

TRATAMIENTO DE LAS INTEGRALES DE DOMINIO EN EL ANALISIS DE LA ECUACION DE POISSON POR EL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Federico Paris / Segundino de León

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Sevilla

Resumen.- El Método de los elementos de contorno basa su principal ventaja, como alternativa numérica de cálculo, en que basta discretizar el contorno del dominio en estudio. Cuando la naturaleza del problema analizado incluye una sollicitación de dominio, como es el caso de la ecuación de Poisson, esta ventaja desaparece. Para ciertas expresiones particulares de la sollicitación de dominio, es posible su transformación al contorno mediante la aplicación del teorema de la divergencia. Para una sollicitación general, se ensaya en este trabajo, una aproximación numérica mediante integrales de contorno, que son idénticas a las que aparecen en la ecuación original, por lo que la aproximación de la integral de dominio no representa un excesivo cálculo adicional.

1. INTRODUCCION.

Existen en la actualidad diferentes alternativas numéricas para el tratamiento aproximado de la mayor parte de los problemas de la Física-Matemática, aunque ninguno de ellos presente ventajas universales. El grupo de soluciones de dominio, fundamentalmente el Método de los Elementos Finitos, basados en una formulación débil del problema en estudio conducen a un sistema de ecuaciones simétrico y para el caso del M.E.F. en banda, lo que, pese al usualmente gran tamaño del sistema de ecuaciones, simplifica notablemente la resolución. El grupo de las alternativas de contorno, basada en un teorema de reciprocidad, conduce a un sistema de ecuaciones lleno y no simétrico pero de tamaño más reducido. Existen un gran número de publicaciones en que se compara la eficiencia computacional de ambos métodos de cálculo, [1], [2], [3] pueden servir de ejemplo. Sin embargo, independientemente de las ventajas de una u otra alternativa en los aspectos numéricos como tamaño y tiempos de generación y resolución del sistema de ecuaciones que dependen fundamentalmente del ejemplo concreto sobre el que se establezca la comparación, hay una diferencia objetiva a favor de la alternativa de contorno, que cada día tiene un peso mayor en la explotación comercial de los programas que recogen ambas posibilidades. El tiempo de preparación de datos se disminuye drásticamente si sólo es preciso discretizar el contorno del dominio en estudio. Sin embargo, existen casos en que esta ventaja desaparece debido a la existencia de sollicitaciones de dominio, fuerzas en volumen en problemas elastostáticos, carga trans-

versal en placas o la presencia de un segundo miembro en la ecuación de Poisson. En estos casos es preciso evaluar una integral de dominio, lo que requiere la discretización del mismo. El hecho de que esta discretización no necesite especiales requerimientos de finura debido a que no incluye ninguna incógnita del problema y no tiene por tanto trascendencia en el sistema de ecuaciones no quita para que una de las principales ventajas de la alternativa de contorno haya desaparecido. La transformación de la integral de dominio en integral de contorno mediante la aplicación del teorema de la divergencia sólo es posible para expresiones muy particulares de la sollicitación y desde luego en ningún caso cuando la información de ésta es en forma discreta.

La alternativa que se realiza en este trabajo está en la línea de las propuestas realizadas por Nardini y Brebbia [4] y Garcia Suarez [5]. El primero de ellos la aplica a problemas dinámicos con particularidades que en el desarrollo del presente artículo se pondrán de manifiesto y el segundo utiliza funciones de la misma naturaleza pero formalmente diferentes para introducir la aproximación.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

Sobre un dominio genérico  $D$  con un contorno  $\partial D$ , está definida una función  $\phi$  gobernada por la ecuación de Poisson (1).

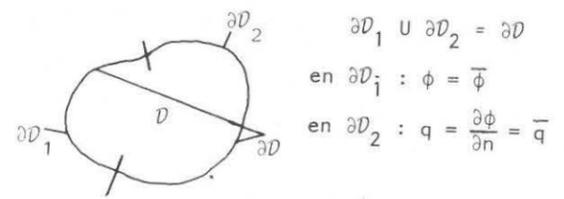


Fig. 1. Configuración del dominio bajo estudio.

$$\nabla^2 \phi = -p \quad (1)$$

Sobre dicho contorno se conoce bien el potencial  $\phi$  o el flujo  $q$ .

