

APLICACION DEL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO AL ANALISIS TENSIONAL DE PROBLEMAS DE CONTACTO CON INTERFERENCIAS GEOMETRICAS

Garrido, J.A.* y París, F.**

* Escuela Ingenieros Industriales de las Palmas
 ** Escuela Ingenieros Industriales de Sevilla

Resumen.— La existencia de interferencias geométricas entre sólidos deformables que entran en contacto es incorporada a la formulación del problema en ecuaciones integrales. Las interferencias existentes son así tratadas como cargas equivalentes. El Método de los Elementos de Contorno es utilizado para la resolución numérica del problema.

1. INTRODUCCION

El Método de los Elementos de Contorno constituye una excelente herramienta para tratar problemas de contacto entre sólidos deformables en presencia o no de fricción [1], [2], [3]. La aplicación de técnicas computacionales permite reducir el tiempo de cálculo [4], lo que constituye un punto de gran importancia al tratarse de un problema no lineal que debe ser tratado incrementalmente. Este aspecto influye sobre todo en problemas no-hertzianos donde la zona de contacto puede ser del orden de las dimensiones de los sólidos en contacto [5].

Existen situaciones en la Ingeniería en que varios sólidos son forzados a ocupar un espacio que es inferior en alguna/s dimensión/es a las que ocuparía todo el conjunto sin que se produjeran deformaciones. Aparecen, de esta forma, interferencias entre los contornos en los sólidos en contacto. Esta situación abarca problemas genéricamente conocidos como zunchado y ajuste con apriete.

La simulación de estos problemas podría efectuarse suponiendo desplazamientos en zonas alejadas de las de interferencia hasta que las dimensiones del conjunto correspondan con las finales admitidas. Esto transformaría el problema de las interferencias en un caso genérico tratado en las referencias anteriores, si bien esto sólo podría hacerse cuando se conociera el proceso de ajuste o para geometrías muy sencillas.

En este trabajo se va a poner de manifiesto siguiendo las directrices de Okamoto [6] y Fredriksson [7], que las interferencias pueden ser incorporadas a la formulación del problema apareciendo finalmente un término en el vector de cargas que puede ser tratado en forma análoga a las sollicitaciones exteriores.

Dado que la existencia o no de fricción no afecta al tratamiento que se propone de las interferencias, el planteamiento del problema se va a hacer para el caso sin fricción debido a que la formulación resulta más reducida.

En el siguiente apartado se describen las modificaciones que han de tomarse en consideración en toda la formulación para la inclusión de interferencias. Finalmente, en el apartado 3 se muestran dos ejemplos, uno de contacto con forme y otro de superficie final desconocida, para probar la viabilidad de la formulación presentada.

2. FORMULACION CON EL M.E.C. DEL PROBLEMA DE CONTACTO CON INTERFERENCIAS GEOMETRICAS

El problema genérico que se pretende abordar está representado en la Fig. 1.

La situación descrita en la Fig. 1 corresponde a la geometría original del problema, pretendiéndose encontrar la configuración deformada y el estado tensional generado. Respecto a la nomenclatura empleada anteriormente, [1] a [5], sólo hay que especificar la variable $\delta(M)$ que representa la interferencia en dos puntos M correspondientes de los contornos ∂D^A y ∂D^B ,

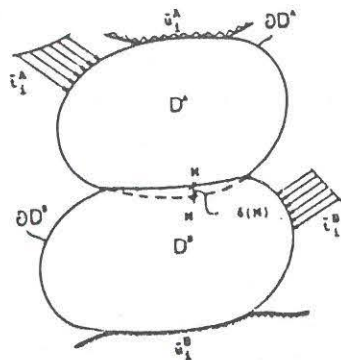


Fig. 1. Definición del problema.

medida sobre un sistema local establecido para aquellos pares de puntos de los contornos de ambos cuerpos, susceptibles de entrar en contacto durante el proceso de carga, [8]. La dirección sobre la que se mide, dirección 1 en lo que sigue, corresponde a la dirección intermedia entre las normales en los puntos M a los contornos ∂D^A y ∂D^B .

