FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES

GRADO DE ECONOMÍA

ESTUDIO DE LOS ÍNDICES DE PODER Y SU APLICACIÓN A LAS CORTES GENERALES

Trabajo Fin de Grado presentado por David Alberto Alcón Giráldez, siendo el tutor del mismo el profesor Francisco Velasco Morente.

Vº. Bº. del tutor:

D. Francisco Velasco Morente

Alumno:

D. David Alberto Alcón Giráldez

Sevilla. Julio de 2017

GRADO EN ECONOMÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES
TRABAJO FIN DE GRADO

CURSO ACADÉMICO [2016-2017]

TÍTULO:

ESTUDIO DE LOS ÍNDICES DE PODER Y SU APLICACIÓN A LAS CORTES GENERALES

AUTOR:

DAVID ALBERTO ALCÓN GIRÁLDEZ

TUTOR:

D. FRANCISCO VELASCO MORENTE

DEPARTAMENTO:

DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA APLICADA I

ÁREA DE CONOCIMIENTO:

MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LA ECONOMÍA DE LA EMPRESA

RESUMEN:

Este trabajo se centra en el estudio de los índices de poder y su aplicación a las Cortes Generales. Para alcanzar este objetivos realizaremos una introducción a la teoría de juegos con especial atención al análisis de los juegos cooperativos en general y de los juegos simples en particular, donde mostraremos las diferentes soluciones para estos tipos de juegos, el Core, el Valor de Shapley y el Valor de Banzhaf.

Posteriormente, dentro de los juegos simples, analizamos los juegos de mayoría ponderada, además realizamos un estudio de los índices de poder de Shapley-Shubik, de Banzhaf y de Deegan-Packel. Gracias a estos índices estudiaremos el reparto de poder de las dos Cámaras de las cuatros últimas legislaturas.

Demostraremos que no es necesario tener mayor cantidad de votos para ostentar mayor poder y esto quedará reflejado en la aplicación de los índices de poder que realizaremos en el trabajo.

PALABRAS CLAVES:

Juegos; índices; Poder; Estrategias; Coaliciones.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

Este proyecto fin de grado ha sido titulado "Estudio de los índices de poder y su aplicación a las Cortes Generales". Se ha realizado bajo la dirección del profesor Francisco Velasco Morente, en el departamento de Economía Aplicada I de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad de Sevilla.

Este proyecto se encuentra dentro de la Teoría de Juegos. La Teoría de Juegos es la teoría matemática que se ocupa de los problemas de decisión interactivos. Tales problemas pueden caracterizarse por los tres hechos siguientes: a) hay varios agentes que toman decisiones, b) en función de las decisiones de todos se produce un resultado, y c) cada agente tiene sus propias preferencias sobre el conjunto de posibles resultados. Dentro de la teoría de juegos conviven dos teorías: la teoría de juegos no cooperativa y la teoría de juegos cooperativa. La no cooperativa supone que todos los elementos del juego y todas las posibilidades estratégicas de los jugadores pueden describirse con precisión a través de un modelo matemático. La teoría de juegos cooperativa supone en cambio que los posibles modos de cooperar de los jugadores, de tomar acuerdos vinculantes, son muy variados, de modo que resulta inviable describirlos a través de un modelo matemático sencillo. El enfoque cooperativo es, asumir de entrada que los jugadores van a cooperar y a actuar de un modo socialmente óptimo y centrarse más bien en cómo deben repartirse los jugadores los beneficios de su cooperación. Este proyecto se centra en estos tipos de juegos, y dentro de los juegos cooperativos en los juegos simples de mayoría ponderada.

A continuación incluimos un breve repaso a repaso a la historia de la teoría de juegos. Probablemente el primer precursor de la teoría de juegos fue A. Cournot y su análisis del duopolio, publicado en 1838, en el que introduce un concepto muy próximo al equilibrio de Nash. A principios del siglo XX, matemáticos importantes, cómo E. Zermelo y E. Borel, se interesan por los juegos de estrategias y por los juegos bipersonales de suma cero. El primer teorema importante de la teoría de juegos es el Teorema minimax, demostrado por el matemático John Von Neumann en 1928. Años más tarde colaboró en Princenton con el economista Oskar Morgensten. En 1944 publicaron la primera edición de "The Theory of Games and Economic Behavior", ese momento suele considerarse el inicio de la teoría de juegos. Desde entonces la teoría de juegos se ha ido desarrollando por la colaboración de matemáticos y economistas. En 1950 John Nash publicó su primer artículo sobre el concepto de equilibrio. Hoy en día, el equilibrio de Nash y la teoría que nació a raíz de él desempeña un papel muy importante en las ciencias sociales, especialmente en la economía. En 1994 John Nash recibe el premio Nobel de Economía conjuntamente con J. Harsanyi y con R. Selten por sus contribuciones a la teoría del equilibrio en juegos no cooperativos. En 2005 R. Aumann y T. Schelling lo obtuvieron por sus contribuciones al análisis de los conflictos y la cooperación a través de la teoría de juegos. En 2007 el premio fue para L. Hurwicz, E. Maskin Y R. Myerson por haber puesto los fundamentos de la teoría de diseños de mecanismos. Todos estos premios muestran la gran importancia que ha adquirido la teoría de juegos como herramienta matemática para analizar la interacción social y el gran impacto que ha tenido en la economía. En 1999, se creó la Game Theory Society (GTS) para promover la investigación, la enseñanza y las aplicaciones de la teoría de juegos. Periódicamente, la GTS organiza un congreso mundial de teoría de juegos, el primero de ellos tuvo lugar en Bilbao en el 2000.

Con este proyecto pretendemos realizar un acercamiento a los juegos cooperativos y centrarnos en los juegos simples e índices de poder con un análisis en profundidad. El segundo objetivo es darle aplicabilidad a lo estudiado sobre los índices de poder y los juegos simples. Estudiaremos mediante el índice de poder de Shapley, Banzhaf y Deegan-Packel el reparto de poder de las Cortes Generales de las cuatros últimas legislaturas.

Este trabajo se estructura en cuatros capítulos. El primero de ellos donde nos encontramos, se encarga de hacer una breve introducción del trabajo, explicando además, cómo va a ser la distribución de los capítulos del mismo.

En el capítulo 2 se presentan las bases de la Teoría de juegos Cooperativos y se introducen las propiedades que pueden cumplir los juegos. Durante el capítulo tratamos las diferentes soluciones de los juegos cooperativos, haciendo hincapié en el core, que es una solución de tipo conjunta, y en el valor de Shapley y de Banzhaf, que son soluciones puntuales.

En el capítulo 3 tratamos los juegos simples, que son un tipo de juegos cooperativos. Presentamos los conceptos relacionados con este tipo de juego, así como las propiedades que pueden satisfacer los juegos simples. Dentro de este tipo de juegos nos centraremos en los juegos de mayoría ponderada, estudiando en ellos los índices de poder, que nos proporcionaran una medida de la influencia de cada jugador en el juego. Posteriormente se realiza un estudio de los índices más importantes, índice de poder de Shapley-Shubik, Banzhaf y Deegan-Packel, finalizando este capítulo con un ejemplo sobre el Parlamento de Andalucía.

Finalmente, en el capítulo 4 nos centraremos en el aspecto más importante de los índices de poder: su cálculo y aplicación. Este cálculo lo realizaremos a través de un software informático denominado IOP 2.0. Con esta herramienta realizaremos un estudio de la distribución de poder en las Cortes Generales para las cuatros últimas legislaturas. Este capítulo finaliza con un apartado en el que hemos incluido las conclusiones sacadas de este trabajo.

CAPÍTULO 2

JUEGOS COOPERATIVOS

2.1. INTRODUCCIÓN

La teoría de juegos fue fundada por John von Neumann en 1928. Pero suele considerarse su nacimiento como disciplina en 1944, cuando John von Neumann escribe un tratado con el economista Oskar Morgensten, titulado Theory of Games and Economic Behavior, en este libro se define el concepto de juegos cooperativos de n personas e introdujeron algunas ideas relacionadas con la solución del juego. Todas las aportaciones que se ha producido desde entonces han estado fuertemente influenciadas por esta obra. En ella, un juego cooperativo es una situación derivada de una actividad en la que los elementos o actores que intervienen (personas, instituciones, empresas, etc.) persiguen alcanzar un determinado objetivo como ganar una votación, buscar mayores beneficios empresariales o mejorar una gestión, mediante la colaboración entre ellos. Es decir, Su principal característica consiste en que los jugadores pueden colaborar entre ellos para lograr el beneficio o utilidad. Se centra en las siguientes cuestiones: ¿Cómo se reparten los beneficios de la coalición? ¿Qué coaliciones llegaran a acuerdos vinculantes? El objetivo primordial de la teoría de los juegos cooperativos es analizar la influencia que ha tenido cada jugador en la obtención de ese beneficio, para así proponer un reparto adecuado al mismo.

2.1. JUEGOS COOPERATIVOS

Como se ha comentado antes, estudiamos problemas de negociación coalicional. En este tipo de problemas, un conjunto de jugadores, que dispone de mecanismos para tomar acuerdos vinculantes, debe decidir cómo repartirse los beneficios de su cooperación. Supondremos que los beneficios generados por los grupos de jugadores (coaliciones) pueden repartirse libremente entre ellos. En este trabajo nos centramos en problemas de negociación coalicional con utilidad transferible. Para caracterizar uno de estos problemas usaremos los juegos cooperativos con utilidad transferible (abreviadamente juegos TU) se definen formalmente a continuación.

En primer lugar, se ha de definir qué se entiende por coalición.

Definición 2.1. Una **coalición** es cualquier subconjunto del conjunto de jugadores. La definición de coalición incluye, entre otros, el conjunto ($\emptyset$), los subconjuntos formados por un único jugador y el conjunto total.

Definición 2.2. Un **juego cooperativo de utilidad transferible** se define como un par (N, v), donde N es un conjunto finito y v es una función $v: 2^n \to \mathbb{R}$ que asigna a cada $S \subseteq N$ un número real y verifica $v(\emptyset) = 0$.

Los elementos de $N = \{1,2, \dots, n\}$ se denominan jugadores, los subconjuntos $S \in 2^N$ coaliciones y $v(S)$ es el valor de la coalición S. La función v se denomina función característica, siendo identificado el juego (N, v) mediante su función característica.

Definición 2.3. Se dice que un juego $G = (N, v)$ es **monótono** si $\forall\, S, T\ \subset T,$ se verifica que

$$v(S) \leq v(T)$$

Existe juego cooperativo monótono si al crecer el número de jugadores que forman una coalición se cumple que el beneficio o ganancia que obtiene la coalición no disminuye.

Definición 2.4. Un juego $G = (N, v)$ es **superaditivo** si $v(S \cup T)\ \geq v(S) + v(T)$ si $\forall\, S, T\ \subset N$, que sean disjuntas, es decir, $S \cap T =\ \emptyset$. La interpretación es que no crea interferencias negativas entre los jugadores.

Se dice que el juego es **subaditivo** si la ecuación anterior se realiza en sentido opuestos, si verifica $v(S \cup T)\ \leq v(S) + v(T)$ si $\forall\, S, T\ \subset N$.

Definición 2.5. Un juego $G = (N, v)$ es **convexo** si $\forall\, S, T\ \subset N$, se verifica que

$$v(S) + v(T)\ \leq v(S \cup T) + V(S \cap T)$$

Si la desigualdad de la definición anterior es en sentido opuestos el juego es **cóncavo,** se verifica que $v(S) + v(T)\ \geq v(S \cup T) + V(S \cap T)$

Definición 2.6. Un juego $G = (N, v)$ es **0-normalizado** si se verifica que

$$v(\{i\}) = 0, \forall\ i \in J$$

Definición 2.7. Un juegos $G = (N, v)$ es **(0,1)-normalizado** si se verifica que $v(\{i\}) = 0, \forall\ i \in J$ y $v(J) = 1.$

Continuamos este trabajo definiendo algunas operaciones básicas en juegos cooperativos.

Definición 2.8. Sean (N, v) y (N, w) dos juegos cooperativos, con $N =\ \{1, 2, \dots, n\}$. Sea $\lambda\ \in\ R$. Se define:

$$(v + w)(S) = v(S) + w(S), \forall\ S \subset N$$

$$(\lambda v)(S) =\ \lambda[v(s)], \forall\ S\ \subset N$$

$$(v\ \cdot w)(S) = v(S)w(S), \forall\ S\ \subset N$$

En los resultado de los juegos cooperativos intervienen numerosos factores en las tomas de decisiones, pero se parte de una idea básica en la teoría de juegos cooperativos de utilidad transferible, dado un juego (N, v) y suponiéndose que se llegue a algún acuerdo entre los jugadores, se reparte la ganancia $v(N)$, de la gran coalición N entre ellos.

Entonces sea $G = (N, v)$ un juego en su forma característica, en donde $N = \{1, \dots, n\}$ es el conjunto de jugadores y v es la función característica. Si en un juego los jugadores deciden trabajar conjuntamente. El problema consiste en cómo se reparte el valor $v(N)$ entre los n jugadores.

Sea $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ un vector de distribución de pagos, en donde para cada $i = 1, 2, \dots, n$, x_i representa el pago que recibe el jugador i. Se deduce que debe haber una distribución de la cantidad $v(N)$ entre los jugadores. Ésta puede ser representada por una función x con valores reales sobre el conjunto de jugadores N y debe de satisfacer el **principio de eficiencia**.

$$x(S) = \sum_{i \in S} x_i$$

Los vectores $x \in \mathbb{R}^n$ que satisfacen el principio de eficiencia son llamados preimputaciones o vectores de pagos eficientes para el juego (N, v), y se define como:

Definición 2.9. El conjunto de **preimputaciones** de un juego $G = (N, v)$ es el siguiente conjunto de vectores de distribución de pagos:

$$PI = \{x = (x_{1\,,}\, x_2\,, \dots, x_n) \in\ R^n : x(N) = v(N) \ \ con \quad x(N) = \textstyle\sum_{i \in S} x_i\}$$

La mayoría de las soluciones propuestas para juegos cooperativos requieren que las preimputaciones eficientes cumplan el llamado **principio de individual racional**, el cual exige que el pago a cada jugador i por el vector de pago x sea al menos la cantidad que el jugador puede obtener por sí mismo en el juego. Es decir,

$$x_i \geq v(\{i\}) \quad para\ todo \quad i \in N$$

Las preimputaciones que verifican este principio de individualidad racional se llama imputaciones para el juego $G = (N, v)$, denotamos $I(v)$ para el conjunto de todas ellas.

