Una herramienta para la generación y visualización de Triangulaciones y Pseudotriangulaciones *

Maria Gisela Dorzán, Edilma Olinda Gagliardi, Pablo Rafael Palmero[1]
Gregorio Hernández Peñalver[2]

[1] Facultad de Ciencias Físico Matemáticas y Naturales,
Universidad Nacional de San Luis, Argentina
{mgdorzan,oli,prpalmero}@unsl.edu.ar
[2] Facultad de Informática, Universidad Politécnica de Madrid, España
gregorio@fi.upm.es

Abstract. En este artículo se presenta una herramienta para la generación y visualización de triangulaciones y pseudotriangulaciones de conjuntos de puntos en el plano. La misma permite generar diferentes tipos de dichas estructuras geométricas, realizar operaciones sobre ellas y describir sus propiedades más importantes.

Key words: Geometría Computacional, triangulaciones, pseudotriangulaciones

1 Introducción

La Geometría Computacional es una disciplina que brinda un marco teórico y formal para dar soluciones a problemas de tipo geométrico. En este campo de investigación, existen numerosos problemas que, o bien son de naturaleza NP-dura, o bien son problemas para los cuales no se conocen soluciones eficientes. Resulta de interés encontrar soluciones a tales problemas, aunque las mismas sean aproximadas a las óptimas, por medio de métodos de naturaleza heurística. En particular, es interesante el estudio de problemas de optimización geométrica de ciertas configuraciones geométricas obtenidas a partir de un conjunto de puntos: las *Triangulaciones* y las *Pseudotriangulaciones*. En general, se busca optimizar ciertas propiedades que miden la calidad de las configuraciones. Dada la dificultad inherente de dichos problemas, los algoritmos aproximados surgen como candidatos alternativos para su aplicación, tales como lo son las técnicas metaheurísticas. Las medidas de calidad en tales estructuras geométricas permiten evaluar la bondad de las mismas, considerando ciertos criterios de optimización, entre las que podemos referirnos al peso, dilación, uniformidad en perímetro y área de las estructuras geométricas, entre otras.

* Este trabajo es parcialmente subvencionado por el Proyecto "Tecnologías Avanzadas de Base de Datos" 22/F614-UNSL; y parcialmente subvencionado por el proyecto del Ministerio Ciencia e Innovación MTM2008-05043- España.

En este contexto de trabajo, es necesario poder generar y visualizar las estructuras geométricas planteadas anteriormente, triangulaciones o pseudotriangulaciones, para observar la morfología de cada instancia generada y el comportamiento de los algoritmos generadores cada una de ellas.

Por tanto, surgió la necesidad de la creación de una herramienta de aplicación para la generación y visualización de triangulaciones y pseudotriangulaciones, que permita, en general, generar diferentes tipos de dichas estructuras y realizar ciertas operaciones sobre ellas a fin de obtener instancias de características similares; y además, que admita recuperar instancias de tales estructuras geométricas a partir de resultados obtenidos de las generaciones experimentales obtenidos mediante técnicas metaheurísticas.

Como consecuencia de las actividades de investigación expuestas, en este artículo presentamos una herramienta de práctico uso, que permite la creación de estas estructuras geométricas a través de diversas estrategias de generación, realizar operaciones de intercambios de aristas, y calcular las funciones objetivo de acuerdo a los criterios de optimización definidos, como así también sus correspondientes visualizaciones.

Este artículo está organizado de la siguiente manera. En la siguiente sección, se presentan los aspectos teóricos sobre las estructuras geométricas presentadas, algoritmos de generaciones y medidas de calidad. A continuación se describe la herramienta para la generación y visualización de Triangulaciones y Pseudotriangulaciones. Finalmente, se presentan las conclusiones y perspectivas de trabajo futuro.

2 Aspectos Teóricos

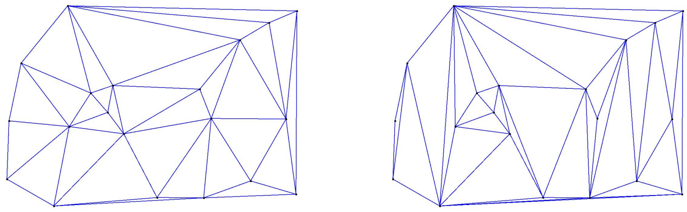
El desarrollo teórico presentado a continuación tiene como único fin poner en conocimiento las definiciones de las estructuras geométricas con las que se trabaja, la descripción de las estrategias generadoras de las mismas, y las definiciones de las funciones objetivo perseguidas, de modo de poder describir posteriormente la herramienta de aplicación.

