

# Clasificación de cuadrados latinos parciales de orden menor o igual a 4.

R.M. Falcón  
 Universidad de Sevilla  
 Sevilla (Spain)  
 rafalgan@us.es

## Resumen

El número de cuadrados latinos parciales relacionados con un autotopismo dado es conocido para orden menor o igual a 4. En el presente artículo se hace uso del lema de Burnside para determinar el número de clases de isotopismos e isomorfismos de dichos cuadrados. Posteriormente se identifica el grupo de autotopismos entre dos cuadrados latinos parciales con el conjunto de ceros de un ideal cero-dimensional, lo que permite utilizar bases de Gröbner para obtener de forma explícita tanto las clases isotópicas como las principales. Finalmente se obtiene la distribución de dichas clases atendiendo respectivamente al número de elementos de sus grupos de autoparatopismos y autotopismos.

## 1. Introducción.

La *estructura cíclica* de una permutación  $\pi$  del grupo simétrico  $S_n$  es la expresión  $z_\pi = n^{\lambda_n^\pi} \cdot \dots \cdot 2^{\lambda_2^\pi} \cdot 1^{\lambda_1^\pi}$ , donde  $\lambda_i^\pi$  es el número de ciclos de longitud  $i$  en la descomposición de  $\pi$  como producto de ciclos disjuntos. Dos permutaciones son conjugadas si y sólo si tienen la misma estructura cíclica.  $\mathcal{CS}_n$  denota el conjunto de estructuras cíclicas de  $S_n$ .

Un *cuadrado latino parcial* de orden  $n$  es una matriz  $n \times n$  con elementos tomados de un conjunto de  $n$  símbolos distintos tales que cada símbolo ocurre a lo más una vez en cada fila y en cada columna. En el presente artículo,  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$  será dicho conjunto de símbolos y  $\mathcal{PLS}_n$  denotará el conjunto de cuadrados latinos parciales no vacíos de orden  $n$ . Dado  $P \in \mathcal{PLS}_n$ , su *tamaño*  $|P|$  es el número de sus celdas no vacías. Si  $|P| = n^2$ , entonces  $P$  es un *cuadrado latino*. El conjunto de cuadrados latinos de orden  $n$  se denota por  $\mathcal{LS}_n$ .

Sea  $\mathcal{PLS}_{n,s}$  el conjunto de cuadrados latinos parciales de orden  $n$  y tamaño  $s$ . La *representación ortogonal* de  $P = (p_{rc}) \in \mathcal{PLS}_n$  es el conjunto  $O(P) = \{(r, c, p_{rc}) \mid r, c, p_{rc} \in [n]\}$  definido por las filas  $r$ , columnas  $c$  y símbolos  $p_{rc}$  de  $P$ . Un cuadrado latino parcial  $P \in \mathcal{PLS}_n$  es *completable* a un cuadrado latino  $L \in \mathcal{LS}_n$  si  $O(P) \subseteq O(L)$ . Si  $L$  es el único cuadrado latino en tal condición, entonces  $P$  es *únicamente completable* a  $L$ . El conjunto de cuadrados latinos parciales de orden  $n$  que son únicamente completables se denota por  $\mathcal{UC}_n$ . Todo cuadrado Latino parcial puede identificarse geoméricamente con una *3-semirred*, i.e., un par  $(S, L)$  formado por un conjunto finito de puntos  $S$  y un subconjunto de líneas  $L \subseteq \mathcal{P}(S)$ , tal que existe una partición de  $L$  en tres subconjuntos o clases verificándose que todo par de líneas de clases diferentes se cortan a lo más en un punto y cada punto en  $L$  pertenece exactamente a una línea de cada clase. En concreto, las celdas no vacías de un cuadrado latino parcial determinan los puntos de una 3-semirred cuyas líneas se clasifican atendiendo a las filas, columnas y símbolos asociados a dichas celdas.

Dada una permutación  $\pi$  del grupo simétrico  $S_3$ , se define el cuadrado latino parcial  $P^\pi$  tal que  $O(P^\pi) = \{(p_{\pi(1)}, p_{\pi(2)}, p_{\pi(3)}) \mid (p_1, p_2, p_3) \in O(P)\}$ , el cual se dice ser *parastrófico* a  $P$ . Permutaciones de filas, columnas y símbolos también dan lugar a nuevos cuadrados latinos parciales. En concreto, dadas tres permutaciones  $\alpha, \beta, \gamma \in S_n$ , la terna  $\Theta = (\alpha, \beta, \gamma)$  es un *isotopismo* de cuadrados latinos parciales y  $P^\Theta$  se dice ser *isotópico* a  $P$ , donde  $O(P^\Theta) =$

