UN MÉTODO AUTOSUFICIENTE PARA ENCONTRAR CAMBIOS EN UN PROCESO

Calandra María V.[1], Vacchino María C.[2]

[1] Gamefi, Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería (UNLP), calle 115 y 50, (1900) La Plata. mava@mate.unlp.edu.ar

[2] Gidie, Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería (UNLP), calle 115 y 50, (1900) La Plata.

RESUMEN

En el siguiente trabajo se plantea un método de simulación en la inferencia estadística, en particular en el control de la calidad de un proceso que depende del tiempo. La temática de control de calidad se encuentra enmarcada en el programa de la asignatura estadística para alumnos de grado en la Facultad de Ingeniería (UNLP), y es una herramienta empleada en muchas ocasiones para el desarrollo de trabajos de final de la carrera. Este método es propuesto en el marco de la enseñanza de nuevas tecnologías para el análisis del control de calidad, el cual es de fundamental importancia para el estudio de procesos ingenieriles.

El mismo se basa en una técnica moderna, Bootstrap paramétrico también conocida como Monte Carlo, enmarcada dentro de las llamadas técnicas de "computación intensiva". Este es un método de remuestreo que permite inferir el comportamiento de un determinado proceso y/o estadístico. Mediante la misma se pueden detectar los posibles puntos de cambio, en el tiempo, para un proceso determinado. Desde el punto de vista estadístico, un punto de cambio es el lugar ó momento en que las observaciones pasan de tener una distribución antes de dicho punto a tener otra luego de él.

En particular se presenta la aplicación del mismo al análisis del proceso de la calidad enseñanza-aprendizaje. En este caso se implementa para los datos recopilados del resultado de la evaluación de los alumnos de grado de la asignatura Matemática B de la Facultad de Ingeniería (UNLP) del primer y segundo cuatrimestre de cada año desde el 2003 al 2009. Los resultados obtenidos muestran diversos cambios en el proceso; se hizo un análisis particular para cada cuatrimestre debido a que la población de alumnos en el primer cuatrimestre está constituida principalmente con alumnos recursantes no así en el segundo. Estos resultados fueron relacionados con cambios producidos en este período, logrando asociar causas concretas a los cambios detectados. Como conclusión final podemos asegurar que la aplicación de esta metodología de simulación en la enseñanza del control de calidad en procesos diversos, se presenta como una alternativa a las técnicas conocidas, sin la necesidad de poseer una experiencia adecuada para el análisis como ocurre con las herramientas actuales. Su implementación resulta bastante sencilla, ágil en su aplicación, y además da una medida de la evidencia del cambio detectado en el proceso de estudio.

Palabras clave: Bootstrap paramétrico, control de calidad, punto de cambio, simulación.

INTRODUCCIÓN

El análisis de punto de cambio [1] es una novedosa herramienta estadística utilizada con el fin de detectar la existencia o no de cambios en procesos de diferente índole, en particular en aquellos que requieren control de calidad. Los principales objetivos que se plantea la Estadística en lo que se refiere a la mejora continua de calidad son:

a) Brindar las herramientas que permitan, en lo posible, detectar causas especiales de variabilidad en un proceso como para permitir el control del mismo.

b) Una vez controlado el proceso, analizar la posibilidad de reducir las causas comunes de variabilidad con la finalidad de que el proceso sea apto.