La segunda fórmula de Green establece una relación integral entre  $\phi$  y una función auxiliar  $\psi$ :

$$\int_D (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dv = \int_{\partial D} (\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n}) ds \quad (2)$$

Si elegimos  $\psi$  como la solución fundamental de la ecuación de Laplace, (2) queda en la forma

$$\begin{aligned} \phi(x) + \int_{\partial D} \phi(y) \frac{\partial \psi}{\partial n}(x,y) ds(y) &= \\ &= \int_{\partial D} \psi(x,y) \frac{\partial \phi}{\partial n}(y) ds(y) + \int_D p(z) \psi(x,z) dA(z) \end{aligned} \quad (3)$$

con  $x, z \in D$ ;  $y \in \partial D$ .

Las incógnitas del problema en (3) son  $\frac{\partial \phi}{\partial n}(y)$  en  $\partial D_1$  y  $\phi(y)$  en  $\partial D_2$ . Para obtener incógnitas exclusivamente en el contorno hacemos tender  $x$  a  $\partial D$ . En tal caso obtenemos

$$\begin{aligned} c(x) \phi(x) + \int_{\partial D} \phi(x) \frac{\partial \psi}{\partial n}(x,y) ds(y) &= \\ &= \int_{\partial D} \psi(x,y) \frac{\partial \phi}{\partial n}(y) ds(y) + \\ &+ \int_D p(z) \psi(x,z) dA(z) \end{aligned} \quad (4)$$

donde:  $x, y \in \partial D$ ;  $z \in D$ .

$c(x)$  es una constante que depende de la forma real del contorno en  $x$ .

La ecuación (4) constituye la base del método de los elementos de contorno puesto que sólo incluye incógnitas sobre el contorno,  $\phi(y)$  en  $\partial D_2$  y  $\frac{\partial \phi}{\partial n}(y)$  en  $\partial D_1$ . Una vez calculadas las incógnitas mediante la resolución numérica de

(4), que se describe en el apartado siguiente, se puede utilizar (3) para calcular  $\phi$  en los puntos del dominio que se desee.

3. FORMULACION NUMERICA. APROXIMACION DE LA INTEGRAL DE DOMINIO.

La resolución de (4) implica una aproximación de  $\phi(y)$  y  $\frac{\partial \phi}{\partial n}(y)$  en  $\partial D$ . Asimismo implica una evaluación de la integral de dominio, lo que constituye el núcleo central de este trabajo. En primer lugar se describe brevemente la formulación numérica de las integrales de contorno, es decir, el caso en que al ser  $p = 0$ , la ecuación de campo (1), se transforma en la ecuación de Laplace. Esta formulación puede encontrarse en detalle en las referencias [3] y [6]. Posteriormente en 3.1 se analiza la evaluación de la integral de volumen para un valor genérico de  $p$  y en 3.2 para el caso particular de discontinuidades en  $p$ . De cualquier forma, y tal como puede desprenderse de (4), la integral de dominio, en el problema que estamos analizando, sólo representa una constante a añadir a cada ecuación del sistema que se generará a continuación.

Se va a establecer una aproximación sobre  $\phi$  y  $\frac{\partial \phi}{\partial n}$  en  $\partial D$  en la forma:

$$\phi = N^i \phi^i \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = q = N^i q^i \quad (5)$$

donde  $N^i$  son funciones de pequeño soporte lineal asociadas al punto  $i$  y  $\phi^i$  y  $q^i$  representan valores de potencial y flujo en el punto  $i$  del contorno. Dicho contorno se aproxima también por elementos rectilíneos, representándose un punto interior de un elemento cualquiera por:

$$x^j(\xi) = N_\alpha(\xi) \cdot x^j \quad (6)$$

donde:  $x^j(\xi)$  coordenada cartesiana  $j$  de un punto interior definido por la coordenada natural  $\xi$ .

