

APLICACION DEL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO A PROBLEMAS DE CONTACTO NO HERTZIANOS

J.A. Garrido(\*) y F. París (\*\*)

(\*) E.T.S.I.I. Universidad Politécnica de Las Palmas

(\*\*) E.T.S.I.I. Universidad de Sevilla

Resumen.- Se presentan resultados de problemas en los que la dimensión de la zona final de contacto no es despreciable frente a otras dimensiones características de los dominios implicados. El problema se resuelve mediante un proceso incremental - sobre una formulación de elementos de contorno.

1. INTRODUCCION

El contacto entre cuerpos elásticos fue estudiado por vez primera por Hertz, Ref. /1/, en 1881. Hertz desarrolló la formulación analítica para la determinación de la distribución de tensiones en la superficie de contacto, apoyándose en la función potencial de Newton. Los resultados obtenidos, fueron avalados por experimentaciones con superficies esféricas y cilíndricas. Tomás y Hoersch, Ref. /2/, determinaron la máxima tensión tangencial en el eje de simetría al comprimir un disco sobre un semiplano, mediante la transformación de la solución de Hertz en integrales elípticas. La formulación Hertziana ha sido punto de partida para la resolución de muchos problemas en los que, en alguna medida, puede establecerse la hipótesis básica de la teoría, que supone la magnitud de la zona de contacto muy pequeña comparada con el radio de curvatura de los cuerpos en contacto. Los trabajos analíticos orientados a la resolución de problemas no Hertzianos, se enmarcan siempre en el terreno de la resolución de casos concretos. Así, Mindlin, Ref. /9/, analizó el efecto de las sollicitaciones laterales sobre el deslizamiento relativo de los cuerpos, limitando el valor de la tensión tangencial con la ley de Amontons-Coulomb. Kalker, Ref. /14/, utiliza principios variacionales para abordar ciertos problemas no Hertzianos.

El mayor énfasis puesto en los últimos años, en la utilización de métodos numéricos, ha contribuido a la realización de formulaciones generales sobre modelos discretos, que permiten abordar una gran variedad de problemas con distintas formas y geometrías.

Así, las Refs. /4/, /5/, /6/ y /15/, representan algunos ejemplos de la formulación con Elementos Finitos. El Método de los Elementos de Contorno, ha sido utilizado más recientemente, mostrándose como una herramienta eficaz para resolver este tipo de problemas. Las Refs. /3/, /7/, /10/ y /12/ representan algunos ejemplos con el M.E.C.

En este trabajo se van a estudiar dos tipos de problemas no Hertzianos. El segundo corresponde al caso en que la superficie de contacto no depende de la carga aplicada, pudiendo tener una dimensión similar a las características de los cuerpos en estudio. El primero, corresponde al caso en que la zona de contacto sí depende de la carga aplicada, pero la forma local de la curva permite que también aparezca una zona de contacto final de longitud comparable a las dimensiones características iniciales. Ambos casos pueden corresponder, entre otros, a placas de apoyo comúnmente utilizados en estructuras metálicas (Ref. /13/).

El método que se utiliza para el análisis es el descrito en las Refs. /10/ y /12/, es decir, Elementos de Contorno con variación lineal no conforme de las variables.

2. RESUMEN DEL METODO

Se trata de estudiar el estado tensional y la configuración deformada de dos o más dominios que interaccionan entre sí a lo largo del proceso de carga. En esta superficie de contacto se genera un estado tensional que para un punto cualquiera, puede representarse por un vector tensión asociado a un sistema local de coordena-



das, Fig. 1, que lleva asociados los correspondientes desplazamientos.

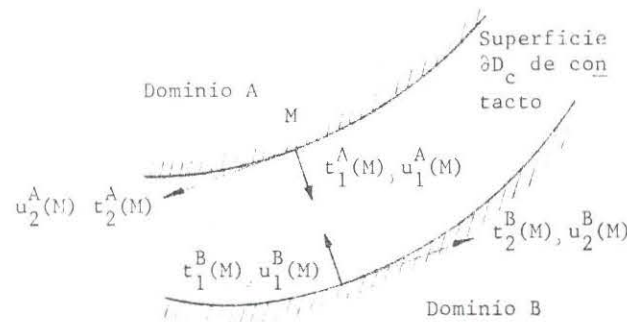


Fig. 1.- Definición de las variables en la zona de contacto.

Las 8 variables asociadas a cada par de puntos en contacto no pueden tomar valores cualesquiera por cuanto deben satisfacer relaciones de compatibilidad, quedando solamente 4 variables independientes que diferirán según se considere o no la presencia de fricción (ref. /10/).