Definición 2.10. El conjunto de **imputaciones** de un juego $G = (N, v)$ es el siguiente conjunto de vectores de pago:

$$I(N, v) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in PI(N, v) : x_i \geq v(\{i\}), \text{ para } i = 1,2, \dots, n\} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n : n(N) = v(N), x_i \geq v(\{i\}), \text{ para } i = 1,2, \dots, n\}$$

A un juego cuyo conjunto de imputaciones es no vacío se le denomina esencial, tal como expresaremos a continuación.

Definición 2.11. Un juego $G = (N, v)$ es **esencial** si verifica que $I(N, v) = \emptyset$.

2.3 SOLUCIONES DE JUEGOS COOPERATIVOS

En este apartado se analizará, los diferentes conceptos de solución que se realiza para el reparto de los beneficios entre los participantes del juego. Puede haber dos tipos de soluciones en los juegos cooperativos.

- Soluciones de tipo conjunto, limitan un conjunto de posibles valores exigiéndole algunas propiedades. Unos de los conceptos más importantes de la teoría de juegos es el core, es una solución de tipo conjunto, donde se le exige a las imputaciones que verifiquen el principio de racionalidad para todas la coaliciones.
- Soluciones de tipo puntual, eligen entre todos los posibles vectores de pago uno sólo. Posteriormente explicaremos dos tipos de soluciones de tipo puntual como son valor de Shapley y el valor de Banzhaf.

2.3.1. El core

Como se ha comentado anteriormente, cuando se le exige a las imputaciones que verifiquen el principio de racionalidad para todas las coaliciones, se obtiene el concepto de solución denominado core. Esta idea del core de un juego fue introducida por Gillies (1953) y posteriormente completada por Shapley y Shubik (1971) que introdujeron conceptos como coaliciones equilibradas y juego equilibrado o el concepto ε-core, para los casos en los que el core de un juego fuese vacío. A continuación definimos el core.

Definición 2.12. El **core** de un juego $G = (N, v)$ es el siguiente conjunto de vectores de pagos:

$$C(N, v) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n : x(N) = v(N), x(S) \geq v(S), \forall\, S \in P(N)\}$$

A partir de la definición se observa que el core es un subconjunto del conjunto de imputaciones. Se trata de asignaciones que podrían ser acuerdos de distribución estables, en el sentido de que ningún grupo de jugadores podría impugnar unilateralmente ninguno de esos acuerdos, ningún grupo obtendría por sí mismo más de lo que cualquiera de esos acuerdos le permite obtener.

El core de un juego cooperativo cumple algunas propiedades matemáticas como la de la proposición.

Sea $G = (N, v)$ un juego cooperativo. El conjunto $C = (N, v)$ es cerrado, acotado y convexo.

Para los casos en los que el core es vacío, no se podría obtener un vector de pagos con el que todos los jugadores se vieran beneficiados. En estos casos, se emplea el ε-core.

En el estudio de las condiciones que determinan si el juego tiene o no un core vacío, Shapley introduce el concepto de coaliciones equilibradas y juego equilibrado.

Definición 2.13. Una familia $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ de subconjuntos de N, distintos y no vacíos, es **equilibrada** sobre N si existen números positivos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, denomina los pesos, tales que para todo $i = 1,2, \ldots, n$ verifican:

$$\sum_{\{j:i\in S_J\}} \alpha_J = 1$$

Definición 2.14. Se dice que el juego (N, v) es **equilibrado** si para cualquier familia equilibrada $\{S_i, \ldots., S_m\}$ sobre N, con pesos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, se verifica que

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \, v(S_j) \leq v(N)$$

Bondareva y Shapley demuestran que la clase de juegos equilibrados coincide con la clase de juegos con core no vacío.

Teorema 2.1. Un juego (N, v) tiene core no vacío si y sólo si (N, v) es un juego equilibrado.

$$C(N, v) = \emptyset \leftrightarrow (N, v) \text{ es equilibrado}$$

Definición 2.15. Un juego (N, v) se dice **totalmente equilibrado** si los subjuegos inducidos (S, v_S) son equilibrados para toda $S \subseteq N, S \neq \emptyset$. Se entiende por subjuego inducido (S, v_S) aquel cuya función característica viene determinada por

$$v_s(T) = v(T), \text{ para toda } T \subseteq S$$

Existen otros conceptos de solución diferentes al core como pueden ser el conjunto de negociación de Aumann y Maschler y los conjuntos estables de von Neuman. Por otro lado, existen otras soluciones que asignan a cada juego un único elemento del conjunto de preimputaciones como los valores de Shapley y Banzhaf que describimos a continuación.

2.3.2. El valor de Shapley

El concepto de valor de Shapley para juegos cooperativos es de carácter normativo. Trata de buscar una distribución de pagos entre jugadores de manera que cumplan determinados requisitos previamente establecidos. Dada la función característica de un juegos, ¿Cuál es el pago esperado para un jugador individual? Predecir el resultado basándose en la función característica es complejo. La personalidad de los jugadores, costumbres sociales, su entorno…, etc. Son circunstancias que afectan al pago final. Shapley (1953) exige que la función distributiva de pagos verifique una serie de axiomas o requisitos sobre el conjunto de factores importantes que considere que tenga efecto sobre el pago final. Veremos cómo a partir de cuatros axiomas se llega a una única asignación entre los jugadores, que se denomina valor de Shapley.

Sea $G = (N, v)$ un juego en forma coalicional, en donde $N = \{1,2, \ldots, n\}$. Se considera la siguiente asignación de pagos para los n jugadores:

$$\emptyset(v) = (\emptyset_1(v), \emptyset_2(v), \ldots., \emptyset_n(v)) \in R^n$$

La función de asignación de pagos $\emptyset(v)$ debe cumplir los siguientes axiomas:

Axioma 1. **Eficiencia.** La función de asignación de pagos $\emptyset(v)$ debe distribuir el pago total del juego. Es decir, debe ser

$$\sum_{i=1}^{n} \emptyset_i\,(v) = v(N)$$

Axioma 2. **Simetría.** Para cualquier par de jugadores que realicen aportaciones equivalentes para cada coalición, es decir, tales que cumplan que

$$v(S \cup \{I\}) = V(S \cup \{J\}), para\ todo\ S \in P(N), con\ i, j\ \notin S$$

Axioma 3. **Jugador nulo o tratamiento del jugador pasivo.** Si un jugador no aporta ningún beneficio adicional al resto de jugadores no debe recibir ningún pago adicional. Para cada jugador $i \in N$, para el cual se verifica que

$$v(S) = v(S - \{I\}) + v(\{i\}), para\ toda\ coalición\ S\ con\ i\ \in S$$

Debe ser

$$\emptyset_i(v) = \emptyset_j(v)$$

Axioma 4. **Aditividad.** La función de asignación $\emptyset$ debe ser invariante a cualquier descomposición arbitraria del juego. Formalmente dos juegos cualesquiera (J, v_1) y (J, v_2) debe ser

$$\emptyset(v_1 + v_2) = \emptyset(v_1) + \emptyset(v_2)$$

Teorema 2.2. (Shapley, 1953) Existe una única función $\emptyset\colon \mathrm{G_n} \to \mathrm{R^n}$ que satisface las propiedades de eficiencia para jugador pasivo, simetría y aditividad, y es la dada por

$$\emptyset_i(N, v) = \sum_{S \subseteq N : I \in S} \frac{(s-1)!\ (n-s)!}{n!} [v(S) - v(S \setminus \{i\})]\ para\ cada\ i \in N$$

Siendo $S = |S|$, el número de jugadores que hay en la coalición S.

La demostración de este teorema la podemos encontrar en Shapley (1953), donde se observa que el valor de Shapley está determinado, de forma exclusiva y a priori, por la función característica del juego.

A continuación vamos a realizar unas interpretaciones sobre el valor de Shapley.

- El valor de Shapley es siempre eficiente. Si el juego es superaditivo, entonces es una imputación.
- El pago que el valor de Shapley asigna a cada jugador es una media ponderada de las contribuciones marginales de dicho jugador a las coaliciones a las que pertenece.
- El valor de Shapley no tiene en cuenta factores tales como la existencia o no de una distribución de los jugadores en coaliciones, incompatibilidades

entre jugadores o diferentes grados de cooperación entre los mismos. La consideración de factores de este tipo ha dado origen a otros conceptos de solución ligados al valor de Shapley.

El valor de Shapley es de las soluciones más apreciadas por diversas razones:

1. Da para cada juego un único vector de reparto entre los jugadores.
2. Está caracterizado axiomáticamente y por unas series de propiedades simples y aceptables desde un punto de vista intuitivo que sustenta firmemente su racionalidad.
3. Es aplicable a todo juego cooperativo sin excepción y para un número arbitrario de jugadores.
4. Su aplicación a la práctica no presenta mayores dificultades que otros conceptos de solución.

2.3.3. El valor de Banzhaf

El valor de Banzhaf es uno de los conceptos más importantes de solución para juegos cooperativos asignado un único vector de pagos. Es una solución menos estudiada que la solución de Shapley, sin embargo, tiene un posición privilegiada dentro de la Teoría de Juegos, ya que, fue adoptada como medida valida por un tribunal. Se utilizo para determinar la representación del Consejo de Supervisores de Nassau en el estado de Nueva York.

Este índice ha sido caracterizado axiomáticamente por Owen (1978), Lehrer (1988) o Feltkamp (1995).

A continuación definiremos el valor de Banzhaf.

Definición 2.16. (Banzhaf (1965)). El **valor de Banzhaf**, β, asigna para cada juego $(N, v) \in G(N)$ y cada jugador $i \in N$ el valor:

$$\beta_i(N, v) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} [v(S \cup \{i\}) - v(S)]$$

Ahora analizaremos la axiomatización de Feltkamp.

Definición 2.17. Un jugador $i \in N$ es **nulo** en el juego v si $v(S) = v(S \setminus \{i\})$ para toda coalición $S \subseteq N$ que lo contenga. Se dice que un concepto de solución β satisface la propiedad del juagador nulo si $\beta_i(v) = 0$ para todo juego v en el que i es un jugador nulo.

El índice de Banzhaf es una aplicación $\beta: G_n \to \mathbb{R}^n$ que asigna a cada juego cooperativo v un vector $\beta_i(v) = (\beta_1[v], \beta_2[v], \dots, \beta_n[v])$ y cumple las propiedades de simetría, jugador nulo, aditividad y satisface $\sum_{i \in N} \beta_i (v) = \beta(v)$.

Teorema 2.3. (Feltkmap, 1995). Existe una única función $\beta: G_n \to \mathbb{R}^n$ que satisface las propiedades de jugador nulo, simetría y aditividad y satisface $\sum_{i \in N} \beta_i (v) = \beta(v)$. Y es dada por

$$\beta_i(N,v) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{S\subset N\setminus\{i\}} [v(S\cup\{i\}) - v(S)]$$

La diferencia entre los valores que hemos estudiado radica en que mientras el valor de Shapley cumple la propiedad de eficiencia, el valor de Banzhaf cumple la de poder total. Definimos poder total de la siguiente manera:

Definición 2.18. Una solución $f: \Gamma^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la propiedad de **poder total** si para todo juego $(N, v) \in \Gamma^N$, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} f_i\,(N,v) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{S\subseteq N\setminus i} [v(S\cup\{I\}) - v(S)]$$

La propiedad de poder total establece el pago total obtenido por los jugadores es la suma de las medias de las contribuciones marginales de todos los jugadores. Es evidente que si una solución es eficiente, no puede satisfacer la propiedad de poder total.

El índice de Banzhaf es una medida ponderada de las contribuciones marginales de cada jugador a las coaliciones a las que pertenece. En este caso los S de ponderación son 2^{n-1}, mientras que para el valor de Shapley depende del tamaño de la coalición.

El índice de Banzhaf tampoco tiene en cuenta factores como los distintos grados de cooperación entre los jugadores o las incompatibilidades.

Como hemos comentado anteriormente, el índice de Banzhaf no cumple con la propiedad de eficiencia, ya que, la suma del pago esperado para todos los jugadores no coincide con el valor de la coalición total. Es importante que destaquemos que no hay una solución mejor que otra. Será el contexto, qué tipo de juego sea y elegiremos el valor más adecuado para su estudio.

CAPÍTULO 3

LOS JUEGOS SIMPLES

3.1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior hemos estudiados los juegos cooperativos. Ahora nos centraremos en una de las clases más interesantes de juegos cooperativos es la de los juegos simples. Con este tipo de juegos se describe la capacidad de decisión de las coaliciones en un sistema de votación y se puede analizar la importancia estratégica de cada agente involucrado en el sistema. Estos tipos de juegos tienen numerosas aplicaciones, especialmente en el campo de la política, ya que, son usados para modelar procesos de votación y toma de decisiones en un grupo de personas. El objeto de estudio es medir la influencia de cada jugador o coaliciones en la toma de decisiones. Para ello utilizaremos los índices de poder, que miden el poder o importancia relativa de cada uno de los jugadores.

3.2. JUEGOS SIMPLES

En este apartado estudiaremos los juegos simples y sus propiedades. A continuación formalizaremos esta idea e introduciremos la nomenclatura apropiada.

Definición 3.1. Un juego cooperativo (N, v) es **simple** si $v(S) = 0$ ó 1 para toda $S \subseteq N$.

Una coalición S es ganadora si $v(S) = 1$ y perdedora si $v(S) = 0$. El conjunto de coaliciones ganadoras lo representamos por W y el de las coaliciones perdedoras por $\mathcal{L}$.