$N_\alpha(\xi)$  función de forma asociada al extremo  $\alpha$  del elemento.

$x_\alpha^j$  coordenada cartesiana  $j$  del extremo  $\alpha$ .

La Fig. 2 ilustra estas aproximaciones.

La ecuación (4), sin tener en cuenta la integral de dominio, se puede escribir en la forma siguiente, teniendo en cuenta la sustitución del contorno real en uno discreto de  $N$  elementos.

$$c(\ell) \phi(\ell) + \sum_{k=1}^N \int_{\partial D_k} \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} ds_k = \sum_{k=1}^N \int_{\partial D_k} \psi q ds_k \quad (7)$$

Si introducimos la aproximación (5) sobre cada elemento, (7) puede representarse en la forma:

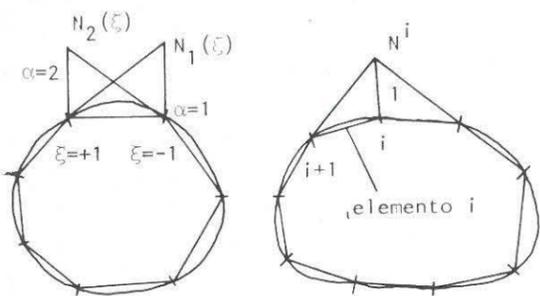


Fig. 2.

$$c(l) \phi(l) + \sum_{k=1}^N (A_1 A_2) \begin{Bmatrix} \phi_k(k) \\ \phi_k(k+1) \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N (B_1 B_2) \begin{Bmatrix} q_k(k) \\ q_k(k+1) \end{Bmatrix} \quad (8)$$

donde los subíndices de las variables  $\phi$  y  $q$  están asociados al elemento sobre el que se integra y los paréntesis al nodo al que están asociados.  $A_i$  y  $B_i$  representan las integraciones sobre los elementos una vez introducida (5). Así,

$$A_\alpha = \int_{\partial D_k} N_\alpha(\xi) \frac{\partial \psi}{\partial n} ds_k \quad (9)$$

$$B_\alpha = \int_{\partial D} N_\alpha \psi ds_k$$

Si la ecuación (9) se escribe para todos los nodos del contorno, obtenemos un sistema de ecuaciones en la forma

$$\begin{matrix} H \\ (N \times N) \end{matrix} \begin{matrix} \phi \\ (N \times 1) \end{matrix} = \begin{matrix} G \\ (N \times N) \end{matrix} \begin{matrix} q \\ (N \times 1) \end{matrix} \quad (10)$$

donde  $N$  es el número de nodos del contorno. Reordenando datos e incógnitas (10) se transforma en:

$$\begin{matrix} K \\ (N \times N) \end{matrix} \begin{matrix} x \\ (N \times 1) \end{matrix} = \begin{matrix} F \\ (N \times 1) \end{matrix} \quad (11)$$

La integral de dominio que vamos a evaluar a continuación será preciso incluirla en  $F$ , para cada nodo ( $l$ ) del contorno.

### 3.1. Caso general.

Aproximamos la distribución  $p(z)$  por una serie de funciones  $f_j(z)$  definidas sobre todo el dominio, en la forma:

$$p(z) = \sum_{j=1}^M \alpha_j f_j(J,z) = \sum_{j=1}^M \alpha_j f_j(r(J,z)) \quad (12)$$

donde  $f_j(J,z)$  representa el valor de la función asociada a un punto  $J$  del dominio o del contorno, en un punto  $z$ .  $\alpha_j$  representa el coeficiente asociado a la función anterior. En definitiva,  $f_j$  juega el papel de un sistema de coordenadas generalizadas de dimensión  $M$  en el que pretendemos representar  $p(z)$  y  $\alpha_j$  son los componentes sobre dicho sistema que se ajustarán de acuerdo a algún criterio. Puesto que  $p(z)$  está definido en todo el dominio y contorno, los puntos  $J$  pueden elegirse sobre uno u otro. Por razones que aparecerán evidentes, más adelante se incluirán siempre los  $N$  nodos del contorno y los  $M-N$  puntos del dominio que se consideren necesarios para conseguir una buena aproximación de  $p(z)$  en  $D$ .