El Método de los Elementos de Contorno junto con la aplicación de estas relaciones lleva a la generación de una serie de ecuaciones algebraicas que pueden representarse esquemáticamente, para cada dominio K, en la forma:

$$\begin{bmatrix} H \\ \dot{H}^c \end{bmatrix}^K \begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta u^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ \dot{G}^c \end{bmatrix}^K \begin{Bmatrix} \Delta t \\ \Delta t^c \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Donde:

- H, G representan integraciones sobre el contorno de K de la solución fundamental de Kelvin en tensiones y desplazamientos respectivamente.

- El superíndice c es utilizado para representar variables asociadas a la zona de contacto,

El carácter incremental de las variables indica que el problema puede no ser lineal debido al desconocimiento de la superficie final de contacto y/o a la presencia de la fricción. Esto hace que el problema haya que resolverlo incrementalmente. Algunos autores, Andersson ref. /16/ resuelven el caso en que se desconoce la zona de contacto mediante un proceso de pruebas ajustando en cada una de ellas la supuesta zona en función de los resultados erróneos obtenidos en la prueba anterior. Sin embargo, este proceso puede no ser convergente, Panagiotopoulos, - ref. /17/.

El conjunto de ecuaciones (1) para los dominios K que se consideren conducen, una vez reordenadas las variables, a:

$$K \cdot x = F \quad (2)$$

donde:

K, matriz de coeficientes del sistema que incluye valores de H y G según que las incógnitas sean desplazamientos o tensiones, respectivamente. Por supuesto H<sup>c</sup> y G<sup>c</sup> están en K.

x, vector de incógnitas que incluye valores incrementales de la tensión y los desplazamientos desconocidos fuera de la zona de contacto y todas las variables de la misma.

F, vector de cargas que recoge el efecto de tensiones y desplazamientos prescritos (también en valor incremental) en los contornos.

En la ecuación (2) ya se han introducido las condiciones que definen el estado de la interfase: compatibilidad de tensiones y desplazamientos normales en toda la zona y además posibilidad de desplazamientos tangenciales relativos en la zona de deslizamiento y valores de la tensión tangencial inferiores a los definidos por el coeficiente de rozamiento en la zona de adhesión.

El proceso incremental se describe en la Fig. 2. Cada incremento está definido por el menor de los valores de las solicitaciones que mantiene las condiciones de contacto supuestas para la aplicación de la solicitación. La errorneidad de dicha suposición es detectada una vez resuelto el sistema (2), comprobando que las condiciones descritas en el párrafo anterior no se han violado.

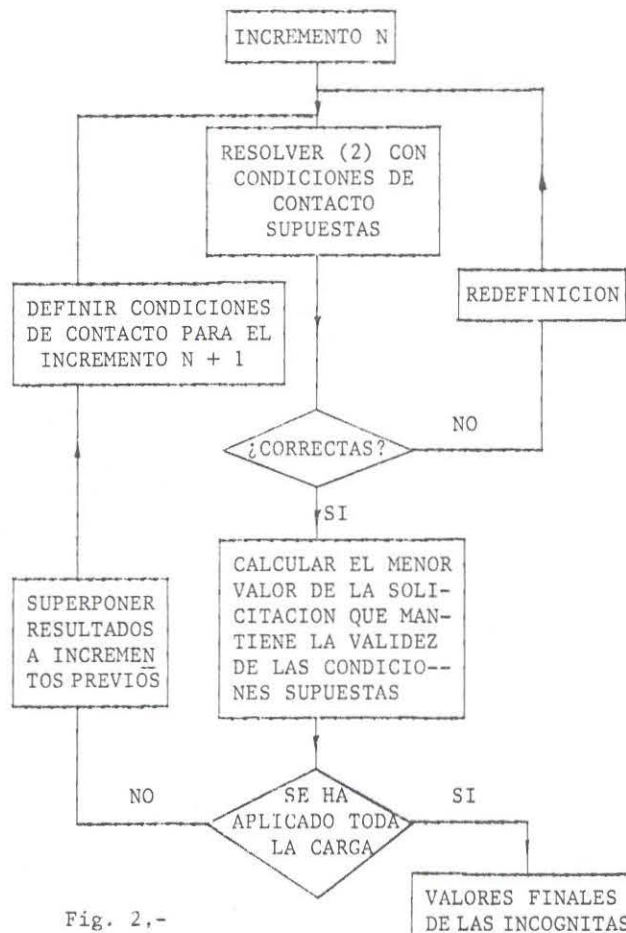


Fig. 2.-

En los casos en que la superficie de contacto varíe con la carga, para establecer un criterio de entrada en contacto de dos puntos hay que definir un sistema de coordenadas intermedio, puesto que el establecido en la Fig. 1 para cada par de puntos candidatos a entrar en contacto no es suficiente. Se han probado diferentes opciones asociadas tanto a nudos como a elementos para evitar de esta forma posibles incompatibilidades geométricas en el proceso de contacto nodo a nodo. En todos los casos, y debido a la hipótesis de pequeños desplazamientos que se está manejando los resultados no han diferido de los que se obtienen con la opción propuesta en la ref. /12/, incluso para los problemas no Hertzianos en que la superficie de contacto toma un valor importante.