En un proceso de producción continuo, es esperable que la calidad de los productos sea estable. Sin embargo, por diversas razones el proceso puede fallar. En este caso se quiere detectar si realmente fue así y en que momento se produjo dicho desvío, para poder buscar luego causas que motivaron ese comportamiento. Este trabajo tiene como objetivo mostrar la aplicación de la metodología Bootstrap paramétrica [2]-[3] (técnica de computación intensiva), para la detección de posibles puntos de cambio en una secuencia de parámetros asociados a variables aleatorias discretas, en este caso binomiales.
Desde el punto de vista estadístico, un punto de cambio es el lugar ó momento en que las observaciones cambian la distribución. Usualmente, la inferencia estadística acerca del punto de cambio tiene dos aspectos a considerar, uno de ellos es detectar si hay algún cambio en la secuencia, y el otro, estimar el número de cambios y su correspondiente localización. El método propuesto es capaz de encontrar cambios no detectados por las metodologías habituales de cartas de control, permite caracterizar de mejor manera los cambios, controlar la tasa de error total, y es simple de aplicar. La propuesta que se utiliza para la inferencia estadística de punto de cambio está basada en el test de Cociente de Verosimilitud, y es aplicado conjuntamente con el método de segmentación binaria propuesto por Vostrikova [4] para detectar múltiples cambios y en la metodología Bootstrap paramétrica.
Para este estudio, se considera la cantidad de alumnos promocionados (aprobados), regulares (trabajos prácticos aprobados) y desaprobados en cada cuatrimestre, desde el año 2003 al 2009.
Se pretende hacer un análisis de la evolución de los alumnos en el período especificado con el objetivo de realizar un seguimiento en el tiempo de los resultados obtenidos, en la aplicación de nuevos planes de estudio de grado.

METODOLOGÍA

Para mostrar la aplicación de esta metodología en el análisis de datos correspondientes a la evolución de resultados de alumnos se plantea el problema considerando que en cada período i, para i = 1,...,c, donde c es el número total de períodos a evaluar, se tienen variables aleatorias x_i : número de alumnos aprobados y/ó desaprobados en el período *i.* Se denotan con p_i a la proporción de alumnos aprobados y/ó desaprobados, con m_i es el valor que toma la variable x_i y con n_i al número total de alumnos inscriptos en dicho período.
Se plantea este caso suponiendo que se tienen *c* variables aleatorias con distribución binomial, $x_i \sim b_i(n_i, p_i)$, y que $x_i = m_i$ para $i = 1, \ldots, c$, donde $x_i = \#$ de éxitos en los n_i ensayos. El objetivo es testear las siguientes hipótesis:

H_0 : $p_1 = p_2 = \ldots = p_c = p$ (desconocido) *vs.* H_1 : $p_1 = \ldots = p_k = p \neq p_{k+1} = \ldots = p_c = p'$

La hipótesis H_0 indica que el proceso es estable y H_1 que es inestable y por ende, hay un punto de cambio en el período k .
En caso de rechazar la hipótesis H_0, se dice que hay un cambio en el período *k*. Para este test, se plantea el estadístico basado en el logaritmo del Cociente de Verosimilitud, dado por

$$\log \frac{L_0(\hat{p})}{L_1(\hat{p}, \hat{p}')} = \log L_0(\hat{p}) - \log L_1(\hat{p}, \hat{p}')$$

$$= M \log \frac{M}{N} + (N - M)\log\left(\frac{N - M}{N}\right) - M_k \log \frac{M_k}{N_k} - (N_k - M_k)\log\left(\frac{N_k - M_k}{N_k}\right)$$
$$-(M - M_k)\log \frac{M_k^{'}}{N_k^{'}} - [N - M - (N_k - M_k)]\log\left(\frac{N_k^{'} - M_k^{'}}{N_k^{'}}\right)$$

donde:

$M_k = \sum_{i=1}^{k} m_i$, $N_k = \sum_{i=1}^{k} n_i$ (*k=1,…,c*) y $M \equiv M_c$, $N \equiv N_c$, $M_k^{'} \equiv M - M_k$, $N_k^{'} \equiv N - N_k$.

y bajo H_0 , la función de máxima verosimilitud es $L_0(p) = \prod_{i=1}^{c} \binom{n_i}{m_i} p^{m_i} (1-p)^{n_i - m_i}$ y el estimador de p resulta ser $\hat{p} = \frac{M}{N}$, (proporción general de promocionados en un proceso estable). La función de máxima verosimilitud bajo H_1, es