$\{(\alpha(r), \beta(c), \gamma(s)) \mid (r, c, s) \in O(P)\}$ . Así,  $|P^\Theta| = |P|$ . Si  $\alpha = \beta = \gamma$ , entonces  $\Theta$  es un *isomorfismo* de cuadrados latinos parciales y se escribe  $\Theta = \alpha$  en lugar de  $(\alpha, \alpha, \alpha)$ . Sean  $\mathcal{I}_n$  e  $\mathcal{I}_n$  respectivamente los grupos de isotopismos e isomorfismos de  $\mathcal{PLS}_n$ . Por su parte, dados  $P, Q \in \mathcal{PLS}_n$ , sea  $\mathcal{I}_{P,Q}$  el conjunto de isotopismos de  $P$  a  $Q$ .  $P$  y  $Q$  son *paratópicos* o están en la misma *clase principal* si existen  $\Theta = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{I}_n$  y  $\pi \in S_3$  tales que  $P^{\Theta\pi} = Q$ . La cuaterna  $(\alpha, \beta, \gamma, \pi)$  es un *paratopismo* de cuadrados latinos parciales y  $\mathfrak{P}_n$  denota el grupo de paratopismos de  $\mathcal{PLS}_n$ .  $\mathcal{I}_n$  puede ser considerado subgrupo normal de  $\mathfrak{P}_n$  una vez que todo isotopismo  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{I}_n$  es identificado con el correspondiente paratopismo  $(\alpha, \beta, \gamma, Id) \in \mathfrak{P}_n$ , donde  $Id$  denota la permutación trivial.

Ser isotópico (resp. isomórfico o paratópico) es una relación de equivalencia entre cuadrados latinos parciales, la cual determina el conjunto cociente  $\mathcal{IC}_n$  (resp.  $IC_n$  o  $MC_n$ ). Su restricción a  $\mathcal{PLS}_{n,s}$  determina el conjunto cociente  $\mathcal{IC}_{n,s}$  (resp.  $IC_{n,s}$  o  $MC_{n,s}$ ). Dado  $P \in \mathcal{PLS}_n$ , sean  $\mathcal{IC}_P$ ,  $IC_P$  y  $MC_P$  respectivamente sus clases isotópica, isomórfica y principal. Las clases isotópicas de cuadrados latinos parciales están en relación biunívoca con las clases isomórficas de 3-semirredes. Por su parte, las clases principales lo están con las clases paratópicas de estas últimas, i.e., 3-semirredes isomórficas salvo reordenación en las clases de líneas. El número de cuadrados latinos y de clases isotópicas, isomórficas y principales de  $\mathcal{LS}_n$  es conocido para  $n \leq 11$  [7, 6]. Sin embargo, dado  $s < n^2$ , el cardinal de  $\mathcal{PLS}_{n,s}$  es sólo conocido [4] para  $n \leq 4$ . Más aún, el número de clases isotópicas y principales de cuadrados latinos parciales ha sido sólo acotado inferiormente por el número de *conjuntos críticos* de orden menor o igual a 6 [1], i.e., el conjunto de cuadrados latinos parciales  $P \in \mathcal{UC}_n$ , tales que no existe  $Q \in \mathcal{UC}_n$  siendo  $O(Q) \subset O(P)$ .

El grupo estabilizador de  $P$  por la acción de  $\mathcal{I}_n$  (resp.  $\mathcal{I}_n$  o  $\mathfrak{P}_n$ ) es el conjunto  $\mathcal{I}_P$  (resp.  $\mathcal{I}_P$  o  $\mathfrak{P}_P$ ) de sus *autotopismos* (resp. *automorfismos* o *autoparatopismos*). En concreto, el conjunto de autotopismos de  $\mathcal{PLS}_n$  es denotado por  $\mathcal{A}_{\mathcal{P}_n}$ . Dado  $\Theta \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}_n}$ , sean  $\mathcal{PLS}_\Theta$ ,  $\mathcal{PLS}_{\Theta,s}$  y  $\mathcal{PLS}_{\Theta,\mathcal{I}_P}$  los conjuntos de cuadrados latinos parciales no vacíos que tienen a  $\Theta$  como autotopismo, su subconjunto de cuadrados latinos parciales de tamaño  $s$  y el de aquéllos que son isotópicos a  $P$ . Los cardinales de  $\mathcal{PLS}_{\Theta,s}$  y  $\mathcal{PLS}_{\Theta,\mathcal{I}_P}$  sólo dependen de la clase conjugada de  $\Theta$  o, equivalentemente, de su *estructura cíclica*  $z_\Theta = (z_\alpha, z_\beta, z_\gamma)$ . Así, estos cardinales son respectivamente denotados como  $\Delta_s(z_\Theta)$  y  $\Delta_{\mathcal{I}_P}(z_\Theta)$ . Específicamente, cuando  $\Theta$  es el isotopismo trivial  $(Id, Id, Id)$ , resulta  $\Delta_s((1^n, 1^n, 1^n)) = |\mathcal{PLS}_{n,s}|$ .

