

CAMPO TENSIONAL EN EL ENTORNO DE UNA FISURA. DETERMINACION DE  $K_I$  Y  $K_{II}$  USANDO TECNICAS FOTOELASTICAS

Rivas, C.; Picón, R.; Paris, F.; Lara, E.

E. T. S. Ingenieros Industriales de Sevilla.  
Avda. Reina Mercedes s/n. 41012 Sevilla.

## RESUMEN:

Tras introducir la forma general del campo de tensiones en un borde de grieta se hace una exposición detallada de los métodos para medir  $K_I$  y  $K_{II}$ , resaltando sus ventajas e inconvenientes. Por su generalidad, se ha implementado un método que desarrolla en serie las funciones de tensión. La introducción de las medidas fotoelásticas (que pueden ser de campo lejano) conduce a un sistema sobredeterminado no lineal de ecuaciones, que es resuelto por un método de Newton-Raphson y mínimos cuadrados. Sobre una aplicación experimental se comentan las características de este método.

First of all, the general form of the crack-tip stress field is introduced. Then, a detailed review of  $K_I$ - $K_{II}$  methods is presented, showing their features. A stress-functions series expansion method has been implemented, due to its generality. Experimental far-field isochromatic points are used to fit the series expansion coefficients and the overdeterministic non-linear equation system is solved with a Newton-Raphson least-squares method. Finally the features of this method are discussed using an experimental application.

## 1.- INTRODUCCION

El campo de tensiones en el borde de una grieta viene caracterizado por tres parámetros denominados Factores de Intensificación de Tensiones (FIT), que reflejan el peso de las distribuciones singulares de tensiones que aparecen en el borde de la grieta. Estas distribuciones son siempre de la misma forma, variando sólo el valor de los FIT, que engloban por tanto el efecto de la longitud de la grieta, de las dimensiones del sólido, de la forma de aplicación de las cargas externas y del valor de éstas. Estos parámetros son esenciales en el análisis de estructuras fisuradas mediante la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal (ver, por ejemplo, /1/).

métodos fotoelásticos más comúnmente empleados para determinar los FIT, citándonos a los que aparecen en el caso plano,  $K_I$  y  $K_{II}$ . Aunque en un caso general ambos factores están presentes, los primeros trabajos se desarrollaron sólo para estimar  $K_I$ , asociado al modo simétrico de deformación de la grieta. Por ello, tras introducir brevemente el campo tensional en el entorno de una fisura, se hace un breve resumen histórico de algunos métodos utilizados para medir  $K_I$ . Muchos de estos pueden ser generalizados obteniéndose métodos capaces de medir  $K_I$  y  $K_{II}$ ; estos últimos, objeto de este trabajo, serán pues los que posteriormente comentaremos con detalle. Finalmente, se incluyen algunas aplicaciones numéricas.

En este trabajo vamos a hacer una revisión de los

## 2.- CAMPO TENSIONAL EN EL ENTORNO DE UNA FISURA.

La solución de un problema elástico plano puede ser expresada en función de dos funciones de variable compleja según (/2/).

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \text{Re} (2\phi' - \bar{z}\phi'' - \psi') \\ \sigma_{yy} &= \text{Re} (2\phi' + \bar{z}\phi'' + \psi') \\ \sigma_{xy} &= \text{Im} (\bar{z}\phi'' + \psi')\end{aligned}\quad (1)$$

donde Re, Im, denotan la parte real e imaginaria de una función de la variable compleja  $z = x + iy$ .

Para analizar los caso simétrico y antisimétrico es conveniente realizar los siguientes cambios.

$$2\phi' = Z_1 - \eta \quad (2)$$

$$\psi' = -\frac{Z}{2}(Z' - \eta') + \eta$$

y

$$2\phi' = -iZ_{II} + \gamma \quad (3)$$

$$\psi' = iZ_{II} + \frac{Z}{2}(iZ'_{II} - \gamma')$$

con lo que obtenemos las soluciones asociadas a modo I (simétrico) y II (antisimétrico)

$$\begin{aligned}\sigma'_{xx} &= \text{Re}Z_1 - y\text{Im}Z_1' + y\text{Im}\eta' - 2\text{Re}\eta \\ \sigma'_{yy} &= \text{Re}Z_1 + y\text{Im}Z_1' - y\text{Im}\eta' \\ \sigma'_{xy} &= -y\text{Re}Z_1' + y\text{Re}\eta' + \text{Im}\eta\end{aligned}\quad (4)$$

$$\begin{aligned}\sigma''_{xx} &= 2\text{Im}Z_{II} + y\text{Re}Z'_{II} - y\text{Im}\gamma' + \text{Re}\gamma \\ \sigma''_{yy} &= -y\text{Re}Z'_{II} + y\text{Im}\gamma' + \text{Re}\gamma \\ \sigma''_{xy} &= \text{Re}Z_{II} - y\text{Im}Z'_{II} - y\text{Re}\gamma'\end{aligned}\quad (5)$$

La superposición de los campos I y II da el campo total de tensiones.

