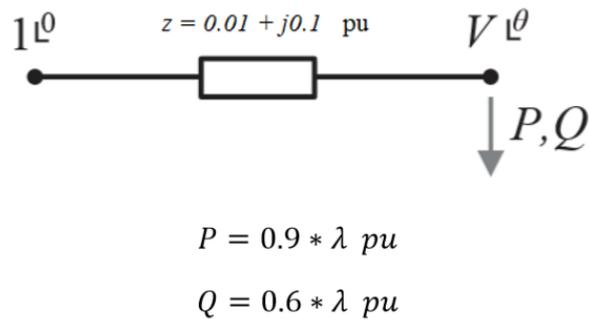


Figura 20. Sistema de 2 nudos

Si resolvemos esta misma red con el método de *Newton-Raphson*, se obtiene la cuenca de atracción que se observa en la Figura 21. En esta figura comprobamos que tiene un amplio margen en el que este método no converge, y cuando lo hace en la zona central, converge a la solución factible $V_2 = 0.9209$ con $\theta_2 = -5.2335$ (deg). Los números que se observan indican las iteraciones en las que el método converge, siendo *NC* las siglas de ‘No Converge’.

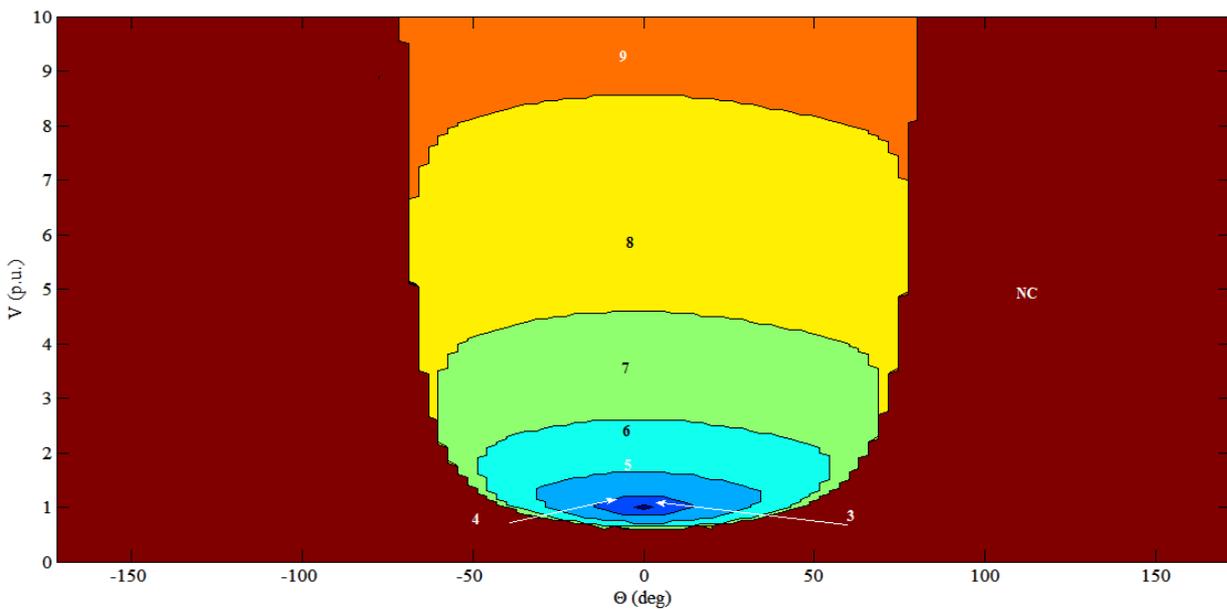


Figura 21. Región de atracción con el método de *Newton-Raphson* para el sistema de 2 nudos

Las distintas soluciones para esta red se especifican en la siguiente tabla, así como el color que las identificará en la cuenca de atracción. Este estudio se realiza para los métodos factorizados (*FLF*, *FLFRC* y *FLFQ*), y los resultados que se obtienen son los siguientes:

| | V_2 | θ_2 (deg) | Color |
|---------------|--------|------------------|-------|
| $\lambda = 1$ | 0,9209 | -5,2335 | Green |
| | 0,118 | -45,3776 | Blue |