Finalmente, cabe señalar que en el proceso de solución del sistema de ecuaciones se ha aplicado una técnica de condensación estática que permite el manejo de sistemas de tamaño considerablemente menor.

A menudo, la resolución de un cierto problema requiere la consideración de varios capítulos de solicitaciones, los cuales, a su vez, han de ser tratados en varios incrementos. En cada uno de estos, las condiciones de contorno se modifican cuantitativamente, sólo en el valor de la solicitación que actúa en el capítulo y cualitativamente, en el cambio que corresponde a la condición de contacto que ha definido su tamaño. Si en cada capítulo, se considera toda la zona candidata a contactar y la región libre de contacto que alberga la solicitación prescrita no nula que corresponde al mismo, puede deducirse un sistema de menor tamaño que (2), conformado por coeficientes que afectan a grados de libertad que permanecen activos en el capítulo de carga, entendiéndose por activos los asociados a las zonas anteriormente definidas. Puede, por tanto establecerse la siguiente partición que conlleva a que el sistema (1) se conforma en:

$$\begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ap} \\ K_{pa} & K_{pp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_a \\ x_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_a \\ F_p \end{Bmatrix} \quad (3)$$

por lo que sólo es preciso resolver (4)

$$\hat{K}_{aa} \cdot \hat{x}_a = \hat{F}_a \quad (4)$$

con:

$$\hat{K}_{aa} = (K_{aa} - K_{ap} \cdot K_{pp}^{-1} \cdot K_{pa}) \quad y$$

$$\hat{F}_a = (F_a - K_{ap} \cdot K_{pp}^{-1} \cdot F_p)$$

x<sub>a</sub>, representa el vector de grados de libertad y F<sub>p</sub> el vector que contiene los términos independientes que corresponden a las ecuaciones relativas a nodos pasivos. El significado de los restantes conjuntos puede ser interpretado sencillamente. Es de interés destacar, que el producto K<sub>ap</sub> · K<sub>pp</sub><sup>-1</sup> puede ser evaluado al inicio

de cada capítulo, al incluir coeficientes que se obtienen de la integración sobre regiones de finidas como pasivas (∂D<sub>p</sub><sup>K</sup>), desde nodos activos (K<sub>ap</sub>) y pasivos (K<sub>pp</sub>).

### 3. EJEMPLOS

#### 3.1. Apoyo mediante placas de asiento curvo

En la Fig. 3, se representa un dispositivo de apoyo para una viga mediante una placa de asiento curvo. Los tornillos que unen las alas de la viga a las dobles Tes soldadas a la placa de asiento, no tienen ninguna función resistente en el plano de la figura. Sólo evitan el desplazamiento transversal del perfil. De hecho no deben quedar muy apretadas, pues en ese caso se trataría de un empotramiento. De esta forma la carga vertical p se transmite íntegramente a través de un elemento curvo.

Para cargas de compresión poco importantes se utilizan, generalmente, contornos cilíndricos en la pieza de sustentación, que pueden ser calculadas aplicando la solución Hertziana. Un análisis detallado con y sin fricción de este tipo de superficies con el M.E.C., puede encontrarse en ref. /7/.

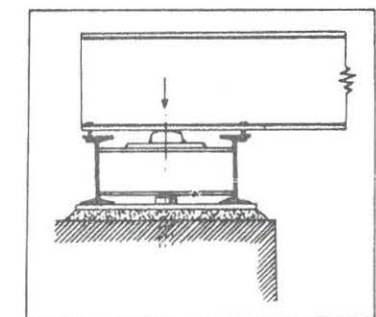


Fig. 3.- Apoyo mediante placa de asiento curva.

La utilización de contornos no cilíndricos es frecuente cuando se han de transmitir cargas de compresión altas, a fin de obtener una distribución de tensiones más uniforme sobre una superficie de contacto mayor que la que correspondía a un contorno cilíndrico.

Con objeto de analizar mediante elementos de contorno un caso concreto del que se dispone solución numérica, se considera el modelo representado en la figura 4, resuelto con Elementos Finitos por Marks, refs. /4/ y /5/ y Mahmoud, Marks y Salamon, ref. /6/. A efectos de la comparación con dichos autores se considera el caso sin fricción.