En [4] se caracteriza el conjunto  $\mathcal{CS}_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}_n}}$  de posibles estructuras cíclicas de autotopismos de cuadrados latinos parciales de orden  $n$  y se prueba que los valores  $\Delta_s(z)$  sólo dependen de la *clase parastrófica* de  $z = (z_1, z_2, z_3)$ , i.e., del conjunto  $[z] = \{z^\pi = (z_{\pi(1)}, z_{\pi(2)}, z_{\pi(3)}) \mid \pi \in S_3\}$ . En concreto, los valores  $\Delta_s(z)$  son determinados para todas las estructuras cíclicas de autotopismos de cuadrados latinos parciales de orden  $n \leq 4$ . El objetivo del presente artículo es hacer uso de dichos valores para determinar las clases isotópicas, isomórficas y principales de estos cuadrados, así como la distribución de dichas clases atendiendo respectivamente al número de elementos de sus grupos de autoparatopismos y autotopismos. El artículo está organizado como sigue: En la Sección 2 se utiliza el lema de Burnside para determinar el número de clases isotópicas e isomórficas. En la Sección 3, el conjunto de isotopismos entre dos cuadrados latinos parciales dados es identificado con el conjunto de ceros de un ideal cero-dimensional, lo que permite utilizar bases de Gröbner para determinar explícitamente las clases isotópicas y principales de  $\mathcal{IC}_{n,s}$  para todo  $s \in [n]$ . Finalmente, en la Sección 4 se muestra la distribución de dichas clases atendiendo respectivamente al número de elementos de sus grupos de autoparatopismos y autotopismos.

## 2. El número de clases isotópicas e isomórficas.

En la presente sección se estudiará el número de clases isotópicas e isomórficas de los cuadrados latinos parciales de orden  $n$  y tamaño  $s$ :

**Teorema 2.1.** *El número de clases isotópicas de  $\mathcal{PLS}_{n,s}$  es:*

$$|\mathcal{IC}_{n,s}| = \sum_{(z_1, z_2, z_3) \in \mathcal{CS}_{\mathfrak{A}\mathcal{P}_n}} \frac{\Delta_s((z_1, z_2, z_3))}{\prod_{i \in [n]} z_{1i}! \cdot i^{z_{1i}} \cdot \prod_{j \in [n]} z_{2j}! \cdot j^{z_{2j}} \cdot \prod_{k \in [n]} z_{3k}! \cdot k^{z_{3k}}}. \quad (1)$$

Por su parte, el número de clases isomórficas de  $\mathcal{PLS}_{n,s}$  es:

$$|\mathcal{IC}_{n,s}| = \sum_{z \in \mathcal{CS}_n} \frac{\Delta_s((z, z, z))}{\prod_{i \in [n]} z_i! \cdot i^{z_i}}. \quad (2)$$

**Prueba.** Al ser  $\mathcal{I}_n$  un grupo finito que actúa sobre  $\mathcal{PLS}_{n,s}$ , el lema de Burnside implica:

$$|\mathcal{IC}_{n,s}| = \frac{1}{|\mathcal{I}_n|} \cdot \sum_{\Theta \in \mathcal{I}_n} \Delta_s(z_\Theta).$$

Así, por la fórmula de Cauchy para el número de permutaciones con estructura cíclica dada:

$$|\mathcal{IC}_{n,s}| = \frac{1}{n!^3} \cdot \sum_{(z_1, z_2, z_3) \in \mathcal{CS}_{\mathfrak{A}\mathcal{P}_n}} \Delta_s((z_1, z_2, z_3)) \cdot \frac{n!}{\prod_{i \in [n]} z_{1i}! \cdot i^{z_{1i}}} \cdot \frac{n!}{\prod_{j \in [n]} z_{2j}! \cdot j^{z_{2j}}} \cdot \frac{n!}{\prod_{k \in [n]} z_{3k}! \cdot k^{z_{3k}}}.$$

De la anterior expresión se obtiene (1) de forma inmediata. La segunda fórmula se prueba de forma análoga al restringir el estudio a los isomorfismos de cuadrados latinos parciales.  $\square$

El Teorema 2.1 puede ser aplicado a los datos mostrados en [4] para obtener el número de clases isotópicas de  $\mathcal{PLS}_{n,s}$ , con  $n \leq 4$ . Veamos, por ejemplo, el caso de  $\mathcal{PLS}_{3,2}$ : El Cuadro 1 muestra, salvo parastrorfismo, los valores de  $\Delta_2(z)$  para las ocho posibles estructuras cíclicas de un autotopismo de cuadrados latinos parciales de orden 3 y tamaño 2.

$z$	$\Delta_2(z)$
$(2 \cdot 1, 2 \cdot 1, 2 \cdot 1)$	10
$(2 \cdot 1, 2 \cdot 1, 1^3)$	6
$(2 \cdot 1, 1^3, 1^3)$	18
$(1^3, 1^3, 1^3)$	270

Cuadro 1: Valores positivos de  $\Delta_2(z)$  para cada clase parastrófica de  $\mathcal{CS}_{\mathfrak{A}\mathcal{P}_3}$ .