Las condiciones para los problemas simétrico y antisimétrico, definidos sobre una grieta centrada en  $y = 0$ ,  $|x| < a$ , son:

$$\begin{aligned}\text{Caso simétrico} \quad \sigma_{xy} &= 0 \quad \text{en } y = 0 \\ \sigma_{yy} &= 0 \quad \text{en } y = 0, |x| < a\end{aligned}\quad (6)$$

$$\text{Caso antisimétrico} \quad \sigma_{yy} = 0 \quad \text{en } y = 0$$

$$\sigma_{xy} = 0 \quad \text{en } y = 0, |x| < a \quad (7)$$

Estas condiciones se traducen, a la vista de (4) y (5) en

$$\begin{aligned}\text{Caso simétrico} \quad \text{Im}\eta &= 0 \quad \text{en } y = 0 \\ \text{Re}Z_1 &= 0 \quad \text{en } y = 0, |x| < a\end{aligned}\quad (8)$$

$$\begin{aligned}\text{Caso antisimétrico} \quad \text{Re}\gamma &= 0 \quad \text{en } y = 0 \\ \text{Re}Z_{II} &= 0 \quad \text{en } y = 0, |x| < a\end{aligned}\quad (10)$$

$$(11)$$

Un tipo de función que satisface las ecs. (9) y (11) y se comporta bien en el infinito es

$$Z_i = G_i (z^2 - a^2)^{-1/2}, \quad i=I, II \quad (12)$$

siendo  $G_I$  y  $G_{II}$  funciones suficientemente suaves que cumplan

$$\text{Im}G_i = 0 \quad \text{en } y = 0 \quad (13)$$

En el entorno del extremo derecho de la grieta, para  $|z-a| \ll a$ , las funciones  $G_i$  tenderán a unos valores constantes, por como han sido definidas (ec. (13)), luego las  $Z_i$  serán de la forma.

$$Z_i = \frac{K_i}{\sqrt{2\pi(z-a)}}, \quad i=I, II \quad (14)$$

Asimismo,  $\eta$  y  $\gamma$  tenderán a valores constantes, por como han sido definidas en (8) y (10). Haciendo

$$\begin{aligned}2\eta &= \sigma_{ox} \\ \gamma &= i\gamma_0\end{aligned}\quad (15)$$

y sustituyendo (14) y (15) en (4) y (5) obtenemos el campo singular de tensiones ( $z-a = r e^{i\theta}$ )

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[ K_I \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \right] \sigma_{ox} \quad (16)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[ K_I \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right]$$

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[ K_I \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + K_{II} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right]$$

A partir de estas tensiones calculamos la tensión

tangencial máxima  $\tau_m$ , cuyo valor es conocido en una franja isocromática (ver, por ejemplo, /3/)

$$(2\tau_m)^2 = \left( \frac{N\lambda}{e} \right)^2 = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (2\sigma_{xy})^2 \quad (17)$$

siendo  $N$  el orden de franja,  $\lambda$  el factor de franja y  $e$  el espesor de la placa. Sustituyendo (16) en (17) obtenemos

$$\begin{aligned}f(K_I, K_{II}, \sigma_{ox}) &= \frac{1}{2\pi r} [(K_I \sin \theta + 2K_{II} \cos \theta)^2 + (K_{II} \sin \theta)^2] \\ &+ \frac{2\sigma_{ox}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} [K_I \sin \theta (1 + 2\cos \theta) + K_{II} (1 + 2\cos^2 \theta + \cos \theta)] \\ &+ \sigma_{ox}^2 - (2\tau_m)^2 = 0\end{aligned}\quad (18)$$

Dado que  $K_I$ ,  $K_{II}$  y  $\sigma_{ox}$  son constantes, la ec.(18) representa la ecuación de una isocromática de orden  $N$ , próxima al borde de la grieta, que es donde tiene validez el campo singular (16).

## 3.- METODOS PARA MEDIR $K_I$

Refiriendonos a métodos  $K_I$ , fueron Post y Wells /4/, /5/, los primeros en usar la fotoelasticidad para medir  $K_I$ . En sus trabajos, el término  $\sigma_{ox}$  (ver ec.(18), con  $K_{II} = 0$ ) fue ignorado. Irwin /6/ apuntó que en las zonas útiles de medida dicho término debía ser incluido y propuso una forma de calcular  $K_I$  y  $\sigma_{ox}$  midiendo  $r_m$  y  $\theta_m$  en el punto más alejado del origen de una isocromática. El método de Irwin /6/ tiene unas cotas angulares fuera de las cuales no puede ser utilizado. Para minimizar el error en la proximidad de dichas cotas, Bradley y Kobayashi /7/ usaron valores de dos isocromáticas y Schroedl y Smith /8/ midieron en  $\theta = 90^\circ$  y usaron asimismo valores de dos isocromáticas. Etheridge y Dally /9/ revisan estos tres métodos e indican que dan errores menores del 5% si  $73^\circ < \theta_m < 139^\circ$  y  $r_m/a < 0.03$ , siendo "a" la semilongitud de la grieta. Debido a los problemas inherentes a medir en distancias tan cerca de la grieta, donde aparecen diversas no linealidades, Theocaris y Gdoutos /10/ proponen extrapolar medidas en puntos lejanos a puntos cercanos, mediante curvas teóricas. En otra línea, se han usado desarrollos en serie para ampliar el campo de medida. Así, Schroedl, Mc Gowan y Smith /11/ y Smith /12/ ajustaron sus medidas a un desarrollo en potencias de  $r$  de  $\tau_m$  en  $\theta = 90^\circ$ , calculando los coeficientes por mínimos cuadrados, mientras que Etheridge y Dally /13/ y /14/ introdujeron términos adicionales (aparte del singular) en la función de tensión  $Z_I$ . Generalizando esta idea aparecieron

trabajos (/15/, /16/, /17/, /18/) donde  $Z_I$  y  $\eta$  son desarrollados en serie de potencias. Por último, mencionemos los métodos de extrapolación (/19/, /20/) basados en extrapolar al origen alguna función de  $\tau_m$  y  $r$  que se comporte linealmente en un entorno de aquel.