Con la aproximación (12) la integral de dominio que aparece en (4) se ha transformado en  $M$  integrales de la forma:

$$\alpha_j \int_D f_j(J,z) \psi(x,z) dA(z) \quad (13)$$

Para que cada una de estas integrales pueda ser expresada a partir de integrales de contorno, basta, si las asimilamos a la integral de dominio de (4) que  $f_j$  represente a  $p$ , lo que equivale a decir que debe existir una función  $\phi_j$  asociada a cada  $f_j$  que cumpla la relación

$$\nabla^2 \phi_j = f_j \quad (14)$$

Puesto que no hay definidas condiciones de contorno sobre  $\phi_j$  o sus derivadas, basta con que  $\phi_j$  sea una solución particular de (14), que puede encontrarse para cada expresión de  $f_j(r(J,z))$ .

Asumiendo catorce y tomando como referencia (4), cada una de las integrales (13) puede ser expresada a partir de integrales de contorno en la forma:

$$-\int_D f_j(J,z) \psi(x,z) dA(z) = C(x) \phi_j(x) + \int_{\partial D} \phi_j(J,y) \frac{\partial \psi}{\partial n}(x,y) ds(y) - \int_{\partial D} \frac{\partial \phi_j(J,y)}{\partial n} \psi(x,y) ds(y) \quad (15)$$

Introduciendo (12) y (15) en (4):

$$c(x) \phi(x) + \int_{\partial D} \phi(y) \frac{\partial \psi}{\partial n}(x,y) ds(y) = \int_{\partial D} \psi(x,y) \frac{\partial \phi}{\partial n}(y) ds(y) - \alpha_j \left[ c(x) \phi_j(x) + \int_{\partial D} \phi_j(J,y) \frac{\partial \psi}{\partial n}(x,y) ds(y) - \int_{\partial D} \frac{\partial \phi_j(J,y)}{\partial n} \psi(x,y) ds(y) \right] \quad (16)$$

(16) incluye exclusivamente integrales de contorno de la misma naturaleza y cuya discretización ya se ha analizado posteriormente. Puesto que los núcleos de la integración son los mismos (integraciones de  $\psi$  y  $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ ), (16) puede escribirse introduciendo la aproximación (5) para  $\phi_j$  y  $\frac{\partial \phi_j}{\partial n}$  en la siguiente forma:

$$\begin{matrix} H \\ (N \times N) \end{matrix} \begin{matrix} \phi \\ (N \times 1) \end{matrix} = \begin{matrix} G \\ (N \times N) \end{matrix} \begin{matrix} q \\ (N \times 1) \end{matrix} - \begin{matrix} H \\ (N \times N) \end{matrix} \begin{matrix} \phi \\ (N \times N) \end{matrix} - \begin{matrix} G \\ (N \times N) \end{matrix} \begin{matrix} q \\ (N \times M) \end{matrix} \begin{matrix} \alpha \\ (M \times 1) \end{matrix} \quad (17)$$

donde  $N$  es el número de puntos del contorno utilizado en la discretización del mismo y  $M$  el número de puntos utilizados para la aproximación de  $p$  y que incluye los  $N$  del contorno y  $M-N$  de dominio.

La formación del sistema de ecuaciones para obtener (11) y su resolución no tienen ninguna particularidad, con respecto al caso de la ecuación de Laplace. Asimismo, la evaluación de la integral para el cálculo de  $\phi$  en los puntos internos se realiza en la misma forma que para el contorno.