Según el Teorema 2.1,  $|\mathcal{IC}_{3,2}| = \frac{10}{2 \cdot 2 \cdot 2} + 3 \cdot \frac{6}{2 \cdot 2 \cdot 6} + 3 \cdot \frac{18}{2 \cdot 6 \cdot 6} + \frac{270}{6 \cdot 6 \cdot 6} = 4$ . Por tanto, existen cuatro clases isotópicas de cuadrados latinos de  $\mathcal{PLS}_{3,2}$ . En concreto, estas clases están determinadas por los siguientes cuatro cuadrados latinos parciales:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

De forma similar al ejemplo anterior, es posible obtener el número de clases isotópicas de todos los cuadrados latinos de orden menor o igual a 4. De igual manera, la fórmula (2) puede usarse para obtener el número de clases isomórficas. Los correspondientes valores pueden observarse en los Cuadros 2 y 3.

n	$\mathcal{J}\mathcal{C}_{n,s}$																$\mathcal{J}\mathcal{C}_n$
	s																
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
1	1																1
2	1	4	1	1													7
3	1	4	11	18	23	15	6	1	1								80
4	1	4	11	52	139	507	1161	2136	2429	2004	975	364	72	18	2	2	9877

Cuadro 2: Número de clases isotópicas de cuadrados latinos parciales de orden  $n \leq 4$ .

n	$\mathcal{I}\mathcal{C}_{n,s}$																$\mathcal{I}\mathcal{C}_n$
	s																
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
1	1																1
2	4	10	4	1													19
3	5	50	221	525	651	415	136	20	5								2028
4	5	88	1120	10172	60092	239510	639098	1148898	1374447	1082435	548440	176313	35473	4728	403	39	5321261

Cuadro 3: Número de clases isomórficas de cuadrados latinos parciales de orden  $n \leq 4$ .

**Lema 2.2.** Dado  $s \in \mathbb{N}$ , se cumple que  $|\mathcal{J}\mathcal{C}_{n,s}| = |\mathcal{J}\mathcal{C}_{s,s}|$  y  $|\mathcal{M}\mathcal{C}_{n,s}| = |\mathcal{M}\mathcal{C}_{s,s}|$ ,  $\forall n \geq s$ .

**Prueba.** Sea  $s \in \mathbb{N}$  y  $n \geq s$ . La primera igualdad resulta del hecho de que todo cuadrado latino parcial de  $\mathcal{PLS}_{n,s}$  es isotópico a un cuadrado latino parcial cuyas celdas no vacías pertenecen a las primeras  $s$  filas y  $s$  columnas y cuyos símbolos pertenecen al conjunto  $[s]$ . La segunda igualdad sigue de forma inmediata por parastrofismo.  $\square$

**Proposición 2.3.** Se verifica que  $|\mathcal{J}\mathcal{C}_{n,1}| = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ ,  $|\mathcal{J}\mathcal{C}_{n,2}| = 4, \forall n \geq 2$ ,  $|\mathcal{J}\mathcal{C}_{n,3}| = 11, \forall n \geq 3$  y  $|\mathcal{J}\mathcal{C}_{n,4}| = 52, \forall n \geq 4$ .

**Prueba.** Es consecuencia inmediata de aplicar el Lema 2.2 a los datos del Cuadro 2.  $\square$

### 3. El número de clases principales.

El siguiente resultado identifica isotopismos con conjuntos de soluciones factibles:

**Lema 3.1.** Existe una biyección entre el conjunto de isotopismos  $\mathcal{I}_n$  y el conjunto de soluciones factibles de:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j \in [n]} x_{ij} = 1, \forall i \in [n], \\ \sum_{j \in [n]} y_{ij} = 1, \forall i \in [n], \\ \sum_{j \in [n]} z_{ij} = 1, \forall i \in [n], \\ \sum_{i \in [n]} x_{ij} = 1, \forall j \in [n], \\ \sum_{i \in [n]} y_{ij} = 1, \forall j \in [n], \\ \sum_{i \in [n]} z_{ij} = 1, \forall j \in [n], \end{array} \right. \quad (3)$$

donde  $x_{ij}, y_{ij}, z_{ij} \in \{0, 1\}$ , para todos  $i, j \in [n]$ . Más aún, dados  $P = (p_{rc}), Q = (q_{rc}) \in \mathcal{PLS}_n$ , si las ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{ik} \cdot y_{jl} \cdot (z_{p_{ij}q_{kl}} - 1) = 0, \forall i, j, k, l \in [n] \text{ tales que } p_{ij}, q_{kl} \in [n], \\ x_{ik} \cdot y_{jl} = 0, \forall i, j, k, l \in [n] \text{ tales que } q_{kl} = \emptyset, \end{array} \right. \quad (4)$$

son añadidas a (3), entonces existe una biyección entre  $\mathfrak{I}_{P,Q}$  y el conjunto de soluciones factibles del sistema de ecuaciones resultante.