Con esta nueva notación, la propiedad de monotonía puede escribirse como:

$$S \in W, S \subseteq T \Longrightarrow T \in W$$

Se puede decir que un juego simple es monótono si todas las subcoaliciones de coaliciones son también perdedoras o, del mismo modo, si todas las supracoaliciones ganadoras son también ganadoras.

Dentro del conjunto de las coaliciones ganadoras destacan las coaliciones ganadoras minimales, que son aquellas que no contienen ningún elemento innecesario para ser ganadoras.

Definición 3.2. Sea (N, v) un juego simple. Decimos que S es una **coalición minimal ganadora** si $v(S) = 1$ y $v(T) = 0$ para toda $T \subset S, T \neq S$.

Usaremos la notación W^m para designar la colección de las coaliciones ganadoras minimales. Estas coaliciones tienen una propiedad que las caracteriza entre las ganadoras, la propiedad de exclusión mutua: ninguna coalición ganadora minimal contiene estrictamente a otra, es decir, $S, T \in W^m \Longrightarrow S \not\subset T$.

Si cada subcoalición de una coalición ganadora es perdedora, se dice que esta coalición es minimal. Es decir, $W^m = \{S \in W : T \subset S \Rightarrow T \notin W\}$. Y diremos que una coalición es perdedora maximal si toda coalición que la contiene es ganadora. El conjunto de coaliciones perdedoras maximales lo representamos por $\mathcal{L}^M$. Es decir, $\mathcal{L}^M = \{S \in \mathcal{L} : S \subset T \Rightarrow T \in W\}$.

Como podemos observar, $W^m \subseteq W$. Puesto que aumentado de todas las maneras posibles las coaliciones ganadoras minimales, queda claro que la colección W^m determina el juego.

Atendiendo las relaciones entre las coaliciones complementarias de un juego simple (N, W), distinguimos diferentes tipos de juegos.

Definición 3.3. Se dice que un juego simple (N, v) es un **juego propio** si para cualquier par de colaciones ganadoras $S, T \in W$, se tiene que $S \cap T \neq \emptyset$.

Definición 3.4. Se dice que un juego simple (N, v) es un **juego decisivo** si para cualquier coalición $S \subseteq N$, se tiene que $S \in W$ o $N \setminus S \in W$.

3.2.1 Juegos de mayoría ponderada

El tipo de juego simple más frecuente en la práctica es el llamado juego de mayoría ponderada. Estos tipos de juegos nos lo podemos encontrar en el ámbito económico y político constituyen uno de los campos de aplicación más interesantes de la teoría de juegos cooperativos. Las decisiones tomadas por organismos políticos, ya sean a escala internacional, estatal, autonómica o local nos afecta en mayor o menor medida como ciudadanos, por lo que, el estudio de estas estructura nos resulta muy interesante.

Muchos de los mecanismos de votación empleados en tales circunstancias deben describirse como juegos de mayoría ponderada, especialmente en los casos de organismos de representación en los que, más que los representantes individuales, son los partidos políticos los verdaderos protagonistas, debido a que imponen el voto a sus miembros electos.

A continuación definiremos un juego de mayoría ponderada.

Definición 3.5. Un juego simple(N, W) es de **mayoría ponderada** si y sólo si existen números reales, $w_1, w_2, \dots, w_n, q,$ con $q > 0$, tales que, $v(S) = 1$ si $w(S) \geq q$ y $v(S) = 0$ si $w(S) < q$, donde $w(S) = \sum_{i \in S} w_i$.

Se dice que $[q; w_1, w_2, \dots, w_n]$ es una representación del juego de mayoría ponderada (N, W) y escribimos que $(N, W) \equiv [q; w_1, w_2, \dots, w_n]$. En este caso, las coaliciones ganadoras son $W = \{S \subseteq N : w(S) \geq q\}$.

Suele interpretarse w como una distribución de pesos (votos, acciones,…) entre los elementos de N, mientras que q simboliza la mayoría exigida para tomar decisiones.

No todos los juegos simples se pueden representar como juegos de mayoría ponderada. Para los casos que un juego simple cumple las propiedades de juego débil e impropio no es posible representarlo como juego de mayoría ponderada.

Veamos ahora un ejemplo de juego simple de mayoría ponderada relacionada con este trabajo como la estructura del Congreso de los Diputados de 2016.

Ejemplo 3.1. (Parlamento de Andalucía)

La estructura del Parlamento de Andalucía, tras las elecciones generales celebradas el 22 de marzo de 2015, quedaba representada por el juego de mayoría ponderada siguiente, que indica la distribución de los 109 escaños entre cinco partidos o coaliciones políticas que obtuvieron representación. El primer coeficiente es 55, es la cuota que define la mayoría absoluta exigida en la toma de decisiones ordinaria. Su composición es la siguiente:

Partido	Escaños
PSOE-A(A)	47
PP(B)	33
PODEMOS(C)	15
C's(D)	9
ÍULU-CA(E)	5

TABLA 3.1. Distribución del Parlamento andaluz
Fuente: Elaboración propia a través del Ministerio del Interior.

La situación queda definida por el juego:

$$u = [55; 47, 33, 15, 9, 5\ ]$$

Esta situación corresponde a un juego simple (N, v) donde el conjunto de jugadores N es {A, B, C, D, E}, y la función característica asigna un 1 a las coaliciones que sumen más de 55 escaños y 0 a las demás. Es decir

$$\begin{aligned} v(\{A,B\}) = v(\{A,C\}) = v(\{A,D\}) = v(\{A,B,C\}) = v(\{A,B,D\}) = v(\{A,B,E\}) \\ = v(\{A,C,D\}) = \ v(\{A,C,E\}) = v(\{A,D,E\}) = v(\{B,C,D\}) = \\ = v(\{A,B,C,D\}) = v(\{A,B,C,E\}) = v(\{A,B,D,E\}) = \ v(\{A,C,D,E\}) \\ = v(\{B,C,D,E\}) = v(\{A,B,C,D,E\}) = 1 \end{aligned}$$

$v(S) = 0$, para el resto de casos.

Por tanto, el conjunto de coaliciones ganadoras $W(v)$ serán todas aquellas en las que $v(S) = 1$. Para el caso de las coaliciones minimales, que recordamos que son aquellas que no contienen ningún elementos innecesario para ser ganadoras. Serán las siguientes

$$W^m = \{\{A,B\},\{A,C\}\{A,D\}\{B,C,D\}\}$$

A continuación se introducirán una serie de conceptos que vienen determinados por las características de los jugadores en un determinado juego.

Definición 3.6. Dado un juego (N, v), se dice que un jugador i es **dictador** si su peso es mayor que la cuota establecida. Esto es, la coalición formada por el jugador i es la única colación ganadora minimal.

$$W^m = \{\{i\}\}\ ;\ w_i > q$$

Definición 3.7. Dado un juego (N, v), se dice que un jugador i es de **bloqueo** o posee **derecho a veto** si pertenece a todas las colaciones ganadoras del juego.

$$i \in S \; para \; todo \; S \; \in W$$

Un jugador de bloqueo tal vez no puede por sí solo conseguir que se apruebe una propuesta pero puede impedirlo, dado que su presencia es indispensable para conseguir la formación de la coalición ganadora.

Definición 3.8. Dado un juego (N, v), se dice que dos jugadores i, j son **simétricos** si para toda coalición $S \subseteq N \setminus \{i, j\}$ tal que $S \notin W$ se tiene que:

$$\begin{cases} S \cup \{i\} \in W \; y \; S \cup \{j\} \in W \\ \text{ó} \\ S \cup \{i\} \notin W \; y \; S \cup \{j\} \notin W \end{cases}$$

En otras palabras, su aportación es idéntica para toda coalición a la que se unan.

Definición 3.9. Dado un juego (N, v), se dice que un jugador $i \in N$ es un jugador **nulo** si $v(S) = v(S \cup \{i\})$ para toda $S \subset N \setminus \{i\}$. Por lo tanto, no aporta ningún valor a la coalición.

Definición 3.10. Dado un juego (N, v), se dice que un jugador $i \in N$ es un jugador **títere** si $v(S) + v(\{i\}) = v(S \cup \{i\})$ para toda $S \subset N \setminus \{i\}$.

Definición 3.11. Dado un juego (N, v), se dice que un jugador $i \in N$ es un jugador **crítico** para la coalición cuando $S \in W(v) \; y \; S \setminus \{i\} \notin W(v)$. Es decir, para una coalición ganadora S, el jugador i abandona dicha coalición, esta se convierte en perdedora.

En relación a este concepto se puede decir que una coalición ganadora minimal es aquella en la que todos sus jugadores son críticos. A partir de esta definición se puede establecer el concepto de coalición ganadora vulnerable.

Definición 3.12. Una coalición ganadora $S \subseteq N$ es **vulnerable** si existe al menos un jugador $i \in S$ tal que T es una coalición perdedora, para cada coalición $T \subseteq S \setminus \{i\}$.

Todas las coaliciones ganadoras minimales son coaliciones vulnerables. Es decir, una coalición ganadora es vulnerable si al menos uno de los jugadores que la forma es un jugador crítico.

3.3. ÍNDICES DE PODER

En el capítulo anterior, hemos planteado como objetivo principal del estudio de los juegos simples, el análisis de la distribución de poder. La descripción de la coaliciones ganadoras minimales ya proporciona alguna información sobre la importancia relativa de cada agente decisor dentro del sistema, pero deseamos precisar de forma numérica la fuerza real de dichos agentes. En estos casos se suele utilizar el término índices de poder.

Nos centraremos en el concepto de poder. Algaba et.al., (2001) definen el **poder** de un votante en el seno de un órgano como su "capacidad para influir en las decisiones aprobadas mediante un juego de votación ponderada". Para establecer el grado de poder de un votante del juego es necesario idear un índice que nos lo pueda mostrar y que tenga en cuenta las coaliciones ganadoras que se puedan formar como los votos restantes de los miembros. Es por ello, que surgió la necesidad de encontrar un método que determinase de manera concreta el poder que tiene cada jugador en una votación. A continuación definimos índice de poder.

Definición 3.13. Un **índice de poder** sobre S^N es una aplicación $f: S^N \to \mathbb{R}^n$ que a cada juego $(N, v) \in S^N$ le asigna un vector de $\mathbb{R}^n$ en el que la componente i-ésima es un número real que representa el poder del jugador i en el juego.

Posteriormente estudiaremos tres tipos de índices de poder como son el índice de poder de Shapley-Shubik, índice de poder de Banzhaf y, por último, el índice de poder de Deegan-Packel.

3.3.1 índice de Shapley-Shubik

Como hemos comentado antes, el valor de Shapley está definido para cualquier juego cooperativo, incluyendo los juegos simples no nulos, proporcionando para cada jugador $i \in N$ una medida de poder $\emptyset[N, v] \geq 0$.

El matemático Lloyd S. Shapley y el economista Martin Shubik propusieron en 1954, la aplicación del valor de Shapley a los juegos simples como medida de poder. A continuación estudiaremos el significado y el alcance de esta idea.

Proposición 1. La restricción del valor de Shapley al conjunto de los juegos simples no nulos es una medida de poder.

Demostración. El valor de Shapley está definido para cualquier juego cooperativo, y en particular para todos los juegos simples no nulos. Además, gracias a la propiedad de monotonía de los juegos simples tenemos que $\emptyset_i[u] \geq 0$ para cada jugador $i \in N$ y cada juego simple u. Por último, la propiedad de eficiencia del valor y el hecho de que tratamos con juegos simples no nulos implican que se verifique la condición $\sum_{i=1}^{n} \emptyset_i = 1$.

A esta medida de poder se denomina índice de poder de Shapley-Shubik. Además de la condición de eficiencia que hemos expresado anteriormente, el índice de Shapley-Shubik se caracteriza por otras tres propiedades que presentaremos a continuación.

- Si un jugador i es nulo en un juego u, $\emptyset_i[u] = 0$.
- Si dos jugadores i, j son equivalentes en un juego u, $\emptyset_i[u] = \emptyset_j[u]$.

Las tres propiedades de eficiencia, jugadores equivalentes y jugador nulo son útiles para simplificar el cálculo práctico de la distribución de poder en un juego dado. La aditividad, la cuarta propiedad del valor de Shapley, no se puede aplicar a los juegos simples, ya que la suma de dos juegos de este tipo no es nunca un juego simple. Por lo tanto, la unicidad del índice de Shapley-Shubik no se pudo demostrar hasta 1975. Pradeep Dubey estableció una caracterización axiomática del índice de Shapley-Shubik, una función sobre el conjunto de juegos simples no nulos similar a la del valor de Shapley. Esta propiedad se denomina propiedad de transferencia, que es consecuencia de la aditividad y la sustituye como axioma en este contexto.

Definición 3.14. Un índice de poder $f: S^N \to \mathbb{R}^N$ satisface la propiedad de transferencia si para todo par de juegos (N, v) y$(N, w) \in S^N$, se tiene que

$$f(N, v) + f(N, w) = f(N, v \vee w) + f(N, v \wedge w)$$

Pradeep Dubey caracterizo el valor de Shapley para los juegos simples y lo demostró con el siguiente teorema.

Teorema 3.1. Un índice de poder $f: S^N \to \mathbb{R}^N$ que verifica las propiedades de eficiencia, simetría, jugador nulo y transferencia es el índice de poder de Shapley-Shubik.

Anteriormente comentamos, el valor de Shapley asigna a un jugador i la media aritmética de las contribuciones que dicho jugador hace a las coaliciones formadas por los jugadores que preceden a i en las $n!$ permutaciones posibles de los jugadores, es decir

$$\emptyset_i(N, v) = \sum_{S \subseteq N: i \in S} q(s)[v(S) - v(S \setminus \{i\}] \; ; \; q(s) = \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}$$

Para las coaliciones ganadoras $v(S) = 1$ y para las coaliciones perdedoras $v(S) = 0$, entonces el índice de Shapley-Shubik viene determinado por

$$\emptyset_i(N, v) = \sum_{S \in SW_i(v)} \frac{(s-1)!\,(n-s)!}{n!}$$

Donde $SW_i(v)$ representa el conjunto de swings para el jugador $i \in N$. Es decir, un swing para un jugador i es una coalición ganadora para la que el jugador i es un jugador crítico. A continuación lo definimos matemáticamente.