En puntos M que pertenecen a la zona de contacto se pueden plantear las siguientes relaciones de carácter incremental.

$$\Delta u_1^A(M) + \Delta u_1^B(M) = \delta(M) \quad (1)$$

$$\Delta t_1^A(M) = \Delta t_1^B(M) \text{ con } \Delta t_1^A(M) < 0 \quad (2)$$

$$\Delta t_2^A(M) = 0 \quad (3)$$

$$\Delta t_2^B(M) = 0 \quad (4)$$

Sólo la ecuación (1), de compatibilidad de desplazamientos normales a ∂D se ve, obviamente afectada por la existencia de una interferencia. En función del valor absoluto de $\delta(M)$, la ecuación (1) juega un papel diferente en el proceso de resolución del problema, como se verá más adelante.

La ecuación integral, ecuación de Somigliana, que gobierna el comportamiento de ambos cuerpos es:

$$\begin{aligned} C_{ij}(x) u_j^K(x) + \int_{\partial D_L^K} T_{ij}^K(x,y) u_j^K(y) ds(y) + \\ + \int_{\partial D_C^K} T_{ij}^K(x,y) u_j^K(y) ds(y) = \\ = \int_{\partial D_L^K} U_{ij}^K(x,y) t_j^K(y) ds(y) + \\ + \int_{\partial D_C^K} U_{ij}^K(x,y) t_j^K(y) ds(y) \end{aligned} \quad (5)$$

para:

$$K = A, B$$

$$x, y \in \partial D^K$$

$$\partial D_L^K + \partial D_C^K = \partial D^K$$

representando ∂D_L^K la zona del contorno de K

exenta de contacto.

La ecuación (5) escrita para los cuerpos A y B junto a las condiciones (1) a (4) define completamente el problema. Sin embargo, antes de proceder a explicitar estas ecuaciones es preciso ver el sentido de (1), antes aludido, según el valor de δ .

- $\delta(M) = 0$ implica que el par de puntos M pertenece a la zona de contacto y la ecuación (1) tiene que ser utilizada en la resolución del siguiente incremento.

- $\delta(M) > 0$ implica que el par de puntos M no pertenece a la zona de contacto, por tanto, no tiene sentido la utilización de esta ecuación (ni, por la misma razón las ec. (2), (3) y (4)) en la resolución del siguiente incremento.

Sin embargo, la ecuación (1), si el par de puntos M es susceptible de entrar en contacto en el siguiente incremento, representará, para que no aparezcan interpenetraciones, una limitación al tamaño de dicho incremento.

- $\delta(M) < 0$ implica que hay una interferencia y el par de puntos M debe incluirse inicialmente en la zona de contacto. La ecuación (1) debe por tanto ser utilizada en la resolución del siguiente incremento.

A continuación escribimos dos ecuaciones integrales (5) para los dominios A y B, bien entendido que δ , según se ha explicado sólo tomará valores negativos o nulos.

$$\begin{aligned} \int_{\partial D_L^A} T_{ij}^{*A} \Delta u_j^A ds + \int_{\partial D_C^A} T_{i1}^{*A} \Delta u_1^A ds + \int_{\partial D_C^A} T_{i2}^{*A} \Delta u_2^A ds = \\ = \int_{\partial D_L^A} U_{ij}^A \Delta t_j^A ds + \int_{\partial D_C^A} U_{i1}^A \Delta t_1^A ds \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial D_L^B} T_{ij}^{*B} \Delta u_j^B ds - \int_{\partial D_C^B} T_{i1}^{*B} \Delta u_1^A ds + \\ + \int_{\partial D_C^B} T_{i1}^{*B} \delta(M) ds + \int_{\partial D_C^B} T_{i2}^{*B} \Delta u_2^B ds = \\ = \int_{\partial D_L^B} U_{ij}^B \Delta t_j^B ds + \int_{\partial D_C^B} U_{i1}^B \Delta t_1^A ds \end{aligned} \quad (7)$$

donde *, implica simbólicamente la inclusión del término libre.

Efectuando una aproximación de pequeño soporte de las variables Δu e Δt sobre ∂D^K , las ecuaciones (6) y (7) conducen a un sistema de ecuaciones lineales. En este caso se ha utilizado una aproximación con elementos lineales discontinuos pudiéndose encontrar detallada información del uso de los mismos en [1-3].