**Prueba.** Para probar el primer aserto es suficiente observar que todo isotopismo  $\Theta = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathfrak{I}_n$  puede ser unívocamente identificado con una solución factible  $(x_{11}^\Theta, x_{12}^\Theta, \dots, x_{1n}^\Theta, x_{21}^\Theta, \dots, x_{nn}^\Theta, y_{11}^\Theta, \dots, z_{nn}^\Theta)$ , donde  $x_{ij}^\Theta = 1$  (resp.  $y_{ij}^\Theta = 1$  o  $z_{ij}^\Theta = 1$ ) si  $\alpha(i) = j$  (resp.  $\beta(i) = j$  o  $\gamma(i) = j$ ) y 0 en otro caso. En concreto, puesto que  $x_{ij}, y_{ij}, z_{ij} \in \{0, 1\}$ , para todos  $i, j \in [n]$ , entonces los tres primeros conjuntos de ecuaciones de (3) implican que  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  son aplicaciones, mientras que los siguientes tres conjuntos de ecuaciones implican que son permutaciones.

El segundo aserto es entonces consecuencia de dicha correspondencia, puesto que, dados  $i, j, k, l \in [n]$ , la correspondiente ecuación en (4) es equivalente a decir que  $\gamma(p_{ij}) = q_{kl} \in [n]$  si y sólo si  $\alpha(i) = k$  y  $\beta(j) = l$ , i.e.,  $(i, j, p_{ij}) \in O(P)$  si y sólo si  $(\alpha(i), \beta(j), \gamma(p_{ij})) \in O(Q)$ .  $\square$

El Lema 3.1 implica que  $\mathfrak{I}_{P,Q}$  queda determinado por  $6n + 3n^2 + |P| \cdot |Q| + n^2 \cdot (n^2 - |Q|)$  ecuaciones polinómicas de grado menor o igual a 3 en  $3n^2$  variables:

**Teorema 3.2.** *Dados  $P = (p_{rc}), Q = (q_{rc}) \in \mathcal{PLS}_n$ ,  $\mathfrak{I}_{P,Q}$  puede ser identificado con el conjunto de ceros del ideal cero-dimensional  $I = \langle 1 - \sum_{j \in [n]} x_{ij} \mid i \in [n] \rangle + \langle 1 - \sum_{j \in [n]} y_{ij} \mid i \in [n] \rangle + \langle 1 - \sum_{j \in [n]} z_{ij} \mid i \in [n] \rangle + \langle 1 - \sum_{i \in [n]} x_{ij} \mid j \in [n] \rangle + \langle 1 - \sum_{i \in [n]} y_{ij} \mid j \in [n] \rangle + \langle 1 - \sum_{i \in [n]} z_{ij} \mid j \in [n] \rangle + \langle x_{ij} \cdot (1 - x_{ij}) \mid i, j \in [n] \rangle + \langle y_{ij} \cdot (1 - y_{ij}) \mid i, j \in [n] \rangle + \langle z_{ij} \cdot (1 - z_{ij}) \mid i, j \in [n] \rangle + \langle x_{ik} \cdot y_{jl} \cdot (z_{p_{ij}q_{kl}} - 1) \mid i, j, k, l \in [n] \text{ tales que } p_{ij}, q_{kl} \in [n] \rangle + \langle x_{ik} \cdot y_{jl} \mid i, j, k, l \in [n] \text{ tales que } q_{kl} = \emptyset \rangle \subseteq \mathbb{Q}[\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n, \mathbf{z}_n] = \mathbb{Q}[x_{11}, \dots, x_{nn}, y_{11}, \dots, z_{nn}]$ . Más aún,  $|\mathfrak{I}_{P,Q}| = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}[\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n, \mathbf{z}_n]/I)$ .*

**Prueba.** Por el Lema 3.1,  $\mathfrak{I}_{P,Q}$  puede ser identificado con la variedad afín  $V(I)$  definida por el ideal  $I$ . Además, la finitud de  $\mathfrak{I}_{P,Q}$  implica que  $I$  es cero-dimensional. Ahora, puesto que  $I \cap \mathbb{Q}[w_{ij}] = \langle w_{ij} \cdot (1 - w_{ij}) \rangle \subseteq I$ , para todo  $w \in \{x, y, z\}$  e  $i, j \in [n]$ , la Proposición 2.7 de [2] asegura que  $I$  es radical y, por tanto, el Teorema 2.10 de [2] implica que  $|\mathfrak{I}_{P,Q}| = |V(I)| = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}[\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n, \mathbf{z}_n]/I)$ .  $\square$

La variedad afín  $V(I)$  del Teorema 3.2 y su dimensión pueden obtenerse a partir de cualquier base de Gröbner de  $I$ . En este sentido, ha sido implementado en SINGULAR [3] un procedimiento llamado *isot*, que ha sido incluido en la librería *pls.lib* [5]. Esta librería también contiene un procedimiento *PLST*, donde el ideal definido en el Corolario 4.9 de [4] es utilizado con vistas a obtener el conjunto de cuadrados latinos parciales de orden  $n$  y tamaño  $s$  relacionados con un autotopismo dado. En concreto, si *PLST* es aplicado sobre el autotopismo trivial, el conjunto  $\mathcal{PLS}_{n,s}$  puede ser determinado. De esta forma, la combinación de estos dos procedimientos ha hecho posible la identificación de las clases isotópicas de los cuadrados latinos parciales de orden menor o igual a 4 y, como consecuencia inmediata, el correspondiente conjunto de clases principales. El número de clases principales es mostrado en el Cuadro 4.