El valor de  $\alpha$  se determina ajustando  $p$  y  $\alpha_j$   $f_j$  mediante colocación en los  $M$  puntos.

$$\begin{matrix} P \\ (M \times 1) \end{matrix} = \begin{matrix} F \\ (M \times M) \end{matrix} \begin{matrix} \alpha \\ (M \times 1) \end{matrix} \quad (18)$$

De (18) podemos obtener el valor de  $\alpha$  para incluir en (17).

### 3.2. Caso de función discontinua.

Vamos a analizar el caso que se presenta con frecuencia de que  $p$  sea constante en subdominios, pero de diferente valor. En la Fig. 3 se presenta esta situación.

Es preciso buscar funciones  $\phi$  que verifiquen:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi_1 &= p_1 \quad \text{en } D_1 \\ \nabla^2 \phi_2 &= p_2 \quad \text{en } D_2 \end{aligned} \quad (19)$$

La integral de dominio se descompone en:

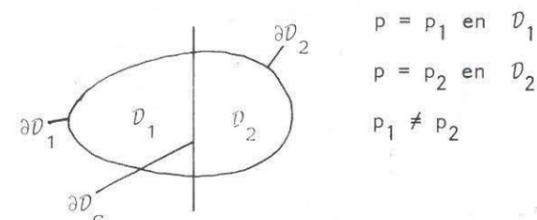


Fig. 3. Función  $p$  discontinua.

$$\int_D p(z) \psi(x,z) dA(z) = \int_{D_1} p_1(z) \psi(x,z) dA(z) + \int_{D_2} p_2(z) \psi(x,z) dA(z) \quad (20)$$

y teniendo en cuenta (19) las integraciones sobre los subdominios  $D_1$  y  $D_2$  se pueden poner en notación abreviada, al igual que se hizo en (15):

$$\int_{D_\alpha} p_\alpha \psi dA = - \left[ c_\alpha \phi_\alpha + \int_{\partial D_\alpha + \partial D_c} \phi_\alpha \frac{\partial \psi}{\partial n} ds - \int_{\partial D_\alpha + \partial D_c} \psi \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial n} ds \right] \quad (21)$$

(21) exige la integración sobre la línea de discontinuidad, pero puesto que  $\phi_\alpha$  son soluciones particulares de (19), podemos ajustarlos de manera que:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi_2 \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial n} &= \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \quad \text{en } \partial D_c \end{aligned} \quad (22)$$

con lo cual las integrales de (21) se reducen al contorno del dominio que ya ha tenido que ser discretizado.

El tratamiento para este caso particular de función discontinua es diferente en cuanto que no se utiliza (12), pero es similar en cuanto que la sustitución de la integral de dominio se hace igual que en el caso general según (15).

### 4. EJEMPLOS.

Tres ejemplos van a ser considerados, comparando en ellos el valor de la integral calculado numéricamente a partir de integraciones numéricas sobre el dominio discretizado con el valor que se obtiene a partir de las integraciones de contorno que se proponen, o bien los resultados finales de la resolución del problema. Para los dos primeros ejemplos que corresponden al caso general se han utilizado funciones lineales

$$f_j(J,z) = 1 - r(J,z) \quad (23)$$

Las funciones  $\phi_j$  asociadas se calculan en el apéndice 1.

Para el tercer caso que corresponde a una función sigular, las funciones  $\phi_\alpha$  se calculan en el apéndice 2.

Ejemplo 1.

Se trata de resolver la ecuación  $\nabla^2 \phi = p = \text{cte.}$  que representa, por ejemplo, la ecuación de la torsión de un prisma en la formulación de Prandtl.

Para el contorno, según se indica en la Fig. 4, se han utilizado discretizaciones de 16 y 32 elementos y para aproximar la función en el interior se han utilizado 1, 5 y 9 puntos internos. La discretización sobre los lados es regular.

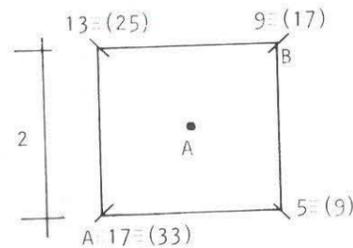


Fig. 4. Discretización de 16 y (32) elementos.