Esquemáticamente, el sistema de ecuaciones que la aproximación genera se puede representar en la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} H_t^A & 0 & -G_u^A & 0 & H_{c1}^A & H_{c2}^A & 0 & -G_{c1}^A \\ 0 & H_t^B & 0 & -G_u^B & -H_{c1}^A & 0 & H_{c2}^B & -G_{c1}^B \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u_L^A \\ \Delta u_L^B \\ \Delta t_L^A \\ \Delta t_L^B \\ \Delta u_{1c}^A \\ \Delta u_{2c}^A \\ \Delta u_{2c}^B \\ \Delta t_{1c}^A \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -H_u^A \Delta u_L^A + G_t^A \Delta t_L^A \\ -H_u^B \Delta u_L^B + G_t^B \Delta t_L^B - H_{c1}^B \delta \end{bmatrix}$$

$$\delta(M) \leq 0 \quad \delta, \forall M \in \partial D_C \quad (8)$$

Donde, por ejemplo:

- Δu_L^A representa desplazamientos en puntos del contorno del dominio A, situados fuera de la zona de contacto.

- Δu_{1c}^A representa desplazamientos en la dirección 1 en puntos en la zona de contacto referidos al cuerpo A.

- H_t^A representa integraciones de T_{ij} sobre la parte de ∂D_L^A donde las tensiones son conocidas, desde todos los nodos de A.

En el sistema de ecuaciones representado por (8), las interferencias juegan el mismo papel que las acciones exteriores ($\Delta t_L^K, \Delta u_L^K$). Por consiguiente, el proceso incremental que debe ser aplicado para la resolución de (8), no se ve afectado por la presencia de las mismas, si bien la carga que deriva de ellas debe ser aplicada en primer lugar para que las acciones externas (si existieran) puedan actuar sobre un sistema físicamente compatible. Una información detallada sobre el proceso incremental puede encontrarse en [1] y [3].

La aplicación de la fuerza que deriva de las interferencias es función del tipo de contacto que se vaya a producir. Si el contacto es conforme, es decir el tamaño final de la zona de contacto no depende de la carga aplicada (en este caso de la interferencia existente), toda la carga se aplica de una vez. En el caso de contacto no conforme se supone como zona de contacto inicial la afectada por las interferencias, variándose esta zona en función de la solución obtenida, hasta alcanzar una solución compatible. Así, se aumentará la zona de contacto si aparecen interpenetraciones en puntos fuera de la zona de contacto y se disminuirá dicha zona si aparecen tracciones en puntos que inicialmente se han supuesto en ella por existir interferencias en ellos.

A continuación se presentan dos aplicaciones pertenecientes a los casos genéricos de contacto conforme y no conforme antes enunciados.

3. EJEMPLOS

3.1. Ajuste con apriete entre dominios rectangulares

La Fig. 2 representa las dimensiones y propiedades de ambos dominios. Las dimensiones del B no se encuentran especificadas por cuanto se va a hacer un estudio para comprobar la influencia de h_2 y L_2 en relación a h_1 y L_1 , con objeto de chequear la influencia que el tamaño relativo de los dominios tiene en la distribución de tensiones. También, y a tal efecto, se considerará la posibilidad de que las aristas superior o inferior del conjunto estén apoyadas o empotradas.

$$E^A = E^B = 4000 \text{ Nw/mm}^2$$

$$\nu^A = \nu^B = 0.35$$

$$h_1 = 20 \text{ mm.}, L_1 = 80 \text{ mm.}, \delta = 0.1 \text{ mm.}$$

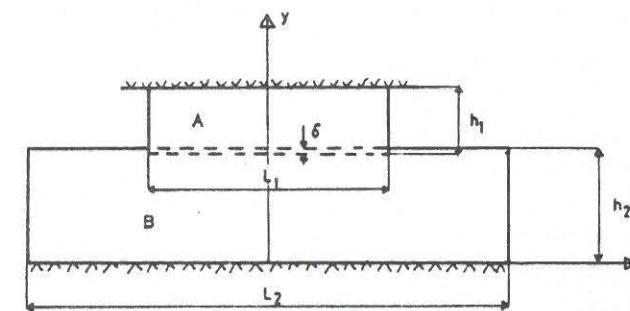


Fig. 2. Definición del problema.