El contorno del punzón, descrito por la ecuación Y = 0.05 x<sup>4</sup>, hace que el problema sea de naturaleza no Hertziana. El modelo con elementos lineales discontinuos se representa en la figura 5, habiéndose considerado implícitamente la simetría respecto del eje Y (ref. /7/).



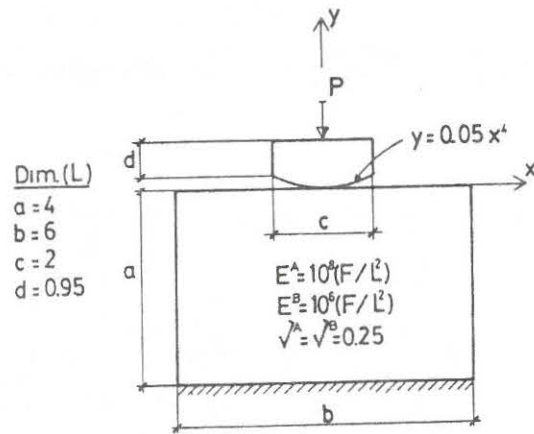


Fig. 4.- Definición del modelo.

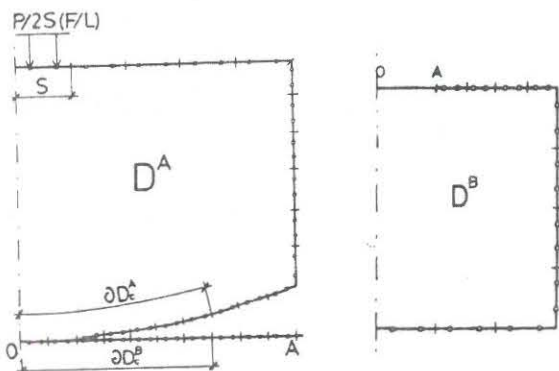


Fig. 5.- Discretización utilizada.

El contorno de cada cuerpo se modela con 21 elementos, estando representada la zona candidata a contactar por siete elementos. Los nodos se han situado a una distancia de los extremos igual a un cuarto de la longitud del elemento a que pertenecen. La solicitación se aplica en forma de distribución constante sobre el elemento de  $\partial D^A$  próximo al eje de simetría.

La condensación de grados de libertad supone, en este problema, un ahorro muy importante tanto en la capacidad de memoria que se requiere como en el tiempo de ejecución, al tener tan sólo 30 nodos de la estructura carácter activo (los 14 que corresponden a la zona de contacto de cada cuerpo y los 2 nodos sobre los que se aplica la solicitación). Por tanto, sólo 60 variables de las 168 involucradas en el problema, corresponden a grados activos a considerar en los 13 incrementos en los que se va a cubrir la solicitación.

En la fig. 6, se representan los desplazamientos relativos habidos en la superficie de contacto desde que se produce la unión en el sexto par hasta que el contacto se produce en la totalidad de la zona candidata, situación esta que ocurre para un valor de la carga:  $P = 25060$  (F),

Para mayor claridad en la representación, se omiten las distribuciones que corresponden a

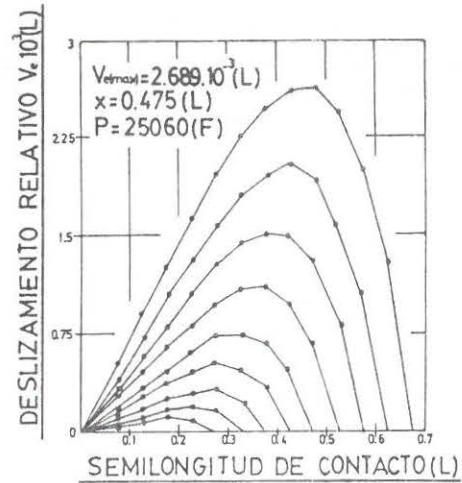


Fig. 6.- Deslizamientos relativos en  $D_c$ .

los cinco primeros elementos.

La evolución de la zona de contacto con la progresión de la carga se representa en la Fig. 7 que, como puede apreciarse, está en perfecto acuerdo con la que encuentran Mahmoud, Marks y Salamon con el M.E.F. ref. /6/.