$L_1(p, p') = \prod_{i=1}^{k} \binom{n_i}{m_i} p^{m_i} (1-p)^{n_i - m_i} \prod_{j=k+1}^{c} \binom{n_j}{m_j} (p')^{m_j} (1-p')^{n_j - m_j}$ y los estimadores de *p* y *p' son*

$\hat{p} = \frac{M_k}{N_k}$, y $\hat{p}' = \frac{M - M_k}{N - N_k} = \frac{M'_k}{N'_k}$

Definiendo

$$l(n, m) = m \log m + (n - m)\log(n - m) - n \log n$$

y

$$L_k = -2 \log \frac{L_0(\hat{p})}{L_1(\hat{p}, \hat{p}')} = 2\left[l(N_k, M_k) + l(N_k^{'}, M_k^{'}) - l(N, M)\right]$$

la posición del punto de cambio es aquel valor de $\hat{k}$ que hace máximo L_k, esto es $L_{\hat{k}} = \max_{1 \le k \le c-1} L_k$, a su vez este procedimiento de prueba requiere rechazar H_0 si la probabilidad de obtener un valor del estadístico L_k tan grande como el observado, es poco probable cuando H_0 es verdadera. Para este caso usaremos Bootstrap paramétrico para estimar dicha probabilidad llamada p-valor ó tasa de error del test.

BOOTSTRAP PARAMÉTRICO

El método Bootstrap aparece en la primer publicación realizada en 1979 por Bradley Efron, y ésta constituyó un hito en la estadística. En la misma se estableció una de las primeras ideas de remuestreo y se estableció un nuevo marco para el análisis estadístico basado en simulaciones. El método Bootstrap paramétrico (también conocido como Monte Carlo) es particularmente valioso en situaciones en las cuales la distribución de la población es conocida pero la distribución muestral del estadístico de contraste para un test de hipótesis no ha sido derivada analíticamente. La metodología Bootstrap es una técnica de remuestreo que permite estimar la distribución del estadístico de contraste, en este caso L_k para luego estimar el grado de significación de la prueba estadística (tasa de error del test). En primera instancia se dijo que bajo H_0, el parámetro $p = \hat{p} = \frac{M}{N}$. Luego si la hipótesis H_0 es verdadera, se puede suponer que las variables aleatorias x_i tienen distribución Binomial con parámetros n_i y $\hat{p}$ (todas las proporciones iguales para todos los cuatrimestres). Por lo tanto para inferir la distribución del estadístico $L_{\hat{K}}$, bajo H_0 , se simulan 999 muestras pseudo-aleatorias de dicha distribución Binomial, y se calculan para cada una de estas, simulaciones de los estadísticos L_K , que se denotan L_K^* , se calcula $L_{\hat{K}*}^* = \max_{1 \le k \le c-1} L_K^*$ y luego se analiza si se rechaza o no, la hipótesis H_0 , estimando el p-valor del test [5], que es la probabilidad de observar un valor del estadístico $L_{\hat{K}}$ tan extremo como el observado. Es la proporción de muestras simuladas que superan el valor del estadístico $L_{\hat{K}}$ obtenido con la muestra original.

El p-valor ó tasa de error se estima como sigue: $p-valor=\frac{1+\#\left(L^*_{\hat{k}*}\geq L_{\hat{k}}\right)}{1000}$, (siendo #(A) el número de veces que ocurre el suceso A). Si el p-valor es un valor pequeño, es decir, menor o igual a 0,05 se rechaza H_0, y se considera que hay un cambio significativo en el período $\hat{k}$.

El algoritmo general del proceso es el siguiente:

1- Definir la prueba de hipótesis.

2- Definir la población bajo H_0,

3- Calcular $L_{\hat{K}}$ para los datos originales $x_i, \ldots, x_n$.