Tabla 2. Distintas soluciones para el sistema de 2 nudos

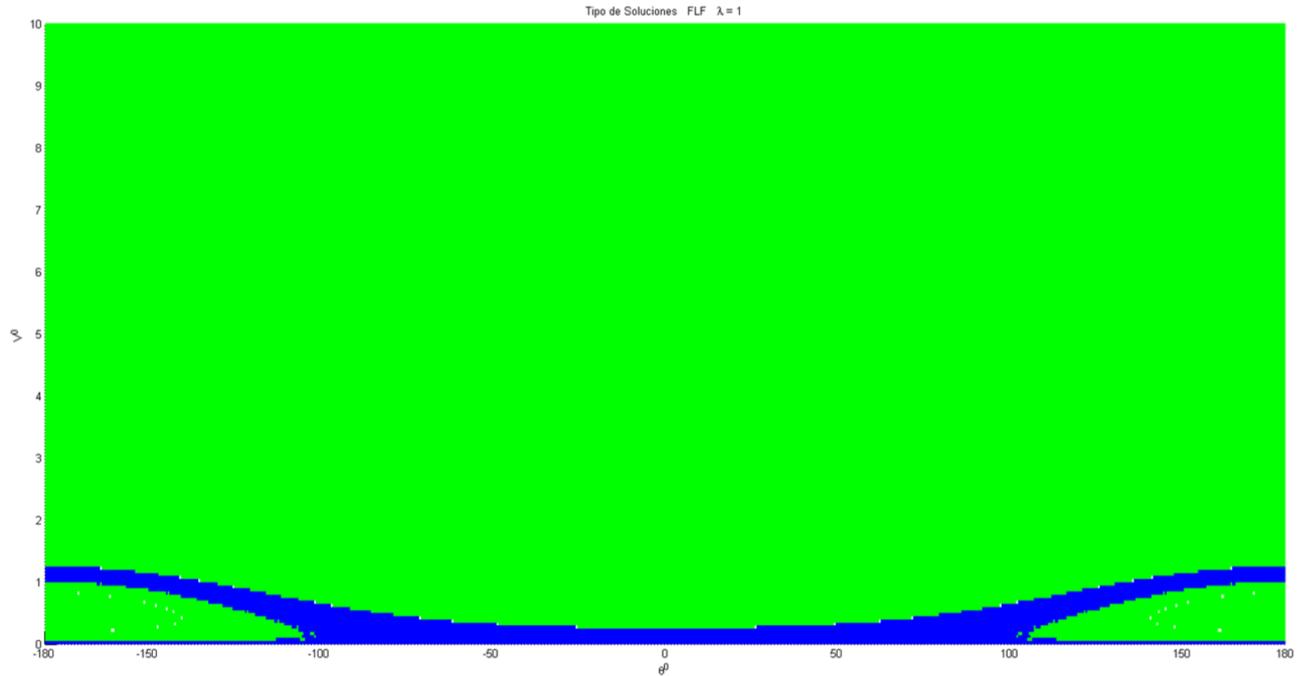


Figura 22. Región de atracción con *FLF* para el sistema de 2 nudos

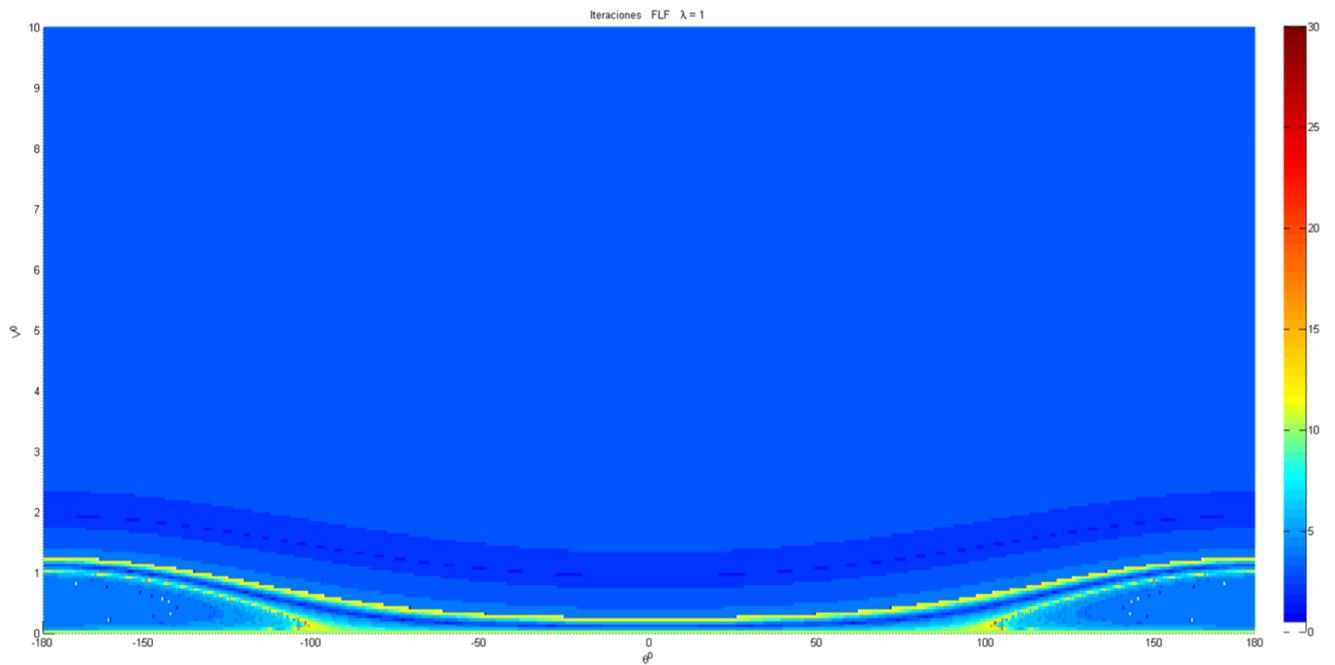


Figura 23. Iteraciones con *FLF* para el sistema de 2 nudos

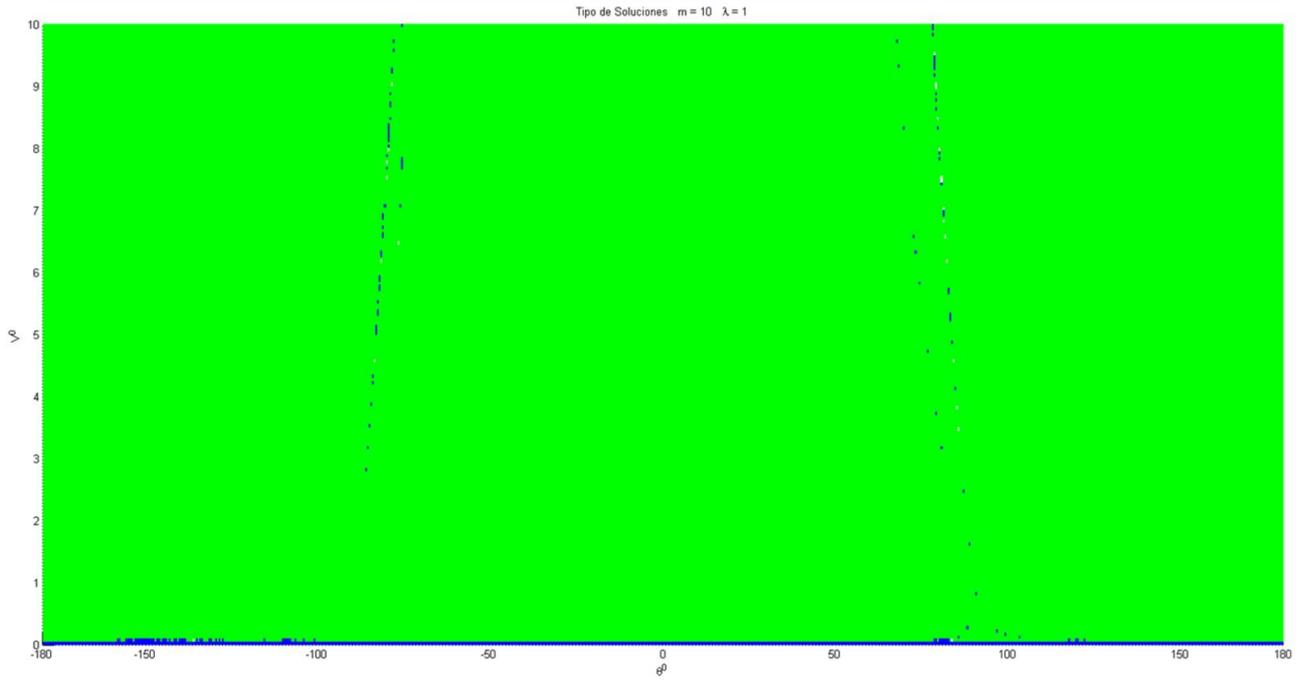


Figura 24. Región de atracción con *FLIRC* para el sistema de 2 nudos

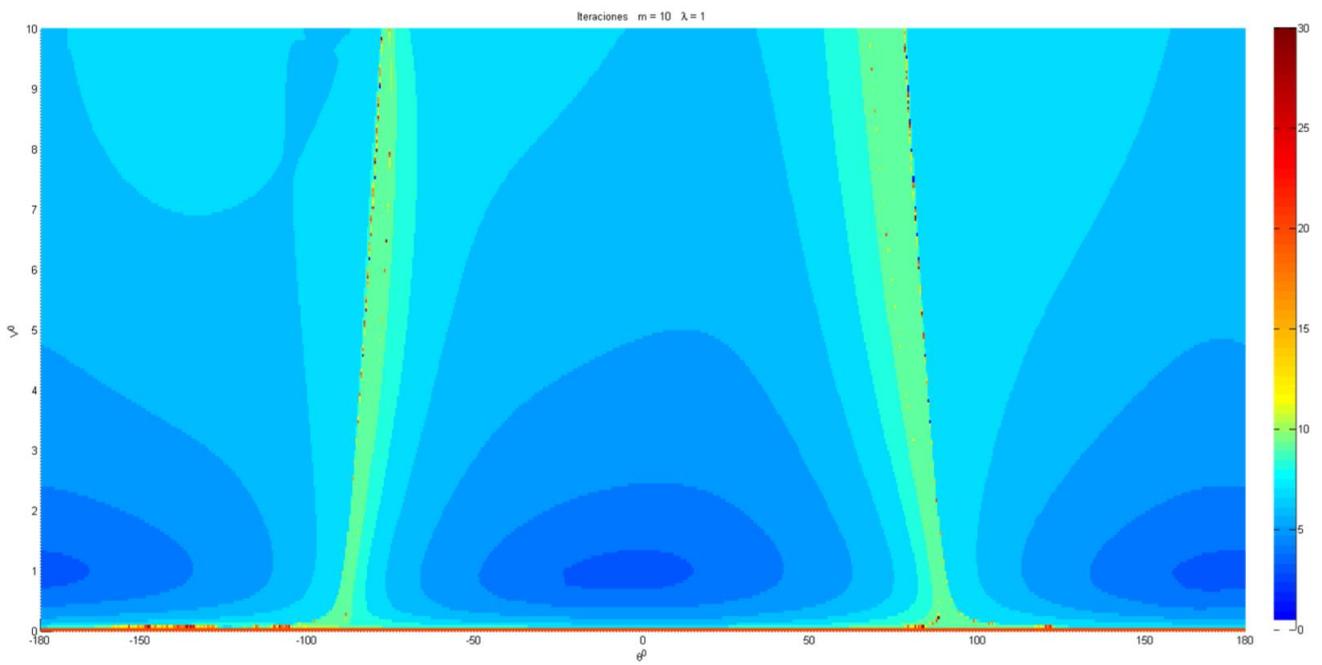


Figura 25. Iteraciones con *FLIRC* para el sistema de 2 nudos

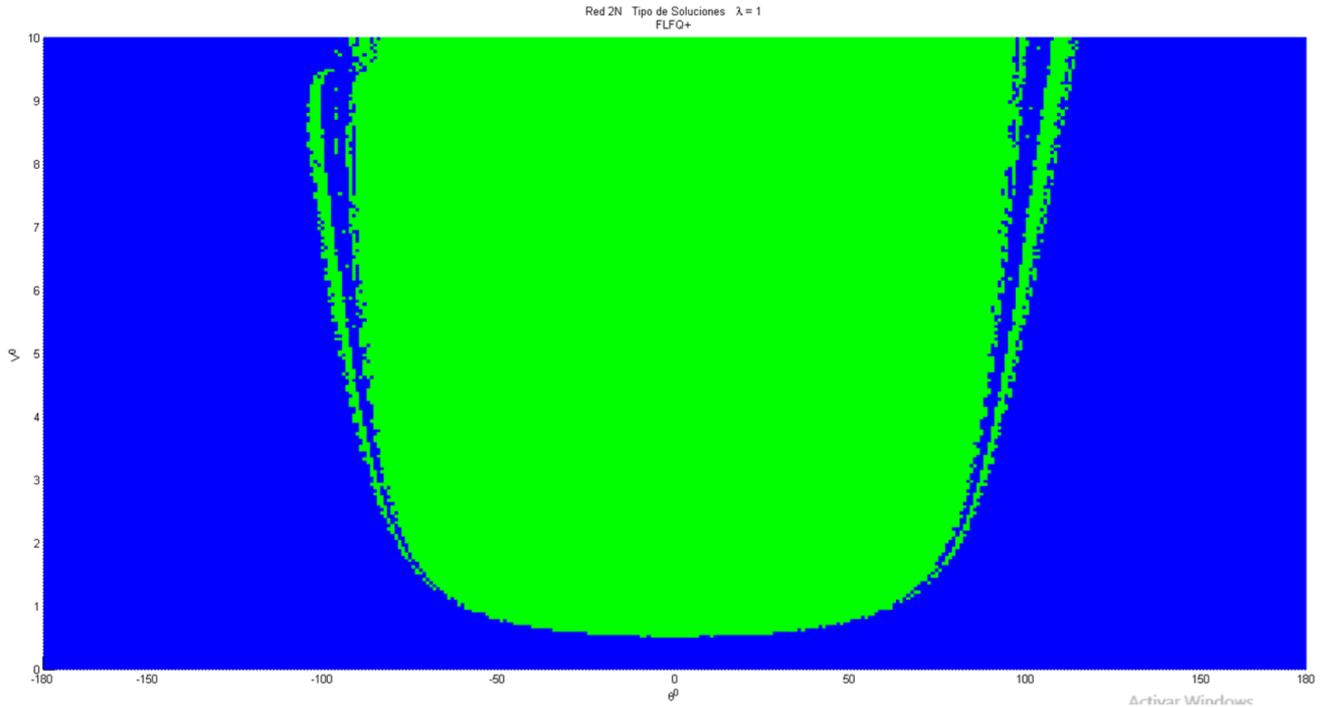


Figura 26. Región de atracción con FLFQ para el sistema de 2 nudos

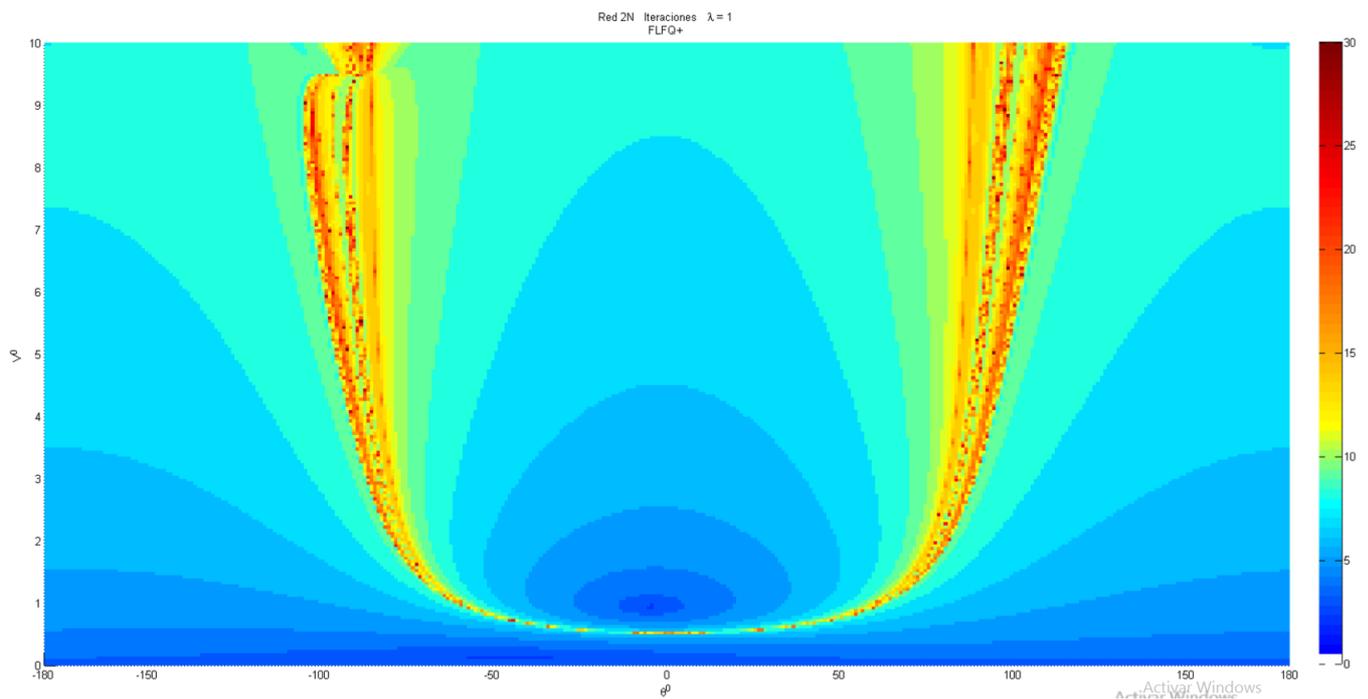


Figura 27. Iteraciones con FLFQ para el sistema de 2 nudos

Tal y como se comprueba, cada método tiene una cuenca de atracción distinta. En este estudio observamos que el *FLF* converge generalmente en menos iteraciones que los otros dos métodos de formulación cartesiana, con una amplia zona (de color verde) a la solución ingenieril ($V_2 = 0.9209$), siendo todo esto un ventaja respecto a los otros métodos. En cuanto al *FLFRC*, converge casi siempre a la solución ingenieril, aunque en algunas iteraciones más que la versión en polares.

Por último, en el *FLFQ* observamos dos zonas amplias de convergencia, que se corresponde con las dos soluciones para esta red. En la transición entre una solución y otra vemos que el número de iteraciones aumenta (zonas más cálidas de la Figura 27), siendo el método que más iteraciones tarda en converger de los tres, para esta red y estado de carga.

7.3. Comportamiento ante perfiles aleatorios

Las pruebas que se han realizado hasta ahora han sido con redes partiendo desde un perfil plano de tensiones o desde perfiles iguales para todos los nudos, pero variando en un rango de valores (justamente como el estudio anterior). Una prueba muy severa para comprobar la robustez de convergencia de cada algoritmo sería, dado un rango cerrado de valores para el módulo de la tensión y la fase de la misma, asignar a cada nudo de forma aleatoria un valor inicial de V y θ . Esta operación se realizaría 100 veces, es decir tendríamos 100 perfiles iniciales aleatorios con los cuales se ejecutaría cada algoritmo, y de esta forma podríamos observar el porcentaje de éxito de cada uno.

Una forma de realizar este estudio sería definir varias zonas (excluyentes unas de otras) de rango de valores donde sortear los 100 perfiles iniciales. Inicialmente se empezaría en una zona determinada, y progresivamente se irían realizando los sorteos en zonas cada vez más alejadas del perfil inicial plano, donde cada zona excluiría la zona recogida anteriormente (para evitar casos parecidos o iguales). La siguiente imagen clarifica esta idea, donde se puede observar las distintas zonas excluyentes:

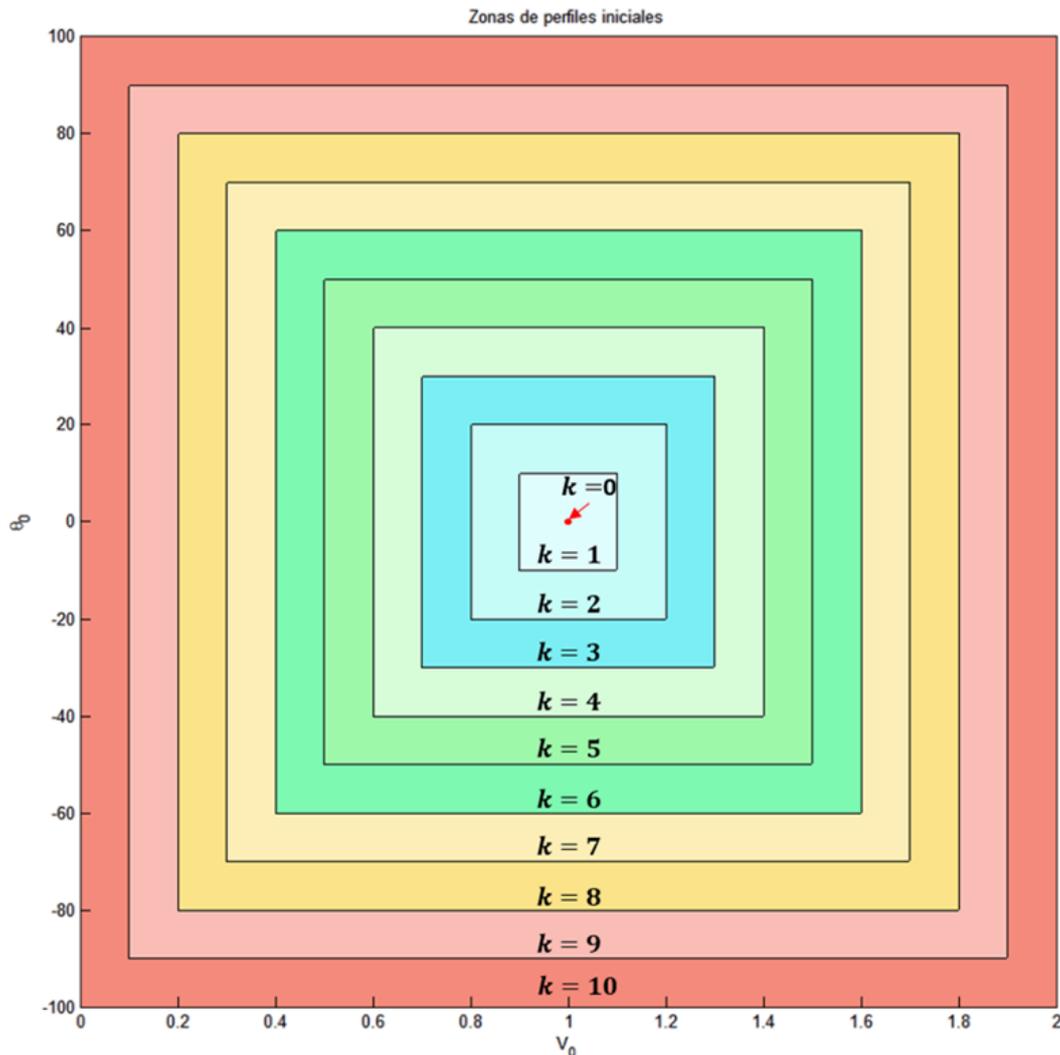


Figura 28. Áreas excluyentes para los perfiles iniciales

En la imagen anterior se identifica cada área excluyente con un color y un índice k distintos (este último índice sirve simplemente para identificar el área excluyente que se trata). En el eje de abscisas se representa el rango de variación del módulo de la tensión de cada nudo (en pu), y en el de ordenadas el rango de la fase de la tensión (en $grados$). El caso para $k = 0$ sería un caso particular, el cuál se trataría de un perfil plano de tensiones de módulo $1 pu$ y fase $0 grados$ (en este caso no hace falta realizar los 100 sorteos, ya que es una posibilidad única de valores).

Con este estudio lo que se pretende es conocer mejor el comportamiento de cada algoritmo (y así compararlos) al someterlos a perfiles iniciales aleatorios y, en la mayoría de los casos, dispares. Hay que resaltar que esto se realiza por curiosidad científica, ya que en los casos reales siempre se parte de un perfil plano de tensiones o de resultados anteriores de flujos de cargas, nunca de perfiles tan dispares. De esta forma, se pretende comprobar a partir de cuando los cuatro métodos usados hasta ahora empiezan a diverger.

A continuación se exponen algunos resultados obtenidos, en forma de tablas. Este estudio se ha realizado de tres formas (todas ellas basadas en la Figura 28):

1. Estudio con perfil excluyente en V : en este tipo de estudio sólo se hacen los sorteos en el eje de abscisas, es decir con $\theta = 0$ para todos los nudos.
2. Estudio con perfil excluyente en θ : en este tipo de estudio, sólo se hacen los sorteos en el eje de ordenadas, es decir con $V = 1$ para todos los nudos.
3. Estudio con perfil excluyente en V y θ : este estudio sería el más severo de los tres. En el se realizan los sorteos en cada zona completa mostrada en la Figura 28.

Para realizar este estudio se escoge una red de 14 nudos, donde el límite de máxima cargabilidad se encuentra en $\lambda = 4.06$. Conocido este límite, se estudia su comportamiento para cuatro casos, dos de ellos factibles (donde existen soluciones reales) y otros dos infactibles (donde sólo existen soluciones complejas).

➤ Estudio 1, perfil excluyente en V :

| NR | | | | | | |
|-----------------|-----------|--------------|-----------------------|-------------------------|----------------------------|--------------------|
| | Rango (k) | Convergencia | Soluciones diferentes | Soluciones reales (dif) | Soluciones complejas (dif) | Iteraciones medias |
| $\lambda = 1$ | 0 (flat) | 1 | 1 | 1 | 0 | 3 |
| | 1 | 100 | 1 | 1 | 0 | 3,22 |
| | 2 | 100 | 1 | 1 | 0 | 4,71 |
| | 3 | 38 | 3 | 3 | 0 | 6,66 |
| | 4 | 10 | 6 | 6 | 0 | 9,2 |
| | 5 | 2 | 2 | 2 | 0 | 13,5 |
| | 6 | 1 | 1 | 1 | 0 | 9 |
| | 7 | 2 | 2 | 2 | 0 | 6 |
| | 8 | 2 | 2 | 2 | 0 | 6,5 |
| | 9 | 2 | 2 | 2 | 0 | 6,5 |
| | 10 | 2 | 2 | 2 | 0 | 6,5 |
| $\lambda = 3,9$ | 0 (flat) | 1 | 1 | 1 | 0 | 5 |
| | 1 | 100 | 1 | 1 | 0 | 5 |
| | 2 | 100 | 1 | 1 | 0 | 5,85 |
| | 3 | 41 | 1 | 1 | 0 | 7,39 |
| | 4 | 4 | 1 | 1 | 0 | 7 |
| | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\lambda = 4,2$ | 0 (flat) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\lambda = 5$ | 0 (flat) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Tabla 3. Comportamiento de NR para la red de 14 nudos con perfiles iniciales aleatorios del estudio $n^\circ 1$

| <i>FLF</i> | | | | | | | |
|-----------------|-----------|--------------|-----------------|-------------------|----------------------|------|--------------------|
| | Rango (k) | Convergencia | Sol. diferentes | Sol. reales (dif) | Sol. complejas (dif) | S.I. | Iteraciones medias |
| $\lambda = 1$ | 0 (flat) | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 3 |
| | 1 | 100 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2,97 |
| | 2 | 100 | 1 | 1 | 0 | 0 | 3,01 |
| | 3 | 100 | 1 | 1 | 0 | 0 | 3,62 |
| | 4 | 100 | 1 | 1 | 0 | 0 | 3,99 |
| | 5 | 93 | 1 | 1 | 0 | 0,25 | 4,2 |
| | 6 | 62 | 1 | 1 | 0 | 0,15 | 5 |
| | 7 | 29 | 1 | 1 | 0 | 0,15 | 5,93 |
| | 8 | 16 | 1 | 1 | 0 | 0,35 | 6,44 |
| | 9 | 13 | 1 | 1 | 0 | 0,45 | 7,46 |
| | 10 | 6 | 1 | 1 | 0 | 0,35 | 6 |
| $\lambda = 3,9$ | 0 (flat) | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| | 1 | 100 | 1 | 1 | 0 | 0 | 3,68 |
| | 2 | 100 | 1 | 1 | 0 | 0,1 | 4,2 |
| | 3 | 100 | 1 | 1 | 0 | 0,35 | 4,73 |
| | 4 | 94 | 1 | 1 | 0 | 0,35 | 5,22 |
| | 5 | 60 | 2 | 2 | 0 | 0,25 | 7,05 |
| | 6 | 34 | 3 | 2 | 1 | 0,3 | 7,47 |
| | 7 | 15 | 2 | 2 | 0 | 0,35 | 7,34 |
| | 8 | 10 | 2 | 2 | 0 | 0,5 | 7,7 |
| | 9 | 6 | 3 | 2 | 1 | 0,4 | 7,5 |
| | 10 | 4 | 2 | 2 | 0 | 0,2 | 8,25 |
| $\lambda = 4,2$ | 0 (flat) | 1 | 1 | 0 | 1 | 0,05 | 7 |
| | 1 | 100 | 1 | 0 | 1 | 0,05 | 6,79 |
| | 2 | 100 | 1 | 0 | 1 | 0,05 | 6,06 |
| | 3 | 100 | 1 | 0 | 1 | 0,4 | 6,31 |
| | 4 | 90 | 1 | 0 | 1 | 0,35 | 5,51 |
| | 5 | 56 | 3 | 0 | 3 | 0,2 | 6 |
| | 6 | 31 | 3 | 0 | 3 | 0,35 | 6,64 |
| | 7 | 16 | 3 | 0 | 3 | 0,65 | 7,12 |
| | 8 | 11 | 2 | 0 | 2 | 0,5 | 7,36 |
| | 9 | 6 | 3 | 0 | 3 | 0,4 | 7,84 |
| | 10 | 4 | 2 | 0 | 2 | 0,55 | 6,25 |
| $\lambda = 5$ | 0 (flat) | 1 | 1 | 0 | 1 | 0,05 | 6 |
| | 1 | 100 | 1 | 0 | 1 | 0,15 | 5,16 |
| | 2 | 100 | 1 | 0 | 1 | 0,25 | 5,02 |
| | 3 | 99 | 1 | 0 | 1 | 0,4 | 5,15 |
| | 4 | 74 | 1 | 0 | 1 | 0,35 | 4,7 |
| | 5 | 40 | 1 | 0 | 1 | 0,3 | 5,65 |
| | 6 | 19 | 1 | 0 | 1 | 0,35 | 5,84 |
| | 7 | 11 | 1 | 0 | 1 | 0,3 | 6,73 |
| | 8 | 9 | 1 | 0 | 1 | 0,55 | 6,12 |
| | 9 | 4 | 3 | 0 | 3 | 0,4 | 8,5 |
| | 10 | 4 | 2 | 0 | 2 | 0,65 | 6,25 |

Tabla 4. Comportamiento del *FLF* para la red de 14 nudos con perfiles iniciales aleatorios del estudio $n^{\circ} 1$

| <i>FLFRC</i> | | | | | | | |
|-----------------|--------------|-----------------|-------------------|----------------------|--------|--------------------|-------|
| Rango (k) | Convergencia | Sol. diferentes | Sol. reales (dif) | Sol. complejas (dif) | Offset | Iteraciones medias | |
| $\lambda = 1$ | 0 (flat) | 1 | 1 | 1 | 0 | 5 | 3 |
| | 1 | 100 | 1 | 1 | 0 | 5 | 3,78 |
| | 2 | 100 | 2 | 2 | 0 | 5 | 4,95 |
| | 3 | 100 | 47 | 6 | 41 | 790 | 14,48 |
| | 4 | 100 | 82 | 7 | 75 | 1755 | 27,30 |
| | 5 | 100 | 98 | 5 | 93 | 780 | 22,24 |
| | 6 | 99 | 93 | 2 | 91 | 1990 | 31,84 |
| | 7 | 98 | 95 | 1 | 94 | 1695 | 31,64 |
| | 8 | 98 | 97 | 2 | 95 | 1825 | 32,82 |
| | 9 | 96 | 95 | 1 | 94 | 1085 | 25,97 |
| | 10 | 86 | 86 | 1 | 85 | 1555 | 33,59 |
| $\lambda = 3,9$ | 0 (flat) | 1 | 1 | 1 | 0 | 5 | 6,00 |
| | 1 | 100 | 1 | 1 | 0 | 70 | 6,00 |
| | 2 | 100 | 1 | 1 | 0 | 15 | 6,77 |
| | 3 | 100 | 37 | 1 | 36 | 850 | 15,85 |
| | 4 | 100 | 82 | 1 | 81 | 1670 | 23,22 |
| | 5 | 99 | 96 | 0 | 96 | 1915 | 26,42 |
| | 6 | 97 | 95 | 0 | 95 | 1865 | 25,95 |
| | 7 | 99 | 95 | 0 | 95 | 1345 | 24,89 |
| | 8 | 96 | 95 | 0 | 95 | 1665 | 27,21 |
| | 9 | 95 | 93 | 0 | 93 | 1135 | 35,07 |
| | 10 | 80 | 80 | 0 | 80 | 1840 | 32,03 |
| $\lambda = 4,2$ | 0 (flat) | 1 | 1 | 0 | 1 | 5 | 12 |
| | 1 | 100 | 7 | 0 | 7 | 70 | 14,68 |
| | 2 | 100 | 4 | 0 | 4 | 15 | 14,22 |
| | 3 | 100 | 38 | 0 | 38 | 850 | 21,69 |
| | 4 | 99 | 83 | 0 | 83 | 1670 | 25,27 |
| | 5 | 100 | 97 | 0 | 97 | 1915 | 28,87 |
| | 6 | 99 | 95 | 0 | 95 | 1865 | 27,75 |
| | 7 | 98 | 96 | 0 | 96 | 1345 | 26,1 |
| | 8 | 100 | 100 | 0 | 100 | 1665 | 29,14 |
| | 9 | 90 | 90 | 0 | 90 | 1135 | 29,15 |
| | 10 | 82 | 82 | 0 | 82 | 1840 | 37,94 |
| $\lambda = 5$ | 0 (flat) | 1 | 1 | 0 | 1 | 15 | 12 |
| | 1 | 100 | 3 | 0 | 3 | 15 | 11,26 |
| | 2 | 100 | 12 | 0 | 12 | 170 | 15,32 |
| | 3 | 100 | 39 | 0 | 39 | 655 | 20,41 |
| | 4 | 99 | 82 | 0 | 82 | 1530 | 26,82 |
| | 5 | 99 | 90 | 0 | 90 | 1970 | 27,38 |
| | 6 | 99 | 96 | 0 | 96 | 1640 | 26,84 |
| | 7 | 99 | 96 | 0 | 96 | 1970 | 29,55 |
| | 8 | 98 | 98 | 0 | 98 | 1895 | 32,17 |
| | 9 | 94 | 94 | 0 | 94 | 1880 | 35,17 |
| | 10 | 82 | 82 | 0 | 82 | 1755 | 40,48 |