$n$	$ \text{MC}_{n,s} $																$ \text{MC}_n $
	$s$																
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
1	1																1
2	1	2	1	1													5
3	1	2	5	8	9	7	4	1	1								38
4	1	2	5	18	39	121	253	442	495	420	218	96	25	8	2	2	2147

Cuadro 4: Número de clases principales de cuadrados latinos parciales de orden  $n \leq 4$ .

El siguiente resultado es consecuencia inmediata de aplicar el Lema 2.2 al Cuadro 4:

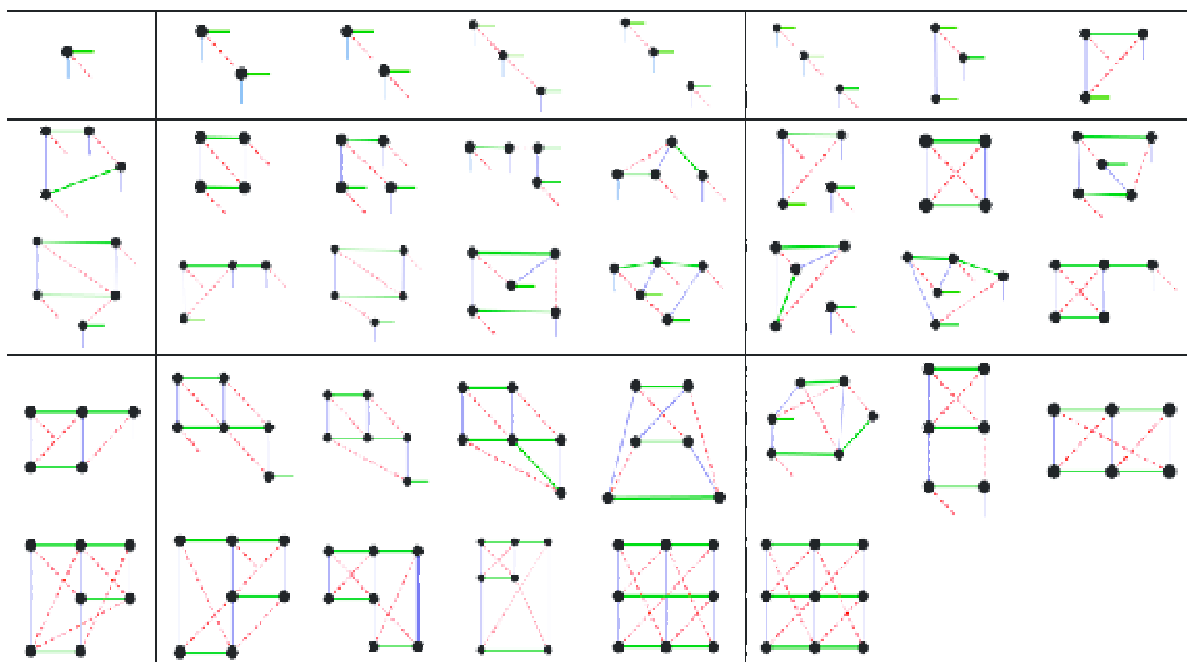


Figura 1: Clasificación de las 38 3-semirredes asociadas salvo paratopismo a  $\mathcal{PLS}_3$ .

**Proposición 3.3.** *Se verifica que  $|\text{MC}_{n,1}| = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ ,  $|\text{MC}_{n,2}| = 2, \forall n \geq 2$ ,  $|\text{MC}_{n,3}| = 5, \forall n \geq 3$  y  $|\text{MC}_{n,4}| = 18, \forall n \geq 4$ .  $\square$*

Puesto que las clases principales de cuadrados latinos parciales están en correspondencia biunívoca con las clases paratópicas de 3-semirredes, los datos anteriores permiten obtener también un censo de estas últimas. La Figura 1 muestra por ejemplo la lista, salvo paratopismo, de las 3-semirredes asociadas a los cuadrados latinos parciales de orden 3.

#### 4. La distribución de clases principales.

Dado  $P \in \mathcal{PLS}_n$ , el orden de su grupo de autotopismos  $\mathcal{I}_P$  sólo depende de su clase principal:

**Lema 4.1.** *Dados  $P \in \mathcal{PLS}_n$  y  $Q, R \in \text{MC}_P$ , se cumple que  $|\mathcal{I}_Q| = |\mathcal{I}_R|$ .*

**Prueba.** Sea  $T \in \mathfrak{P}_n$  tal que  $Q^T = R$ . Dado  $\theta \in \mathcal{A}_Q$ , debe ser  $T' = T\theta T^{-1} \in \mathcal{I}_R$ , con lo que  $|\mathcal{I}_Q| \leq |\mathcal{I}_R|$ . La desigualdad opuesta se prueba de forma similar.  $\square$