A continuación, en la tabla 1 se obtienen los resultados de la integración desde los puntos A y B. Los resultados de la integración numérica son los siguientes.

7364	Integración desde A
6502	Integración desde B

Tabla 1. Valor de la Integral de dominio.

		1	5	9
Nº de elementos en $\partial D$	16	7126	7510	7632
	32	6888	7259	7383
		6073	6330	6392

En la tabla no se incluyen discretizaciones con 8 elementos porque las funciones  $\phi_j$ , al ser  $f_j$  lineal, son cúbicas, y debe haber al menos

4 puntos para su definición sobre un lado. Tampoco se incluyen mayor número de puntos internos ni de elementos de contorno, porque los resultados no mejoran sensiblemente.

Ejemplo 2.

En este ejemplo el dominio sigue siendo un cuadrado que representa una placa. La variable de campo  $\phi$  representa la flecha  $w$  de la placa. La solicitación de dominio definida por (24) representa el valor de  $M/D = (M_x + M_y)/(1+\nu)D$  en cualquier punto de la placa para el caso de carga transversal uniforme  $q_0$ .

$$p(x,y) = -\frac{1}{\pi^2 D} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (m^2 + n^2) \frac{a_{mn}}{\left(\frac{m^2+n^2}{a}\right)^2} \cdot \pi^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a} \quad (24)$$

con  $D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$ ,  $a_{mn} = \frac{16q_0}{\pi^2 mn}$ ,  
 $q_0 = 5000 \text{ Kg/m}^2$ ,  $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ Kg/cm}^2$   
 $a = 2 \text{ m.}$ ,  $h = 10 \text{ cm.}$ ,  $\nu = 0,3$ .

La Fig. 5 recoge la discretización y los puntos que sirven para la comparación de resultados.

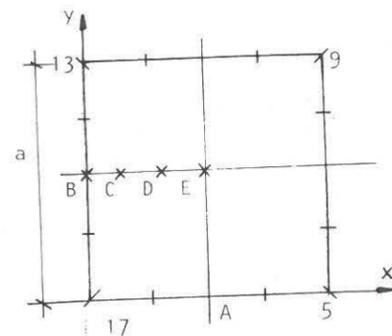


Fig. 5. Discretización de la placa.

La Tabla 2 recoge el valor de  $\frac{\partial \phi}{\partial n}$  en A, comparando la solución analítica con los resultados del M.E.C. con 16 elementos de contorno y 1, 5 y 9 puntos para definir p en el dominio.

Tabla 2. Valor de  $\frac{\partial \phi}{\partial n} \cdot 10^4$  en A.

Analítica	1	5	9	→ Puntos internos
-2,80	-1,52	-2,43	-2,72	

La Tabla 3 recoge los valores de  $\phi$  en el dominio con 16 elementos de contorno y 5 ó 9 pun-

tos internos, así como la solución analítica.

Tabla 3. Valor de  $\phi \cdot 10^{+2}$  en puntos internos.

	C	D	E
ANALITICA	0,87	1,48	1,69
16 $\partial D + 5 D$	0,76	1,28	1,48
16 $\partial D + 9 D$	0,84	1,42	1,63

La elección de este ejemplo está motivada por la importancia de esta alternativa en el estudio de las placas, como continuación de los trabajos iniciados en [7]. Los resultados que se representan en las Tablas 2 y 3 reflejan una rápida convergencia en los resultados para un número de puntos internos reducido, si tenemos en cuenta la complejidad de la función definida en (24), y para una discretización de contorno que no necesita ninguna modificación respecto a la que se utilizaría para una evaluación numérica de la integral de dominio.

Ejemplo 3.

Este ejemplo corresponde a una aplicación del caso de carga discontinua y se describe en la Fig. 6.