Tabla 5. Comportamiento del *FLFRC* para la red de 14 nudos con perfiles iniciales aleatorios del estudio $n^\circ 1$

| <i>FLFQ</i> | | | | | | | |
|-----------------|-----------|--------------|-----------------|-------------------|----------------------|--------|--------------------|
| | Rango (k) | Convergencia | Sol. diferentes | Sol. reales (dif) | Sol. complejas (dif) | Offset | Iteraciones medias |
| $\lambda = 1$ | 0 (flat) | 1 | 1 | 1 | 0 | 5 | 3 |
| | 1 | 100 | 1 | 1 | 0 | 5 | 3,71 |
| | 2 | 100 | 2 | 2 | 0 | 5 | 4,93 |
| | 3 | 100 | 45 | 6 | 39 | 105 | 15,86 |
| | 4 | 100 | 75 | 10 | 65 | 380 | 26,29 |
| | 5 | 99 | 96 | 10 | 86 | 300 | 28,45 |
| | 6 | 98 | 94 | 2 | 92 | 245 | 31,47 |
| | 7 | 98 | 96 | 1 | 95 | 810 | 37 |
| | 8 | 97 | 95 | 3 | 92 | 155 | 34,47 |
| | 9 | 96 | 94 | 1 | 93 | 390 | 38,03 |
| | 10 | 92 | 91 | 2 | 89 | 1210 | 45,65 |
| $\lambda = 3,9$ | 0 (flat) | 1 | 1 | 1 | 0 | 5 | 6 |
| | 1 | 100 | 1 | 1 | 0 | 5 | 6 |
| | 2 | 100 | 2 | 1 | 1 | 5 | 6,67 |
| | 3 | 100 | 37 | 2 | 35 | 120 | 15,63 |
| | 4 | 99 | 80 | 2 | 78 | 425 | 27,47 |
| | 5 | 100 | 88 | 0 | 88 | 1485 | 34,61 |
| | 6 | 99 | 93 | 1 | 92 | 215 | 35,2 |
| | 7 | 99 | 95 | 0 | 95 | 1115 | 37,72 |
| | 8 | 98 | 97 | 0 | 97 | 885 | 37,76 |
| | 9 | 96 | 95 | 0 | 95 | 615 | 40,64 |
| | 10 | 93 | 93 | 0 | 93 | 950 | 46,44 |
| $\lambda = 4,2$ | 0 (flat) | 1 | 1 | 0 | 1 | 5 | 11 |
| | 1 | 100 | 2 | 0 | 2 | 5 | 11,27 |
| | 2 | 100 | 3 | 0 | 3 | 5 | 11,12 |
| | 3 | 100 | 35 | 0 | 35 | 190 | 25,55 |
| | 4 | 100 | 80 | 0 | 80 | 275 | 29,27 |
| | 5 | 100 | 88 | 0 | 88 | 555 | 32,03 |
| | 6 | 100 | 96 | 0 | 96 | 710 | 36,43 |
| | 7 | 99 | 97 | 0 | 97 | 200 | 32,51 |
| | 8 | 98 | 96 | 0 | 96 | 1285 | 45,15 |
| | 9 | 97 | 97 | 0 | 97 | 660 | 41,03 |
| | 10 | 90 | 90 | 0 | 90 | 1095 | 43,72 |
| $\lambda = 5$ | 0 (flat) | 1 | 1 | 0 | 1 | 5 | 10 |
| | 1 | 100 | 2 | 0 | 2 | 5 | 9,62 |
| | 2 | 100 | 3 | 0 | 3 | 5 | 10,1 |
| | 3 | 100 | 38 | 0 | 38 | 250 | 25,55 |
| | 4 | 100 | 77 | 0 | 77 | 415 | 30,54 |
| | 5 | 99 | 91 | 0 | 91 | 205 | 29,18 |
| | 6 | 99 | 94 | 0 | 94 | 220 | 36,59 |
| | 7 | 99 | 92 | 0 | 92 | 420 | 35,03 |
| | 8 | 98 | 95 | 0 | 95 | 275 | 33,96 |
| | 9 | 95 | 93 | 0 | 93 | 1500 | 49,12 |
| | 10 | 90 | 90 | 0 | 90 | 1460 | 50,92 |

Tabla 6. Comportamiento del *FLFQ* para la red de 14 nudos con perfiles iniciales aleatorios del estudio $n^\circ 1$

➤ Estudio 2, perfil excluyente en θ :

| | | NR | | | | |
|-----------------|-----------|--------------|-----------------------|-------------------------|----------------------------|--------------------|
| | Rango (k) | Convergencia | Soluciones diferentes | Soluciones reales (dif) | Soluciones complejas (dif) | Iteraciones medias |
| $\lambda = 1$ | 0 (flat) | 1 | 1 | 1 | 0 | 3 |
| | 1 | 100 | 1 | 1 | 0 | 4,16 |
| | 2 | 15 | 4 | 4 | 0 | 7,07 |
| | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\lambda = 3,9$ | 0 (flat) | 1 | 1 | 1 | 0 | 5 |
| | 1 | 100 | 1 | 1 | 0 | 5,15 |
| | 2 | 14 | 1 | 1 | 0 | 6,86 |
| | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\lambda = 4,2$ | 0 (flat) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\lambda = 5$ | 0 (flat) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Tabla 7. Comportamiento de NR para la red de 14 nudos con perfiles iniciales aleatorios del estudio $n^\circ 2$

| <i>FLF</i> | | | | | | | |
|-----------------|-----------|--------------|-----------------|-------------------|----------------------|------|--------------------|
| | Rango (k) | Convergencia | Sol. diferentes | Sol. reales (dif) | Sol. complejas (dif) | S.I. | Iteraciones medias |
| $\lambda = 1$ | 0 (flat) | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 3 |
| | 1 | 100 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2,64 |
| | 2 | 100 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2,99 |
| | 3 | 100 | 1 | 1 | 0 | 0 | 3,25 |
| | 4 | 97 | 1 | 1 | 0 | 0,05 | 4,08 |
| | 5 | 30 | 1 | 1 | 0 | 0,25 | 5,6 |
| | 6 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0,3 | 7 |
| | 7 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0,35 | 12 |
| | 8 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0,4 | 24 |
| | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 10 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0,65 | 19 |
| $\lambda = 3,9$ | 0 (flat) | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| | 1 | 100 | 1 | 1 | 0 | 0 | 3,87 |
| | 2 | 100 | 1 | 1 | 0 | 0 | 3,75 |
| | 3 | 100 | 2 | 2 | 0 | 0,1 | 4,67 |
| | 4 | 86 | 3 | 2 | 1 | 0,35 | 6,03 |
| | 5 | 13 | 2 | 2 | 0 | 0,6 | 7 |
| | 6 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0,25 | 9 |
| | 7 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0,4 | 12 |
| | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 9 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0,15 | 55 |
| | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\lambda = 4,2$ | 0 (flat) | 1 | 1 | 0 | 1 | 0,05 | 7 |
| | 1 | 100 | 1 | 0 | 1 | 0,05 | 6,97 |
| | 2 | 100 | 1 | 0 | 1 | 0,1 | 5,93 |
| | 3 | 100 | 2 | 0 | 2 | 0,25 | 5,89 |
| | 4 | 83 | 3 | 0 | 3 | 0,4 | 6,27 |
| | 5 | 11 | 2 | 0 | 2 | 0,6 | 6,91 |
| | 6 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0,45 | 27 |
| | 7 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0,2 | 30 |
| | 8 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0,7 | 55 |
| | 9 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0,55 | 27 |
| | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\lambda = 5$ | 0 (flat) | 1 | 1 | 0 | 1 | 0,05 | 6 |
| | 1 | 100 | 1 | 0 | 1 | 0,05 | 6,18 |
| | 2 | 100 | 1 | 0 | 1 | 0,1 | 5,28 |
| | 3 | 98 | 1 | 0 | 1 | 0,2 | 4,82 |
| | 4 | 75 | 2 | 0 | 2 | 0,5 | 5,6 |
| | 5 | 7 | 1 | 0 | 1 | 0,6 | 6 |
| | 6 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0,65 | 19 |
| | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Tabla 8. Comportamiento del *FLF* para la red de 14 nudos con perfiles iniciales aleatorios del estudio $n^{\circ} 2$

| <i>FLFRC</i> | | | | | | | |
|-----------------|-----------|--------------|-----------------|-------------------|----------------------|--------|--------------------|
| | Rango (k) | Convergencia | Sol. diferentes | Sol. reales (dif) | Sol. complejas (dif) | Offset | Iteraciones medias |
| $\lambda = 1$ | 0 (flat) | 1 | 1 | 1 | 0 | 5 | 3 |
| | 1 | 100 | 1 | 1 | 0 | 5 | 4,05 |
| | 2 | 100 | 45 | 7 | 38 | 1400 | 15,42 |
| | 3 | 98 | 87 | 8 | 79 | 1160 | 23,26 |
| | 4 | 97 | 95 | 3 | 92 | 1720 | 34,06 |
| | 5 | 93 | 93 | 0 | 93 | 1755 | 35,65 |
| | 6 | 94 | 94 | 0 | 94 | 1750 | 36,44 |
| | 7 | 93 | 93 | 0 | 93 | 1465 | 36,16 |
| | 8 | 91 | 91 | 0 | 91 | 1925 | 42,43 |
| | 9 | 92 | 92 | 0 | 92 | 1845 | 37,39 |
| | 10 | 94 | 94 | 0 | 94 | 1985 | 40,84 |
| $\lambda = 3,9$ | 0 (flat) | 1 | 1 | 1 | 0 | 5 | 6 |
| | 1 | 100 | 1 | 1 | 0 | 5 | 6,03 |
| | 2 | 100 | 40 | 1 | 39 | 1205 | 15,35 |
| | 3 | 94 | 82 | 1 | 81 | 1435 | 28,14 |
| | 4 | 96 | 96 | 0 | 96 | 1685 | 32,59 |
| | 5 | 92 | 92 | 0 | 92 | 1760 | 33,77 |
| | 6 | 87 | 87 | 0 | 87 | 1430 | 34,95 |
| | 7 | 90 | 90 | 0 | 90 | 1845 | 35,13 |
| | 8 | 83 | 83 | 0 | 83 | 1820 | 39,2 |
| | 9 | 91 | 90 | 0 | 90 | 1965 | 41,37 |
| | 10 | 90 | 90 | 0 | 90 | 1660 | 31,66 |
| $\lambda = 4,2$ | 0 (flat) | 1 | 1 | 0 | 1 | 5 | 12 |
| | 1 | 100 | 7 | 0 | 7 | 110 | 16,37 |
| | 2 | 100 | 41 | 0 | 41 | 850 | 20,94 |
| | 3 | 95 | 85 | 0 | 85 | 1560 | 29,68 |
| | 4 | 95 | 93 | 0 | 93 | 1380 | 31,21 |
| | 5 | 92 | 92 | 0 | 92 | 1735 | 36 |
| | 6 | 88 | 88 | 0 | 88 | 1355 | 34,13 |
| | 7 | 88 | 88 | 0 | 88 | 1840 | 37,07 |
| | 8 | 87 | 87 | 0 | 87 | 1820 | 32,91 |
| | 9 | 91 | 91 | 0 | 91 | 1755 | 36,24 |
| | 10 | 89 | 89 | 0 | 89 | 1695 | 33,59 |
| $\lambda = 5$ | 0 (flat) | 1 | 1 | 0 | 1 | 15 | 12 |
| | 1 | 100 | 6 | 0 | 6 | 45 | 12,81 |
| | 2 | 100 | 38 | 0 | 38 | 960 | 20,39 |
| | 3 | 95 | 92 | 0 | 92 | 1820 | 25,76 |
| | 4 | 97 | 97 | 0 | 97 | 1490 | 30,56 |
| | 5 | 94 | 94 | 0 | 94 | 1725 | 30,52 |
| | 6 | 88 | 88 | 0 | 88 | 1820 | 34,89 |
| | 7 | 90 | 90 | 0 | 90 | 1845 | 37,8 |
| | 8 | 81 | 81 | 0 | 81 | 1745 | 37,7 |
| | 9 | 87 | 87 | 0 | 87 | 1985 | 37,15 |
| | 10 | 89 | 89 | 0 | 89 | 1365 | 33,3 |