La existencia de simetría respecto al eje y, implica que sólo es necesario discretizar la mitad del dominio total, habiéndose utilizado 8 elementos para modelar la semilongitud de contacto. Los nodos se han situado de los extremos a una distancia igual a un cuarto de la longitud del elemento.

Puesto que se asume la hipótesis de pequeños desplazamientos (el valor de δ respecto a las dimensiones de ambos dominios así lo garantiza), no tiene influencia sobre la solución final el que la geometría de los sólidos reproduzca o no las interferencias. Los resultados que se muestran están obtenidos sobre discretizaciones que no la recogen.

La Fig. 3 muestra la evolución de la compresión a lo largo de la semilongitud de contacto. Las aristas superior (A.S) e inferior (A.I) han sido consideradas empotradas (E) ó apoyadas (A).

Por tratarse de casos sin rozamiento y contacto conforme, todos los resultados se obtienen en un sólo incremento de carga.

Como era evidente esperar, el nivel de las compresiones disminuye al aumentar h_2 (casos c,d,e) mientras que al uso de rodillos lleva a distribuciones más uniformes (casos b y c). También la existencia de esquinas provoca un cambio cualitativo en la forma de trabajo del conjunto, tendiendo a funcionar como punzón y

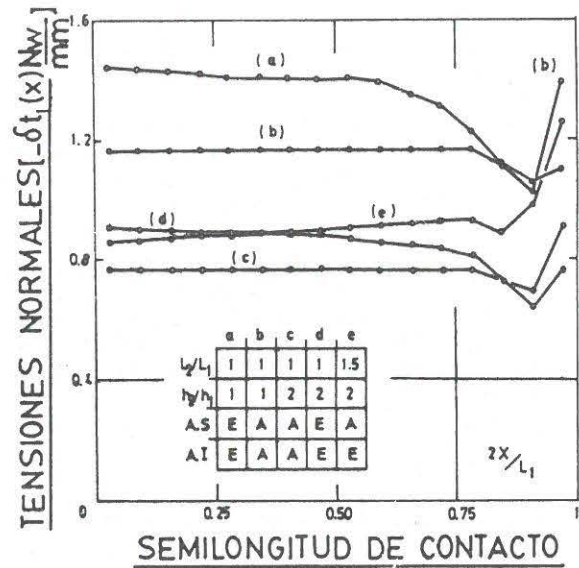


Fig. 3. Evolución de las tensiones normales en la semilongitud de contacto.

apareciendo picos importantes de tensión en el entorno de la esquina. Esto se aprecia en la Fig. 4 donde $L_2/L_1 = 2$ y se hace variar h_2/h_1 y en la Fig. 5 donde $h_2/h_1 = 2$ y se hace variar L_2/L_1 . En ambos casos, las aristas superior e inferior permanecen empotradas.

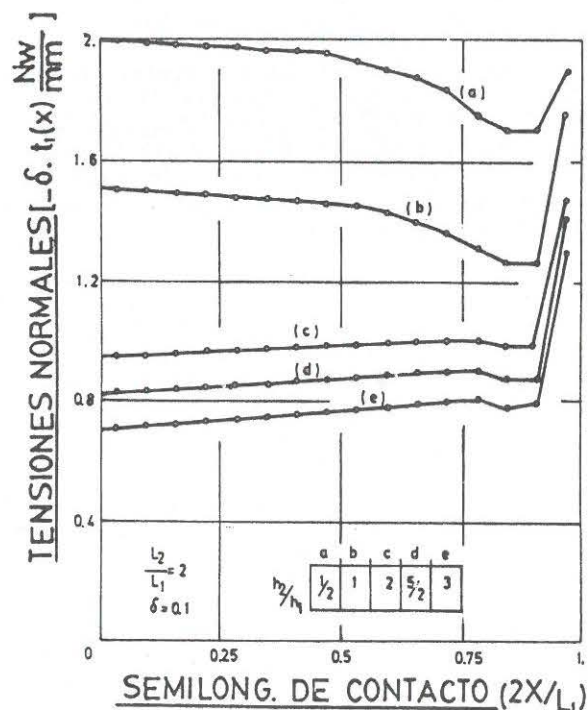


Fig. 4. Influencia de h_2/h_1 en la tensión normal.