Definición 3.15. Dado un juego simple (N, v), un **swing** para un jugador $i \in N$ es una coalición $S \subseteq N$ tal que $i \in S$, S es una coalición ganadora y T es perdedora, para toda coalición $T \subseteq S \setminus \{i\}$.

Por tanto, las coaliciones ganadoras a las que pertenezca i pero no sean un swing ya no se tienen en cuenta, puesto que $[v(S) - v(S \setminus \{i\}] = 0$.

3.3.2. El índice de poder de Banzhaf

El índice de Banzhaf fue establecido inicialmente por el abogado y matemático norteamericano John Banzhaf (1965). Este índice trata de responder a la cuestión del poder individual, analizando la probabilidad de que el voto de un jugador afecte al resultado final de la votación. En 1979, Dubey y Shapley utilizan de nuevo la propiedad de transferencia para demostrar la unicidad de este índice, obtuvieron una caracterización axiomática para el valor de Banzhaf en la familia de los juegos simples conocido con el nombre índice de poder de Banzhaf-Coleman 1971. Owen (1975) extendió el valor de Banzhaf para los juegos de utilidad transferible y Feltkamp (1995) obtuvo la caracterización axiomática que comentamos en el capítulo anterior.

Para introducir el índice de poder de Banzhaf usaremos la caracterización de Dubey y Shapley, dado que pone de manifiesto las similitudes entre el índice de poder de Banzhaf y Shapley-Shubik.

Teorema 3.2. El único índice de poder $f: S^N \to \mathbb{R}^N$ que cumple las propiedades de simetría, transferencia, jugador nulo y poder total es el índice de poder de Banzhaf. Para un jugador i en el juego simple (N, v), el índice de poder de Banzhaf-Coleman viene determinado por

$$\beta_i(N, v) = \sum_{S \in SW_i} \frac{1}{2^{n-1}}$$

El índice de poder de Banzhaf de un jugador i se corresponde con el número de swings para el jugador i, normalizado por el número de coaliciones a las que se puede unir.

Comparando los dos índices estudiados hasta ahora observamos que el índice de poder de Banzhaf no cumple la propiedad de eficiencia mientras que el índice de poder de Shapley-Shubik sí.

3.3.3. El índice de poder de Deegan-Packel

El índice de poder introducido por Deegan-packel en 1979, proporciona una medida cuantitativa del poder de los distintos jugadores cuando se considera que el comportamiento de los mismos satisface ciertas condiciones. En la caracterización de este índice sus autores emplearon propiedades comunes con el índice de poder de Shapley-Shubik, como son: eficiencia, jugador nulo y simetría, y una nueva propiedad denominada propiedad de fusión.

El índice de poder Deegan-Packel recoge la idea de que el poder de un jugador se basa exclusivamente en su participación en la formación de coaliciones minimales ganadoras, y que, a priori estas coaliciones minimales ganadoras son igualmente plausibles. Se supone que el comportamiento de los jugadores está determinado por las siguientes condiciones:

- Equiprobabilidad: Todas las coaliciones minimales ganadoras son equiprobables.
- Minimalidad: Sólo originan una "victoria" las coaliciones minimales ganadoras.
- Solidaridad: Los jugadores que contribuyen a una coalición "victoriosa" se dividen el "botín" a partes iguales.

La condición de Minimalidad es aplicable en el sentido de que los jugadores racionales quieren maximizar su poder y, por tanto, sólo se formaran las coaliciones minimales ganadoras. La condición de Equiprobabilidad dice que todas las coaliciones minimales ganadoras juegan el mismo papel y, por último, la propiedad de solidaridad establece que todos los jugadores de una coalición minimal ganadora sean tratados por igual.

A continuación se define formalmente la propiedad de fusión.

Definición 3.16. Dos juegos $(N,v),(N,w) \in S^N$ satisfacen la **propiedad de fusión** si para toda pareja de coaliciones $S \in M(v)$ y $T \in M(w)$, siendo $M_i(v)$ el subconjunto de las coaliciones $S \in M(v)$ tal que $i \in S$, se cumple que $S \not\subset T$ y $T \not\subset S$.

Las coaliciones ganadoras minimales en el juegos $(N, v \vee w)$ son precisamente la unión de las coaliciones ganadoras minimales en los juegos (N,v) y (N,w). Si dos juegos (N,v) y (N,w) satisfacen la propiedad de fusión, la propiedad de fusión garantiza que

$$|M(v \vee w)| = |M(v)| + |M(w)|$$

Es decir, un índice de poder $f: S^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la propiedad de fusión si para cada pareja de juegos que satisfacen dicha propiedad de fusión, la condición fusión garantiza

$$f(N, v \vee w) = \frac{|M(v)| f(N,v) + |M(w)| f(N,w)}{|M(v \vee w)|}$$

Esta propiedad establece que el poder de un juego fusionado es una media ponderada del poder de los dos juegos componentes, donde los pesos de cada juego componente son el número de coaliciones ganadoras minimales del juego.

De acuerdo con las suposiciones que hemos explicado, Deegan y Packel definieron el índice, dando una caracterización axiomática del mismo.

Teorema 3.3. El único índice de poder $f: S^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que satisface las propiedades de simetría, eficiencia, jugador nulo y fusión es el índice de poder de Deegan-Packel. Dado un juego simple (N,v), el índice de Deegan-Packel asigna a cada jugador $i \in N$ el número real en donde $M(v)$ es el conjunto de coaliciones ganadoras minimales y $M_i(v) = \{S \in M(v) / i \in S\}$.

$$\rho_i(N,v) = \frac{1}{|M(v)|} \sum_{S \in M_{i(v)}} \frac{1}{|S|}$$

Este índice verifica las condiciones de simetría, eficiencia, jugador nulo y la diferencia fundamental con el índice de Shapley-Shubik es que este satisface la propiedad de transferencia mientras que el índice de Deegan-Packel satisface la propiedad de fusión.

3.4. EJEMPLO PRÁCTICO

En este apartado vamos a calcular los índices de poder para el Parlamento andaluz anteriormente utilizado. El Parlamento de Andalucía quedaba representado por el juego de mayoría ponderada siguiente, que indica la distribución de los 109 escaños entre cinco partidos o coaliciones políticas que obtuvieron representación.

La situación queda definida por el juego:

$$u = [55; 47, 33, 15, 9, 5\,]$$

Esta situación corresponde a un juego simple (N, v) donde el conjunto de jugadores N es {A, B, C, D, E}, y la función característica asigna un 1 a las coaliciones que sumen más de 55 escaños y 0 a las demás. Es decir

$$\begin{aligned} v(\{A,B\}) &= v(\{A,C\}) = v(\{A,D\}) = v(\{A,B,C\}) = v(\{A,B,D\}) = v(\{A,B,E\}) \\ &= v(\{A,C,D\}) = v(\{A,C,E\}) = v(\{A,D,E\}) = v(\{B,C,D\}) = \\ &= v(\{A,B,C,D\}) = v(\{A,B,C,E\}) = v(\{A,B,D,E\}) = v(\{A,C,D,E\}) \\ &= v(\{B,C,D,E\}) = v(\{A,B,C,D,E\}) = 1 \end{aligned}$$

$v(S) = 0$, para el resto de casos.

Por tanto, el conjunto de coaliciones ganadoras $W(v)$ serán todas aquellas en las que $v(S) = 1$. Para el caso de las coaliciones minimales, que recordamos que son aquellas que no contienen ningún elementos innecesario para ser ganadoras. Serán las siguientes

$$W^m = \{\{A,B\},\{A,C\}\{A,D\}\{B,C,D\}\}$$

Para realizar el cálculo de los índices, vamos a calcular el conjunto de swings de cada jugador, e identificamos en qué coaliciones es cada jugador un jugador crítico.

$$SW_1(v) = \left\{\begin{matrix} \{A,B\}\{A,C\}\{A,D\}\{A,B,C\}\{A,B,D\}\{A,B,E\}\{A,C,D\}\{A,C,E\}\{A,D,E\}\{A,B,C,E\} \\ \{A,B,D,E\}\{A,C,D,E\} \end{matrix}\right\}$$

$$SW_2 = \{\{A,B\}\{A,B,E\}\{B,C,D\}\{B,C,D,E\}\}$$

$$SW_3 = \{\{A,C\}\{A,C,E\}\{B,C,D\}\{B,C,D,E\}\}$$

$$SW_4 = \{\{A,D\}\{A,D,E\}\{B,C,D\}\{B,C,D,E\}\}$$

$$\mathrm{SW}_5 = \mathrm{ninguna}$$

Ahora vamos a proceder al cálculo del índice de poder de Shapley-Shubik. Se parte del conjunto de coaliciones ganadoras, ganadoras minimales y de los swings. De estos conjuntos de swing se puede observar que el jugador B, C y D son equivalentes en el juego, por lo que, tendrán el mismo poder en el índice de Shapley-Shubik, debido a la propiedad de simetría. Por lo tanto comenzaremos calculando el poder de los jugadores B, C y D.

Calculamos ahora los valores de $q(S)$ para estos jugadores.

$$q(2) = \frac{(2-1)!\,(5-2)!}{5!} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{20}$$

$$q(3) = \frac{(3-1)!\,(5-3)!}{5!} = \frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{30}$$

$$q(4) = \frac{(4-1)!\,(5-4)!}{5!} = \frac{3\cdot 2}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} = \frac{1}{20}$$

$$q(5) = \frac{(5-1)!\,(5-5)!}{5!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} = \frac{1}{5}$$

Por tanto, el poder del jugador B, que será el mismo que el de C y D:

$$\emptyset_B(N,v) = \sum_{S\in SW_1(v)} q(S) = \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{20} = \frac{1}{6} \approx 0.166667 = \emptyset_C(N,v) = \emptyset_D(N,v)$$

Dado que el jugador E no pertenece a ningún conjunto de swing, ya que, este jugador no es crítico en ninguna coalición. Esto indica que el jugador E no tiene ningún poder, por lo tanto

$$\emptyset_E(N,v) = 0$$

Por la propiedad de eficiencia se puede calcular el poder del jugador A, dado que el poder de todos los jugadores tiene que sumar 1. Entonces

$$\emptyset_A(N,v) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

De esta forma, el índice de poder de Shapley-Shubik queda determinado por:

$$\emptyset(N,v) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 0)$$

Ahora calcularemos el índice de poder de Banzhaf para el mismo problema.

El índice de poder de Banzhaf viene determinado por $\beta_i(N,v) = \sum_{S\in SW_i} \frac{1}{2^{n-1}}$ y nos basamos en el conjunto de coaliciones ganadoras, ganadoras minimales y de los swing antes mencionados, podemos calcular el índice de Banzhaf de la forma siguiente.

$$\beta_A(N,v) = \sum_{S\in SW_i} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3}{4} = 0.75$$

$$\beta_B(N,v) = \sum_{S\in SW_B} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$\beta_C(N,v) = \sum_{S\in SW_C} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$\beta_D(N,v) = \sum_{S \in SW_D} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$\beta_E(N,v) = \sum_{S \in SW_i} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$$

Por tanto, el índice de Banzhaf del juego será:

$$\beta(N,v) = (0.75{,}0.25{,}0.25{,}0.25{,}0)$$

Destacamos que, como el índice de Banzhaf no cumple la propiedad de eficiencia, la suma de los poderes no tiene porque se igual a 1, como ocurría con el índice de poder de Shapley-Shubik.

Por último, vamos a realizar el cálculo del índice de poder de Deegan-Packel para este mismo problema.

Según Deegan-Packel, en el proceso de votación, sólo se formarán finalmente esas cuatros coaliciones minimales, de manera equiprobables entre ellas. Basándonos en la expresión de este índice

$$\rho_i(N,v) = \frac{1}{|M(v)|} \sum_{S \in M_{i(v)}} \frac{1}{|S|}$$

Podemos calcular el índice para cada partido de la siguiente manera

$$\rho_A(N,v) = \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8} = 0.375$$

$$\rho_B(N,v) = \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{24} \approx 0.208333$$

$$\rho_C(N,v) = \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{24} \approx 0.2083333$$

$$\rho_D(N,v) = \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{24} \approx 0.2083333$$

Como este índice cumple con la propiedad de eficiencia, como el índice de Shapley-Shubik, se puede decir, que el poder del partido E será

$$\rho_E(N,v) = 0$$

De este modo, el índice de Deegan-Packel queda de la siguiente forma:

$$\rho(N,v) = (\frac{3}{8}, \frac{5}{24}, \frac{5}{24}, \frac{5}{24}, 0)$$

Y aquí concluye este ejemplo sobre el cálculo de los distintos índices de poder explicados anteriormente.

3.5. CONCLUSIÓN

En este capítulo hemos realizado una introducción de la teoría de juegos simples como de los índices de poder de Shapley-Shubik, Banzhaf y Deegan-Packel, que están especialmente orientados a modelar procesos de votación. Durante el estudio de estos índices se ha podido observar que el reparto de pesos de los jugadores no es, en general, un medidor válido de poder, aunque sí está estrechamente relacionado con él.

También hemos analizado las diferentes características axiomáticas de los diferentes índices, demostrando la unicidad de los mismos mediante un conjunto de propiedades.

Realizaremos un breve resumen de varias de las propiedades que hemos encontrados en este estudio, indicando para cada propiedad qué índice le satisface y cual no.

El índice de Shapley-Shubik cumple con las propiedades de simetría, aditividad, eficiencia y jugador nulo. Mientras que el índice de Banzhaf cumple con las propiedades de simetría, aditividad, jugador nulo y poder total, esta última propiedad es la diferencia a destacar comparándola con el índice de Shapley-Shubik dado que este cumple con la propiedad de eficiencia. Y el índice de Deegan-Packel cumple con las propiedades de simetría, eficiencia, jugador no y fusión.

Pese a haber estudiado estos tres índices de poder, conviene resaltar que no hay objetivamente un índice de poder mejor que otro, ni un consenso sobre qué índice utilizar en cada caso. Dependiendo de la situación que estemos estudiando, puede que un índice sea más apropiado que otro, pero en general, no hay un índice más apropiado que el resto.