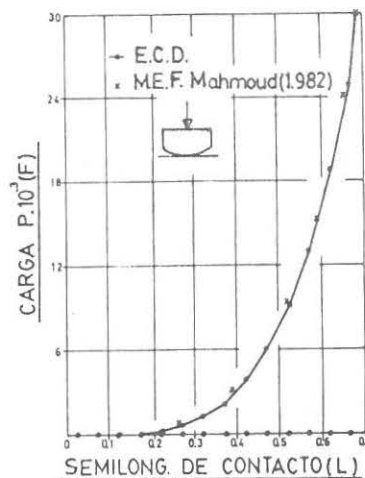


Fig. 7.- Evolución de la zona de contacto con la aplicación progresiva de la carga.

Para valores muy pequeños de la carga se producen incrementos importantes de la zona de contacto. Esto hace que no sea necesaria una discretización muy fina en el entorno del eje de simetría. Además, se permite desde pequeños valores de  $p$  que las tensiones normales se repartan sobre una zona relativamente grande. No ocurre esto así en problemas Hertzianos donde para una misma carga existe menor zona de contacto y consecuentemente tensiones normales mayores, y peor distribuidas. Así, como puede verse en la Fig. 8, que está en acuerdo con la solución de Marks, ref. /5/, con Elementos Finitos, las tensiones se distribuyen de modo suave sobre la zona de contacto, presentando los valores máximos (no muy acusados) en el espacio comprendido entre el centro y el extremo de la se-

milongitud de contacto que corresponden en cada instante a la carga aplicada. En cambio en el problema Hertziano, ref. /7/, el máximo se produce sobre el eje y no hay una gran zona trabajando cerca de este nivel de tensiones.

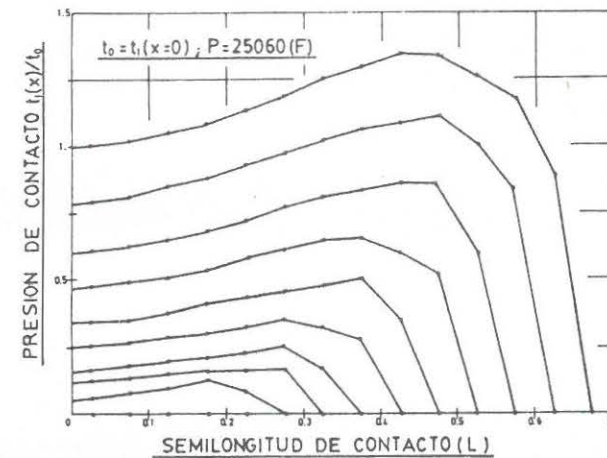


Fig. 8.- Evolución incremental de las tensiones de contacto,

Si la carga alcanzase un nivel tal que toda la zona curva de la placa de asiento entrara en contacto, aparecería un cambio cualitativo en la forma de trabajo de la misma, para cargas superiores a dicho nivel. A partir de ese instante la placa funcionaría como un punzón (Ejemplo 2) y puede verse, fig. 11, que los máximos se producen en los puntos extremos por lo que puntos muy descargados alcanzarían con incrementos muy pequeños de carga por encima de dicho límite, valores muy altos de la tensión normal. La placa debe pues ser dimensionada en función de la carga que actúa, para que esta situación no se produzca.

### 3.2. Aplicación de solicitaciones laterales a un punzón precomprimido sobre una cimentación elástica

Se considera la estructura de la figura 9, sometida a las solicitaciones  $p_0$  y  $p_1$ , las cuales se aplican sucesivamente en dos capítulos. Inicialmente se considera  $p_0$  y posteriormente se aplica  $p_1$  progresivamente, hasta alcanzar la situación (que denominaremos límite), en la que no existe ningún punto adherido. El estudio se

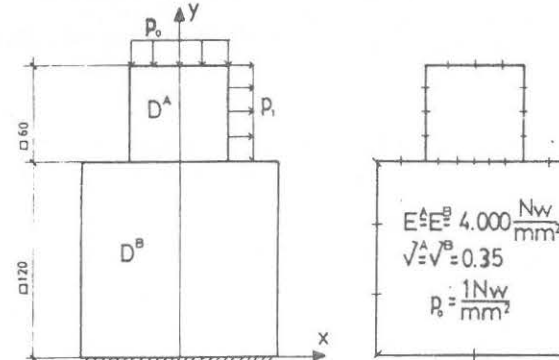


Fig. 9.- a) Definición del problema, b) Discretización utilizada.

realiza con diferentes coeficientes de fricción.

Las características de discretización y de resolución (condensación), se describen en la tabla 1.

Tabla 1.-

	Elementos	Nodos	G.d.l.	Nodos activos	G.d.l. activos
$\partial D^A$	18	36	72	20	40
$\partial D^B$	18	36	72	12	24
$\partial D^A + \partial D^B$	36	72	144	32	64

Las especificaciones relativas a la resolución permanecen válidas para ambos capítulos, al albergarse las distribuciones  $p_0$  y  $p_1$  en igual número de elementos (cuatro) de  $\partial D^A$ , por tanto, el número de grados de libertad activos es el mismo en el tratamiento de cada solicitación.