4- Iniciar el contador (NSIG) = 0.

5- Fijar el número de muestras (NSIM) a simular.

6- Para *i*=1 hasta NSIM:

6.1. Generar $x_j^*=BINOMIAL\left(n_j,\hat{p}\right), \qquad j=1,\ldots,n.$

6.2. Calcular $L^*_{\hat{K}}$ para la muestra generada.

6.3. Si $L^*_{\hat{K}}>L_{\hat{K}}\Rightarrow\left(\mathrm{NSIG}=\mathrm{NSIG}+1\right)$

7- Calcular el grado de significación $p-valor=\frac{\left(\mathrm{NSIG}+1\right)}{\left(\mathrm{NSIM}+1\right)}$

Este criterio tiene como objetivo la identificación de un solo punto de cambio *k*. En función de encontrar todos los puntos de cambio y su ubicación en un proceso aleatorio, Vostrikova (1981) propuso un método, conocido como el procedimiento de segmentación binario que permite detectar todos los posibles puntos de cambio, el cual se puede describir como sigue:

Paso 1: en la prueba entre ningún punto de cambio y un punto de cambio, se testea,
$H_0: p_1 = p_2 = \ldots = p_c = p \quad vs \quad H_1: p_1 = \ldots = p_k = p \neq p_{k+1} = \ldots = p_c = p'$, donde *k* es la ubicación de un punto de cambio en esta etapa. Si H_0 no es rechazada, entonces se detiene el proceso, y no hay punto de cambio. Caso contrario, existe un punto de cambio y se va al siguiente paso.

Paso 2: Se testan en forma separada las dos subsecuencias, la previa y la posterior al punto de cambio encontrado en el Paso 1, en busca de otro punto de cambio.

Paso 3: Se repite el proceso hasta que no haya puntos de cambio en las subsecuencias posteriores.

Paso 4: La colección de puntos de cambio hallados en los Pasos 1-3 puede ser denotada como $\left\{\hat{k}_1,\hat{k}_2,..,\hat{k}_q\right\}$, y el número estimado de puntos de cambio encontrado será q.

RESULTADOS

Para realizar los cálculos propuestos, en el presente trabajo, se realizó una recopilación de datos de los resultados de la evaluación de los alumnos de la cátedra Matemática B en los distintos cuatrimestres, a partir del año 2003 y hasta el año 2009, en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata.

Tabla 1. Datos para el total de inscriptos en la asignatura

Posición	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Cuatrimestres	2do. 2003	1ero. 2004	2do. 2004	1ero. 2005	2do. 2005	1ero.2006	2do. 2006	1ero. 2007	2do. 2007	1ero. 2008	2do. 2008	1ero. 2009	2do. 2009
Número de Alumnos	297	174	361	234	454	292	472	221	559	326	592	375	606
Proporción Promocionados	0,498	0,322	0,452	0,350	0,493	0,185	0,557	0,303	0,492	0,294	0,461	0,464	0,606
Proporción Desaprobados	0,313	0,466	0,296	0,397	0,271	0,387	0,258	0,285	0,181	0,215	0,194	0,120	0,104
Regulares (Trabajos Prácticos probados)	0,148	0,121	0,166	0,167	0,126	0,068	0,097	0,113	0,093	0,156	0,078	0,107	0,036

En la Tabla 1 se presentan la cantidad total de alumnos inscriptos por cuatrimestre como así también las proporciones correspondientes. Para el análisis se realizó una división de los datos, considerando los cuatrimestres por separado, puesto que la población de alumnos entre cuatrimestres difiere sustancialmente ya que la asignatura, según el plan de estudios de cada una de las carreras de Ingeniería, corresponde al segundo cuatrimestre de primer año. En el primer cuatrimestre la materia se repite y tiene como población de alumnos a aquellos que la recursan y los que se han retrasado en instancias anteriores, como el Curso de Ingreso o la materia previa a Matemática B. En las Tablas 2 y 3 se separan los datos recopilados por cuatrimestre para el análisis posterior.