La presencia de la esquina no es sin embargo, por sí sola, responsable del pico de tensiones. Así, en el caso a de la Fig. 4 la flexibilidad del elemento sobre el que actúa el punzón hace que las máximas tensiones de compresión

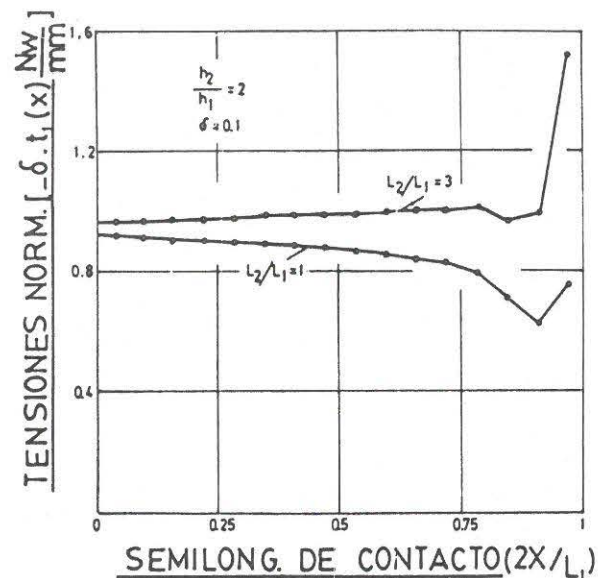


Fig. 5. Influencia de L_2/L_1 en la tensión normal.

aparezcan en el centro de la zona de contacto.

La Fig. 6 recoge la distribución de tensiones normales y tangenciales para el caso de que exista fricción, habiéndose considerado un modelo de Coulomb con $\mu = 0.2$.

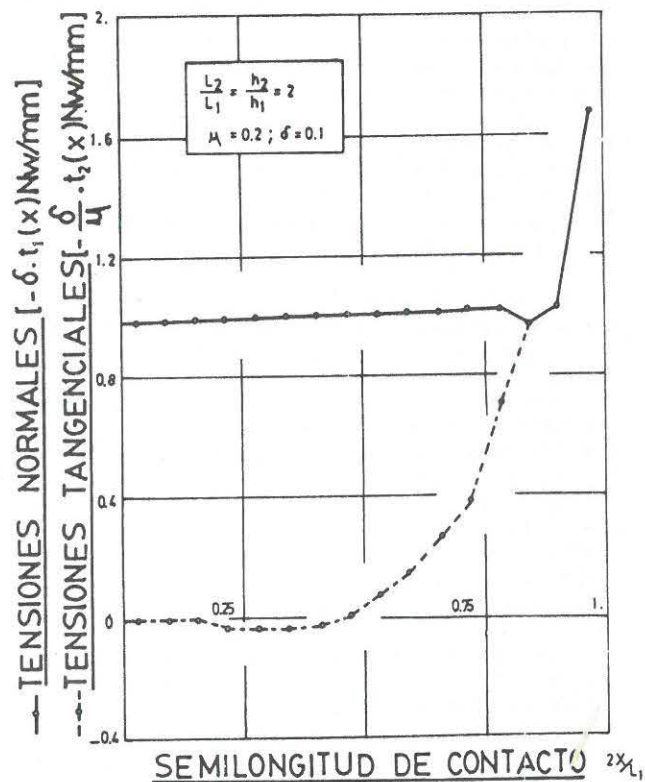


Fig. 6. Tensiones normales y tangenciales a lo largo de la semilongitud de contacto.

En este caso, al desconocer el tamaño de las zonas de adhesión y deslizamiento el problema puede resolverse con un incremento, pero después de haber realizado ensayos con diferentes particiones hasta obtener una en que los resultados sean coherentes con la partición propuesta. La partición correcta incluye en este caso tres pares de contacto en deslizamiento y el resto en adhesión.

Finalmente, la Fig. 7 incluye deslizamientos relativos en la zona de contacto con y sin fricción.