CAPÍTULO 4

APLICACIONES DE LOS ÍNDICES DE PODER

4.1. INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores tras haber analizado los juegos simples y los índices de poder. Ahora nos centraremos en el cálculo de estos índices en situaciones en los que haya un gran número de jugadores. Analizaremos la distribución de poder en las Cortes Generales entre los partidos políticos que obtuvieron representación en las legislaturas 2008-2011,2011-2015,2015-2016,2016-2020.

El cálculo de los distintos índices de poder lo realizaremos a través del programa IOP 2.0, se trata de una herramienta informática utilizada para el cálculo de índices de poder desarrollada por Bräuninger y König (2005), en el próximo apartado se explica con mayor detalle.

A continuación se realiza una breve introducción sobre las Cortes Generales. “las cortes generales representan al pueblo español y están formadas por el Congreso de los Diputados y el Senado” C.E, Art.66.1. Las Cortes Generales es el nombre oficial del Parlamento español compuesto por estas dos Cámaras.

La Constitución contiene disposiciones comunes para las dos Cámaras que componen a las Cortes Generales y las disposiciones específicas para cada una de ellas. Estas Cámaras ostentan el Poder Legislativo. A ellas les corresponde aprobar los presupuestos, controlar la acción del Gobierno y las demás competencias que le atribuye la Constitución.

Estas dos Cámaras las explicamos a continuación.

- El Congreso de los Diputados

El Congreso de los Diputados es una de las dos Cámaras que conforman las Cortes Generales, a la que la Constitución ha reservado una serie de importantes funciones y facultades. El Congreso autoriza la formación del Gobierno, puede provocar su cese, conoce en primer lugar la tramitación de los proyectos legislativos y de los presupuestos y debe confirmar o rechazar las enmiendas o vetos del Senado sobre estos textos legislativos.

El Congreso de los Diputados está compuesto por 350 diputados. La distribución de diputados por provincias se hace de la siguiente manera: A cada una de las cincuenta provincias le corresponde un mínimo inicial de dos diputados. Las ciudades de Ceuta y Melilla eligen un diputado cada una. Los restantes 248 diputados se reparten entre las cincuenta provincias en proporción a su población. Todos los diputados son elegidos por sufragio universal, libre, igual, directo y secreto. Los partidos políticos presentan sus candidatos en listas cerradas y bloqueadas.

- El Senado

El Senado es, según definición de la propia Constitución Española, la Cámara de representación territorial. Entre sus funciones se encuentra, su intervención en la aprobación de las leyes, su intervención en la autorización para concluir Tratados internacionales y en la aprobación de los Presupuestos Generales del Estado, el control político al Gobierno, la información y el estudio e investigación en cuestiones de interés general.

A diferencia de lo que ocurre en el Congreso, el número de senadores no es fijo. Puede variar al alza o a la baja al cambiar el número de habitantes de las distintas Comunidades Autónomas. La variación del número de senadores se produce al principio de cada Legislatura (tras la celebración de elecciones generales) y se toma como referencia el censo de población publicado el 1 de enero del año en que se celebran las elecciones. Durante las Legislaturas estudiadas han ido variando. En la actualidad el número de Senadores es de 266, de los cuales 208 son electos y 58 designados por los Asambleas Legislativas de las Comunidades Autónomas.

El Senado cuenta, atendiendo a su procedencia, con dos tipos de senadores. Los 208 senadores elegidos por sufragio universal, libre, igual directo y secreto de la manera siguiente:

- En cada provincia peninsular, se eligen 4 senadores
- En Gran Canaria, Tenerife y Mallorca, se eligen 3
- En Ceuta y Melilla, 2
- En Ibiza-Formentera, Menorca, Fuerteventura, Gomera, Hierro, Lanzarote y La Palma, 1

A diferencia del Congreso, en el que se vota a un partido mediante listas cerradas, en el Senado se vota a la persona, al candidato, eligiendo 3, 2 ó 1 candidato de entre los que figuren en la papeleta única que hay para el Senado.

4.2. IOP 2.0

El software que hemos utilizado para calcular los distintos índices de poder ha sido el programa IOP 2.0 creado por Bräuninger y König (2005). Este programa presenta un interfaz bastante primitivo, al ejecutarse bajo MS-DOS, pero sin embargo es bastante flexible y potente, ya que calcula una gran variedad de índices de poder, y permite modelar procesos de votación más complejos, como sistemas de votación de doble mayoría, o incluso tiple mayoría en casos particulares. En la web personal de Bräuninger y König [http://www.tbraeuninger.del/IOP.html], se puede encontrar una completa explicación de las distintas opciones del programa, aunque en este trabajo sólo se presenta las opciones y usos más comunes, que hemos utilizado para calcular los índices en las distintas legislaciones. Para presentar el programa calcularemos los índices de poder para el Parlamento de Andalucía que se utilizó anteriormente para explicar las coaliciones minimales. Repasaremos el funcionamiento del programa mostrando los diferentes pasos a seguir para computar los índices de poder de un juego determinado, y las distintas opciones que se nos presentan.

- Fichero de entrada de datos:

El programa IOP opera sobre un fichero de entrada de datos, tiene por defecto una extensión .INP, en el que se describe el juego mediante una sintaxis determinada. Este fichero puede editarse desde el mismo programa o por un editor de texto externo como, por ejemplo, el bloc de notas de Windows, y luego se pasa el fichero ya editado al programa. La sintaxis de un archivo .INP para el juego del Parlamento andaluz es la siguiente:

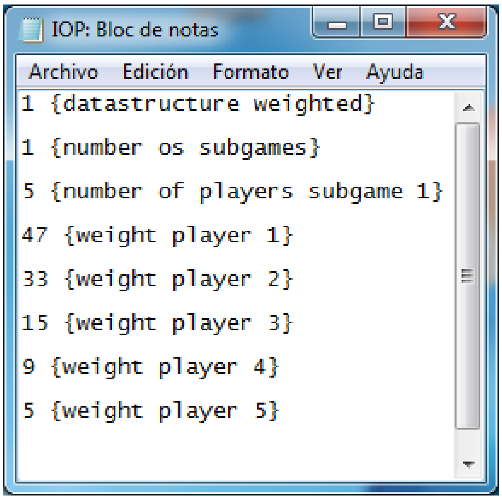


Figura 4.1. Ejemplo de fichero de entrada
Fuente: Elaboración propia a través del bloc de notas

El significado de cada parámetro viene determinado por el número de línea. La primera línea sólo puede contener 0 ó 1, dependiendo de si los datos introducidos corresponde a un juego de mayoría, donde cada agente tiene un voto, o un juego de mayoría ponderada, donde cada agente posee una serie de votos, respetivamente. Por lo tanto, el valor 0 corresponde a {datastructure unweighted}. En la segunda línea se define el número de subjuegos que forman el juego. Posteriormente, para cada subjuego, se indica el número de jugadores, y el peso de cada jugador.

- Interfaz del Programa IOP 2.0

Una vez editado el fichero de entrada con la descripción del juego, ya podemos abrir el programa IOP.exe. El aspecto del programa recién ejecutado es el que se muestra en la Imagen 4.1.

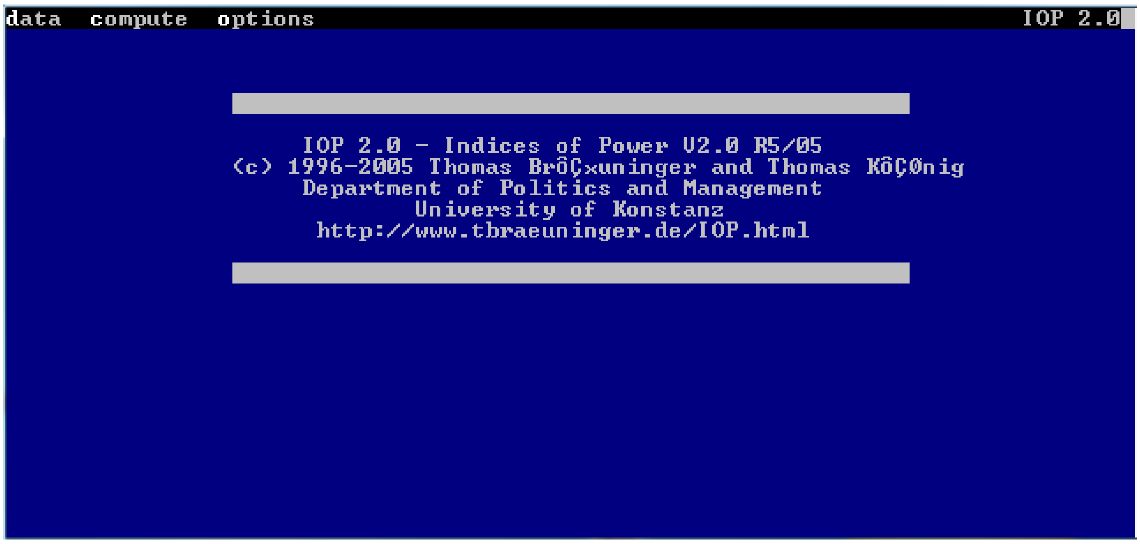


Imagen 4.1. Programa IOP recién ejecutado
Fuente: Elaboración propia a través del IOP

El menú *data* sirve para editar y visualizar ficheros de entrada. El menú *compute* es el que nos permitirá calcular los distintos índices de poder. El menú *compute* nos ofrece las siguientes opciones:

Imagen 4.2. Menú compute
Fuente: Elaboración propia a través del IOP

El menú nos permite calcular varios índices. Al elegir de las opciones que nos ofrece, nos pedirá una serie de parámetros que explicamos a continuación:

- *Data file*: El fichero de entrada donde está descrito el juego o hemos editado previamente.
- *Versión*: Standard (1)/ Double Weight (2). Esta opción sirve para definir sistemas de votación de doble mayoría.
- *Number of Winsets*: Cuando el juego está compuesto por varios subjuegos, hay que definir cómo combinar coaliciones ganadoras en cada subjuego para formar una coalición ganadora en el juego global. El número de winsets indica cuántas condiciones conjuntas distintas generan una coalición ganadora.
- *Threshold subgame i*: Es la cuota de cada subjuego de mayoría i. El número de votos o pesos que hacen una coalición ganadora.
- *Overall threshold*: Es el número de jugadores mínimo que forman una coalición ganadora.
- *Screen Control*: Esta opción es simplemente para indicar si queremos que el programa nos muestre el progreso del cálculo.
- *Report winning coalitions*: Esta opción sirve para indicar si queremos que nos muestre las coaliciones ganadoras o sólo los valores numéricos de los índices de poder.

Una vez introducido estos datos, el programa computará los índices de poder que hayamos elegido para el fichero de entrada que le hemos proporcionado, y nos mostrará el resultado por pantalla.

Estudiamos ahora el ejemplo del Parlamento andaluz anteriormente utilizado en el capítulo de los índices de poder para afianzar el funcionamiento del programa y el significado de estos parámetros. Calcularemos los índices de poder de Shapley-Shubik, Banzhaf y Deegan-packel. Recordamos la composición del Parlamento andaluz venia descrita por el juego de mayoría ponderada

$$u = [55; 47,33,15,9,5]$$

Es un juego de mayoría ponderada con un sistema de votación simple. Para aprobar una propuesta se realiza una votación y se requiere mayoría simple, hemos elegido este ejemplo por su similitud al juego de mayoría pondera que estudiaremos más adelante que trata sobre las Cortes Generales.

Primeros, editamos el fichero ANDALUCIA.INP e introducimos los datos:

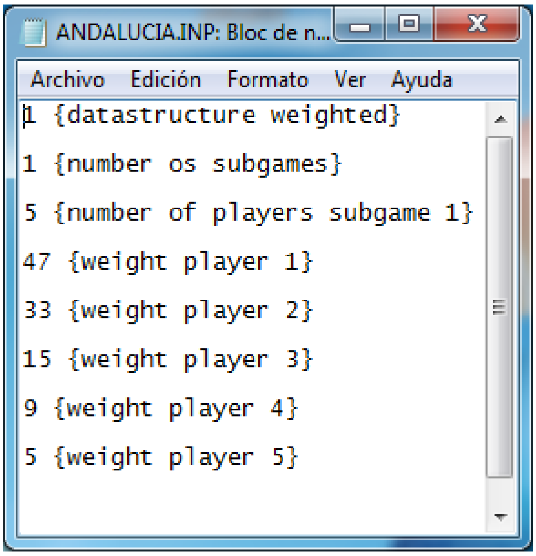


Imagen 4.3. Fichero de entrada para el ejemplo de Andalucía
Fuente: Elaboración propia a través del bloc de notas

Como se observa, para modelar un juego de mayoría pondera estándar se necesita definir un juego con una estructura de datos ponderada, con un único subjuego, y ya sólo se necesita definir a los jugadores y sus pesos.

Dentro del programa IOP, elegiremos la opción 1 dentro del menú compute e introducimos los datos como se muestra en la imagen 4.4.