Los nodos se sitúan a una distancia de los extremos igual a  $(1/4) \cdot L$ , siendo  $L$  la longitud del elemento a que pertenecen. La zona de contacto se modela con seis elementos de igual longitud en el contorno de cada cuerpo.

En la fig. 10, se representa los desplazamientos relativos que se producen en  $\partial D_c$ , tras la aplicación de cada capítulo de cargas, para  $\mu = 0,1$  y  $\mu = 0,2$ . La carga que produce la situación límite en cada caso se especifica también en la figura,

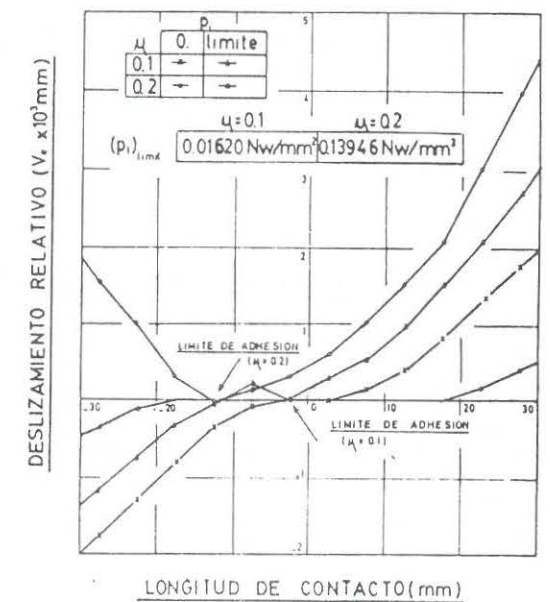


Fig. 10.- Deslizamientos relativos tras la aplicación de cada capítulo.

Cuando  $\mu = 0,1$ , el segundo capítulo proporciona la carga límite en sólo dos incrementos, dado que la solicitación de compresión  $p_0$  ya produce desplazamientos en todos los pares a excep-



ción de los dos que se encuentran a uno y otro lado del eje de simetría ( $x = \pm 2.5$  mm) que permanecen adheridos. Aplicando una sollicitación  $p_1$  suficientemente alta, el primer límite de aplicación lineal de las condiciones de contacto (establecidas tras la aplicación de  $p_0$ ) se define al alcanzar el par adherido situado a la derecha del eje ( $x = 2.5$  mm), la superficie de deslizamiento. El valor de  $p_1$  que corresponde a este escalado es  $p_1 = 0.792 \cdot 10^{-2}$  Nw/mm<sup>2</sup>. El último par adherido ( $x = 2.5$  mm), alcanza la relación  $t_2 = \mu t_1$ , para el valor de la carga límite que se especifica en la figura 10.

Cuando  $\mu = 0.2$ , los deslizamientos relativos que corresponden a  $(p_1)_{lim}$ , son mucho mayores, dado que esta sollicitación es superior a la que se requiere con  $\mu = 0.1$ , al ser más grande la zona adherida tras la aplicación del capítulo de compresión ( $p_0$ ). Para alcanzar  $(p_1)_{lim}$  en este caso se requiere de ocho incrementos que se corresponden con los nodos adheridos tras la aplicación de la carga  $p_0$ . El hecho de que las curvas en la situación límite sean cualitativamente diferentes se debe a la diferencia en el tamaño de la zona de adhesión que queda después de aplicar  $p_0$ .

Las figuras 11 y 12 recogen las distribuciones de tensiones normales y tangenciales, cuando  $\mu = 0.1$  y  $\mu = 0.2$ . La figura 11, contiene las representaciones que corresponden a  $p_0$  ( $p_1 = 0$ ), mientras que en la figura 12, se representan las tensiones que se producen con  $p_0 + (p_1)_{lim}$  ( $\partial D_{ca} \equiv \phi$ ).

