

## Ensayo PROCTOR con *MATHEMATICA*

Rosa Huttin

IMApEC. Departamento de Fisicomatemática.

Facultad de Ingeniería. UNLP

1 y 47 La Plata. Prov. de Buenos Aires. Argentina

E-mail: [rhuttin@infovia.com.ar](mailto:rhuttin@infovia.com.ar)

### Resumen

Se presenta una aproximación numérica para la determinación de la “Densidad Seca Máxima”, y la “Humedad Optima” de la compactación de suelos que se obtiene con el Ensayo Proctor, a partir de datos experimentales (S/Norma de Ensayo VN-E5-93 de la Dirección Nacional de Vialidad).

Esta presentación se hace en la Cátedra Caminos II de la Facultad de Ingeniería (UNLP), como experiencia didáctica dentro de una perspectiva interdisciplinaria integradora con conceptos y métodos del Cálculo Numérico y Estudio de Suelos de Uso Vial.

El mismo tiene por objeto reforzar e integrar los conocimientos alcanzados por los alumnos en Cálculo Numérico con los conceptos y métodos usados en Caminos II, utilizando el software *Mathematica* para la resolución de algoritmos y representación gráfica.

**Palabras claves:** trabajo de aplicación, ingeniería, integración temática

### Abstract

We are presenting a numerical approximation in order to determine the Maximum Dry Density and the Optimum Humidity of soils compacting obtained through the Proctor Test. These results are based on experimental data following Test Regulation Standard VN-E5-93 given by the Dirección Nacional de Vialidad (National Highway Administration).

This presentation was carried out in the Cátedra Caminos II (Roads II Course) at the School of Engineering at La Plata National University, as an educational experience within an integrating and interdisciplinary view, making use of concepts and methods from Numerical Calculus and Soil Analysis for Road Construction.

This presentation aims at reinforcing and integrating the knowledge attained by students in the Numerical Calculus Course with the concepts and methods used in the Roads II Course, using the *Mathematica* software to solve algorithms and make graphic representations.

## I. Introducción

El presente trabajo describe una experiencia didáctica realizada en la Cátedra Caminos II, asignatura optativa por orientación Vías de Comunicación de la carrera Ingeniería Civil del Plan 2002.

Para tal fin, la Cátedra de Cálculo Numérico, conjuntamente con la Cátedra Caminos II, diseña un Trabajo Práctico que consiste en realizar el Ensayo de Compactación del suelo alcanzado en la práctica mediante el Ensayo Proctor, por el cual se obtiene la Densidad Seca Máxima ó el Peso de la Unidad de Volumen Seco Máximo ( $PUVS_{m\acute{a}x.}$ ), que se corresponde con el porcentaje de Humedad Óptima de Compactación ( $H_{\acute{o}pt.}$ ).

El  $PUVS_{m\acute{a}x.}$  se obtiene como el máximo de la gráfica construida usando Interpolación Spline Cuadrática, para los puntos de la representación de PUVS (peso por unidad de volumen seco) vs H (porcentajes de humedad), obtenidos de la determinación experimental.

Para conseguir lo propuesto, se diseña un programa interactivo para distintos conjuntos de datos usando el software *Mathematica*, que grafica las curvas Spline y calcula  $H_{\acute{o}pt}$  y  $PUVS_{m\acute{a}x.}$

La experiencia propuesta pretende realizar una innovación en el proceso enseñanza aprendizaje sobre el estudio de extremos de funciones, mediante la resolución numérica de un problema de Interpolación, dentro de una perspectiva interdisciplinaria integradora con conceptos y métodos del Cálculo Numérico y Estudio de Suelos, utilizando herramientas informáticas.