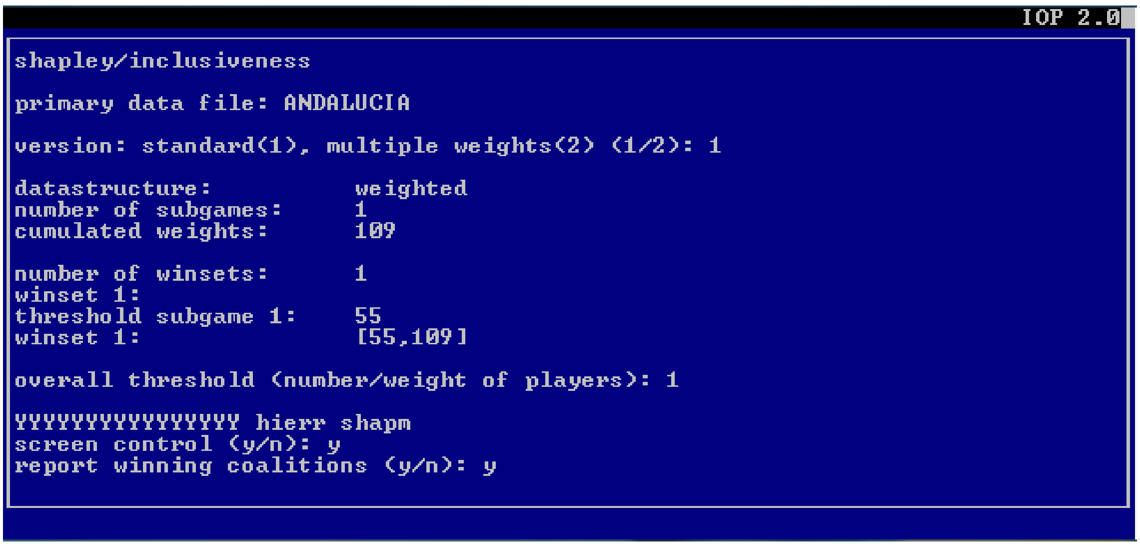
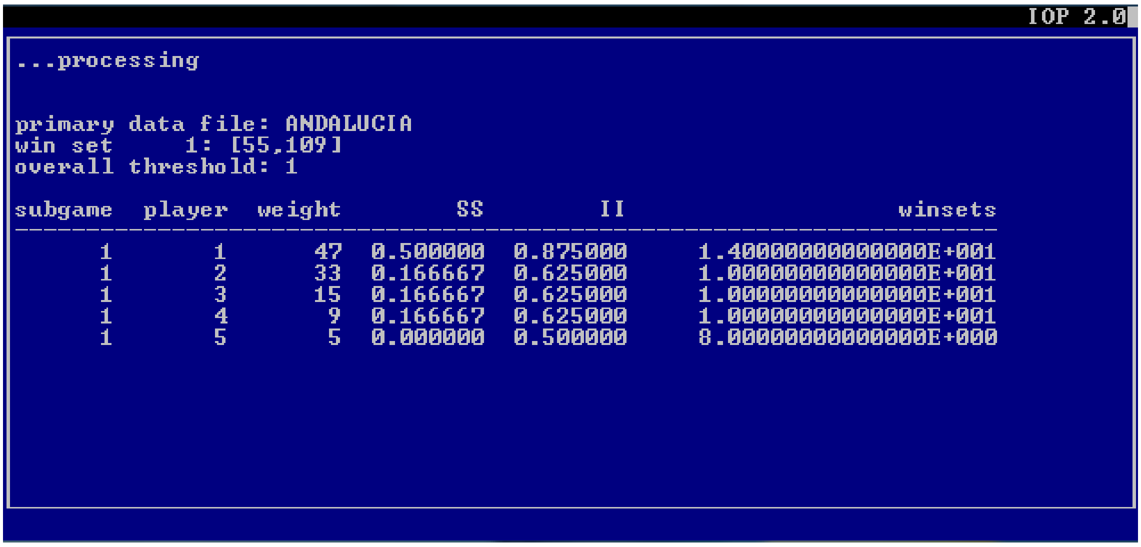


Imagen 4.4. Opciones para calcular el índice de Shapley-Shubik
Fuente: Elaboración propia a través del IOP

El programa calcula el índice correspondiente a la opción 1, el índice de Shapley-Shubik, y un índice que no hemos estudiado, Inclusiveness Index, introducido por Bräuninger y König (1198), y nos mostrará los resultados:

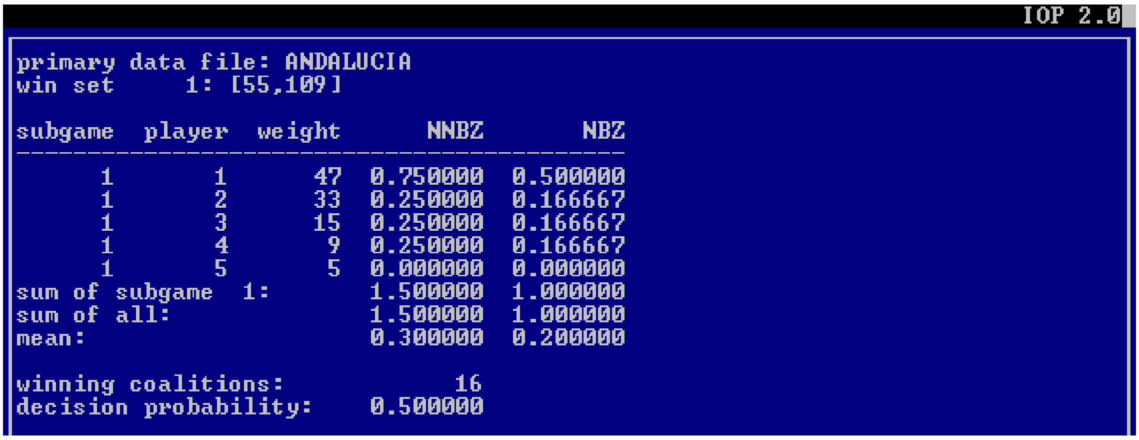


```
                                                                     IOP 2.0
...processing

primary data file: ANDALUCIA
win set      1: [55,109]
overall threshold: 1

subgame   player   weight        SS        II                   winsets
-------------------------------------------------------------------------
      1        1       47  0.500000  0.875000      1.40000000000000E+001
      1        2       33  0.166667  0.625000      1.00000000000000E+001
      1        3       15  0.166667  0.625000      1.00000000000000E+001
      1        4        9  0.166667  0.625000      1.00000000000000E+001
      1        5        5  0.000000  0.500000      8.00000000000000E+000
```

Imagen 4.5. Pantalla de resultados para el índice de Shapley-Shubik
Fuente: Elaboración propia a través del IOP

En la columna de SS aparece el valor de Shapley-Shubik para los diferentes jugadores.

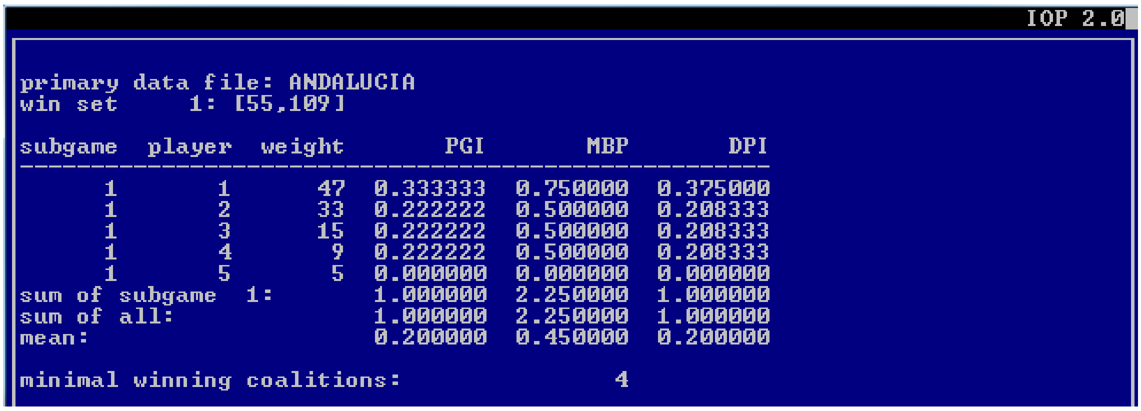
Volviendo a introducir los mismos datos para la opción 2 del menú compute obtenemos los índices de poder de Banzhaf y Banzhaf normalizado:



```
                                                                     IOP 2.0
primary data file: ANDALUCIA
win set      1: [55,109]

subgame   player   weight      NNBZ       NBZ
-------------------------------------------------
      1        1       47  0.750000  0.500000
      1        2       33  0.250000  0.166667
      1        3       15  0.250000  0.166667
      1        4        9  0.250000  0.166667
      1        5        5  0.000000  0.000000
sum of subgame   1:        1.500000  1.000000
sum of all:                1.500000  1.000000
mean:                      0.300000  0.200000

winning coalitions:              16
decision probability:      0.500000
```

Imagen 4.6. Pantalla de resultado para el índice de Banzhaf
Fuente: Elaboración propia a través del IOP

El índice de Deegan-Packel aparece en la columna DPI en la siguiente imagen junto a los índices de Public Good Index, presentado por Holler (1982), y Member Bargaining power index desarrollado por Brams y Fishburn (1995), resultado de introducir de nuevo los datos en la opción 3 del menú compute:



```
IOP 2.0

primary data file: ANDALUCIA
win set      1: [55,109]

subgame  player  weight        PGI        MBP        DPI
---------------------------------------------------------
      1       1      47   0.333333   0.750000   0.375000
      1       2      33   0.222222   0.500000   0.208333
      1       3      15   0.222222   0.500000   0.208333
      1       4       9   0.222222   0.500000   0.208333
      1       5       5   0.000000   0.000000   0.000000
sum of subgame   1:       1.000000   2.250000   1.000000
sum of all:               1.000000   2.250000   1.000000
mean:                     0.200000   0.450000   0.200000

minimal winning coalitions:                  4
```

Imagen 4.7. Pantalla de resultados para el índice de Deegan-Packel
Fuente: Elaboración propia a través del IOP

Como se ha podido observar, el programa IOP permite modelar mediante juegos de mayoría ponderada con votaciones simples sin mayor dificultad que una primera toma de contacto y el significado de cada parámetro.

4.3. CORTES GENERALES LEGISLATURA 2008-2011

Para inicial este apartado hemos realizado un cuadro comparativo respecto a la legislatura de 2004, en ella mostramos la variación de los porcentajes de votos de una legislatura a otra que nos permita situarnos en el panorama político español.

AÑOS	**2008**	**Dif. 2008-2004**
PARTICIPACIÓN	73’8	-1’8
PARTIDOS	**%s/ VOTANTES**	**Dif. %s/ VOTANTES**
PSOE	43’87	1’4
PP	39’94	2’4
IU	3’8	-1’3
OTROS	8’5	-3’0

TABLA 4.1. Diferencias entre resultados 2004-2008.
Fuente: Elaboración propia a través del Ministerio del Interior.

El domingo 9 de marzo se celebraron elecciones Generales en España. Los resultados de las elecciones Generales dieron como vencedor al Partido Socialista Obrero Español (PSOE) liderado por Rodríguez Zapatero con el 43’87 de los votos, mientras el Partido Popular (PP) se mantiene como segunda fuerza política con el 39’94 de los votos. Izquierda Unida (IU) experimenta un suave retroceso electoral pero que sin embargo le significa un importante retroceso a nivel de representación como veremos más adelante.

A continuación, veremos cómo quedan estructuradas las dos Cámaras de las Cortes Generales.

La estructura del Congreso de los Diputados quedaba representada por el juego de mayoría ponderada siguiente, que indica la distribución de los 350 escaños entre los 10 partidos o coaliciones que obtuvieron representación. El primer coeficiente es 176, es la cuota que define la mayoría absoluta exigida en la toma de decisiones ordinarias. Su composición es la siguiente:

PARTIDOS	DIPUTADOS	% DE VOTO
PSOE	169	43’87
PP	154	39’94
CiU	10	3’03
PNV	6	1’19
ERC	3	1’16
IU	2	3’77
BNG	2	0’83
CC-PNC	2	0’68
UPyD	1	1’19
NA-BAI	1	0’24

TABLA 4.2. Congreso de los Diputados 2008-2011
Fuente: Elaboración propia a través del Ministerio del Interior.

El juego de mayoría ponderada quedaría representado por:

$$u = [176; 169{,}154{,}10{,}6{,}3{,}2{,}2{,}2{,}1{,}1,]$$

Como consecuencias de estos resultados el PSOE forma de nuevo Gobierno, aunque no cuenta con mayoría absoluta y tendrá que apoyarse en acuerdos con otras fuerzas gubernamentales. A continuación calcularemos los diferentes índices de poder a través del software IOP.

En primer lugar calcularemos el índice de poder de Shapley-Shubik.

```
IOP 2.0
...processing

primary data file: CONGRESO DE LOS DIPUTADOS 2008-2011
win set      1: [176,350]
overall threshold: 1

subgame  player  weight        SS         II                    winsets
---------------------------------------------------------------------------
      1       1     169  0.537698  0.936128      4.69000000000000E+002
      1       2     154  0.117857  0.574850      2.88000000000000E+002
      1       3      10  0.117857  0.574850      2.88000000000000E+002
      1       4       6  0.103968  0.572854      2.87000000000000E+002
      1       5       3  0.034524  0.534930      2.68000000000000E+002
      1       6       2  0.021429  0.520958      2.61000000000000E+002
      1       7       2  0.021429  0.520958      2.61000000000000E+002
      1       8       2  0.021429  0.520958      2.61000000000000E+002
      1       9       1  0.011905  0.510978      2.56000000000000E+002
      1      10       1  0.011905  0.510978      2.56000000000000E+002
```

IMAGEN 4.7. Índice de poder de Shapley-Shubik para el C.D 2008-2011.
Fuente: Elaboración propia a través del IOP

En segundo lugar, el índice de poder de Banzhaf.

```
IOP 2.0
...processing

primary data file: CONGRESO DE LOS DIPUTADOS 2008-2011
win set       1: [176,350]

subgame   player  weight       NNBZ        NBZ
---------------------------------------------------
      1        1     169   0.853516   0.560256
      1        2     154   0.146484   0.096154
      1        3      10   0.146484   0.096154
      1        4       6   0.142578   0.093590
      1        5       3   0.068359   0.044872
      1        6       2   0.041016   0.026923
      1        7       2   0.041016   0.026923
      1        8       2   0.041016   0.026923
      1        9       1   0.021484   0.014103
      1       10       1   0.021484   0.014103
```

IMAGEN 4.8. Índice de poder de Banzhaf para el C.D 2008-2011
Fuente: Elaboración propia a través del IOP

Y en tercer lugar, calcularemos el índice de poder de Deegan-Packel para el Congreso de los Diputados.

```
IOP 2.0
...processing

primary data file: CONGRESO DE LOS DIPUTADOS 2008-2011
win set       1: [176,350]
overall threshold: 1

subgame   player  weight        PGI        MBP        DPI
----------------------------------------------------------------
      1        1     169   0.114286   0.551724   0.163793
      1        2     154   0.100000   0.482759   0.089491
      1        3      10   0.100000   0.482759   0.089491
      1        4       6   0.135714   0.655172   0.141215
      1        5       3   0.114286   0.551724   0.109770
      1        6       2   0.092857   0.448276   0.088013
      1        7       2   0.092857   0.448276   0.088013
      1        8       2   0.092857   0.448276   0.088013
      1        9       1   0.078571   0.379310   0.071100
      1       10       1   0.078571   0.379310   0.071100
```

IMAGEN 4.9. Índice de poder de Deegan-packel para el C.D 2008-2011
Fuente: Elaboración propia a través del IOP

A continuación mostraremos un cuadro comparativo de los diferentes resultados obtenidos para el Congreso de los Diputados.