## 4.- METODOS PARA MEDIR $K_I$ Y $K_{II}$

Históricamente, fueron Smith y Smith /20/ los primeros en aplicar la fotoelasticidad para medir  $K_I$  y  $K_{II}$ . La ec. (18) fue utilizada, pero ignorando el término  $\sigma_{ox}$

$$(2\tau_m)^2 = \frac{1}{2\pi r} [(K_I \sin \theta + 2K_{II} \cos \theta)^2 + (K_{II} \sin \theta)^2] \quad (19)$$

Si siguiendo el método de Irwin /6/, las medidas fueron realizadas en  $r_m$ ,  $\theta_m$  (fig. 1). La ecuación que da dicho punto es

$$\frac{\partial \tau_m}{\partial \theta} = 0 \quad (20)$$

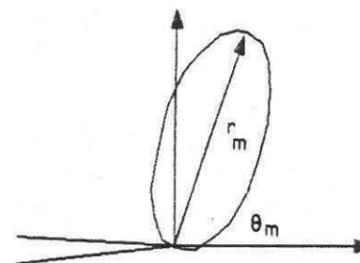


Fig. 1.- Punto de medida en el método de Irwin

Sustituyendo (19) en (20) obtenemos

$$\left( \frac{K_{II}}{K_I} \right)^2 - \frac{4}{3} \left( \frac{K_{II}}{K_I} \right) \cot 2\theta_m - \frac{1}{3} = 0 \quad (21)$$

de la que puede despejarse  $K_{II}/K_I$  sabido  $\theta_m$ . Posteriormente la ec.(19) permite obtener  $K_I$  y  $K_{II}$ . Al aplicar el método se encontró una sensible influencia del término  $\sigma_{ox}$ , no incluido, por lo que los autores proponen calcular  $K_I$  y  $K_{II}$  de varias isocromáticas y efectuar una extrapolación. A la vista de sus resultados cabe decir que la extrapolación de un conjunto de puntos dispuestos sobre una curva es de dudosa fiabilidad.

Obviamente, las ecs. (19) y (20) sólo son válidas en zonas muy próximas al borde de la grieta, donde el término  $1/r$  en la ec. (18) es mucho mayor que los demás. Una forma de estimar el valor de  $\tau_m$  en dicha zona fue



desarrollada por Gdoutos y Theocaris /22/; en su método se efectúan dos medidas de  $\tau_m$  en puntos lejanos al borde de la grieta y estos valores son extrapolados a una zona muy cercana al borde de grieta, usando como fórmulas de extrapolación la solución teórica al problema de una grieta inclinada en un plano infinito. De esa forma se estiman los valores de  $\tau_m$  en dos puntos muy cercanos al borde de grieta; introduciendo estos valores en la ec.(19), junto con las coordenadas  $r, \theta$  de los puntos cercanos, pueden obtenerse expresiones explícitas de  $K_I$  y  $K_{II}$ . Obviamente las fórmulas de interpolación sólo serían válidas para el problema de la placa infinita pero los autores arguyen que también serán aproximadamente válidas para otros casos. El mayor inconveniente del método es, precisamente, la imposibilidad de evaluar la precisión de las curvas de interpolación en el caso de que tratemos con un problema real, de dimensiones finitas.

Como demostramos en el apartado 2, el campo tensional en el entorno de la fisura incluye el término  $\sigma_{ox}$ . A continuación comentaremos una serie de métodos que hacen uso de la ec. (18).

Sanford y Dally /23/ propusieron diversos métodos para ajustar la ec.(18) a los valores experimentales de  $\tau_m$ .

En primer lugar, proponen aplicar la ec.(18) en  $\theta = \pi$  ó en  $\theta = -\pi$ , según donde corten las franjas a la línea de la grieta. Haciendo dos medidas sobre esa línea se obtienen dos ecuaciones de las que  $K_{II}$  y  $\sigma_{ox}$  pueden ser obtenidos explícitamente. A partir de ellos,  $K_I$  se obtiene también de forma explícita, de la ec. (18) particularizada en  $\theta = 90^\circ$ , tomando un punto sobre dicho eje. Se encuentran considerables problemas debido a la gran inclinación de las franjas en su contacto con la grieta y la alteración de aquellas por efectos de borde.

En segundo lugar, proponen una generalización del método de Irwin, tomando medidas en dos isocromáticas y particularizando en ellas la ec.(20); la tercera ecuación se obtiene particularizando la ec.(18) en uno de los dos puntos anteriores. El sistema resultante se resuelve por Newton - Raphson.