2.1 Triangulaciones

Dado un conjunto S de puntos en el plano, una triangulación de S es una descomposición de la envolvente convexa (o cierre convexo) de S en triángulos cuyos vértices son los de S y tal que cada par de triángulos de la descomposición tiene sus interiores disjuntos, es decir, dos triángulos cualesquiera o bien son disjuntos, o comparten un vértice o comparten una arista. Todo esto se puede abreviar diciendo que una triangulación T de S es un grafo geométrico maximal sin cortes sobre S.

2.2 Tipos de triangulaciones (por su método de construcción)

Existen numerosos métodos de construcción de triangulaciones. Describimos a continuación, brevemente, los implementados en la herramienta



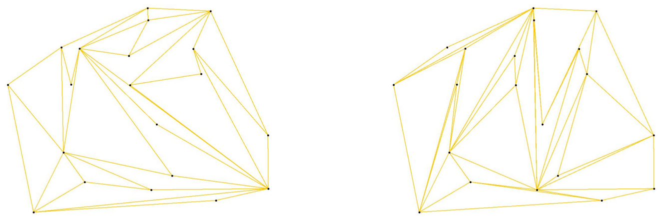
(a) (b)

Fig. 1. a) Triangulación Delaunay y b) Triangulación cualquiera para el mismo conjunto de puntos.

- Triangulación voraz (greedy)
  Las aristas se insertan de una en una en orden creciente de longitud. Si hay corte con una arista previamente insertada, se descarta. Se finaliza cuando se alcanza el número de aristas de la triangulación, $3n - 3 - k$, donde k es el número de puntos en el cierre convexo de S.
- Triangulación incremental (con preordenación) En primer lugar se ordenan los puntos de S de izquierda a derecha, por su abscisa. Y luego se van insertando los puntos en la triangulación en ese orden. Así al procesar un punto p tenemos ya un conjunto triangulado S' al que debemos conectar p que es un punto exterior al cierre convexo de S'. Basta trazar desde p los segmentos a todos los puntos de $CH(S')$ que son visibles desde p.
- Triangulación "Divide y vencerás" (con preordenación) Como en la anterior se ordenan en primer lugar los puntos por su abscisa. Luego se biseca el conjunto sucesivamente hasta que las partes se triangulan fácilmente (si constan de 1, 2 ó 3 puntos la triangulación es obvia). Finalmente hay que describir cómo se triangulan soluciones parciales. Esto consiste en la triangulación del espacio entre dos convexos.
- Triangulación en abanico Se parte de un punto p cualquiera, por ejemplo el que tenga menor ordenada. Se ordenan angularmente el resto de puntos con respecto al punto p y se trazan las aristas desde p a cada uno de los restantes puntos. Así se forma un abanico de triángulos desde p. Sólo resta triangular adecuadamente los huecos que restan hasta el cierre convexo de S.

2.3 Triangulación de Delaunay y Diagrama de Voronoi

Como se ha indicado antes la Triangulación de Delaunay de un conjunto S es la que cumple algunos criterios de optimalidad. Considerada como grafo plano su dual es el denominado Diagrama de Voronoi del conjunto S. Este diagrama es una subdivisión del plano en regiones, de forma que la región de un punto x de S está formada por los puntos del plano que están más próximos a x que a cualquier otro punto de S. La triangulación de Delaunay se construye a partir de cualquier triangulación por el procedimiento de intercambio de aristas ("flip"). Este intercambio se realiza del siguiente modo: Cuando dos triángulos comparten



(a) (b)

Fig. 2. a) Pseudotriangulación Aleatoria y b) Pseudotriangulación Greedy para el mismo conjunto de puntos.

una arista e y su unión es un cuadrilátero convexo C, podemos intercambiar e por la otra diagonal del cuadrilátero C.

2.4 Pseudotriangulación

Sea S un conjunto de puntos en el plano. Una pseudotriangulación de S es una partición del cierre convexo de S en pseudotriángulos cuyo conjunto de vértices es exactamente S. Un pseudotriángulo es un polígono que tiene exactamente tres vértices convexos.

Se han implementado diferentes variantes de un algoritmo de construccíón de pseudotriangulaciones. Este algoritmo genérico construye una pseudotriangulación comenzando con una cara formada por el cierre convexo de la nube de puntos. En cada paso de la construcción, se toma una cara y se divide en dos caras cuando no es un pseudotriángulo o tiene puntos interiores. La partición se realiza si a) si existe al menos un punto interior y dos en el borde de la cara, en cuyo caso la cara se divide en dos trazando dos aristas que unen a este punto con los del borde la cara en cuestión; o b) no tiene puntos interiores, en cuyo caso se toman dos puntos del borde de la cara y se traza una sola arista.