Tabla 9. Comportamiento del *FLFRC* para la red de 14 nudos con perfiles iniciales aleatorios del estudio $n^\circ 2$

| <i>FLFQ</i> | | | | | | | |
|-----------------|-----------|--------------|-----------------|-------------------|----------------------|--------|--------------------|
| | Rango (k) | Convergencia | Sol. diferentes | Sol. reales (dif) | Sol. complejas (dif) | Offset | Iteraciones medias |
| $\lambda = 1$ | 0 (flat) | 1 | 1 | 1 | 0 | 5 | 3 |
| | 1 | 100 | 1 | 1 | 0 | 5 | 4,06 |
| | 2 | 100 | 41 | 7 | 34 | 550 | 17,4 |
| | 3 | 100 | 85 | 9 | 76 | 290 | 30,84 |
| | 4 | 99 | 97 | 4 | 93 | 890 | 35,6 |
| | 5 | 97 | 97 | 1 | 96 | 1680 | 45,38 |
| | 6 | 96 | 95 | 0 | 95 | 515 | 38,13 |
| | 7 | 98 | 97 | 0 | 97 | 875 | 40,11 |
| | 8 | 97 | 96 | 0 | 96 | 1780 | 47,36 |
| | 9 | 97 | 97 | 0 | 97 | 1335 | 44,62 |
| | 10 | 96 | 96 | 0 | 96 | 1055 | 43,83 |
| $\lambda = 3,9$ | 0 (flat) | 1 | 1 | 1 | 0 | 5 | 6 |
| | 1 | 100 | 1 | 1 | 0 | 5 | 6,07 |
| | 2 | 100 | 36 | 1 | 35 | 125 | 14,64 |
| | 3 | 99 | 86 | 2 | 84 | 560 | 29,85 |
| | 4 | 100 | 95 | 1 | 94 | 525 | 34,26 |
| | 5 | 98 | 98 | 0 | 98 | 830 | 39,2 |
| | 6 | 96 | 96 | 0 | 96 | 570 | 39,03 |
| | 7 | 96 | 96 | 0 | 96 | 1285 | 41,29 |
| | 8 | 97 | 97 | 0 | 97 | 985 | 43,07 |
| | 9 | 95 | 95 | 0 | 95 | 660 | 39,7 |
| | 10 | 98 | 98 | 0 | 98 | 1790 | 43,51 |
| $\lambda = 4,2$ | 0 (flat) | 1 | 1 | 0 | 1 | 5 | 11 |
| | 1 | 100 | 1 | 0 | 1 | 5 | 11,01 |
| | 2 | 100 | 36 | 0 | 36 | 125 | 23,24 |
| | 3 | 100 | 91 | 0 | 91 | 1575 | 36,52 |
| | 4 | 100 | 95 | 0 | 95 | 1020 | 37,71 |
| | 5 | 99 | 99 | 0 | 99 | 1500 | 42,48 |
| | 6 | 98 | 98 | 0 | 98 | 1065 | 40,21 |
| | 7 | 98 | 98 | 0 | 98 | 1785 | 46,69 |
| | 8 | 96 | 96 | 0 | 96 | 990 | 38,19 |
| | 9 | 97 | 97 | 0 | 97 | 860 | 41,56 |
| | 10 | 98 | 98 | 0 | 98 | 1515 | 46,22 |
| $\lambda = 5$ | 0 (flat) | 1 | 1 | 0 | 1 | 5 | 10 |
| | 1 | 100 | 2 | 0 | 2 | 10 | 11,24 |
| | 2 | 100 | 39 | 0 | 39 | 275 | 25,75 |
| | 3 | 100 | 89 | 0 | 89 | 650 | 32,96 |
| | 4 | 99 | 97 | 0 | 97 | 815 | 35,27 |
| | 5 | 95 | 95 | 0 | 95 | 1925 | 43,87 |
| | 6 | 97 | 97 | 0 | 97 | 895 | 45,97 |
| | 7 | 97 | 97 | 0 | 97 | 710 | 40,65 |
| | 8 | 96 | 95 | 0 | 95 | 1280 | 43,41 |
| | 9 | 97 | 97 | 0 | 97 | 1795 | 44,4 |
| | 10 | 95 | 94 | 0 | 94 | 1430 | 43,4 |

Tabla 10. Comportamiento del *FLFQ* para la red de 14 nudos con perfiles iniciales aleatorios del estudio $n^{\circ} 2$

➤ Estudio 3, perfil excluyente en V y θ :

| | | NR | | | | | |
|-----------------|----------|-----------|--------------|-----------------------|-------------------------|----------------------------|--------------------|
| | | Rango (k) | Convergencia | Soluciones diferentes | Soluciones reales (dif) | Soluciones complejas (dif) | Iteraciones medias |
| $\lambda = 1$ | 0 (flat) | 1 | 1 | 1 | 0 | 3 | |
| | 1 | 100 | 1 | 1 | 0 | 4,26 | |
| | 2 | 20 | 8 | 8 | 0 | 8,25 | |
| | 3 | 5 | 5 | 5 | 0 | 9,6 | |
| | 4 | 2 | 2 | 2 | 0 | 12 | |
| | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| $\lambda = 3,9$ | 0 (flat) | 1 | 1 | 1 | 0 | 5 | |
| | 1 | 100 | 1 | 1 | 0 | 5,27 | |
| | 2 | 15 | 1 | 1 | 0 | 7,14 | |
| | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| $\lambda = 4,2$ | 0 (flat) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| $\lambda = 5$ | 0 (flat) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |

Tabla 11. Comportamiento de NR para la red de 14 nudos con perfiles iniciales aleatorios del estudio $n^{\circ} 3$

| <i>FLF</i> | | | | | | | |
|-----------------|-----------|--------------|-----------------|-------------------|----------------------|------|--------------------|
| | Rango (k) | Convergencia | Sol. diferentes | Sol. reales (dif) | Sol. complejas (dif) | S.I. | Iteraciones medias |
| $\lambda = 1$ | 0 (flat) | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 3 |
| | 1 | 100 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2,95 |
| | 2 | 100 | 1 | 1 | 0 | 0 | 3,01 |
| | 3 | 100 | 1 | 1 | 0 | 0 | 3,52 |
| | 4 | 99 | 1 | 1 | 0 | 0,35 | 4,28 |
| | 5 | 54 | 1 | 1 | 0 | 0,15 | 5,31 |
| | 6 | 19 | 1 | 1 | 0 | 0,2 | 5,74 |
| | 7 | 3 | 1 | 1 | 0 | 0,2 | 7 |
| | 8 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 8 |
| | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\lambda = 3,9$ | 0 (flat) | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| | 1 | 100 | 1 | 1 | 0 | 0 | 3,64 |
| | 2 | 100 | 1 | 1 | 0 | 0,1 | 4,21 |
| | 3 | 100 | 1 | 1 | 0 | 0,1 | 4,21 |
| | 4 | 77 | 2 | 2 | 0 | 0,4 | 5,73 |
| | 5 | 28 | 2 | 2 | 0 | 0,3 | 6,14 |
| | 6 | 5 | 3 | 2 | 1 | 0,3 | 7,8 |
| | 7 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0,55 | 7 |
| | 8 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 8 |
| | 9 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0,2 | 10 |
| | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\lambda = 4,2$ | 0 (flat) | 1 | 1 | 0 | 1 | 0,05 | 7 |
| | 1 | 100 | 1 | 0 | 1 | 0,05 | 6,77 |
| | 2 | 100 | 1 | 0 | 1 | 0,05 | 5,97 |
| | 3 | 100 | 2 | 0 | 2 | 0,4 | 6,36 |
| | 4 | 77 | 2 | 0 | 2 | 0,4 | 6,3 |
| | 5 | 23 | 3 | 0 | 3 | 0,35 | 6,78 |
| | 6 | 5 | 2 | 0 | 2 | 0,3 | 8,2 |
| | 7 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0,25 | 12 |
| | 8 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0,65 | 29 |
| | 9 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0,05 | 44 |
| | 10 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0,2 | 59 |
| $\lambda = 5$ | 0 (flat) | 1 | 1 | 0 | 1 | 0,05 | 6 |
| | 1 | 100 | 1 | 0 | 1 | 0,2 | 5,14 |
| | 2 | 100 | 1 | 0 | 1 | 0,3 | 5,16 |
| | 3 | 94 | 1 | 0 | 1 | 0,35 | 4,99 |
| | 4 | 62 | 2 | 0 | 2 | 0,4 | 5,29 |
| | 5 | 15 | 2 | 0 | 2 | 0,3 | 5,74 |
| | 6 | 4 | 2 | 0 | 2 | 0,35 | 5,75 |
| | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 8 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0,55 | 2 |
| | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 10 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0,6 | 7 |

Tabla 12. Comportamiento del *FLF* para la red de 14 nudos con perfiles iniciales aleatorios del estudio $n^{\circ} 3$

| <i>FLFRC</i> | | | | | | | |
|-----------------|-----------|--------------|-----------------|-------------------|----------------------|--------|--------------------|
| | Rango (k) | Convergencia | Sol. diferentes | Sol. reales (dif) | Sol. complejas (dif) | Offset | Iteraciones medias |
| $\lambda = 1$ | 0 (flat) | 1 | 1 | 1 | 0 | 5 | 3 |
| | 1 | 100 | 1 | 1 | 0 | 5 | 4,17 |
| | 2 | 100 | 35 | 10 | 25 | 1100 | 14,45 |
| | 3 | 98 | 74 | 9 | 65 | 1690 | 25,41 |
| | 4 | 95 | 93 | 2 | 91 | 1880 | 34,54 |
| | 5 | 92 | 91 | 0 | 91 | 1755 | 37,16 |
| | 6 | 89 | 89 | 1 | 88 | 1990 | 45,67 |
| | 7 | 87 | 87 | 0 | 87 | 1330 | 34,91 |
| | 8 | 83 | 83 | 0 | 83 | 1730 | 41,12 |
| | 9 | 84 | 84 | 0 | 84 | 1340 | 39,45 |
| | 10 | 77 | 77 | 0 | 77 | 1855 | 43,96 |
| $\lambda = 3,9$ | 0 (flat) | 1 | 1 | 1 | 0 | 5 | 6 |
| | 1 | 100 | 1 | 1 | 0 | 5 | 6,18 |
| | 2 | 100 | 33 | 2 | 31 | 515 | 14,81 |
| | 3 | 100 | 83 | 2 | 81 | 1450 | 24,37 |
| | 4 | 93 | 90 | 0 | 90 | 1935 | 36,6 |
| | 5 | 90 | 90 | 0 | 90 | 1790 | 33,83 |
| | 6 | 86 | 86 | 0 | 86 | 1320 | 33,65 |
| | 7 | 87 | 87 | 0 | 87 | 1500 | 38,03 |
| | 8 | 84 | 84 | 0 | 84 | 1985 | 45,21 |
| | 9 | 84 | 84 | 0 | 84 | 1825 | 39,29 |
| | 10 | 74 | 74 | 0 | 74 | 1935 | 41,98 |
| $\lambda = 4,2$ | 0 (flat) | 1 | 1 | 0 | 1 | 5 | 12 |
| | 1 | 100 | 6 | 0 | 6 | 35 | 15,19 |
| | 2 | 100 | 34 | 0 | 34 | 730 | 20,97 |
| | 3 | 99 | 80 | 0 | 80 | 1585 | 26,64 |
| | 4 | 95 | 91 | 0 | 91 | 1915 | 30,41 |
| | 5 | 89 | 89 | 0 | 89 | 1530 | 31,61 |
| | 6 | 89 | 89 | 0 | 89 | 1940 | 38,69 |
| | 7 | 88 | 87 | 0 | 87 | 1985 | 37,02 |
| | 8 | 76 | 76 | 0 | 76 | 1780 | 36,22 |
| | 9 | 79 | 79 | 0 | 79 | 1605 | 40,34 |
| | 10 | 76 | 76 | 0 | 76 | 1670 | 43,59 |
| $\lambda = 5$ | 0 (flat) | 1 | 1 | 0 | 1 | 15 | 12 |
| | 1 | 100 | 4 | 0 | 4 | 35 | 12,28 |
| | 2 | 100 | 37 | 0 | 37 | 985 | 20,66 |
| | 3 | 98 | 82 | 0 | 82 | 1000 | 24,02 |
| | 4 | 93 | 90 | 0 | 90 | 1240 | 32,47 |
| | 5 | 91 | 90 | 0 | 90 | 1425 | 30,94 |
| | 6 | 87 | 87 | 0 | 87 | 1540 | 40,67 |
| | 7 | 88 | 88 | 0 | 88 | 1905 | 43,35 |
| | 8 | 79 | 79 | 0 | 79 | 1640 | 39,22 |
| | 9 | 76 | 76 | 0 | 76 | 1475 | 44,07 |
| | 10 | 73 | 73 | 0 | 73 | 1605 | 47,52 |