Otra generalización del Método de Irwin fue propuesta por Smith y Olasebikan /24/, que usaron la ec.(18) escrita en la forma

$$\frac{2}{m} = \frac{1}{8\pi r} A(\theta, K_I, K_{II}) + \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} B(\theta, K_I, K_{II}, \sigma_{ox}) + C(\sigma_{ox}) \quad (22)$$

Derivando en  $r_m, \theta_m$  se obtiene

$$\frac{1}{8\pi r_m} \frac{\partial A}{\partial \theta} \Big|_{\theta_m} + \frac{1}{\sqrt{2\pi r_m}} \frac{\partial B}{\partial \theta} \Big|_{\theta_m} = 0 \quad (23)$$

Una forma de satisfacer la ec.(23) es anular por separado los términos que multiplican a  $1/r_m$  y  $1/\sqrt{r_m}$ ; es decir

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} \Big|_{\theta_m} = 0 \quad \frac{\partial B}{\partial \theta} \Big|_{\theta_m} = 0 \quad (24), (25)$$

De la ec. (24) se obtiene la ec.(21). Para estimar un valor medio de  $A(\theta_m, K_I, K_{II})$  los autores proponen particularizar la ec.(22) en una serie de puntos  $(r_{mj}, N_j)$ , obteniéndose un sistema sobredeterminado en las incógnitas  $A, B$  y  $C$ . Dicho sistema se resuelve por mínimos cuadrados. Una vez calculado  $A$  tenemos una ecuación del tipo

$$A(\theta_m, K_I, K_{II}) = (K_I \sin \theta_m + 2K_{II} \cos \theta_m)^2 + (K_{II} \sin \theta_m)^2 \quad (26)$$

que, junto con la ec.(21) permite obtener  $K_I$  y  $K_{II}$ .

Volviendo al trabajo /23/, los autores recomiendan finalmente un método sobredeterminado, en el que la función  $f$  (ec. (18)) es evaluada en  $S$  puntos, cada uno con un valor de  $r, \theta, N$ . Así obtenemos el sistema de ecuaciones no lineales

$$f_s(K_I, K_{II}, \sigma_{ox}) = 0 \quad s = 1, S \quad (27)$$

Dicho sistema se resuelve por el método de Newton - Raphson combinado con el de mínimos cuadrados.

Los autores indican que la convergencia es rápida, pero no mencionan nada acerca de la sensibilidad del método respecto a la solución inicial. Hay pocos estudios numéricos de este método en la literatura. Smith y Olasebikan (/24/) remarcan que "los valores iniciales han de ser cuidadosamente escogidos, pues en caso de que no sea así puede haber considerables problemas con la convergencia, o incluso si esta se produce puede hacerlo a unos valores falsos".

Determinados conjuntos de valores de  $K_I, K_{II}, \sigma_{ox}$  pueden ser eliminados observando la relación que tiene con estos parámetros el campo de isocromáticas, como hicieron Dally y Sanford (/25/), representando gráficamente el campo de isocromáticas para distintos conjuntos de valores

de  $K_I, K_{II}, \sigma_{ox}$ .

Al igual que comentamos al hablar de los métodos para medir  $K_I$ , también para medir  $K_I$  y  $K_{II}$ , se han introducido algunos métodos basados en la idea de extrapolación, a las proximidades de la grieta, de alguna función de  $\tau_m$  y  $\sqrt{r}$  que se comporte linealmente en dicha zona. Mencionemos en primer lugar a Smith /26/ que puso la ec. (18) en la forma

$$\tau_m \sqrt{r} = \sqrt{\frac{1}{8\pi r} A(\theta, K_I, K_{II}) + \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} B(\theta, K_I, K_{II}, \sigma_{ox}) + C(\sigma_{ox})} \quad (28)$$

desarrollando a continuación  $\tau_m \sqrt{r}$  en serie de potencias de  $\sqrt{r}$  y reteniendo sólo los términos lineales

$$\tau_m \sqrt{r} = \frac{A(\theta, K_I, K_{II})}{\sqrt{8\pi}} + \hat{B}(\theta, K_I, K_{II}, \sigma_{ox}) \sqrt{r} \quad (29)$$

Midiendo sobre el ángulo  $\theta_m$  de una isocromática cercana representamos  $\tau_m \sqrt{r}$  frente a  $\sqrt{r}$  y extrapolamos al origen, en el cual la ordenada vale  $A/\sqrt{8\pi}$ , lo que da una relación entre  $K_I$  y  $K_{II}$ . La otra relación es la ec. (21), válida cuando  $r \rightarrow 0$ .

Phang y Ruiz /19/ particularizaron la ec.(19) (es decir,  $\sigma_{ox}$  no fue tenido en cuenta) para  $\theta = 90^\circ$  y  $\theta = 0^\circ$

$$\begin{aligned} \tau_m(\theta = 90^\circ) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2} \\ \tau_m(\theta = 0^\circ) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi r}} K_{II} \end{aligned} \quad (30)$$

La representación de  $\tau_m(\theta = 90^\circ)$  y  $\tau_m(\theta = 0^\circ)$  frente a  $1/\sqrt{r}$  y la estimación de la pendiente de estas rectas da dos ecuaciones de las que  $K_I$  y  $K_{II}$  pueden ser obtenidos.