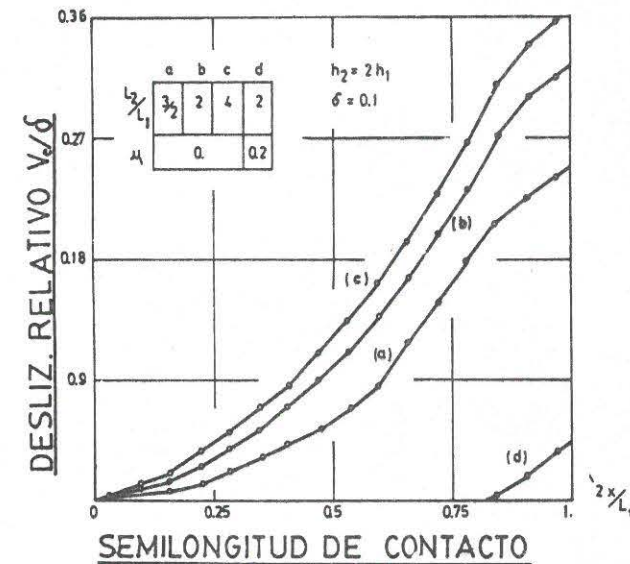


Fig. 7. Deslizamientos relativos en la zona de contacto.

3.2. Interferencia entre dominios circulares

La Fig. 8 representa dos semicírculos con una zona de interferencia esquemáticamente representada por el valor de interferencia máxima y el semiángulo α .

$$E^A = E^B = 4000 \text{ Nw/mm}^2$$

$$\nu^A = \nu^B = 0.35$$

$$R = 10 \text{ mm.}, \delta_{\text{max}} = 0.00998 \text{ mm.}$$

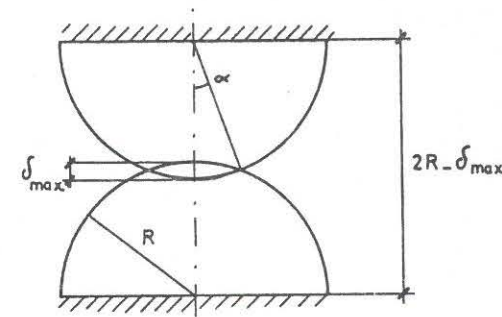


Fig. 8. Definición del problema.

Al igual que en el ejemplo anterior la discretización puede hacerse sin considerar las interferencias. En este caso la zona de interferencias (la mitad pues hay simetría respecto al eje vertical) se ha modelado con 10 elementos, el empotramiento con 4 y la zona de la circunferencia libre de contacto con 14. De esta forma el problema global tiene 112 grados de libertad.

A diferencia del ejemplo anterior δ no es constante a lo largo de la zona de interferencias geométricas. A efectos del proceso incremental esto no tiene ninguna trascendencia, pero sí el hecho de que el contacto no sea conforme, es decir no se conozca la zona de contacto final correspondiente a la configuración deformada en equilibrio. El procedimiento consiste en suponer inicialmente toda la zona afectada por las interferencias como zona de contacto y modificar esta en función de los resultados obtenidos. Como era de esperar, con esta suposición aparecen tracciones en el extremo, lo que indica que la zona de contacto debe ser menor. La zona en que aparecían tracciones se sitúa fuera de la nueva zona de contacto (las interferencias geométricas de esta zona ya no juegan ningún papel), y se vuelve a resolver, actuando así hasta que se obtenga una solución compatible (desaparición de tracciones en la zona de contacto, sin interferencias en la zona sin contacto). La tabla 1 recoge el proceso seguido (4 pruebas) hasta obtener la definitiva.

Tabla 1.- Resumen de las pruebas realizadas hasta encontrar una situación compatible.

Zona de contacto ensayada	Zona donde aparecen tracciones (*)
α	$0,775 \alpha$
$0,725 \alpha$	$0,625 \alpha$
$0,575 \alpha$	$0,575 \alpha$
$0,525 \alpha$	$0,525 \alpha$
$0,475 \alpha$	-

La solución compatible incluye en la zona final de contacto solamente la mitad de la zona afectada por las interferencias.