Tabla 2. Datos para el total de inscriptos en la asignatura durante el 1er. Cuatrimestre

Posición	1	2	3	4	5	6
Año	**2004**	**2005**	**2006**	**2007**	**2008**	**2009**
Número de Alumnos	174	234	292	221	326	375
Proporción Promocionados	0,322	0,350	0,185	0,303	0,294	0,464
Proporción Desaprobados	0,466	0,387	0,387	0,285	0,215	0,120
Regulares (Trabajos Prácticos aprobados)	0,121	0,167	0,068	0,113	0,156	0,107

Tabla 3. Datos para el total de inscriptos en la asignatura durante el 2do. Cuatrimestre

Posición	1	2	3	4	5	6	7
Año	**2003**	**2004**	**2005**	**2006**	**2007**	**2008**	**2009**
Número de Alumnos	297	361	454	472	559	592	606
Proporción Promocionados	0,498	0,452	0,493	0,557	0,492	0,461	0,606
Proporción Desaprobados	0,313	0,296	0,271	0,258	0,181	0,194	0,104
Regulares (Trabajos Prácticos aprobados)	0,148	0,166	0,126	0,097	0,093	0,078	0,036

Los alumnos promocionados (en adelante aprobados) son aquellos que obtuvieron directamente la aprobación de la asignatura, los alumnos regulares son los que han obtenido la aprobación de los trabajos prácticos, restando rendir el examen final de la asignatura para lograr su aprobación y los alumnos desaprobados son aquellos que no alcanzaron los conocimientos mínimos. Mediante la consideración de análisis por cuatrimestres, se aplicó la metodología expuesta a los datos recopilados. En las Tablas siguientes se presentan los puntos de cambio detectados según el método Bootstrap paramétrico, determinándose los distintos niveles de cambio. Se presentan los intervalos de segmentación encontrados según el método de Vostrikova, y el nivel de detección correspondiente, el cual indica el orden de la detección según la segmentación, es decir el nivel inicial esta asociado a la detección respecto del total de datos, luego el segundo nivel se corresponde con los segmentos correspondientes a la partición en dos del total de datos, y así siguiendo. Luego se establece el p-valor según esta metodología. Cabe aclarar que en el caso que el p-valor de la Tabla tome un valor superior al 5% se considera que en esa posición no hay cambio significativo.

Análisis para el 1er. Cuatrimestre

Primero se analiza que ocurre en la población de inscriptos del Primer Cuatrimestre para todos los casos (alumnos aprobados, desaprobados y regulares). En la Tabla 4, se muestra un resumen de los posibles puntos de cambio detectados para todos los casos en esta situación, se observa claramente la detección de dos puntos de cambio para los alumnos aprobados, posiciones 5 (2008) y 2 (2005) (ver Tabla 2). Respecto a los alumnos desaprobados se observa un cambio en la posición 4 (2007), y por último aparece un punto de cambio en la posición 3 (2006) para los alumnos regulares, haciendo hincapié en que resulta de Segundo nivel. En todos los otros casos el p-valor muestra un error mayor al 5 % por lo cual se deberán descartar.

Tabla 4. Resultados de la aplicación del método para todos los casos respecto del total de alumnos inscriptos a la cursada en el 1er. Cuatrimestre.