Por último mencionemos a Smith y Olasebikan /24/, que introdujeron un método cuadrático basado en el uso de la ec. (30) particularizada para un ángulo fijo,  $\theta = \theta_0$

$$\frac{2}{m} = \frac{1}{8\pi r} A(\theta_0, K_I, K_{II}) + \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} B(\theta_0, K_I, K_{II}, \sigma_{ox}) + C(\sigma_{ox}) \quad (31)$$

Derivando respecto a  $1/\sqrt{r}$  obtenemos

$$\frac{\partial \tau_m^2}{\partial (1/\sqrt{r})} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{r}} A(\theta_0, K_I, K_{II}) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} B(\theta_0, K_I, K_{II}, \sigma_{ox}) \quad (32)$$

Representando  $\tau_m^2$  frente a  $1/\sqrt{r}$  calculamos la

pendiente de esa curva (por medición directa o ajustando una cuadrática por mínimos cuadrados) y la representamos frente a  $1/\sqrt{r}$ ; la pendiente y la ordenada en el origen son proporcionales a  $A$  y  $B$ . Usando dos ángulos diferentes se tienen ya suficientes ecuaciones para calcular  $K_I, K_{II}$  y  $\sigma_{ox}$ .

El mayor inconveniente de los métodos de extrapolación es que es necesario excluir de los datos experimentales aquellos puntos fuera de la región dominada por el término singular, lo que implica un juicio subjetivo y, además, puede dejar muy pocos puntos útiles para el ajuste de la recta.

Todos los métodos descritos hasta ahora podrían denominarse "de campo cercano" pues hacen uso del campo singular dado por las ecs.(16). El mayor inconveniente de estos métodos radica en la zona útil de medida. Por un lado, no podemos medir muy cerca del borde de grieta, pues la solución tensional está perturbada en esa zona por una serie de factores (ver, por ejemplo, /10/) como son la influencia del radio de curvatura en el borde de grieta, el alto gradiente de tensiones en esa zona (lo que conlleva fuertes variaciones de espesor), la existencia de una zona plástica, la triaxialidad del campo de tensiones (tensión plana en la superficie y deformación plana en el centro), etc...

Theocaris y Gdoutos /10/ recomiendan que, en las habituales condiciones de trabajo de un laboratorio, las medidas sean hechas en una zona definida por  $r/a > 0.05$ .

Por otro lado, no nos podemos alejar mucho del borde de grieta pues el campo singular pierde validez; esta pérdida de validez se produce de una forma particularmente rápida cuando existe un borde libre en las proximidades del borde de grieta.

Para eliminar estos problemas Cottron y Lagarde /27/ generalizaron el método de Sanford y Dally /23/ basándose en su propio método para medir  $K_I$  /17/. Estos autores desarrollaron en series de potencias las funciones  $Z_I$  y  $Z_{II}$  y  $\eta$ , tomando  $\Psi = 0$

$$\begin{aligned} Z_I(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(n - \frac{1}{2}\right)^{-1} A_n z^{n-1/2}, \quad \eta(z) = \sum_{p=0}^{P-1} C_p z^p \\ Z_{II}(z) &= \sum_{m=0}^{M-1} \left(m - \frac{1}{2}\right)^{-1} B_m z^{m-1/2}, \end{aligned} \quad (33), (34), (35)$$

Se puede comprobar que los desarrollos anteriores cumplen las condiciones de contorno en el extremo derecho de una grieta. Usando las ecs. (33) - (35) en las ecs. (4) y (5), sumando éstas y sustituyendo en la ec. (17) obtenemos  $(2\tau_m)^2$  en función de los coeficientes  $A_n, B_m$  y  $C_p$ .

Definiendo una función

$$f(A_n, B_m, C_p, r, \theta) = (\alpha_{xx} - \alpha_{yy})^2 + (2\alpha_{xy})^2 - (2\epsilon_m)^2 = 0 \quad (36)$$

y particularizandola en S puntos isocromáticos ( $S > N + M + P = T$ ), obtenemos un sistema sobredeterminado de S ecuaciones no lineales con T incógnitas.

$$f_s(A_n, B_m, C_p) = 0 \quad s = 1, S \quad (37)$$

Este sistema se resuelve iterativamente por el método de Newton-Raphson y mínimos cuadrados. Este planteamiento es muy general, pero cabe esperar que presente algunos problemas del Método de Sanford y Dally /23/, pues puede verse como una generalización de este.

### 5.- APLICACION NUMERICA

Teniendo en cuenta los comentarios realizados en el apartado anterior, se decidió implementar en el ordenador el método más general de los descritos, que es el de desarrollos en serie de Cottron y Lagarde /27/.

Primeramente se generaron una serie de puntos isocromáticos teóricos, usando unos valores prescritos de  $A_n$ ,  $B_m$ , y  $C_p$  en las ecs. (33)-(35). Posteriormente se introdujeron estos puntos teóricos y se intentó encontrar la solución exacta, lo que sirvió para comprobar que existen distintos mínimos relativos del residuo (cuyo valor coincide con el módulo de las funciones  $f_s$ , consideradas como las componentes de un vector), a los que puede llegarse desde distintos puntos de partida. Por lo demás, el ajuste mejoraba con el número de coeficientes hasta llegar a un residuo cero para un número de coeficientes igual al usado para generar los puntos teóricos.