## II. Objetivos

Son objetivos de la experiencia:

- Reforzar en el proceso enseñanza aprendizaje, el uso de métodos numéricos aplicados a problemas concretos.
- Si se pretende conectar a los alumnos con sus intereses y partir con problemas de su entorno, hay que tener en cuenta que la percepción de dichos problemas es, sin duda, globalizadora. Esto trae como consecuencia, a través de un trabajo de aplicación, realizar una integración vertical entre la cátedras Cálculo Numérico y Caminos II.
- Introducir nuevas tecnologías computacionales en el contexto del proceso enseñanza aprendizaje del Cálculo Numérico.

## III. Obtención de los puntos de la gráfica PUVS vs H

La curva de interpolación se obtiene a partir de por lo menos cuatro puntos del plano (H, PUVS) Cada punto se corresponde con un ensayo dinámico de compactación del suelo a estudiar.

Para comenzar el primer ensayo, se debe tomar una muestra del suelo seco al cual se le agrega agua; se mezcla hasta que la humedad se considere uniforme en toda la muestra. Esta cantidad de agua está determinada de acuerdo a la experiencia de la persona que realiza el ensayo, ya que la misma es función del tipo de suelo (suelo con partículas más finas requieren mayor cantidad de agua para la compactación).

Con el ensayo Proctor se evalúan PUVS y la humedad Hum correspondiente. Con los datos  $H_0 = Hum * 100$  y  $PUVS_0 = PUVS$ , se obtiene el primer valor experimental  $P_0 = (H_0, PUVS_0)$ .

Para la obtención de los restantes puntos  $P_i = (H_i, PUVS_i)$ , se agrega agua a la porción de suelo sobrante del ensayo anterior. Se repite el ensayo, y así sucesivamente tratando que las cantidades de agua que se agregan en forma sucesiva, logren que los intervalos de humedad entre punto y punto sean similares. Con los distintos ensayos, el valor de PUVS aumenta, hasta que llega un momento que comienza a disminuir. Esto es consecuencia de que el agua no colabora en el acomodamiento de

las partículas, sino de que por estar en exceso al tratar de avanzar en el proceso de compactación, el suelo comienza a deformarse en lugar de disminuir su volumen.

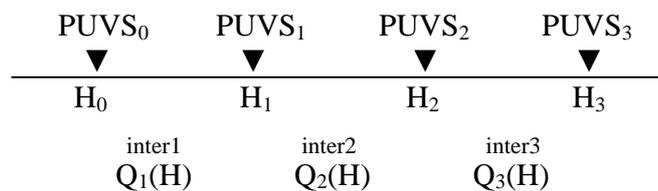
Una forma práctica de obtener  $PUVS_{m\acute{a}x}$ , es tomar dos puntos sobre la rama ascendente y dos sobre la rama descendente, y realizar una Interpolación Cuadrática Spline usando el software *Mathematica*, y luego calcular el máximo de la curva obtenida. Puede observarse que este máximo caerá en los dos primeros intervalos considerados, debido a la elección hecha de los puntos.

#### IV. Realización de la Interpolación Cuadrática Spline

Se toman cuatro puntos  $P_i=(H_i, PUVS_i)$ ,  $i= 0, 1, 2, 3$ , dos sobre la rama ascendente y dos sobre la rama descendente, y se procede a realizar una Interpolación Cuadrática Spline, mediante un polinomio de segundo grado para cada uno de los tres intervalos que estos cuatro puntos determinan. Cada polinomio se representa por:

$$Q_i(H)=a_i H^2 + b_i H +c_i$$

definido en el intervalo  $[H_{i-1}, H_i]$ ,  $i=1, 2, 3$ .