Con criterio de selección Distancia Mínima/Máxima: Considerando el algoritmo genérico y usando un criterio voraz (greedy),la selección del a) punto interior y de los dos puntos del borde de la cara, o b) de los dos puntos del borde de la cara, se realiza eligiendo aquellos puntos que generan las aristas que conducen al peso mínimo/máximo local.

Con criterio de selección Aleatorio Considerando el algoritmo genérico, la selección del a) punto interior y de los dos puntos del borde, o b) de los dos puntos del borde, se realiza seleccionando los puntos aleatoriamente.

2.5 Geometría Computacional y problemas NP

El número de triangulaciones sobre un conjunto S de n puntos es una cantidad exponencial en n. Por tanto, es interesante hallar las triangulaciones que optimizan algún criterio de calidad como el peso o la dilación.

Sea S una nube de puntos. El peso de una triangulación/pseudotriangulación G sobre S es la suma de las longitudes Euclídeas de todas las aristas de G. La triangulación/pseudotriangulación que minimiza esta suma se denomina Triangulación/PseudoTriangulación de Peso Mínimo de S.

Dada una triangulación/pseudotriangulación T sobre un conjunto de puntos S y un par de puntos a y b de S se llama dilación del par (a,b) en T a la razón entre la distancia entre a y b en T y la longitud del segmento ab. La dilación de la triangulación o pseudotriangulación T es el valor máximo que puede alcanzar la dilación entre sus vértices. Pero sobre el conjunto S se pueden construir muchas triangulaciones o pseudotriangulaciones por lo que definimos la dilación de S como

$$\Delta(S) = \min \{\Delta(T)/\text{T es una triangulación/pseudotriangulación sobre S}\} \quad (1)$$

Una triangulación/pseudotriangulación $G*$ cuya dilación sea $\Delta(G*) = \Delta(S)$ se denomina Triangulación/Pseudotriangulación de Dilación Mínima.

Mulzer y Rote [4] demostraron en 2006 que el problema MWT es de naturaleza NP-dura, eliminando dicho problema de la lista de problemas abiertos presentado por Garey y Johnson [2]. La complejidad para el problema MWPT es aún desconocido, aunque Levcopoulos y Gudmundsson [3] indicaron cómo obtener una 12-aproximación de una pseudotriangulación de peso mínimo puede ser calculada en tiempo $O(n^3)$. Además obtuvieron una $O(\log n \cdot w(MST))$ aproximación de una pseudotriangulación de peso mínimo, calculada en tiempo $O(n \log n)$, donde $w(MST)$ es el peso del árbol generador mínimo.

3 Herramienta para la generación y visualización de Triangulaciones y Pseudotriangulaciones

3.1 Descripción de la aplicación

Distintos tipos problemas geométricos son resueltos y visualizados en esta aplicación, tales como: Triangulaciones, Pseudotriangulaciones y Diagramas de Voronoi. Además, cuenta con la capacidad de calcular y mostrar el peso y la dilación de un grafo dado, de comparar distintas triangulaciones con triangulaciones de Delaunay, intercambiar (flip) aristas y dibujar grafos manualmente.

Esta aplicación tiene como fines ser utilizada como una herramienta educativa y de experimentación en las actividades del proyecto de investigación como así también en cursos de Geometría Computacional. En este sentido, esta herramienta forma parte de una colección de trabajos que se vienen realizando conjuntamente con el Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Politécnica de Madrid, teniendo de esta forma visualizaciones y operaciones sobre distintos problemas dentro del campo de la Geometría Computacional y que son usados como apoyo en la enseñanza de la disciplina.

Se ha desarrollado en lenguaje Java, basado en algoritmos utilizados por las aplicaciones *ProRouting*, *Intercambio de Aristas* y *Triangulaciones* [1]. Esta aplicación puede ser ejecutada en cualquier sistema que tenga instalado una Máquina Virtual de Java (JVM).

3.2 Administración de datos

Se pueden recuperar triangulaciones o pseudotriangulaciones desde un archivo de texto que haya sido generado manualmente o a través de algún algoritmo de la herramienta o que haya sido el resultado de alguna evaluación experimental en la que se utilizó alguna técnica metaheurística. Permite insertar una imagen de fondo para poder mostrar estudios reales de diferentes algoritmos geométricos. Las estructuras geométricas resultantes se pueden almacenar en un archivo de texto o en una imagen de tipo jpg.

Tantos los puntos como las aristas pueden ser agregados y/o suprimidos del grafo. También es posible mover los puntos para observar los cambios que ocurren en tiempo real.