A continuación se pasó a un experimento real, cargando como se indica la placa de la Fig. 2, de dimensiones  $2a = 4.6$  mm.,  $b = 48.7$  mm.,  $L = 117.5$  mm. y espesor 2.05 mm. El factor

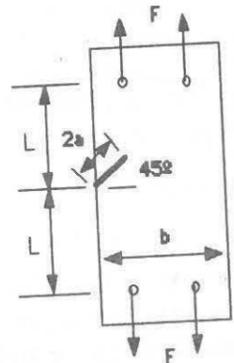


Fig. 2.- Dimensiones de la placa.

de franja del material para luz monocromática de sodio es 0.995 Kg/mm. Cuando había aplicada una fuerza total  $F = 212$  Kg, el campo de isocromáticas es como se muestra en la Fig. 3, que es un negativo. Se procedió a una ampliación de

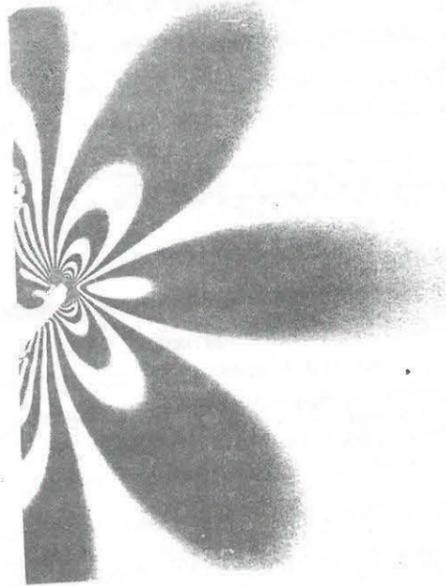


Fig. 3. Campo de isocromáticas. (Negativo)

unos 50 aumentos y sobre dicha ampliación se efectuaron las medidas. Sólo se realizaron medidas de campo lejano, en la zona  $r/a > 0.4$ , y sobre una zona angular de  $\pm 35^\circ$  (según se recomienda en /28/) centrado sobre las líneas aproximadas (una a cada lado) que une los puntos  $(\theta_m, r_m)$  de las isocromáticas. Los órdenes de franja utilizados van de 6 a 9. Se usaron primero 33 puntos y luego 44, procurándose tomar las medidas cerca de la línea central de las zonas descritas más arriba, donde los radios son máximos.

Como ya se dijo, el sistema sobredeterminado no lineal de las ecs. (37) se resuelve por el Método de Newton-Raphson y mínimos cuadrados. Se realizó un problema en lenguaje Basic que implementaba este método y se encontró que el residuo (módulo del vector  $f_s$ ) aumentaba en algunas iteraciones, indicando que el incremento de las variables pasaba por uno o más mínimos relativos. Para evitar este mal funcionamiento se procedió a sucesivas evaluaciones del residuo en particiones del incremento total, tomándose como punto siguiente el de menor residuo. Este método asegura la convergencia, al menos a un mínimo relativo y su comparación con un método puro de Newton-Raphson indica que este último emplea siempre un número de iteraciones (que fue entre 5 y 15 para los casos de la Tabla 1) igual o mayor que la variante propuesta más arriba; en algunos casos dicha variante necesitó un número de iteraciones diez

veces menor que las empleadas por el método clásico. Los resultados obtenidos con nuestro método se muestran en la Tabla 1, comparandolos con los indicados en /29/, que se han

TABLA 1. Valores de  $K_I, K_{II}$  según nº de puntos y términos

Nº TERM	3	6	9	12	15	18	
Nº PUNT							EXACTOS
33	4'2,5'2	5'9,3'7	5'9,3'7	5'2,3'4	7'0,2'9	7'3,2'8	
44	5'8,5'2	6'0,3'9	6'1,4'0	6'2,3'9	5'2,4'0	6'2,4'6	5'6,3'1

denominado "exactos" en la Tabla 1, aunque cabe matizar que la seguridad de dicha estimación es indefinida, según se indica en dicha referencia.

Como primer detalle, resalta la mala solución con tres términos de los desarrollos; ello es debido a que tres términos reproducen el campo singular y este no se adapta a los datos en campo lejano que aquí se han manejado. Por otra parte, examinando los resultados obtenidos con 33 puntos se observa una estabilización de aquellos para 6 y 9 coeficientes mientras que a partir de ahí los resultados empiezan a variar. Ello es debido a que los puntos de medida contienen, obviamente, errores aleatorios. Cuando el número de términos es pequeños el algoritmo de mínimos cuadrados de una función  $f$  que "pasa" entre los puntos de una forma suave; a medida que se aumenta el número de términos el proceso de mínimos cuadrados va teniendo menos peso y la función va acercándose a los puntos de medida. En el límite, cuando el número de términos es igual al de puntos la función pasa por todos los puntos y todos los residuos valen cero, pero la función obtenida tiene muchos máximos y mínimos para adaptarse a los errores de medida; su comportamiento cerca del borde de la grieta resulta así completamente alterado, lo que conduce a valores falsos de  $K_I$  y  $K_{II}$ . Esto se ve corroborado por los resultados obtenidos usando 44 puntos, que son aproximadamente estables desde 6 a 15 coeficientes. Los errores, sin embargo, son mayores en el caso de 44 puntos aunque esto debe ser matizado con la indefinición de la fiabilidad de la solución exacta.