PARTIDOS	ESCAÑOS	% ESCAÑOS	SH-SH	BANZHAF	DEEGAN
PSOE	169	48’28	0’537698	0’853516	0’163793
PP	154	44’02	0’117857	0’146484	0’089491
CiU	10	2’85	0’117857	0’146484	0’089491
PNV	6	1’71	0’103968	0’146484	0’141215
ERC	3	0’857	0’034524	0’068359	0’109770

IU	2	0’571	0’021429	0’041016	0’088013
BNG	2	0’571	0’021429	0’041016	0’088013
CC-PNC	2	0’571	0’021429	0’041016	0’088013
UPyD	1	0’2857	0’011905	0’021484	0’071100
NA-BAI	1	0’2857	0’011905	0’021484	0’071100

TABLA 4.3. Índices de poder tras las elecciones generales al Congreso de los Diputados del 2008.
Fuente: Elaboración propia a través del Ministerio del Interior y IOP.

Como hemos comentado anteriormente, el PSOE se alza con la victoria con el 43’87% de los votos lo que le proporciona 169 escaños. Observando la tabla se aprecia que el partido con mayores índices de poder dado que es el partido con mayor representación y poder a la hora de realizar coaliciones. El segundo partido con mayor representación es el PP con el 43’87% de los votos y un total de 154 escaños, es de destacar que tiene los mismos índices de poder que Convergencia i Unió (CiU), cuarta fuerza política más votada con un 3’03% de los votos con los que le proporciona 10 diputados. El PP con un 40% más de votos que CiU pero, sin embargo, tienen la misma fuerza de negociación. Por lo tanto, CiU está en mejor posición estratégica que la que indica sus escaños. También deseo destacar el papel de IU, quedando sexta en la posición de escaños con tan solo dos diputados, a pesar de ser el tercer partido más votado con el 3’77% de los votos, por lo que, IU perdió el grupo propio en el Congreso de los Diputados lo que le obligo a pactar con Esquerra Republicana de Catalunya (ERC) para formar un grupo parlamentario conjunto. Los demás partidos políticos no tienen una representación que puedan llegar a ser decisivos y de ahí sus bajos índices de poder.

Ahora representaremos un juego de mayoría ponderada para el Senado de la legislatura de 2008-2011. El senado en esta legislatura estaba formado por un total de 262 senadores, donde la cuota que define la mayoría absoluta exigida en la toma de decisiones ordinarias es 132. El senado quedaba compuesto de la siguiente manera.

PARTIDOS	ESCAÑOS	% ESCAÑOS
PP	125	47’71
PSOE	103	39’31
ENTESA	15	5’73
CiU	8	3’05
SN	4	1’53
MIXTO	7	2’67

TABLA 4.4. Senado 2008-2011
Fuente: Elaboración propia a través del Ministerio del Interior

Por lo tanto, el Senado queda representado por un juego de mayoría ponderada de la siguiente forma:

$$u = [135; 125,103,15,8,4,7]$$

A continuación calcularemos los diferentes índices estudiados y realizaremos un cuadro comparativo para mostrar los resultados obtenidos.

PARTIDOS	ESCAÑOS	% ESCAÑOS	SH-SH	BANZHAF	DEEGAN
PP	125	47’71	0’6	0’875	0’4
PSOE	103	39’31	0’1	0’125	0’15
ENTESA	15	5’73	0’1	0’125	0’15
CiU	8	3’05	0’1	0’125	0’15
SN	4	1’53	-	-	-
MIXTO	7	2’67	0’1	0’125	0’15

TABLA 4.5. Índices de poder tras las elecciones generales al Senado del 2008.
Fuente: Elaboración propia a través del Ministerio del Interior y IOP.

Como se puede apreciar en la tabla el PP es el partido más representativo en el Senado con 125 escaños y con unos índices de poder muy superior a las demás fuerzas políticas. Un dato a destacar es que PSOE con 88 escaños más que el tercer partido más representativo en el Senado, tienen los mismos índices de poder. En comparación con el Congreso de los Diputados la gran diferencia es el PSOE que se desplaza a la segunda fuerza política y con una importante disminución en sus índices de poder.

Aunque estas no fueron las elecciones más reñidas de la democracia española, sí propiciaron una mayor igualdad entre fuerzas de izquierda y de derecha en el Congreso, con una pequeña diferencia (177-173) para las de izquierdas. La exigua mayoría izquierdista permitió la continuidad de Rodríguez Zapatero durante toda la legislatura, al ser imposible por tanto una moción de censura exitosa contra él por parte de los partidos de derechas. Esta fue una posibilidad planteada por la oposición minoritaria ante las dificultades del PSOE para gobernar en minoría, requiriendo pactos esporádicos con las fuerzas minoritarias para mantenerse en el poder, sin embargo, nunca fue realizada por el PP. La legislatura finalizó en septiembre de 2011 tras anunciar Zapatero, en julio de ese año, que no iba a presentar presupuestos para el próximo año ante la imposibilidad de aprobarlos. La legislatura se caracterizó por la crisis inmobiliaria y la crisis económica en España, en un contexto de crisis económica mundial. El gobierno socialista se vio obligado a realizar recortes sociales para hacer frente a la crisis. Con el objetivo de permitir la entrada de un ejecutivo que lo hiciera mejor frente a la crisis económica, el presidente del Gobierno decidió adelantar cuatro meses las elecciones generales.

4.4. CORTES GENERALES LEGISLATURA 2011-2015

El domingo 20 de noviembre de 2011 se celebraron elecciones a Cortes Generales en España**.** Fueron también las primeras elecciones en las que se aplicó la reforma de la Ley Orgánica 5/1985, de 19 de junio, del Régimen Electoral General, aprobada en enero de 2011, de acuerdo con la cual todos los partidos políticos sin representación en las Cortes Generales debían recoger avales equivalentes al 0,1% del censo de cada circunscripción para poder concurrir a las elecciones. De esta forma, presentaron candidaturas 72 formaciones políticas (20 menos que en 2008), con un total de 596 candidaturas al Congreso y 599 al Senado, prácticamente la mitad que en las elecciones generales de 2008.

El Congreso de los Diputados quedaba representado por el juego de mayoría pondera siguiente, que indica la distribución de los 350 escaños entre 13 partidos que obtuvieron representación. La composición es la siguiente

PARTIDO	DIPUTADOS	% DE VOTOS
PP	186	44’62
PSOE	110	28’73
CiU	16	4’17
IU	11	6’92
AMAIUR	7	1’37
UPyD	5	4’69
EAJ-PNV	5	1’33
ERC	3	1’05
BNG	2	0’75
CC-NC-PNC	2	0’59
COMPROMÍS-Q	1	0’51
FAC	1	0’40
GBAI	1	0’17

TABLA 4.6. Congreso de los Diputados 2011-2015.
Fuente: Elaboración propia a través del Ministerio del Interior

El juego de mayoría ponderada quedaría representado por:

$$u = [176; 186,110,16,11,7,5,5,3,2,2,1,1,1]$$

Al igual que en el apartado anterior calcularemos los diferentes índices de poder con el software IOP.

PARTIDOS	ESCAÑOS	% ESCAÑOS	SH-SH	BANZHAF	DEEGAN
PP	186	53’14	1’00	1’00	1’00
PSOE	110	31’43	-	-	-
CiU	16	4’57	-	-	-
IU	11	3’14	-	-	-
AMAIUR	7	2’00	-	-	-
UPyD	5	1’43	-	-	-
EAJ-PNV	5	1’43	-	-	-
ESQUERRA	3	0’86	-	-	-
BNG	2	0’57	-	-	-
CC-NC-PNC	2	0’57	-	-	-
COMPROMÍS-Q	1	0’28	-	-	-
FAC	1	0’28	-	-	-
GBAI	1	0’28	-	-	-

TABLA 4.7. Índices de poder tras las elecciones generales al Congreso de los Diputados del 2011.
Fuente: Elaboración propia a través del Ministerio del Interior y IOP.

El vencedor de las elecciones fue el Partido Popular (PP), liderado por Mariano Rajoy Brey, que obtuvo en el Congreso de los Diputados una considerable mayoría absoluta con 186 escaños (32 más que en 2008) y un 44,63% de los votos frente al Partido Socialista Obrero Español (PSOE) que obtuvo 110 escaños (59 menos que en 2008) y un 28,76% de los votos. Por lo tanto, el PP en esta legislatura se convierte en un jugador dictador en el sentido de la definición que explicamos en el capítulo 3

.Izquierda Unida (IU) recuperó el grupo parlamentario obteniendo 11 representantes (9 más que en 2008) con un 6,92% de los votos. Unión Progreso y Democracia (UPyD) se convirtió en la cuarta fuerza en apoyo popular con un 4,70% de los votos, que se tradujeron en 5 escaños. Convergencia i Unió (CiU) aumentó en 6 sus escaños obteniendo 16. Por otra parte el Partido Nacionalista Vasco perdió un escaño obteniendo 5. Esquerra Republicana de Catalunya (ERC), con tres diputados, Coalición Canaria (CC), con dos, y el Bloque Nacionalista Gallego (BNG), también con dos, conservaron su representación. Entre las fuerzas no representadas anteriormente que entraron en el Congreso figuraron la coalición Amaiur, que con 7 representantes se convirtió en la sexta fuerza en votos y la quinta en escaños, y la coalición Compromís-Equo, 11 Foro de Ciudadanos (FAC) y Geroa Bai, con un representante cada uno. El nuevo Congreso era uno de los más heterogéneos jamás vistos en España.

A continuación representamos el juego de mayoría ponderada del Senado. El Senado en esta legislatura estaba formado por un total de 265 (3 más que 2008, donde la cuota que define la mayoría absoluta que exige en la toma de decisiones ordinaria es 133. El Senado quedaba compuesto de la siguiente manera.

PARTIDOS	ESCAÑOS	% ESCAÑOS
PP	153	57’73
PSOE	66	24’91
CiU	13	4’90
ENTESA	9	3’40
EAJ-PNV	5	1’89
MIXTO	19	7’17

TABLA 4.8. Senado 2011-2015
Fuente: Elaboración propia a través del Ministerio del Interior

El juego de mayoría ponderada quedaría representado por:

$$u = [133,153,66,13,9,5,19]$$

PARTIDOS	ESCAÑOS	% ESCAÑOS	SH-SH	BANZHAF	DEEGAN
PP	153	57’73	1’00	1’00	1’00
PSOE	66	24’91	-	-	-
CiU	13	4’90	-	-	-
ENTESA	9	3’40	-	-	-
EAJ-PNV	5	1’89	-	-	-
MIXTO	19	7’17	-	-	-

TABLA 4.9. Índices de poder tras las elecciones generales al Senado del 2011.
Fuente: Elaboración propia a través del Ministerio del Interior y IOP.

En el Senado el PP obtuvo 153 senadores (28 más que en 2008), mientras que el PSOE obtuvo 66 asientos (37 menos que en 2008). También obtuvieron representación CiU con 13 senadores (5 más), Entesa (coalición entre el PSC, ICV y EUiA) con 9 senadores, PNV con 5 senadores, y el grupo mixto agrupación formada por varios grupos parlamentarios con 19 senadores. En comparación con el Congreso de los Diputados destacar que el PP es un jugador dictador dado que tiene mayoría absoluta en las dos Cámaras, esta circunstancia genera que tenga todo el poder de negociación como muestra los índices de poder.

4.5. CORTES GENERALES LEGISLATURA 2015-2016

El domingo 20 de diciembre de 2015 se celebraron elecciones generales en España.

El Congreso de los Diputados quedaba representado por el juego de mayoría ponderada siguiente, que índica la distribución de los 350 escaños entre 10 partidos que obtuvieron representación. La composición es la siguiente.

PARTIDOS	DIPUTADOS	% DE VOTOS
PP	123	28’72
PSOE	90	22’01
PODEMOS	69	20’66
C’s	40	13’93
ERC-CATSÍ	9	2’39
DL	8	2’25
PNV	6	1’2
UNIDAD POPULAR EN COMÚN	2	3’67
EH BILDU	2	0’87
CCa-PNC	1	0’33

TABLA 4.10. Congreso de los Diputados 2015-2016.
Fuente: Elaboración propia a través del Ministerio del Interior

El juego del Congreso de los Diputados quedaría representado por

$$u = [176; 123,90,69,40,9,8,6,2,2,1]$$

PARTIDOS	ESCAÑOS	% ESCAÑOS	SH-SH	BANZHAF	DEEGAN
PP	123	35’14	0’402381	0’642578	0’151190
PSOE	90	25’71	0’219841	0’357422	0’141667
PODEMOS	69	19’71	0’219841	0’357422	0’141667
C’s	40	11’43	0’069048	0’142578	0’103571
ERC-CATSÍ	9	2’58	0’030159	0’068359	0’096429
DL	8	2’29	0’025397	0’056641	0’101190
PNV	6	1’71	0’019841	0’044922	0’100000
UNIDAD POPULAR EN COMÚN	2	0’57	0’005556	0’013672	0’064286
EH BILDU	2	0’57	0’005556	0’013672	0’064286
CCa-PNC	1	0’29	0’002381	0’005859	0’035714

TABLA 4.11. Índices de poder tras las elecciones generales al Congreso de los Diputados del 2015.
Fuente: Elaboración propia a través del Ministerio del Interior y IOP.