Sea  $\mathcal{I}_{\text{MC}_P}$  el conjunto de clases isomórficas cuyos cuadrados latinos parciales pertenecen a la clase principal de  $P \in \mathcal{PLS}_n$ . Se verifica el siguiente resultado:

**Teorema 4.2.** *Dado  $P \in \mathcal{PLS}_n$ :*

$$|\mathcal{I}_{\mathcal{C}_P}| = \frac{n!^3}{|\mathcal{I}_P|}, \quad |\text{MC}_P| = |\mathcal{I}_{\text{MC}_P}| \cdot |\mathcal{I}_{\mathcal{C}_P}|, \quad |\mathfrak{P}_P| = \frac{6n!^3}{|\text{MC}_P|}.$$

**Prueba.** Puesto que  $\mathcal{I}_n$  y  $\mathfrak{P}_n$  son grupos finitos que actúan sobre  $\mathcal{PLS}_n$ , la primera y la tercera fórmula son consecuencias del teorema estabilizador de órbitas y el teorema de Lagrange.

Por su parte, la segunda fórmula se obtiene de forma inmediata a partir del Lema 4.1, el cual implica que todas las clases isomórficas contenidas en la clase principal de  $P$  tienen el mismo número de elementos.  $\square$

Una consecuencia del Teorema 4.2 es que  $|\mathcal{IC}_{MC_P}| = 6 \cdot |\mathcal{I}_P|/|MC_P|$ , que es una generalización para cuadrados latinos parciales del Teorema 2 (iii) de [7]. Todos estos resultados se verifican debido a la normalidad de  $\mathcal{I}_n$  como subgrupo de  $\mathfrak{P}_n$ , la cual es usada en nuestro caso en la prueba del Lema 4.1. En este sentido, cabe observar que el aserto (i) del último teorema mencionado indica que  $n!^2 \cdot |I_L|/|\mathcal{I}_L|$  es el número de clases isomórficas en la clase isotópica de un cuadrado latino  $L \in \mathcal{LS}_n$ . Sin embargo,  $I_n$  no es un subgrupo normal de  $\mathcal{I}_n$  y la anterior fórmula resulta de hecho no ser cierta, puesto que puede encontrarse cuadrados latinos de la misma clase isotópica con un número diferente de automorfismos. Así, por ejemplo, existen cinco clases isomórficas de cuadrados latinos de orden 3, los cuales están todos contenidos en una única clase isotópica. Sin embargo, si consideramos los cuadrados latinos parciales:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

si bien ambos están asociados a 18 autotopismos, existen seis automorfismos de  $L_1$  (todas las permutaciones de  $S_3$ ) pero sólo dos automorfismos de  $L_2$  ((23) y el automorfismo trivial).

Dada una clase principal de  $MC_n$  y un cuadrado latino parcial  $P$  de dicha clase, el procedimiento *isot* puede ser usado para obtener el orden de  $\mathcal{I}_P$  y, a partir del Teorema 4.2, el cardinal de  $\mathcal{IC}_P$ . Más aún, puesto que las clases isotópicas que corresponden a cada clase principal son identificadas, el cardinal de  $\mathcal{IC}_{MC_P}$  es conocido, al igual por tanto, de nuevo por el Teorema 4.2, que los órdenes de  $MC_P$  y  $\mathfrak{P}_P$ . En concreto, todos estos valores han sido obtenidos para cuadrados latinos parciales de orden menor o igual a 4. El Cuadro 5 muestra la distribución de clases principales atendiendo a los órdenes  $|\mathfrak{P}_P|$  y  $|\mathcal{I}_P|$  de, respectivamente, los grupos de autoparatopismos y autotopismos de cualquier cuadrado latino parcial de la correspondiente clase principal. La distribución de clases isotópicas (resp. cuadrados latinos parciales) puede ser obtenida multiplicando el número de clases principales por  $6 \cdot |\mathcal{I}_P|/|\mathfrak{P}_P|$  (resp. por  $6n!^3/|\mathfrak{P}_P|$ ). Cabe observar que el orden del grupo de parastofismo de la única clase principal de  $\mathcal{LS}_2$  es 24. Esto no concuerda con el valor 4 dado en [7], el cual debe ser una errata, puesto que, en otro caso, deberían existir seis clases isotópicas en  $\mathcal{LS}_2$ , si bien sólo existe una.

## 5. Futuras líneas de trabajo.

Los resultados mostrados en el presente artículo se basan en los datos numéricos obtenidos en [4]. Dado que existen cotas inferiores del número de clases principales de cuadrados latinos parciales de orden menor o igual a 6, conviene mejorar el algoritmo utilizado en la Sección 3, con vistas a resolver problemas relacionados con el tiempo de computación y la memoria de almacenamiento y abordar así al menos los órdenes 5 y 6. Un desglose de los tipos de simetrías de cada clase principal atendiendo a las estructuras cíclicas de los autotopismos asociados facilitaría por su parte la caracterización de dichas clases, al mismo tiempo que permitiría encontrar los parámetros de las estructuras de incidencia asociadas. Finalmente, deberían analizarse las propiedades de las 3-semirredes asociadas a las clases principales obtenidas, con vistas a profundizar en las relaciones entre ambos tipos de estructuras.