3.3 Algoritmos geométricos

Esta aplicación utiliza una serie de algoritmos auxiliares que resuelven problemas geométricos a partir de un conjunto de puntos y de aristas. Los siguientes algoritmos, en conjunto, facilitan la generación de triangulaciones, pseudotriangulaciones, Diagramas de Voronoi y cálculos de dilación y peso, entre otros:

- Cierre convexo
- Intersección de aristas
- Intercambio de aristas
- Dijkstra
- Área signada
- Búsqueda de triángulos vacíos
- Consultas de pertenencias de puntos dentro de círculos identificados por tres puntos

3.4 Triangulaciones

A partir de una nube de puntos, la aplicación puede generar las siguientes triangulaciones:

- Delaunay
- Abanico
- basada en la técnica Divide y Vencerás con preordenación
- Voraz (Greedy)
- Incremental con preordenación

La aplicación permite pasar de una triangulación a otra, simplemente presionando el botón que las representa. Es posible agregar nuevos puntos y mover puntos existentes, por lo que se retriangula en el momento, visualizando la nueva triangulación. produce cuando se mueve alguno de los puntos del grafo. A la vez que se elige una triangulación, se habilita la opción de flipar, lo que permite intercambiar aristas (en celeste) que se encuentran dentro de un cuadrilátero regular. Si la triangulación no es Delaunay, se orienta al usuario a convertirla en tal, dejando en color negro las aristas *legales* que pertenecen a la Triangulación de Delaunay (ver Figura 3).

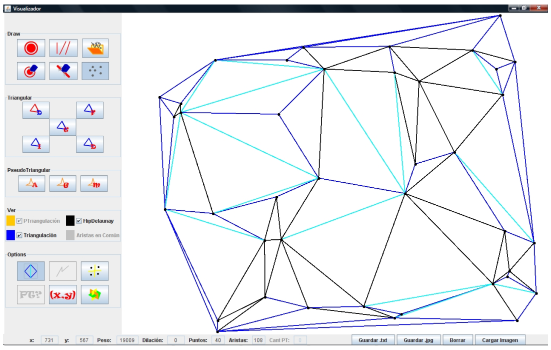


Fig. 3. Triangulación Greedy. Se marcan las aristas que se pueden intercambiar (en celeste) y las aristas de Delaunay (en negro).

3.5 Pseudotriangulaciones

Al igual que en la generación de una triangulación, una pseudotriangulación se genera a través de un conjunto de puntos. La herramienta permite generar las siguientes pseudotriangulaciones:

- Aleatoria (ver Figura 4)
- Distancia Mínima (ver Figura 5)
- Distancia Máxima (ver Figura 6)

También es posible pasar de una pseudotriangulación a otra desde el mismo conjunto de puntos, así como también agregar puntos y moverlos obteniendo resultados en tiempo real.

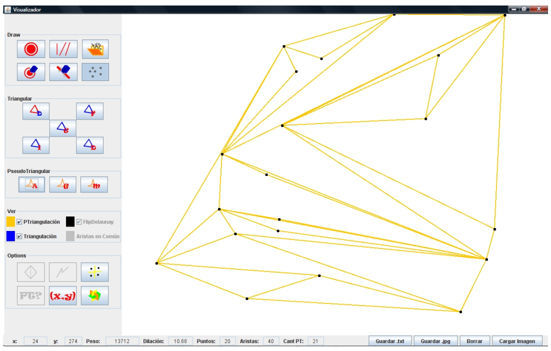


Fig. 4. Pseudotriangulación Aleatoria.

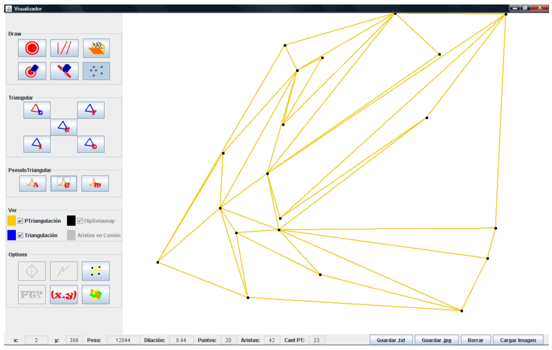


Fig. 5. Pseudotriangulación Distancia Mínima.

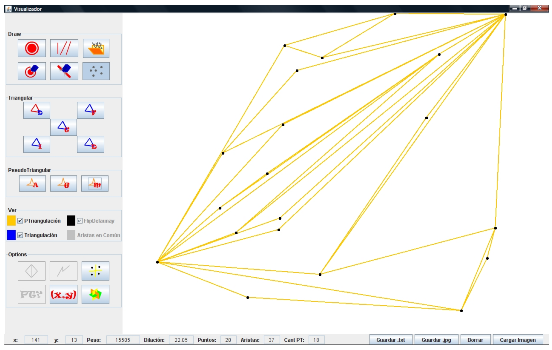


Fig. 6. Pseudotriangulación Distancia Máxima.