Tabla 13. Comportamiento del *FLFRC* para la red de 14 nudos con perfiles iniciales aleatorios del estudio $n^{\circ} 3$

| <i>FLFQ</i> | | | | | | | |
|-----------------|-----------|--------------|-----------------|-------------------|----------------------|--------|--------------------|
| | Rango (k) | Convergencia | Sol. diferentes | Sol. reales (dif) | Sol. complejas (dif) | Offset | Iteraciones medias |
| $\lambda = 1$ | 0 (flat) | 1 | 1 | 1 | 0 | 5 | 3 |
| | 1 | 100 | 1 | 1 | 0 | 5 | 4,18 |
| | 2 | 100 | 31 | 10 | 21 | 240 | 13,13 |
| | 3 | 100 | 74 | 15 | 59 | 300 | 24,2 |
| | 4 | 97 | 93 | 5 | 88 | 345 | 32,47 |
| | 5 | 98 | 96 | 4 | 92 | 315 | 34,97 |
| | 6 | 96 | 96 | 0 | 96 | 1450 | 45,81 |
| | 7 | 97 | 97 | 0 | 97 | 1925 | 51,36 |
| | 8 | 93 | 93 | 0 | 93 | 880 | 46,97 |
| | 9 | 92 | 92 | 0 | 92 | 1265 | 51,44 |
| | 10 | 87 | 87 | 0 | 87 | 1240 | 52,51 |
| $\lambda = 3,9$ | 0 (flat) | 1 | 1 | 1 | 0 | 5 | 6 |
| | 1 | 100 | 1 | 1 | 0 | 5 | 6,17 |
| | 2 | 100 | 31 | 1 | 30 | 105 | 14,56 |
| | 3 | 100 | 74 | 2 | 72 | 410 | 28,38 |
| | 4 | 100 | 98 | 0 | 98 | 1815 | 39,88 |
| | 5 | 98 | 97 | 0 | 97 | 1440 | 45,21 |
| | 6 | 98 | 98 | 0 | 98 | 955 | 42,58 |
| | 7 | 96 | 96 | 0 | 96 | 1480 | 46,31 |
| | 8 | 97 | 97 | 0 | 97 | 1900 | 45,97 |
| | 9 | 93 | 92 | 0 | 92 | 1965 | 49,02 |
| | 10 | 85 | 85 | 0 | 85 | 485 | 43,81 |
| $\lambda = 4,2$ | 0 (flat) | 1 | 1 | 0 | 1 | 5 | 11 |
| | 1 | 100 | 1 | 0 | 1 | 5 | 11 |
| | 2 | 100 | 30 | 0 | 30 | 100 | 22,59 |
| | 3 | 100 | 70 | 0 | 70 | 335 | 29,03 |
| | 4 | 99 | 96 | 0 | 96 | 1625 | 39,52 |
| | 5 | 100 | 99 | 0 | 99 | 1140 | 40,42 |
| | 6 | 95 | 95 | 0 | 95 | 680 | 39,45 |
| | 7 | 96 | 96 | 0 | 96 | 1210 | 46,37 |
| | 8 | 96 | 96 | 0 | 96 | 725 | 41,75 |
| | 9 | 94 | 94 | 0 | 94 | 1535 | 49,06 |
| | 10 | 88 | 88 | 0 | 88 | 1605 | 51,29 |
| $\lambda = 5$ | 0 (flat) | 1 | 1 | 0 | 1 | 5 | 10 |
| | 1 | 100 | 2 | 0 | 2 | 5 | 9,96 |
| | 2 | 100 | 32 | 0 | 32 | 310 | 26,59 |
| | 3 | 100 | 74 | 0 | 74 | 320 | 27,1 |
| | 4 | 98 | 95 | 0 | 95 | 250 | 31,55 |
| | 5 | 99 | 99 | 0 | 99 | 645 | 37,14 |
| | 6 | 97 | 97 | 0 | 97 | 1725 | 48,29 |
| | 7 | 92 | 92 | 0 | 92 | 880 | 41,43 |
| | 8 | 94 | 94 | 0 | 94 | 1420 | 47,52 |
| | 9 | 92 | 92 | 0 | 92 | 935 | 46,31 |
| | 10 | 83 | 83 | 0 | 83 | 1215 | 45,25 |

Tabla 14. Comportamiento del *FLFQ* para la red de 14 nudos con perfiles iniciales aleatorios del estudio $n^{\circ} 3$

Una vez observadas todas estas tablas, una primera conclusión que se extrae es que los métodos factorizados (ya sean en polares o en cartesianas) son mucho más robustos que el método de *Newton-Raphson*, ya que convergen siempre a algún tipo de solución en todas las áreas excluyentes que se analizan, mientras que *NR* a partir del área de $k = 2$ (generalmente) ya deja de converger a una solución. Es decir, para puntos iniciales dispares o un poco alejados del perfil plano de tensiones, el método de *NR* dejaría de converger, siendo esto una gran desventaja respecto a los métodos factorizados.

Si comparamos los métodos factorizados en cartesianas (*FLFRC* y *FLFQ*) con su versión en polares (*FLF*), observamos que convergen a algún tipo de solución en muchos mas casos, por lo que a priori podríamos decir que los métodos factorizados en cartesianas tienen mas afinidad para converger a un tipo de solución que el *FLF*. Pero, si nos fijamos en las columnas del tipo de soluciones, observamos que en el caso factible de los métodos factorizados en coordenadas cartesianas casi siempre se converge a soluciones complejas a partir de una k , generalmente intermedia. Mientras que el *FLF* converge en menos casos pero siempre lo hace a la solución real y factible del problema. Esto último es debido a que primero se resuelve un problema de mínima distancia, obteniendo como resultado aquellos puntos más cercanos al perfil inicial en el que se empezó o al valor de la solución de la última iteración. Después, de entre las múltiples soluciones que ofrece este problema, se resuelve otro problema de mínimos cuadrados. Es por esto último por lo que en los métodos factorizados en cartesianas, a partir de una determinada área, se obtienen casi tantas soluciones como perfiles iniciales del cuál se parte, debido a que este método busca la solución más cercana al punto inicial.

Es por esto por lo que podemos decir que el *FLF* es más robusto en este tipo de estudios cuando analizamos redes eléctricas, ya que obtenemos como solución la real e ingenieril, mientras que con los métodos en cartesianas conseguimos mas convergencia, pero una convergencia a soluciones complejas, soluciones que no son factibles. Aún así, las formulaciones en cartesianas pueden tener mucho interés a la hora de buscar las distintas soluciones de cualquier problema, simplemente empezando por un valor inicial deseado que sepamos o creamos que esté cerca de la solución que buscamos o que queramos descubrir.

IMPORTANTE: para realizar los anteriores estudios se han escogido aquellos resultados que maximizan la convergencia del algoritmo, es decir, se ha escogido la primera *S.I.* u *offset* que hace que las celdas de la columna ‘Convergencia’ tengan como valor 100 o, en su caso, el valor que se ha obtenido más cercano a este. Es por ello por lo que en los métodos factorizados en cartesianas (*FLFRC* y *FLFQ*) observamos un *offset* de valor muy alto, el necesario para maximizar la convergencia.

8 CONCLUSIONES

En este apartado concluiremos con las conclusiones más importantes que se han ido extrayendo al comparar los cuatro métodos (*NR*, *FLF*, *FLFRC* y *FLFQ*). Una de las primeras conclusiones (y que se adelantó en [2]) es que el método convencional de *Newton-Raphson* tiene una cuenca de atracción mucho menor que la de los métodos factorizados, además de que en casos próximos al límite de máxima cargabilidad el número de iteraciones aumenta considerablemente, y más allá de este punto este algoritmo deja de converger.

A la hora de comparar los métodos factorizados entre ellos, una de las primeras conclusiones que observamos es que el *FLF* necesita menos iteraciones para converger en algunas regiones ante perfil plano y caso base (esto es con $\lambda = 1$). Además, como se vio en la cuenca de atracción del ejemplo de 2 nudos, éste último método converge generalmente a la solución factible e ingenieril del problema (la de la parte superior de la ‘curva de la nariz’) ante distintos y dispares perfiles iniciales, mientras que el *FLFQ* tiene dos zonas bien diferenciadas de convergencia a las dos soluciones posibles, dependiendo del perfil inicial del que se parta (por ejemplo, para valores iniciales de V próximos a $1 pu$, converge a la parte inferior de la curva de la nariz, o para valores superiores de $\pm 90 \text{ deg}$, también converge a la parte inferior de la curva de la nariz).

Cuando sometemos a los distintos algoritmos a perfiles iniciales aleatorios y muy dispares, hemos obtenido varias conclusiones muy relevantes. La primera de ellas es que el método de *NR* va empeorando mucho su comportamiento a medida que nos vamos alejando del perfil plano inicial de tensiones, hasta que a partir de un rango de valores, éste método deja de converger. Otra de las conclusiones que hemos extraído es que el *FLF* converge en menos casos que los métodos factorizados en cartesianas, pero ante casos factibles siempre lo hace a la solución factible e ingenieril del problema, luego ante este tipo de estudio el *FLF* es más robusto que los demás, ya que las múltiples soluciones reales y complejas de los otros métodos factorizados no son soluciones ingenieriles para los casos factibles. Esto último no tiene porqué ser una desventaja de los métodos factorizados en cartesianas frente al de polares, ya que estos métodos poseen una gran afinidad a distintas soluciones. Por lo tanto, estos métodos pueden resultar muy interesantes ante problemas en los que queramos encontrar todas las soluciones posibles, o incluso converger a una solución deseada simplemente partiendo del perfil inicial adecuado (tal y como se explica en el subapartado 7.3).

También hemos observado que al usar la formulación cuadrática (*FLFQ*) se evita la asíntota que aparece cuando usamos logaritmos en el *FLFRC*, lo que hace que el primer método sea más estable que el segundo. En los estudios mostrados observamos que el *FLFQ* converge en mucho más casos que en su versión con logaritmos, y para un mismo offset se obtiene una carga máxima bastante mayor. Todo lo anterior hace que el uso del *FLFQ* sea más conveniente que el *FLFRC*, dejando un amplio campo de estudio en la multiplicidad de soluciones que se obtiene con estos métodos.

9 APÉNDICE

- Ejemplo de aplicación del *FLFRC* con offset a un sistema de 2 nudos:

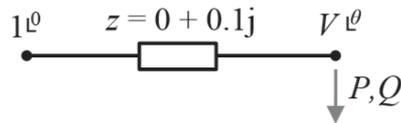


Figura 29. Sistema de 2 nudos (versión 2)

El objetivo del problema es obtener la tensión compleja del nudo dos de la figura, $V \angle \theta$, sabiendo que la potencia demandada en ese punto es de 200 MW y la reactiva demandada de 50 MW . Sabemos que la solución es $U_2 = 0.9001 - j0.2$.

Empezamos definiendo el valor del offset y el criterio de convergencia:

- Valor del offset: $m = 2$
- Criterio de convergencia, $\Delta p_k \leq 0.001$.
- Datos de la red:

$$y = \begin{bmatrix} G_{11} + jB_{11} & G_{12} + jB_{21} \\ G_{21} + jB_{21} & G_{22} + jB_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j10 & j10 \\ j10 & -j10 \end{bmatrix}, \text{ donde } y \text{ es la matriz de admitancias.}$$

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= e_1^2 + f_1^2 = 1 \text{ pu} \\ P_2 &= \frac{-200 \text{ MW}}{100 \text{ MW}} = -2 \text{ pu} \\ Q_2 &= \frac{-50 \text{ MW}}{100 \text{ MW}} = -0.5 \text{ pu} \end{aligned} \right\} p = \begin{bmatrix} U_1 \\ P_2 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

➤ Vector de estado x y vectores auxiliares, u e y :

$$x = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \rightarrow x' = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix}; \quad y = \begin{bmatrix} e_1'^2 \\ e_2'^2 \\ f_1'^2 \\ f_2'^2 \\ e_1' \\ e_2' \\ f_1' \\ f_2' \\ e_1'e_2' \\ f_1'f_2' \\ e_1'f_2' \\ f_1'e_2' \end{bmatrix}; \quad u = \ln y = \begin{bmatrix} 2\alpha_1 \\ 2\alpha_2 \\ 2\beta_1 \\ 2\beta_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \\ \beta_1 + \beta_2 \\ \alpha_1 + \beta_2 \\ \beta_1 + \alpha_2 \end{bmatrix}$$