La Fig. 9 representa la evolución de las tensiones normales en la zona de contacto final (puntos) frente a la solución de Hertz para esa zona de contacto (línea continua). La buena coincidencia entre los resultados avala, dado que se trata por el tamaño de la zona de contacto de un caso hertziano, la solución dada a la existencia de interferencias.

(*) Por zona donde aparecen tracciones debe interpretarse el ángulo a partir del cual dichas tracciones aparecen. Cuando el valor de esta columna sea igual a la precedente, eso implica que sólo aparecen tracciones en el último nodo de la zona de contacto.

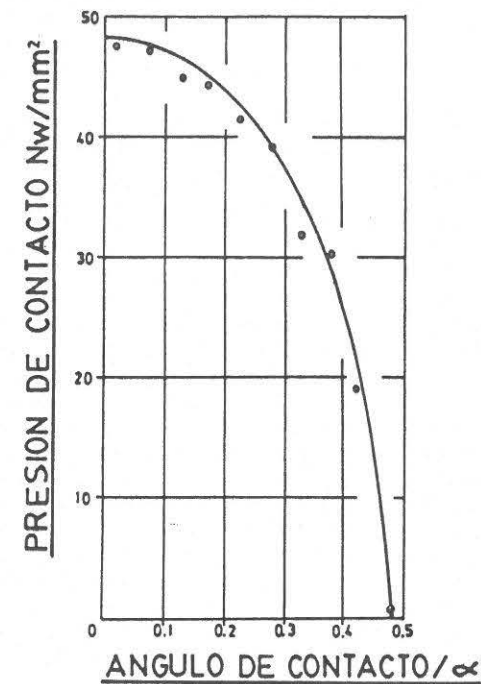


Fig. 9. Evolución de la presión de contacto.

4. CONCLUSIONES

Se ha presentado una formulación de problemas de contacto con el Método de los Elementos de Contorno que incluye la presencia de interferencias geométricas entre los dominios que están en contacto. Su efecto es considerado como una carga equivalente, siendo su tratamiento análogo al de las cargas exteriores, por lo que el procedimiento incremental general puede ser aplicado también sin ninguna modificación cuando existen interferencias.

En el caso de ajuste con apriete de dominios rectangulares se han obtenido reglas acerca de la influencia de la geometría y las condiciones de apoyo en las tensiones de contacto. Las tensiones máximas se alcanzan en el centro salvo que haya esquinas (se produzcan punzonamientos) y no sea pequeña la rigidez del elemento sobre el que se punzona respecto a la del punzón, en cuyo caso aparecerían picos de tensión en la esquina.

5. REFERENCIAS

- Garrido, J.A. "El problema de contacto en Elasticidad mediante Ecuaciones Integrales". Tesis Doctoral, E.T.S.I.I. Universidad Politécnica de Las Palmas, 1986.
- París, F. y Garrido, J.A. "Análisis del problema de contacto sin fricción con el Método de los Elementos de Contorno". Anales de Ingeniería Mecánica, Año 2, Núm. 1, p. 22-29, 1984.

- París, F. y Garrido, J.A. "Análisis del problema de contacto con fricción de Coulomb con el Método de los Elementos de Contorno". Anales de Ingeniería Mecánica, Año 2, Núm. 1, p. 38-45, 1984.
- París, F. y Garrido, J.A. "Aspectos numéricos de la Aplicación del Método de los Elementos de Contorno al problema de contacto". Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, Vol. 2, 1, 43-62, 1986.
- Garrido, J.A. y París, F. "Aplicación del Método de los Elementos de Contorno a problemas de contacto no hertzianos". Anales de Ingeniería Mecánica, Año 3, Núm. 2, p. 81-88, 1985.
- Okamoto, N. y Nakazawa, M. "Finite Element incremental contact analysis with various frictional conditions". Int. J. Num. M. Eng., Vol. 14, pp. 337-357, 1979.
- Fredriksson, B. "Finite Element solution of surface nonlinearities in structural mechanics with special emphasis to contact and fracture mechanics problems". Computers and Structures. 6, 281-290, 1976.
- París, F. y Garrido, J.A. "On the use of discontinuous Elements in two Dimensional Contact Problems". Boundary Element VII, Ed. by C.A. Brebbia. Springer-Verlag, 1985.