El vencedor de las elecciones fue el Partido Popular, liderado por el presidente Mariano Rajoy, que obtuvo en el Congreso de los Diputados una mayoría simple de 123 escaños (63 menos que en 2011) y un 28,71 % de los votos, seguido del Partido Socialista Obrero Español de Pedro Sánchez, que obtuvo el 22,01 % de los votos, lo que se tradujo en 90 diputados (20 menos que en 2011). El partido Podemos liderado por Pablo Iglesias, se presentó por primera vez a unas generales y obtuvo 42 diputados (un 12,69 % de los votos), que sumado a las coaliciones electorales autonómicas En Comú Podem (12 parlamentarios, 3,69 % de los votos), Compromís-Podemos-És el moment (9 parlamentarios, 2,67 %) y En Marea (6, 1,63 %), todas ellas vinculadas a Podemos y otras formaciones de izquierda, dieron un total de 69 diputados y el 20,68 % de los votos. Ciudadanos-Partido de la Ciudadanía, con Albert Rivera al frente, obtuvo 40 diputados (un 13,94 % de los votos). El resto del Congreso de los Diputados quedó configurado por Esquerra Republicana de Catalunya-Catalunya Sí (9, 2,39 %), Democràcia i Llibertat (8, 2,25 %), el Partido Nacionalista Vasco (6, 1,20 %), Unidad Popular: Izquierda Unida, Unidad Popular en Común (2, 3,68 %), Euskal Herria Bildu (2, 0,87 %) y Coalición Canaria-Partido Nacionalista Canario (1, 0,32 %).Por otra parte, Unión Progreso y Democracia, Unión Democrática de Cataluña, el Bloque Nacionalista Galego y la coalición Geroa Bai, que tuvieron representación en la anterior legislatura, no obtuvieron ningún escaño.

Los índices de poder obtenidos en esta legislatura muestran una gran igualdad entre las diferentes fuerzas políticas. Los índices de poder de Shapley-Shubik y Banzhaf muestran unos índices superiores en el PP dado que tiene una mayor representación. Pero en el índice de Deegan-Packel existe muy poca diferencia entre unos y otros, esto es debido a que muchas formaciones forman parte de coaliciones minimales ganadoras debido a la pluralidad que existe en esta legislatura. Tal fue la igualdad que fue la primera vez en la historia de la democracia que la toma de investidura no salía adelante debida al rechazo de las fuerzas políticas a investir a Mariano Rajoy como presidente del Gobierno.

Ahora representamos el Senado. El Senado en esta legislatura quedaba representado por 265 senadores, donde la cuota que se exige en la toma de decisiones quedada compuesto por

PARTIDOS	ESCAÑOS	% DE ESCAÑOS
PP	142	53’58
PSOE	67	25’28
PODEMOS	23	8’69
CDL	8	3’02
ERC	8	3’02
EAJ-PNV	7	2’64
MIXTO	10	3’77

TABLA 4.12. Senado 2015-2016
Fuente: Elaboración propia a través del Ministerio del Interior

El Senado queda representado por el juego de mayoría ponderada siguiente

$$u = [133; 142,67,23,8,8,7,10]$$

A continuación calcularemos los índices de poder para el Senado.

PARTIDOS	ESCAÑOS	% ESCAÑOS	SH-SH	BANZHAF	DEEGAN
PP	142	53’58	1’00	1’00	1’00
PSOE	67	25’28	-	-	-
PODEMOS	23	8’69	-	-	-

CDL	8	3’02	-	-	-
ERC	8	3’02	-	-	-
EAJ-PNV	7	2’64	-	-	-
MIXTO	10	3’77	-	-	-

TABLA 4.13. Índices de poder tras las elecciones generales al Senado del 2015.
Fuente: Elaboración propia a través del Ministerio del Interior y IOP.

En el Senado, el Partido Popular mantuvo la mayoría absoluta, con 142 escaños, aunque perdió 11 tiene el control total del Senado como muestra los índices de poder. El Partido Socialista Obrero Español gano uno, obteniendo 67, seguido de Podemos con 23, Esquerra Republicana de Catalunya-Catalunya Sí (8), Democràcia i Llibertat (8), el Partido Nacionalista Vasco (7), y el grupo mixto formado por En Comú Podem (4), En Marea (2) y Compromís-Podemos-És el moment, Cambio-Aldaketa, Coalición Canaria-Partido Nacionalista Canario y la Agrupación Socialista Gomera (todos ellos con un representante).

4.6. CORTES GENERALES LEGISLATURA 2016-2020

El 26 de junio de 2016 se celebraron las elecciones generales en España. El Congreso de los Diputados en esta legislatura quedaba representado por el juego de mayoría ponderada siguiente, que indica la distribución de los 350 escaños entre los 12 grupos parlamentario que obtuvieron representación. La composición es la siguiente.

PARTIDOS	DISPUTADOS	% DE VOTOS
PP	137	33’03
PSOE	85	22’66
PODEMOS-IU-EQUO	45	13’37
C´s	32	13’05
ECP	12	3’55
PODEMOS-COMPROMÍS	9	2’74
ERC-CATSÍ	9	2’63
CDC	8	2’01
PODEMOS-EN MAREA-EU	5	1’44
EAJ-PNV	5	1’20
EH BILDU	2	0’77
CCa-PNC	1	0’33

TABLA 4.14. Congreso de los Diputados 2016-2020.
Fuente: Elaboración propia a través del Ministerio del Interior

El Congreso de los Diputados quedaba representado por el juego de mayoría ponderada siguiente:

$$u = [176; 137,85,45,32,12,9,9,8,5,5,2,1]$$

PARTIDOS	ESCAÑOS	% ESCAÑOS	SH-SH	BANZHAF	DEEGAN
PP	137	39’14	0’48340	0’772461	0’115132
PSOE	85	24’29	0’154113	0’227539	0’112646
PODEMOS-IU-EQUO	45	12’86	0’154113	0’227539	0’112646
C´s	32	9’14	0’116739	0’213867	0’145175
ECP	12	3’43	0’01883	0’033203	0’080190

PODEMOS-COMPROMÍS	9	2’57	0’016811	0’028320	0’073830
ERC-CATSÍ	9	2’57	0’016811	0’028320	0’073830
CDC	8	2’28	0’015945	0’026367	0’085234
PODEMOS-EN MAREA-EU	5	1’43	0’008838	0’017578	0’069152
EAJ-PNV	5	1’43	0’008838	0’017578	0’069152
EH BILDU	2	0’57	0’003752	0’005859	0’040716
CCa-PNC	1	0’29	0’001804	0’002930	0’022295

TABLA 4.15. Índices de poder tras las elecciones generales al Congreso de los Diputados del 2016.
Fuente: Elaboración propia a través del Ministerio del Interior y IOP.

El vencedor de las elecciones fue el Partido Popular liderado por el presidente en funciones Mariano Rajoy, cuyas candidaturas obtuvieron en el Congreso de los Diputados una mayoría simple de 137 escaños (14 más que en diciembre de 2015) y un 33,01 % de los votos, seguido del Partido Socialista Obrero Español de Pedro Sánchez, que obtuvo el 22,63 % de los votos, lo que se tradujo en 85 diputados (5 menos que en la anterior legislatura). Unidos Podemos, coalición electoral formada por Podemos, Izquierda Unida, Equo y otros ocho partidos menores de izquierda liderada por Pablo Iglesias y Alberto Garzón, obtuvo 59 diputados (en 2015 Podemos obtuvo 10 congresistas menos) y el 16,86% de los votos, que sumado a las coaliciones autonómicas En Comú Podem-Guanyem el Canvi (que revalidó sus 12 parlamentarios, 3,55 % de los votos), Compromís-Podemos-EUPV (9, con el 2,74 %) y En Marea, que perdió un diputado con respecto a 2015 (5, con 1,44 %), todas ellas vinculadas a Podemos y otras formaciones de izquierda, dieron un total de 71 diputados y el 21,15 % de los votos. Ciudadanos-Partido de la Ciudadanía, con Albert Rivera al frente, obtuvo 32 diputados, perdiendo ocho de ellos (un 13,06 % de los votos). El resto de los grupos parlamentarios quedó configurado por Esquerra Republicana de Catalunya-Catalunya Sí (9, 2,63 %), Convergència Democràtica de Catalunya (8, 2,01 %), el Partido Nacionalista Vasco (5, 1,19 %), Euskal Herria Bildu (2, 0,77 %) y Coalición Canaria-Partido Nacionalista Canario (1, 0,33 %).

A continuación representamos el Senado. El Senado en esta legislatura está actualmente formado por 266 senadores, donde la cuota que define la mayoría absoluta es 134. El Senado queda representado de la siguiente forma.

PARTIDO	ESCAÑOS	% ESCAÑOS
PP	149	56’02
PSOE	62	23’31
PODEMOS	20	7’52
ERC	12	4’51
EAJ-PNV	6	2’25
MIXTO	17	6’39

TABLA 4.16. Senado 2016-2020.
Fuente: Elaboración propia a través del Ministerio del Interior.

El senado queda representado por el juego de mayoría ponderada siguiente

$$u = [134,149,62,20,12,6,17]$$

PARTIDOS	ESCAÑOS	% ESCAÑOS	SH-SH	BANZHAF	DEEGAN
PP	149	56’02	1’00	1’00	1’00
PSOE	62	23’31	-	-	-
PODEMOS	20	7’52	-	-	-
ERC	12	4’51	-	-	-
EAJ-PNV	6	2’25	-	-	-
MIXTO	17	6’39	-	-	-

TABLA 4.17. Índices de poder tras las elecciones generales al Senado del 2016.
Fuente: Elaboración propia a través del Ministerio del Interior y IOP.

En el Senado, el PP mantuvo la mayoría absoluta al conseguir 149 escaños (7 menos que en 2015). El PSOE perdió 5 senadores pasando de 67 en 2015 a 62 en 2016, seguido de Unidos Podemos (20), Esquerra Republicana de Catalunya-Catalunya Sí (12, tres más que en 2015), el Partido Nacionalista Vasco (6). Como podemos observar en la tabla al tener el PP mayoría absoluta se convierte en un jugador dictador en el sentido anteriormente definido y sus índices lo muestra.

4.7. CONCLUSIÓN

Tras haber realizado un estudio de los diferentes índices de poder sobre las cuatros últimas legislaturas, como la distribución de poder de las Cortes Generales, podemos decir que el actual sistema no traslada fielmente la votación de los ciudadanos al reparto de poder de los distintos partidos políticos, ya que, existe una relación débil entre el número de parlamentarios o pesos de los jugadores con el poder que reciben los mismos. El peso de cada jugador no sirve como medida de su importancia, por lo que, las distribuciones de peso son engañosas en este sentido, observando las diferentes tablas que hemos realizado demuestran que las diferencias de peso entre jugadores no se reflejan en absoluto en diferencias de posición relativa al obtener la lista de coaliciones ganadoras minimales.

El índice de poder de Deegan-Packel que trata estas coaliciones ganadoras minimales, propone un reparto más equitativo entre los jugadores, ya que, al tener en cuentas estas coaliciones ganadoras minimales, da mayor importancia a los jugadores con pesos menores que el resto de los índices estudiados. Por otro lado, el índice de poder de Shapley-Shubik y el índice de poder de Banzhaf muestran valores similares y les dan una mayor importancia a los jugadores con mayores pesos.

Otro dato a destacar, conforme la cuota necesaria para aprobar una propuesta aumenta, todos los índices tienden a disminuir las diferencias entre los jugadores, aumentando el poder de los jugares con menores pesos y reduciendo los de mayores pesos. El índice de Deegan-Packel no se ve afectado demasiado por este hecho.

Para terminar, decir que el cálculo de los índices de poder sólo tiene en cuenta el reparto de escaños entre los partidos. No tienen en cuenta aspectos como afinidades ideológicas, regionales o religiosas.

Bibliografía

Algaba, E., Bilbao, J. M., López Vázquez, J. J., & Fernández García, J. R. (2001*). El índice de poder de Banzhaf en la Unión Europea ampliada.*

Amer, R., Carreras, F., & Magaña, A. (2008). *Aplicaciones de los juegos cooperativos al contexto empresarial. Intangible capital*, 4(2), 102-142.

Amer, R., Carreras, F., & Magaña, A. (2003). *Juegos Simples e Índices de Poder de Shapley-Shubik.* Revista de Estudios Politécnico.

Arrese, J. M. B. *El poder de las naciones y sus ciudadanos en la Unión Europea.*

Bräuninger, T. König, T (2005). *Indices of Power IOP 2.0* [computer program]. Konstanz: University of Konstanz. Disponible en [http://www.tbraeuninger.del/IOP.html]

Carreras, F., Magaña, A., Amer. (2001). *Teoría de Juegos*. Editorial UPC.

Carreras Serra, F., Pacios, M. A., & Jurado, I. G. (1993). *Estudio coalicional de los parlamentos autonómicos españoles de régimen común.* Revista de Estudios Políticos, (82), 159-176.

Magaña Nieto, A. (1996). *Formación de coaliciones en los juegos cooperativos y juegos con múltiples alternativas*. Universitat Politècnica de Catalunya.

Mas-Colell, A. (1988). *Algunos comentarios sobre la teoría cooperativa de los juegos.* Cuadernos Económicos, 40, 143-161.

Meijide, J. A., Méndez, B. C., Rueda, A. G., & Freire, S. L. *El Valor de Shapley de un juego modificado en entornos de estructura coalicional.*

Meijide, J. M. A. (2002). *Contribuciones a la teoría del valor en juegos cooperativos con condicionamientos exógenos*. Universidad de Santiago de Compostela.

Perez, J., Jimeno, J.L, Cerdá, E. (2013). *Teoría de Juegos*. Editorial Pearson Education.

Vitoriano, B. (2007). *Teoría de la decisión: decisión con incertidumbre, decisión multicriterio y teoría de juegos.* Universidad Complutense de Madrid, 3-104.

Von Neumann, J., Morgensten, O. (1944). *Game Theory and Economic Behaviour.* Tercera Edición. Princeton: Princenton University Press