➤ Matriz E y vector \hat{p} :

$$\begin{aligned} U_1 &= e_1'^2 + f_1'^2 - 2me_1' - 2mf_1' + 2m^2 \\ U_{21} &= e_2'e_1' + f_2'f_1' - me_2' - me_1' - mf_2' - mf_1' + 2m^2 \\ W_{21} &= -e_2'f_1' + f_2'e_1' + me_2' - me_1' + mf_1' - mf_2' \end{aligned}$$

$$U_1 = U_1$$

$$P_2 = G_{22}U_2 + G_{21}U_{21} + B_{21}W_{21}$$

$$Q_2 = -B_{22}U_2 + G_{21}W_{21} - B_{21}U_{21}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en las expresiones de U_1 , P_2 y Q_2 , y ordenando los términos, obtenemos:

$$U_1 = e_1'^2 + f_1'^2 - 2me_1' - 2mf_1' + 2m^2$$

$$\begin{aligned} P_2 &= G_{22}e_2'^2 + G_{22}f_2'^2 + e_2'(-2mG_{22} - mG_{21} + mB_{21}) + f_2'(-2mG_{22} - mG_{21} - mB_{21}) \\ &\quad + e_1'(-mG_{21} - mB_{21}) + f_1'(-mG_{21} + mB_{21}) + e_1'e_2'(G_{21}) + f_1'f_2'(G_{21}) \\ &\quad + e_2'f_1'(-B_{21}) + f_2'e_1'(B_{21}) + 2m^2(G_{22} + G_{21}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_2 &= -B_{22}e_2'^2 - B_{22}f_2'^2 + e_2'(2mB_{22} + mG_{21} + mB_{21}) + f_2'(2mB_{22} - mG_{21} + mB_{21}) \\ &\quad + e_1'(mB_{21} - mG_{21}) + f_1'(mB_{21} + mG_{21}) + e_1'e_2'(-B_{21}) + f_1'f_2'(-B_{21}) \\ &\quad + e_2'f_1'(-G_{21}) + f_2'e_1'(G_{21}) + 2m^2(-B_{22} - B_{21}) \end{aligned}$$

Con esto, la matriz queda definida como:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -20 & 20 & 20 & -20 & 0 & 0 & 10 & -10 \\ 0 & 10 & 0 & 10 & 20 & -20 & 20 & -20 & -10 & -10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Y por último, el vector \hat{p} :

$$p_I = \begin{bmatrix} 2m^2 \\ 2m^2(G_{22} + G_{21}) \\ -2m^2(B_{22} + B_{21}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{p} = p - p_I = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -2 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

➤ Cálculo de la matriz C y de \hat{u} :

$$u = Cx \rightarrow \ln(y) = C \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha_1 \\ 2\alpha_2 \\ 2\beta_1 \\ 2\beta_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \\ \beta_1 + \beta_2 \\ \alpha_1 + \beta_2 \\ \beta_1 + \alpha_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{luego } C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow C' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{u} = u - C(:, \beta_1) * \ln(m) = u - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ln 2$$

$$\triangleright \tilde{F}^{-1} = \text{diag}(y)$$

Una vez definidas y construidas todas las variables del problema, se ejecuta el proceso iterativo que se ha desarrollado en el capítulo 3.1, hasta que se cumple la condición:

$$\max(|\Delta p_k|) \leq 0.001$$

Una vez cumplida, se obtienen los valores de α_2 y β_2 , por lo que hay que deshacer el cambio:

$$\begin{aligned} e'_2 = \exp(\alpha_2) &\rightarrow e_2 = e'_2 - m = 0.9000 \\ f'_2 = \exp(\beta_2) &\rightarrow f_2 = f'_2 - m = -0.2000 \end{aligned}$$

obteniéndose como solución:

$$\mathcal{U}_2 = 0.9000 - j0.2000 \approx 0.9001 - j0.2$$

➤ Mapa de iteraciones para las redes de 118 y 300 nudos:

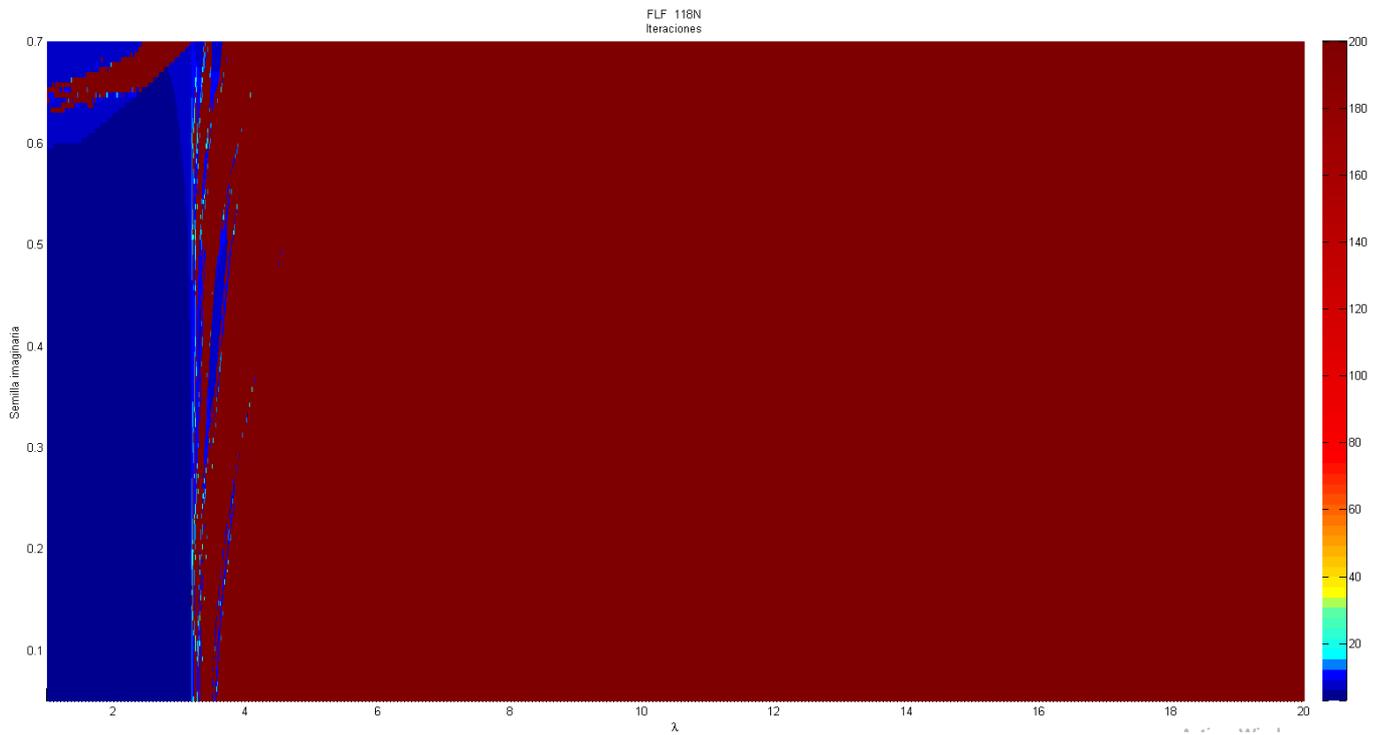


Figura 30. Iteraciones frente a la variación de la S.I. y de la carga de la red para la red de 118 nudos, usando el *FLF*

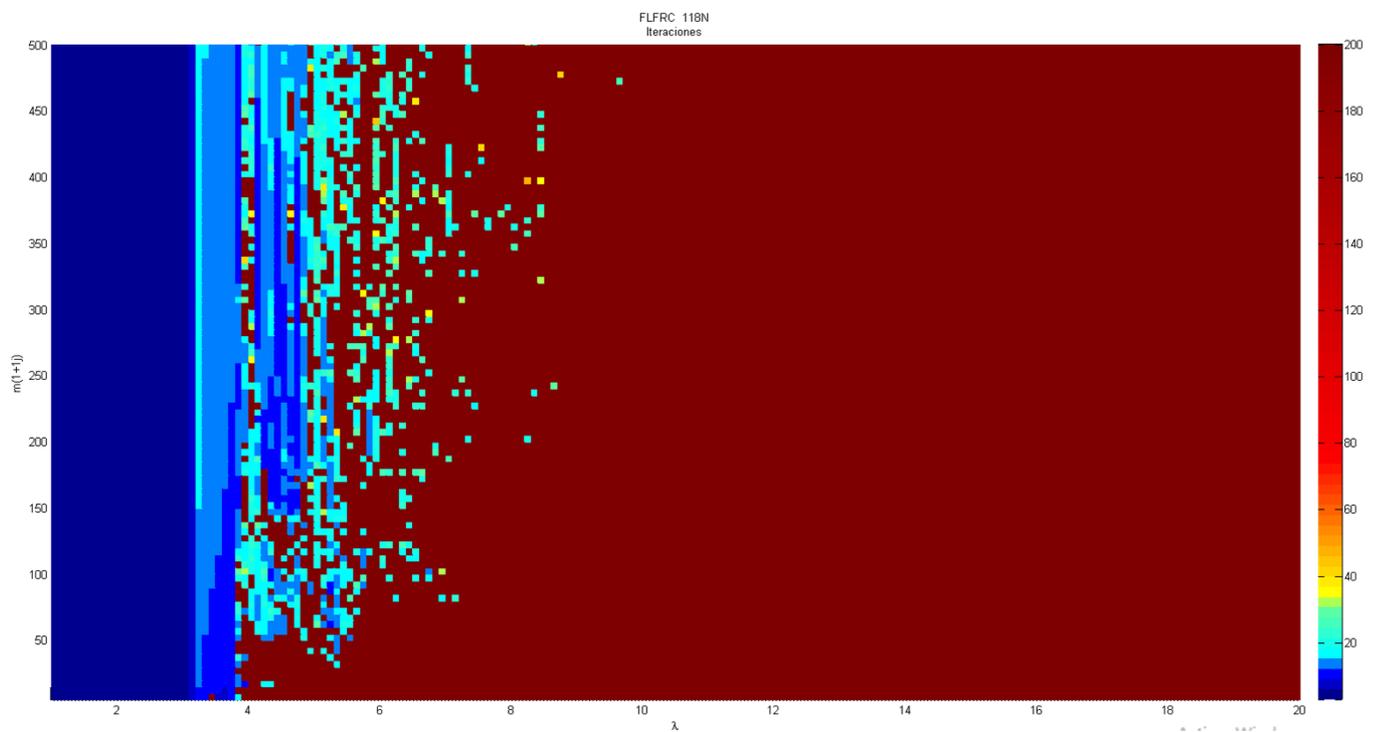


Figura 31. Iteraciones frente a la variación del offset y de la carga de la red para la red de 118 nudos, usando el *FLFRC*

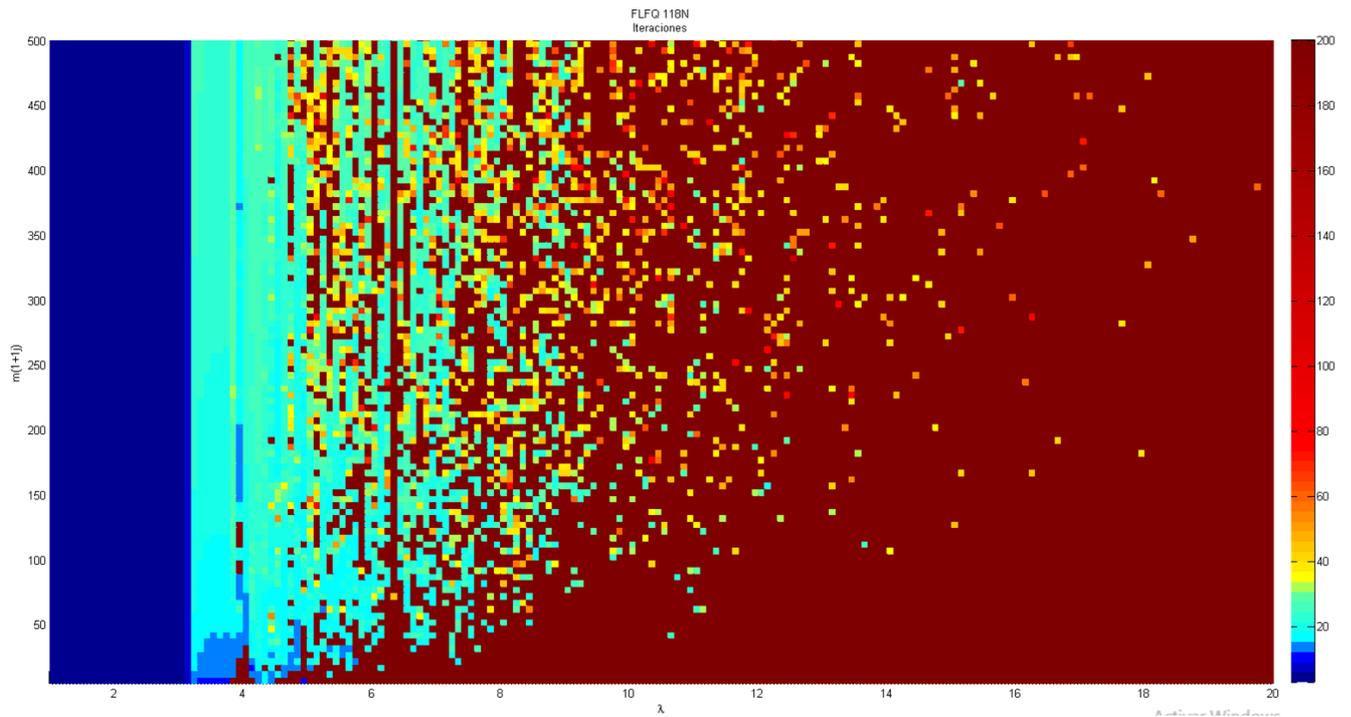


Figura 32. Iteraciones frente a la variación del offset y de la carga de la red para la red de 118 nudos, usando el *FLFO*