3.6 Opciones

En la barra de estados es posible observar: el peso, la cantidad de puntos, la cantidad de aristas, la cantidad de pseudotriángulos, y la dilación de la estructura geométrica generada. También es posible visualizar las aristas (en rojo) involucradas en este último cálculo, seleccionando la opción *Dilation* (ver Figura 7). Si se genera una triangulación y una pseudotriangulación (Figura 8) para la misma nube de puntos, se representan las aristas en común con color gris, las aristas pertenecientes solamente a la triangulación en color azul y en color naranja las de la pseudotriangulación. Desde la barra de estados es posible elegir cuál/es de las estructuras visualizar.

3.7 Dibujo manual

La aplicación permite dibujar triangulaciones o pseudotriangulaciones manualmente, es decir, se pueden agregar puntos y aristas, con el control de no cortes de aristas, como así también se pueden eliminar.

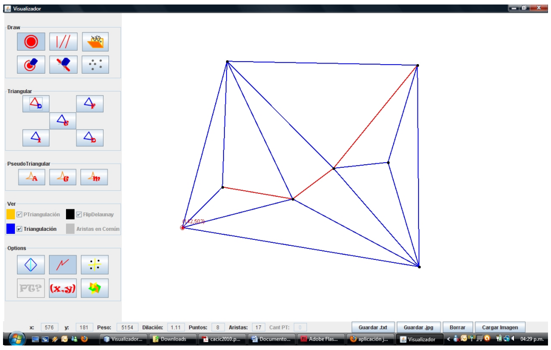


Fig. 7. Triangulación de Delaunay con su correspondiente dilación (rojo).

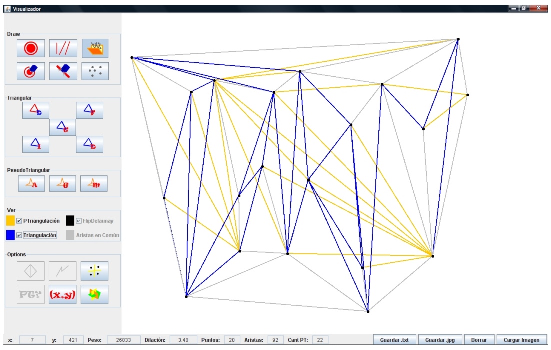


Fig. 8. Triangulación (azul) y Pseudotriangulación (naranja) del mismo conjunto de puntos.

Una característica adicional en este mecanismo de dibujo es la posibilidad de consultar si la estructura construida cumple con la definición de pseudotriangulación.

4 Conclusiones y visión de futuro

Uno de nuestros objetivos ha sido introducirnos en el estudio e investigación de estructuras geométricas y medidas de calidad, que nos conducen a problemas NP, por lo que trabajamos con Metaheurísticas. Del tratamiento de tales estructuras surge la necesidad de contar con herramientas de aplicación que permitan generar, recuperar y/o visualizar instancias particulares, y medir las funciones objetivo en tales casos. por tanto, la herramientas tiene fines educativos y de investigación, o de simulación y de apoyo en el estudio de la Geometría Computacional. Entendemos que implementaciones de este tipo de herramientas que permiten la ejecución de distintos algoritmos que realizan la misma tarea, son extremadamente útiles para mejorar el entendimiento de diversos temas. Como alcance y visión de futuro, se espera que esta herramienta sea una etapa previa al desarrollo de una herramienta mayor, la cual pueda realizar otro tipo de operaciones algebraicas entre diferentes tipos de estructuras geométricas.

La herramienta se encuentra disponible en la siguiente dirección:
http://www.dirinfo.unsl.edu.ar/∼bd2/gc.html

Para mayores datos o consultas, se puede contactar con los autores en las direcciones de correo mencionadas en el encabezado.

References

1. Aplicaciones del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Politécnica de Madrid. www.dma.fi.upm.es/gregorio/
2. Garey M. y Johnson D. Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness, W. H. Freeman (1979)
3. Gudmundsson J. y Levcopoulos C. Minimum weight pseudo-triangulations. Computational Geometry, Theory and applications, 38, pp. 139-153 (2007)
4. Mulzer W. y Rote G. Minimum weight triangulation is NP-hard. Proceedings of the 22nd Annual ACM Symp. on Computational Geometry. pp. 1-10 (2006)