Puede observarse que el coeficiente de rozamiento no altera la distribución de tensiones normales en el primer capítulo de carga, fig. 11. En el segundo, se puede llegar a un mayor valor de  $p_1$  para  $\mu = 0.2$  lo que provoca mayores variaciones de la tensión normal para este caso, cargando la zona derecha de la cimentación y descargando la izquierda, de acuerdo con el sentido de la carga horizontal aplicada,

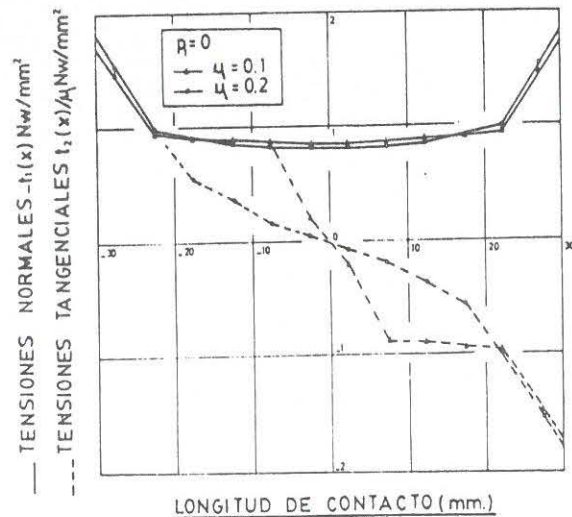


Fig. 11.- Distribuciones de tensión ( $p_0 = 1$  Nw/mm<sup>2</sup>;  $p_1 = 0$ ).

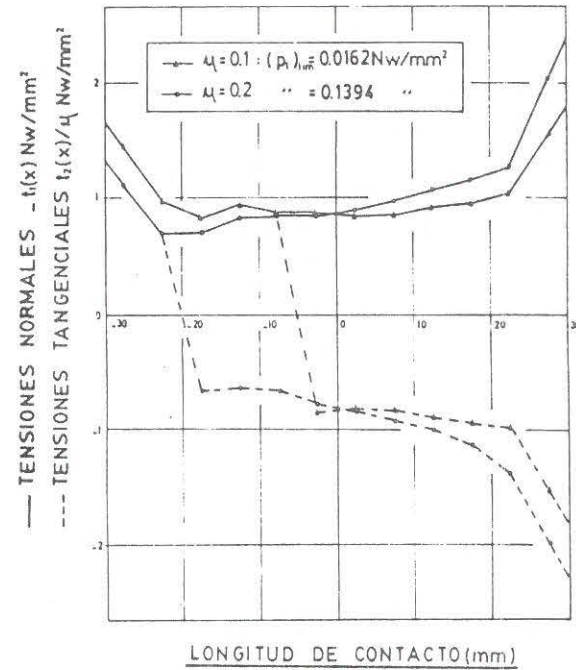


Fig. 12.- Distribuciones de tensión ( $p_0 = 1$  Nw/mm<sup>2</sup>;  $p_1 = (p_1)_{lim}$ ).

En la Figura 13 se representan los deslizamientos relativos que corresponden al proceso incremental completo con  $\mu = 0.2$ . Estos progresan desde la distribución inferior (antimétrica) cuando actúa solamente  $p_0$ , hasta la distribución superior relativa al estado límite. Los valores correspondientes a la sollicitación aplicada en cada incremento, así como el número del par que se incorpora a  $\partial D_{cd}$  en cada uno de ellos, se presentan en la tabla 2.

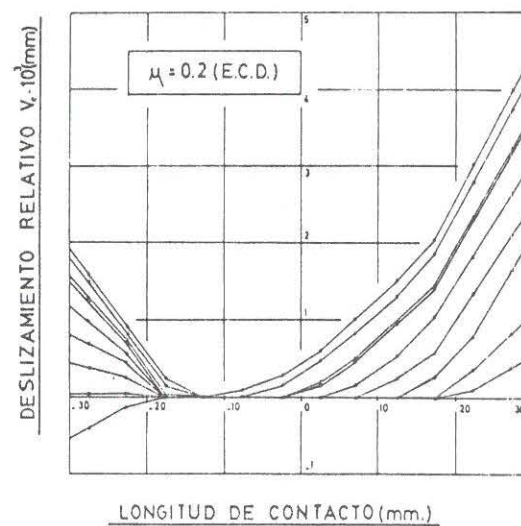


Fig. 13.- Progresión del deslizamiento relativo ( $\mu = 0.2$ ).

La numeración de pares en la tabla 2, es tal que el par 1 corresponde al situado más próximo a la esquina izquierda ( $x = -27.5$ ) y el 12 el más próximo a la esquina opuesta ( $x = 27.5$ ).

Tabla 2.-

Nw/mm <sup>2</sup>		$D_{ca} \rightarrow D_{cd}$
$P_0$	$P_1$	Par
0.	1.	-
0.0313	"	10
0.0617	"	9
0.0897	"	8
0.1069	"	7
0.1234	"	3
0.1235	"	6
0.1357	"	5
0.13946	"	4

#### 4. CONCLUSIONES

Partiendo de la formulación mediante ecuaciones integrales del comportamiento elástico de sólidos deformables que entran en contacto establecida en (10) y (12) se han resuelto dos problemas no Hertzianos en los que la superficie de contacto no es despreciable frente a las dimensiones del problema.