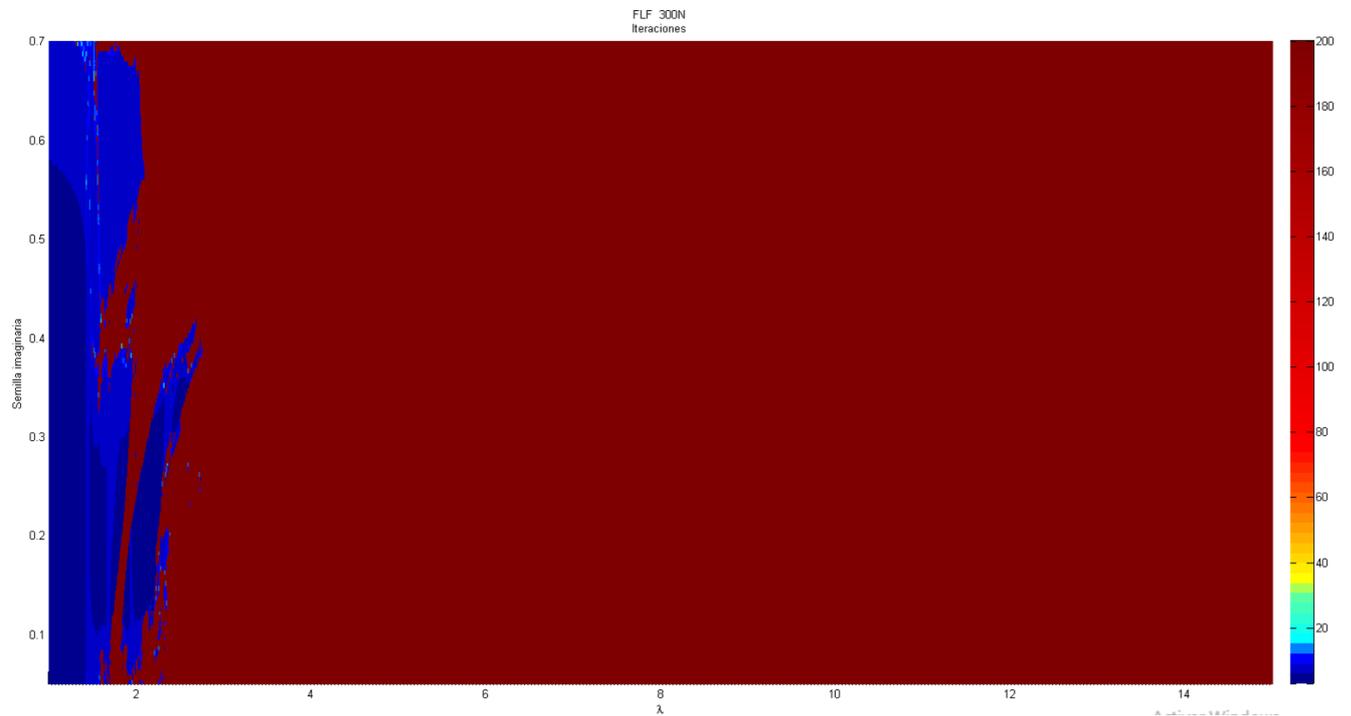


Figura 33. Iteraciones frente a la variación de la S.I. y de la carga de la red para la red de 300 nudos, usando el *FLF*

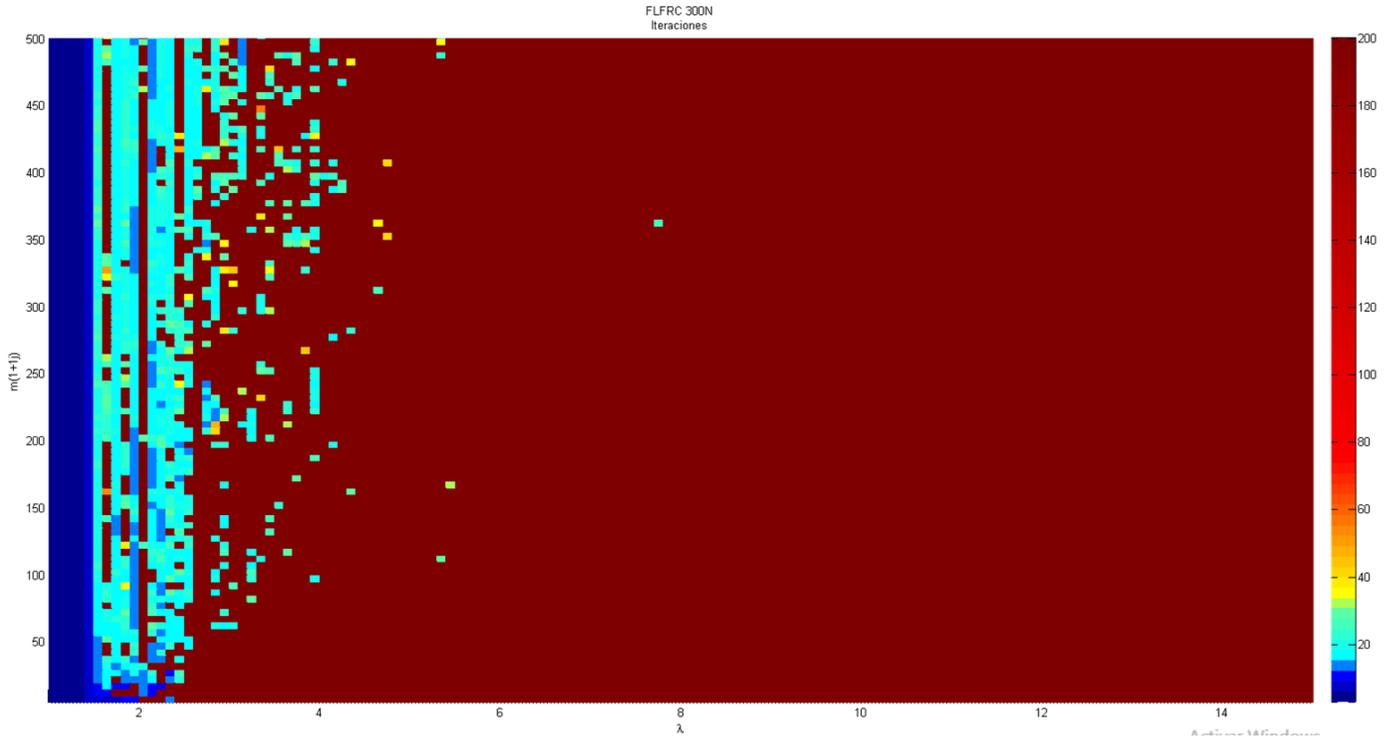


Figura 34. Iteraciones frente a la variación del offset y de la carga de la red para la red de 300 nudos, usando el *FLFRC*

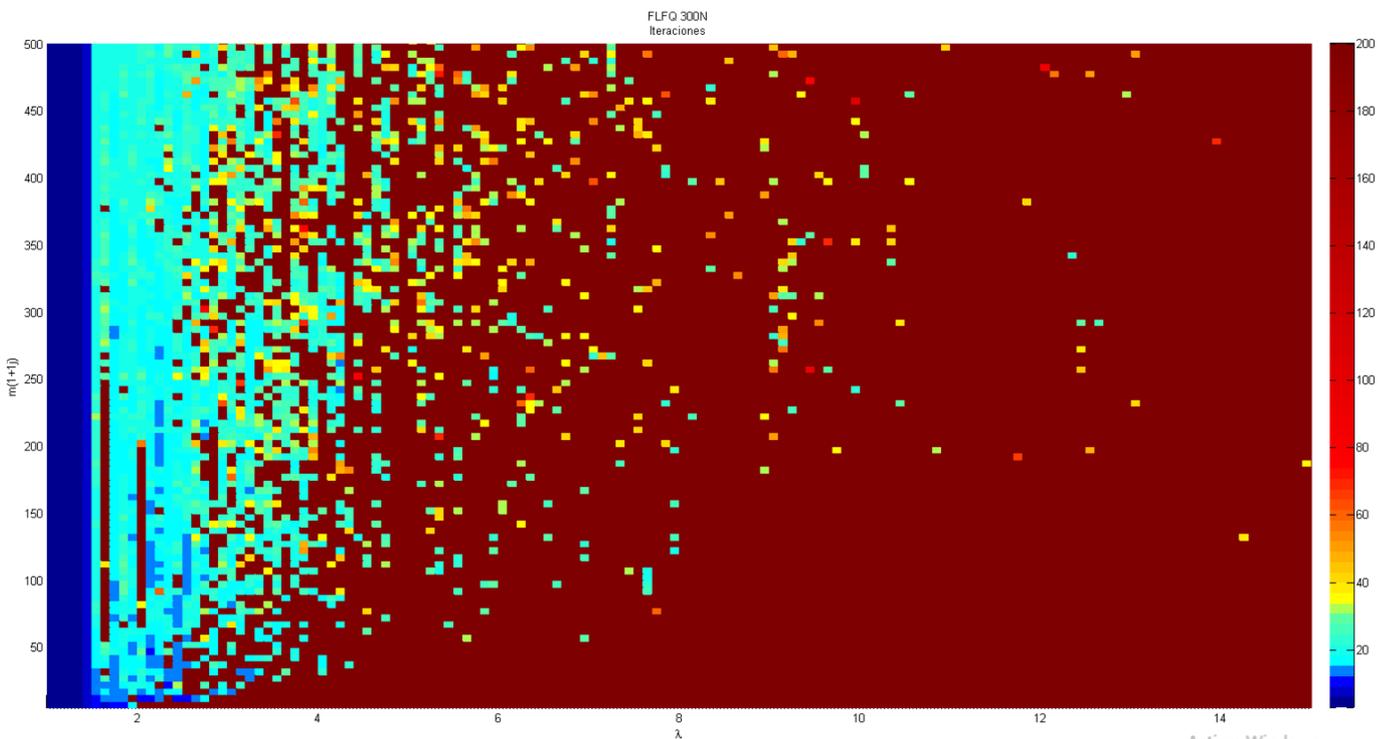


Figura 35. Iteraciones frente a la variación del offset y de la carga de la red para la red de 300 nudos, usando el *FLFQ*

REFERENCIAS

- [1] J. M. Ruiz Oltra, Flujo de Carga Factorizado en Coordenadas Cartesianas, Sevilla, 2015.
- [2] J. M. Ruiz Oltra, C. Gómez Quiles y A. Gómez Expósito, «Offset-Assisted Factored Solution of Nonlinear Systems,» *MDPI, Algorithms 2016*, 9(1), 2;, 2015.
- [3] B. Stott, «Effective Starting Process for Newton Raphson Load Flows,» de *IEEE Proceedings*, vol.118, 1971, pp. 983-987.
- [4] A. Gómez Expósito y F. L. Alvarado, «Flujo de cargas, Ajuste de límites y reguladores,» de *Análisis y operación de sistemas de energía eléctrica*, McGraw-Hill, 2002, pp. 158-161.
- [5] A. Gómez Expósito y F. L. Alvarado, «Flujo de cargas, Flujo de cargas en continua,» de *Análisis y operación de sistemas de energía eléctrica*, McGraw-Hill, 2002, pp. 156-157.
- [6] A. Gómez Expósito y F. L. Alvarado, «Flujo de cargas, Método desacoplado rápido,» de *Análisis y operación de sistemas de energía eléctrica*, McGraw-Hill, 2002, pp. 152-155.
- [7] A. Gómez Expósito, A. Abur, A. de la Villa Jaén y C. Gómez Quiles, «A Multilevel State Estimation Paradigm for Smart Grids,» de *Proceedings of the IEEE*, vol 99 (6), 2011, pp. 952-976.
- [8] A. Gómez Expósito y C. Gómez Quiles, «Factorized Load Flow,» de *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 28 (4), 2013, pp. 4607-4614.
- [9] A. Gómez Expósito, C. Gómez Quiles y W. Vargas, «Factored Solution of Infeasible Load Flow Cases,» In *Power Systems Computation Conference (PSCCT)*, (pp. 1-7). IEEE., 2014.
- [10] A. Gómez Expósito, «Factored Solution of Nonlinear Equation Systems,» *Proceedings of the Royal Society - A.*
- [11] F. Milano, «Power Flow Analysis,» de *Power System Modelling and Scripting*, pp. 79-82.
- [12] W. Vargas, C. Gómez Quiles y A. Gómez Expósito, «Fast Computation of Maximum Loading Points via the Factored Load Flow,» enviado a *IEEE Transactions on Power Systems*, actualmente en revisión.