Para estimar la sensibilidad de la solución ante variaciones de la estimación inicial se tomaron los casos de 6 términos, con 33 y 44 puntos y se introdujeron como estimaciones iniciales una serie de parejas de valores  $K_I$  y  $K_{II}$  que diferían de la exacta en porcentajes desde 10 al 250%, contemplándose los casos en que ambos se sobreestiman, ambos se subestiman ó uno se subestime y otro se sobreestime; el resto de los coeficientes se hizo cero. En todos los casos analizados se produjo la convergencia al mismo punto mostrado en la tabla 1, siendo 8 el número máximo de iteraciones empleado.

### 6.- CONCLUSIONES

A la vista de la revisión realizada de los métodos fotoelásticos para medir  $K_I$  y  $K_{II}$ , el método aparentemente más potente, por su generalidad, es el basado en los desarrollos en serie de las funciones de tensión. La expresión del parámetro fotoelástico  $T_m$ , particularizado en una serie de puntos isocromáticos (que pueden ser lejanos, obviando así los problemas de la medidas en campo cercano) permite obtener un sistema sobredeterminado no lineal de ecuaciones. La existencia de múltiples soluciones de este sistema hace que el método clásico de Newton-Raphson no pueda tratarlo adecuadamente, por lo que se ha propuesto una variante que subdivide el incremento de las variables en particiones, escogiendo como punto siguiente aquel en que el residuo sea mínimo; dicha variante ha funcionado en todos los casos chequeados, igual o mejor, en cuanto a convergencia, que el método clásico.

La experiencia numérica muestra que pueden obtenerse estimaciones aceptables de  $K_I$  y  $K_{II}$  con mediciones en campo lejano, pero que es precisa una adecuación entre el número de coeficientes de la serie y el número de puntos de medida, no siendo recomendable acercarse el primero al segundo. En todo caso una solución aceptable puede obtenerse de la zona de estabilización de los resultados respecto al número de términos. La sensibilidad de la solución respecto a los errores de la solución inicial parece ser pequeña, obteniéndose resultados aceptables por estimaciones iniciales erróneas en hasta un 250% de  $K_I$  y  $K_{II}$ , con el resto de los coeficientes desconocidos nulos.

Por último, mencionemos que la desestabilización de la solución con el aumento del número de términos debe ser estudiada más en profundidad, con el fin de evitar, o al menos intentar paliar, este inconveniente del método. Asimismo, la relación óptima nº de términos-nº de puntos, y la proporción lejanos-cercanos de éstos, requieren posteriores estudios numéricos.

### 7.- REFERENCIAS

- 1.- Broek, D. "Elementary engineering fracture mechanics" Martinus Nijhoff, 1.982.
- 2.- Muskhelishvili, N.I. "Some basic problems of the mathematical theory of Elasticity". Noordhoff, 1.953
- 3.- Dally, J.W. y Riley, W.F. "Experimental stress analysis". McGraw-Hill, 1.978.
- 4.- Post, D. "Photoelastic stress analysis for an edge crack

In a tensile field". Proc. Soc. Exp. Stress Analysis, Vol. 12, pp. 99-106, 1.954

5.- Wells, A.A. y Post, D. "The dynamic stress distribution surrounding a running crack-A photoelastic analysis". Proc. Soc. Exp. Stress Analysis, Vol. 16, pp. 69-92, 1.958

6.- Irwin, G.B. Discusión de la Ref. 5, 1.958

7.- Bradley, W.B. y Kobayashi, A.S. "An investigation of propagating cracks by dynamic photoelasticity". Exp. Mech., Vol. 10, pp. 106-113, 1.970

8.- Schroedl, M.A. y Smith, C.W. "Local stress near deep surface flaws under cylindrical bending fields". ASTM STP 536, pp. 45-63, 1.973

9.- Etheridge, J.M. y Dally, J.W. "A critical review of methods for determining stress-intensity factors from isochromatic fringes". Exp. Mech., Vol. 17, pp. 248-54, 1.977

10.- Theocaris, P.S. y Gdoutos, E.E. "A photoelastic determination of  $K_I$  stress intensity factors". Engng. Fract. Mech., Vol. 7, pp. 331-9, 1.975.

11.- Schroedl, M.A. et al. "Determination of SIF from photoelastic data with applications to surface-flaw problems". Exp. Mech., Vol. 14, pp. 392-9, 1.974

12.- Smith, C.W. "Use of three-dimensional photoelasticity in fracture mechanics". Exp. Mech., Vol. 13, pp. 539-44, 1.973

13.- Etheridge, J.M. y Dally, J.W. "A three parameter method for determining the SIF from isochromatic fringe loops". J. Strain Anal., Vol 13, pp. 91-4, 1.978

14.- Etheridge, J.M. et al. "A new method of determining the SIF  $K$  from isochromatic fringe loops". Engng. Fract. Mech., Vol. 10, pp. 81-93, 1.978

15.- Dally, J.M. "Dynamic photoelastic studies of fracture". Exp. Mech., Vol. 19, pp. 349-61, 1.979

16.- Sanford, R.J. "Application of least-squares method to photoelastic analysis". Exp. Mech., Vol. 20, pp. 192-7, 1.980

17.- Cottron, M. et al. "Sur le calcul du facteur d'intensité de contraintes en mode d'ouverture pour un problème plan à partir des données de la photoélasticité". Revue Française de Mécanique, pp. 31-36, 1.981