En el primero de ellos, que representa placas de apoyo curvas se pone de manifiesto la importancia de la forma del contorno en orden a provocar una distribución casi uniforme de la tensión a lo largo de toda la zona de contacto. En contornos circulares esto no se consigue. A efectos de diseño, el análisis realizado permite determinar el tamaño de la placa de apoyo para evitar que la placa trabaje como un punzón, provocándose tensiones muy altas en los extremos de la placa.

En el segundo ejemplo tratado se han incluido dos capítulos de carga, en presencia de rozamiento y extendiendo el segundo hasta la pérdida de adherencia total en la superficie de contacto, estableciendo la evolución de tensiones y desplazamientos en todo el proceso. Este caso cubre todas las posibilidades de evolución cualitativa de los puntos de la zona de contacto durante la carga. Se confirma que las tensiones normales son prácticamente independientes del coeficiente de rozamiento. La importancia de este, sin embargo, radica en que de él depende el tamaño de las subzonas de adhesión y deslizamiento en la zona de contacto. Por ello las situaciones con mayor coeficiente de rozamiento quedan, obviamente, en mejor disposición para soportar cargas laterales, al ser mayor la zona de adhesión.

Desde un punto de vista numérico, se han usado diferentes sistemas de coordenadas para definir el criterio de contacto no encontrándose diferencia entre ellos ni incompatibilidades

en el tipo de problemas analizados.

La condensación estática, eliminando nodos pasivos en cada capítulo de carga, se ha revelado como una herramienta importante de cara a disminuir los tiempos de cálculos, considerablemente elevados por tratarse de un problema no lineal.

#### 5. REFERENCIAS

- H. Hertz, Miscellaneous Papers, on the Contact of Elastic Solids, Translation by Jones D.E. McMillan, London (1896).
- H.A. Tomas y V.A. Hoersch, Stresses due to the pressure on one elastic solid on another Bull. Engng. Experiment Station No 212. University of Illinois (1930).
- T. Anderson, The second generation Boundary Element Contact Program. Boundary Element Methods in Engineering. Springer-Verlag, 1982.
- W.R. Marks "Solution of frictionless contact problems by a conjugate gradient technique". M.S. Thesis, Univ. of Wisconsin-Milwaukee, WI (1979).
- W.R. Marks "A modified Conjugate Gradient Method for frictionless Contact problems". ASME, Vol. 105, April 1983.
- F.F. Mahmoud, N.J. Salamon, and W.R. Marks. "A direct automated procedure for frictionless contact problems". Int. J. Num. M. Eng. Vol. 18, pp. 245-257, (1982).
- F. París and J.A. Garrido "On the use of Discontinuous Elements on two Dimensional Contact Problems". Boundary Elements VII Ed. Brebbia and Maier. Springer-Verlag (1985).
- F. París, J.A. Garrido "Elementos lineales discontinuos en el análisis elástico bidimensional con el Método de los Elementos de Contorno". Anales de Ingeniería Mecánica, Año 1 No. 1, pp. 20-25, 1983.
- R.D. Mindlin, Compliance of elastic bodies in contact. J. Appl. Mech, 16, 259-268 (1949).
- F. París, J.A. Garrido "Análisis del problema de contacto con fricción de Coulomb con el Método de los Elementos de Contorno". Anales de Ingeniería Mecánica, Año 2, No. 1, pp 38-44 (1984).
- F. París, "El método de los Elementos de Contorno en la teoría del potencial y la Elasticidad", Tesis. Univ. Madrid (1979).
- F. París, J.A. Garrido "Análisis del problema de contacto sin fricción con el Método de los Elementos de Contorno". Anales de Ingeniería Mecánica, Año 2, No. 1, pp. 22-29, (1984).
- R. Arguelles, La estructura hoy, Tomo 1 (E. T.S.I.M.) Madrid 1970.



14. J.J. Kalker. Variational principles of contact elastostatics. J. Inst. Maths. Applies 20, 199-219. (1977).
15. P.H.B. Boddington, K. Chen y C. Ruiz. "The numerical analysis of dovetail joints". Computers and Structures, Vol. 20, No. 4, pp. 731-735. (1985).
16. T. Andersson, B. Fredricksson y B.G. Allan Persson. "The Boundary Element Method applied to two-dimensional Contact Problems". New Developments in Boundary Element Methods, Ed. by C.A. Brebbia, C.M.L. Publications (1980).
17. P.D. Panagiotopoulos. "Boundary Integral - "Equation" Methods for the Signorini-Fichera Problem", Boundary Elements VII, Ed. -- Brebbia and Maier. Springer-Verlag. (1985).