$n$	$s$	$ \mathfrak{P}_P $	$ \mathfrak{J}_P $	# Cl. pr.	$n$	$s$	$ \mathfrak{P}_P $	$ \mathfrak{J}_P $	# Cl. pr.	$n$	$s$	$ \mathfrak{P}_P $	$ \mathfrak{J}_P $	# Cl. pr.	$n$	$s$	$ \mathfrak{P}_P $	$ \mathfrak{J}_P $	# Cl. pr.			
1	1	6	1	1	4	8	8	4	3	8	2	1	107	4	11	4	2	11	2	11		
1	6	1	1	16			8	1	2			18	6				1	6				
2	4	2	1	24			12	1	3			1	3			12	2	2				
	12	2	1	32			16	2	4			2	32			1	1	27				
	6	1	1	144			24	1	4			4	1			2	1	34				
4	24	4	1	192		32	1	6	1		3	8	4		10	4	4	1				
3	1	48	8	1		288	144	1	8		4	9	12		2	4	16	8	3	32	16	1
	2	8	4	1		1	1	6	12		2	4	16		8	3	48	8	1	64	32	1
		12	2	1		2	1	12	1		1	320	2		1	139	2	2	5			
	3	2	1	1		4	2	10	2		4	1	3		1	1	3	1	1	4	2	12
		6	1	1		6	1	2	8	4	3	6	1	8	3	2	6	1	1	8		
		24	12	1		8	4	3	12	2	1	12	2	12	6	1	18	3	1	36	6	1
		36	6	1		12	2	1	24	4	1	18	3	1	36	6	1	108	18	1		
	4	2	1	3		1	1	1	43	24	4	1	2	2	5	4	2	12	6	1	8	
		4	2	2		6	1	4	30	1	1	1	1	1	243	2	2	15	3	1	3	
		24	4	1		2	2	8	18	4	2	12	6	1	97	3	1	3	4	2	40	
2		1	4	4		2	4	2	18	4	1	4	1	15	6	1	8	8	4	2		
6		1	1	6		1	4	4	2	3	2	4	2	2	12	6	2	12	6	2		
12		2	1	8		1	8	1	18	3	1	18	3	1	18	3	1	36	6	1		
36		6	1	12		2	3	16	8	3	16	8	3	1	108	18	1	108	18	1		
16		8	3	16	8	3	24	12	1	2	2	2	15	2	2	40	4	1	4			
24		12	1	36	6	1	36	6	1	3	1	3	3	4	1	1	4	1	1			
48		8	1	1	1	136	1	1	80	2	1	80	2	6	3	1	2	2	2			
4	1	1296	216	1	2	1	2	6	3	1	2	4	2	13	6	1	6	1	6			
	2	96	16	1	8	4	2	8	4	1	8	4	2	6	3	1	8	4	2			
		48	8	1	36	6	1	4	2	13	6	1	6	3	1	8	4	2				
	3	8	4	2	48	8	1	8	4	1	8	4	2	4	2	4	2	12	6	2		
		36	6	1	72	36	1	12	2	3	12	6	2	4	2	4	2	18	3	1		
		48	8	1	2	1	2	6	3	1	18	3	1	36	6	1	36	6	1			
	4	2	1	2	2	1	2	3	6	3	2	2	2	2	1	1	111	1	1	84		
		4	2	2	4	4	1	24	4	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2		
		4	4	2	36	6	1	36	6	1	3	1	2	2	2	2	2	2	2	2		
		6	1	2	8	1	258	1	1	1	3	1	2	2	2	2	2	2	2	2		

Cuadro 5: Distribución de las clases principales de los cuadrados latinos parciales de orden  $n \leq 4$ .

### Referencias

- [1] P. Adams, R. Bean y A. Khodkar, A census of critical sets in the Latin squares of order at most six, *Ars Combinatoria* **68** (2003), 203–223.
- [2] D. A. Cox, J. B. Little y D. O’Shea, *Using Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [3] W. Decker, G.-M. Greuel, G. Pfister y H. Schönemann, SINGULAR 3-1-3. A computer algebra system for polynomial computations, 2011. <http://www.singular.uni-kl.de>.
- [4] R. M. Falcón, The set of autotopisms of partial Latin squares, preprint, 2011, <http://arxiv.org/abs/1107.3248>.
- [5] R. M. Falcón, 2011, <http://personal.us.es/raufalgan/LS/pls.lib>.
- [6] A. Hulpke, P. Kaski y P. R. J. Östergård, The number of Latin squares of order 11, *Math. Comp.* **80** (2011), 1197-1219.
- [7] B. D. McKay, A. Meynert y W. Myrvold. Small Latin Squares, Quasigroups and Loops, *J. Comb. Designs*, **15**, No.2 (2007), 98-119.