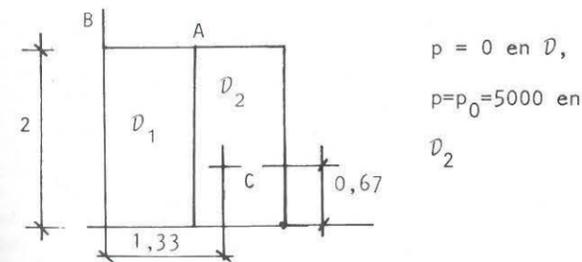


Fig. 6. Caso de carga discontinua.

Las funciones  $\phi_1$  y  $\phi_2$  para este caso se calculan en el apéndice 2. La Tabla 4 recoge los resultados de la integral desde los puntos ABC, analítica y numéricamente para 16 y 32 elementos.

Tabla 4. Valor de la integral de dominio.

	A	B	C	
	452	6051	5683	ANALITICA
	269	6017	5865	16 $\partial D_k$
	405	6042	5711	32 $\partial D_k$

Los resultados son excelentes para discretizaciones reducidas, salvo en el caso de inte---

grar desde la discontinuidad, lo que requiere una discretización más fina.

5. CONCLUSIONES.

El cálculo numérico de la integral de dominio que aparece en la aplicación del M.E.C. a la ecuación de Poisson, por medio de integrales de contorno que se ha propuesto, evita la discretización del dominio para la evaluación de dicha integral, lo que permite mantener la gran ventaja del M.E.C. consistente en la discretización del contorno exclusivamente. Sí es imprescindible dar información de los valores de la función en algunos puntos del dominio, pero esto es inherente a la existencia de una función conocida sobre él.

A cambio de esta clara ventaja, es preciso realizar algunas integraciones más, tantas como puntos del dominio se utilizan para aproximar la función. A veces, en estos puntos se está interesado en calcular el valor de la incógnita  $\phi$  o su/s derivada/s, de la ecuación de campo y las integraciones, habría entonces que realizar las de cualquier forma. Lo que sí es preciso es invertir una matriz  $M \times M$ .

Para el caso de funciones discontinuas se ha propuesto un método elegante y rápido de evaluar la integral de dominio. En el caso en que haya más de dos subdominios o uno de ellos sea cerrado, se hace preciso integrar sobre líneas interiores de los subdominios, lo que en el caso presentado en el artículo no era necesario. De cualquier forma, la integral de dominio puede evitarse.

Los ejemplos que se muestran, indican que un número muy reducido de puntos en el dominio es suficiente para conseguir una precisión equivalente en los resultados a la evolución numérica sobre el dominio. Se hace preciso, no obstante, un mayor estudio sobre la naturaleza de las funciones  $f_j$  a utilizar para una mayor precisión y para garantizar la existencia de la matriz inversa que permite definir los coeficientes  $\alpha$ .

6. REFERENCIAS.

- 1.- Lachat, J.C. y Watson, J.O. "Application de la methode des equations integrales au calcul des structures". C.E.T.I.M., n° 25, 1976.
- 2.- Brebbia, C. y Domínguez J. "Boundary Element Methods Versus Finite Elements". Applied Numerical Modelling. Pentech Press, 1978.
- 3.- Paris, F. "El método de los Elementos de contorno en la Teoría del Potencial y la Elasticidad". Tesis E.T.S.I.I. de Madrid, 1979.

- 4.- Nardini, P. y Brebbia, C.A. "A new Approach to Free Vibration Analysis Using Boundary - Elements". Proceedings of the Fourth International Conference on Boundary Element. -- Methods in Engineering. Southampton, 1982.
- 5.- García Suarez, C. "Tratamiento de ciertas - integrales de volumen que aparecen en el Método de los Elementos de Contorno". Anales de ingeniería, n° 2, 1982.
- 6.- Alarcón, E., Martín, A. y Paris, F. "Boundary Elements in Potential and Elasticity -- Theory". Computers and Structures, Vol. 10, pp. 351-362, 1979.
- 7.- Paris, F. y León, S. "El método de los elementos de contorno aplicado al cálculo de placas apoyadas". Anales de Ingeniería Mecánica, n° 2, 1982.