18.- Rossmann, H.P. "A hybrid technique for improved  $K$  determination from photoelastic data". Exp. Mech., Vol. 23, pp. 152-7, 1.983

19.- Phang, Y. y Ruiz, C. "Photoelastic determination of SIF for single and interacting cracks and comparison with calculated results. Part I: two-dimensional problems". J. Strain Anal., Vol. 19, pp. 23-43, 1.984

20.- Jolles, M. et al. "Use of a hybrid computer assisted photoelastic technique for stress intensity determination in three-dimensional problems". Comput. Fract. Mech., June, pp. 83-102, 1.975

21.- Smith, D.G. y Smith, C.W. "Photoelastic determination of mixed mode SIF". Engng. Fract. Mech., Vol. 4, pp. 357-66, 1.972

22.- Gdoutos, E.E. y Theocaris, P.S. "A photoelastic determination of mixed-mode SIF". Exp. Mech., Vol. 18, pp. 87-96, 1.978

23.- Sanford R.I. y Dally J.W. "A general method for determining mixed-mode SIF from isochromatic fringe patterns". Engng. Fract. Mech., Vol. 11, pp. 621-33, 1.979

24.- Smith, C.W. y Olasebikan, O. "Use of mixed-mode stress-intensity algorithms for photoelastic data". Exp. Mech., Vol. 24, pp. 300-7, 1.984

25.- Dally, J.W. y Sanford R.J. "Classification of SIF from isochromatic-fringe patterns" Exp. Mech., Vol 18, pp. 441-8, 1.978

26.- Smith, C.W. "Use of photoelasticity in fracture mechanics". Mechanics of fracture, ed. G.C. Sih, Vol. 7, Chap. 2, 1.981

27.- Cottron, M. y Lagarde, A. "A far-field method for the determination of mixed-mode SIF from isochromatic fringe patterns". SM Archives, Vol 7, pp. 4-17, 1.982

28.- Doyle, J.F. et al. "Error analysis of photoelasticity in fracture mechanics". Exp. Mech., Vol 21, pp. 429-35, 1.981

29.- Murakami, Y. (ed.) "Stress Intensity factors handbook". Pergamon Press, 1.987.

COMPORTAMIENTO A FATIGA DE MATERIALES COMPUESTOS VIDRIO/RESINAS POLIMERICAS

L. Borao, A. Miravete, G. Segura.

Departamento de Ingeniería Mecánica  
E.T.S. Ingenieros Industriales (Universidad de Zaragoza)  
María Zambrano, 50  
50015 Zaragoza

**Resumen.** - En el presente artículo se expone un método para relacionar el estado tensional y el número de ciclos de vida de un material sometido a fatiga.

El método consiste en asumir que el material, para un nivel de tensión, se comporta a fatiga siguiendo una distribución de Weibull, y ajustar los parámetros desconocidos utilizando los resultados de ensayos realizados con probetas de dicho material.

En el artículo aparece la aplicación de dicho método a un laminado de vidrio-poliéster.

**Abstract.** - In this paper a method has been proposed to predict statistically the fatigue behavior of composite laminae under different levels of load.

This method use Weibull Statistics to quantify specimen level of load effects in fatigue behavior.

In order to adapt the unknown parameters experimental data are utilized.

An experimental test program using glass-polyester is included.

1. COMPORTAMIENTO A FATIGA DE MATERIALES COMPUESTOS

La caracterización a fatiga de un material compuesto es mucho más compleja que en un isotropo dada la heterogeneidad del material y la gran cantidad de variables que rigen el comportamiento micromecánico. Los estudios realizados hasta el momento no consiguen relacionar claramente este comportamiento con las tensiones micromecánicas, y se basan siempre en niveles tensionales medios macromecánicos y un tratamiento estadístico de la vida en ciclos de las probetas. Se asume que la vida de la probeta para un nivel de tensión  $S=F/A$  dado se ajusta a una distribución Weibull, con la siguiente función de distribución:

$$F(x) = \text{EXP} \left[ - \left( \frac{x}{\beta} \right)^\alpha \right]$$

donde  $x$  es la vida en ciclos  
 $\alpha$  es el parámetro de forma  
 $\beta$  es el parámetro de escala

Esto nos permite ensayar probetas a diferentes niveles de tensión y obtener el número de ciclos de vida  $X_{ij}$  a la probeta  $j$  del nivel de tensión  $i$ . Se recomienda una serie de ensayos con más de 3 niveles de tensión y más de 4 probetas para cada nivel. Asumiendo además que el factor  $\alpha$  de forma depende sólo del material ensayado y no del nivel de tensión, podemos escribir:

$$\beta_i = \left[ \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^n \frac{X_{ij}^\alpha}{L_n} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad i=1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n Y_{ij}^\alpha \frac{L_n Y_{ij}}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n L_n Y_{ij} = 0 = F(\alpha)$$

donde  $Y_{ij} = X_{ij}/\beta_i$

El anterior sistema de  $m+1$  incógnitas puede resolverse mediante un algoritmo de Newton-Raphson tomando como variable a incrementar  $\alpha$  y haciendo

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - \frac{F(\alpha_k)}{F'(\alpha_k)}$$

donde  $K$  = número de iteración.