Para cuatro puntos existen tres intervalos, por lo tanto nueve incógnitas a determinar, a saber:  $a_i, b_i, c_i$ ,  $i=1, 2, 3$ . Se requieren nueve condiciones o ecuaciones para calcular los polinomios. Estas son:

- 1) Los polinomios deben pasar por los nodos seleccionados, y sus valores deben ser iguales en los nodos interiores. Esto es:

$$\begin{array}{ll} Q_1(H_1)=PUVS_1 & Q_2(H_2)=PUVS_2 \\ Q_2(H_1)=PUVS_1 & Q_3(H_2)=PUVS_2 \end{array}$$

- 2) El primero y el último de los polinomios deben pasar por el primero y el último de los puntos extremos respectivamente. Esto es:

$$Q_1(H_0)=PUVS_0 \quad Q_3(H_3)=PUVS_3$$

- 3) Las derivadas primeras en los nodos interiores de dos polinomios consecutivos, deben ser iguales. Esto es:

$$Q_1'(H_1)=Q_2'(H_1) \quad Q_2'(H_2)=Q_3'(H_2)$$

- 4) Debido a que se han planteado ocho ecuaciones y se tienen nueve incógnitas a determinar, debe plantearse una condición adicional.

La curva densidad de saturación para distintos valores de humedad, que se toman como humedades de saturación, está dada por:

$$\text{Satur}(H) = \frac{\gamma_s}{1 + (\gamma_s * H / 100)}$$

donde  $\gamma_s$  es el peso específico del suelo, que se puede hacer variar entre 2.65 g/cm<sup>3</sup> como valor mínimo hasta un máximo de 2.80 g/cm<sup>3</sup>. Para los suelos de nuestra región puede tomarse un valor medio de 2.68 g/cm<sup>3</sup>, que es el dato que se ha considerado.

Esta curva resulta asintótica a la rama descendente de la curva a obtener. Por lo tanto, se solicita además que la derivada  $Q_2'(H_2)$  coincida con la derivada de la curva densidad de saturación en  $H_2$ , esto es:

$$Q_2'(H_2) = \text{Satur}'(H_2)$$

Se resuelve el sistema de nueve ecuaciones lineales planteado, y con esta solución se calculan los polinomios interpolantes:

$$Q_i(H) = a_i H^2 + b_i H + c_i, \quad i=1, 2, 3$$

Se calcula el máximo absoluto  $PUVS_{m\acute{a}x}$  de la curva de Interpolación obtenida por los polinomios planteados en el intervalo  $[H_0, H_3]$ .  $H_{\acute{o}pt}$  es el valor que corresponde al porcentaje de humedad necesaria para que con la energía entregada al sistema en el proceso de compactación del ensayo, la muestra alcance el peso específico máximo seco  $PUVS_{m\acute{a}x}$ . Este máximo absoluto se calcula numéricamente.

## V. Uso del *Mathematica*

El algoritmo anterior está desarrollado con un programa interactivo usando el *Mathematica*, un software producido por Wolfram Research, Inc. Con este programa puede repetirse el algoritmo para diferentes conjuntos de datos, y obtener así resultados para distintos ensayos.

Para usar el programa, debe ejecutarse el módulo que define la función:

```
proctor[h1_ , h2_ , h3_ , h4_ , q1_ , q2_ , q3_ , q4_]
```

Luego se llama a la función mencionada para los datos en cuestión separados por coma, y se obtiene la gráfica de los polinomios interpolantes y los valores de  $PUV_{sm\acute{a}x}$ ,  $H_{\acute{o}pt}$ . Por ejemplo, para:

$H_i$	20.4	23.7	26.5	29.8
$PUVS_i$	1.467	1.522	1.5	1.431

se llama a:

```
proctor[20.4, 23.7, 26.5, 29.8, 1.467, 1.522, 1.5, 1.431]
```

Al ejecutarse esta sentencia, corre el programa, obteniéndose:

## Ensayo Proctor Normal

Respuesta del Problema

$$H_{\text{ópt}} = 24.4\%$$

$$\text{PUVS}_{\text{máx}} = 1.525 \text{ g/cm}^3$$

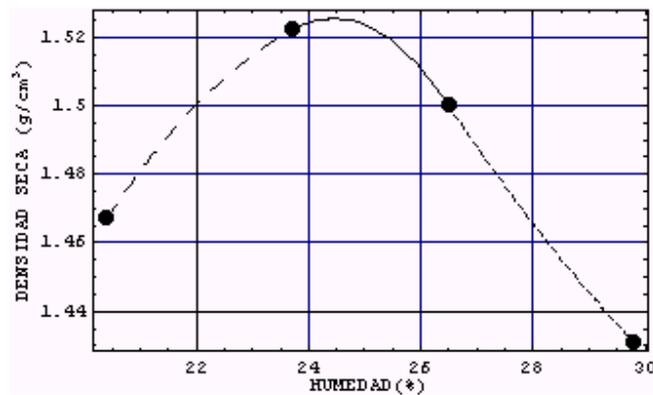


Figura 1  
Curvas spline  $Q_1(H)$ ,  $Q_2(H)$ ,  $Q_3(H)$

En la Figura 1 están dibujadas las tres curvas Spline:

$$Q_i(H) = a_i H^2 + b_i H + c_i$$

definidas en el intervalo  $[H_{i-1}, H_i]$ ,  $i=1, 2, 3$ , con distintos trazos, una a continuación de otra. Visualmente pueden observarse las propiedades requeridas para estos polinomios interpolantes, y también los valores de  $H_{\text{ópt}}$  y  $\text{PUVS}_{\text{máx}}$ .

Pueden estudiarse otros ejemplos entrando a:

<http://www.ing.unlp.edu.ar>

y luego ir a Departamentos, Ciencias Básicas, Laboratorios, IMApEC, Versión en español, Software

sitio que se preparará para ofrecer a los alumnos y también a otros interesados. El programa además, está instalado en los Laboratorios de Computación de la Facultad a disposición de los alumnos.

## VI. Comentario final

En este trabajo se presenta una aplicación de un método numérico para extremar funciones. En el mismo se muestra como integrar conceptos de Cálculo Numérico con un estudio de suelos, resolviendo un problema real de Ingeniería, usando Interpolación Spline.

Con el programa computacional presentado, los alumnos logran estudiar, comparar y visualizar gráficamente en forma interactiva, el control de la compactación del suelo alcanzada en la práctica mediante el Ensayo Proctor, para distintos tipos de suelos.

La implementación de esta nueva estrategia permite una mayor motivación en el alumno. La visualización del modelo matemático dado, mejora el proceso enseñanza-aprendizaje y la comprensión de temas, dentro de una perspectiva interdisciplinaria integradora.

El aprovechamiento de la computadora como herramienta de cálculo y representación gráfica, elimina la necesidad de desarrollar ciertas destrezas. Este tiempo se emplea en el desarrollo de otras habilidades, como la de resolución de problemas, la capacidad de enfrentarse con situaciones nuevas, desarrollo del pensamiento lógico, la exploración en el campo numérico e informático, etc.

### **Agradecimientos**

La autora del presente trabajo, agradece al Ing. Augusto Leoni, Director del Laboratorio de Mecánica de Suelos de la Facultad de Ingeniería, UNLP, y al Ing. Carlos Monticelli, Prof. Adjunto de la Cátedra Caminos I- II de la Facultad de Ingeniería, UNLP, el Asesoramiento Tecnológico recibido y control de los resultados obtenidos.

### **Referencias**

- 1- Rosa. Huttin, Leonardo Fernández, Graciela Punte. *Ensayo Proctor*. Publicación realizada por el VIII EMCI. Olavarría. Mayo 1999.
- 2- Braja M. Das, *Principles of foundation engineering*, Third Edition, Pws Publishing Company, Año 1999.
- 3- Richard L. Burden, J. Douglas Faires. *Análisis Numérico*, Sexta Edición., Editorial Internacional Thomson, Año 1998.
- 4- Normas de Ensayo. M.O.S.P. Dirección Nacional de Vialidad. Edición 1998.
- 5- Stephen Wolfram. *Mathematica*. Third Edition, Mathematica Version 3. Wolfram Research, Inc. Año 1996.