APENDICE I. Soluciones particulares del caso general  $\nabla^2 \phi_j = f_j$ .

Tomando  $f_j = 1 - r$ , es preciso resolver

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} = 1 - r$$

Haciendo el cambio  $\frac{\partial \phi}{\partial r} = \beta$  obtenemos

$$\frac{\partial \beta}{\partial r} + \frac{1}{r} \beta = 1 - r$$

cuya solución es de la forma:

$$\beta = e^{-\ln r} \left| \int (1-r) e^{\ln r} dr + k \right| = \frac{1}{r} \left| k + \frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \right|$$

para que en  $r=0$ ,  $\phi \neq \infty$ ,  $k = 0$ .

$$\beta = \frac{r}{2} - \frac{r^2}{3}$$

y una solución particular de  $\phi$  es por tanto,

$$\phi = \frac{r^2}{4} - \frac{r^3}{9}$$

APENDICE II. Solución particular para  $p$  discontinua.

La Fig. 7 indica la configuración del dominio que se considera.

Para que las funciones  $\phi_\alpha$  cumplan

$$\nabla^2 \phi_\alpha = p_\alpha \quad \text{en } D_\alpha$$

han de ser de la forma:

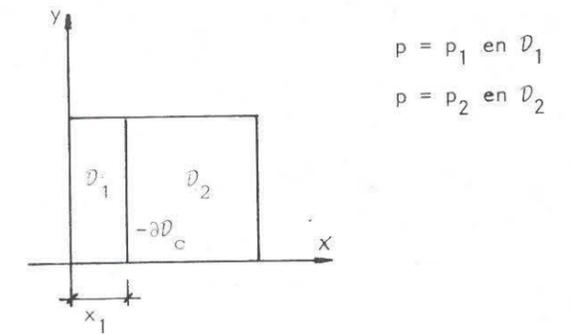


Fig. 7. Definición de  $p$  en el dominio.

$$\phi_\alpha = a_1^\alpha x^2 + a_2^\alpha y^2 + a_3^\alpha xy + a_4^\alpha x + a_5^\alpha y + a_6^\alpha$$

y para que se cumplan las ecuaciones de campo en los subdominios

$$a_2^\alpha = \frac{p_\alpha}{2} - a_1^\alpha$$

imponiendo la continuidad de  $\phi_\alpha$  y su derivada con respecto a  $x$  en  $\partial D_c (x=x_1)$  se obtienen las siguientes relaciones:

$$a_2^1 = a_2^2$$

$$a_4^1 = a_4^2$$

$$a_1^1 = \frac{p_1 - p_2}{2} + a_1^2$$

$$a_3^1 = x_1 (p_2 - p_1) + a_3^2$$

$$a_5^1 = x_1^2 \frac{p_1 - p_2}{2} + a_5^2$$

Las expresiones de  $\phi_1$  y  $\phi_2$  quedan:

$$\phi_1 = \left( \frac{p_1 - p_2}{2} + a_1^1 \right) x^2 + \left( \frac{p_2}{2} - a_1^2 \right) y^2 + a_2^2 xy + \left[ x_1 (p_2 - p_1) + a_3^2 \right] x + a_4^2 y + x_1^2 \frac{p_1 - p_2}{2} + a_5^2$$

$$\phi_2 = a_1^2 x_1^2 + \left( \frac{p_2}{2} - a_1^2 \right) y^2 + a_2^2 xy + a_3^2 x + a_4^2 y + a_5^2$$

una solución particular de estas  $\phi_\alpha$  es:

$$\phi_1 = \frac{p_1 - p_2}{2} x^2 + \frac{p_2}{2} y^2 + x_1 (p_2 - p_1) x + x_1^2 \frac{p_1 - p_2}{2}$$

$$\phi_2 = \frac{p_2}{2} y^2$$