Casos	Nivel	Punto de cambio	Intervalo de Estudio	Posición	p-valor ó error
Aprobados	**Inicial**	1	[1, 6]	5	0 %
	Segundo	2	[1, 4]	2	0,15 %
Desaprobados	**Inicial**	1	[1, 6]	4	0 %
	Segundo	2	[1, 3]	1	15,41 %
Regulares	**Inicial**	1	[1, 6]	2	22,16 %
	Segundo	2	[3, 6]	3	0,53 %
	Tercero	3	[4, 6]	5	14,2 %

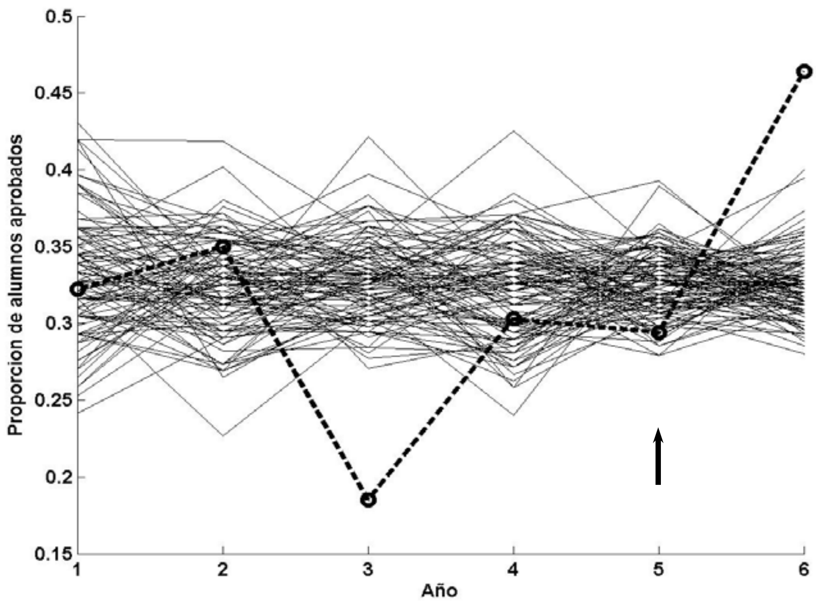

Figura 1. Muestra original (indicada en línea punteada y círculos) y 100 muestras bootstrap paramétricas en la detección del primer punto de cambio para la proporción de alumnos aprobados (posición 5, ver Tabla 4).

En la Figura 1, se puede observar claramente, que si el proceso fuera estable no aparecerían puntos ubicados fuera la banda de confianza delimitada por la mayoría de las series temporales, las cuales son 100 de las 999 muestras Bootstrap paramétricas generadas. Por cuestiones de visualización solamente se presentan 100 de ellas. En este caso particular, se aprecia nítidamente la posición del primer cambio encontrado (posición 5, 2008), el p-valor del test da 0 % (ver Tabla 4), con lo cual el cambio es muy significativo.
En la misma Tabla 4, podemos observar respecto a los alumnos desaprobados que aparece un cambio significativo en la posición 4 (2007). Y por último, respecto a los alumnos regulares no aparece un cambio significativo de nivel inicial, pero si de segundo nivel en la posición 3 (2006), el cual carece de importancia puesto que no hay cambio de nivel inicial, puesto que este tendría validez si se observaran solo los datos en el intervalo [3, 6], lo cual implicaría un análisis parcial de toda la información obtenida.

Análisis para el 2do. Cuatrimestre

Para el caso de los alumnos inscriptos en el Segundo Cuatrimestre, los resultados se muestran en la Tabla 5. En ella se observa que aparece un cambio significativo en los alumnos aprobados para la posición 6, que corresponde nuevamente al año 2008. Aparece, además, un cambio significativo para la evolución de los alumnos desaprobados en la posición 4 (2006), lo cual coincide con el caso del Primer Cuatrimestre, y luego para los alumnos regulares aparecen dos cambios significativos, el inicial en la posición 3 (2005) y en la posición 6 (2008), esta última de segundo nivel de significación.

Tabla 5. Resultados de la aplicación del método para todos los casos respecto del total de alumnos inscriptos a la cursada en el 2do. Cuatrimestre.

Casos	Nivel	Punto de cambio	Intervalo de Estudio	Posición	p-valor ó error
Aprobados	**Inicial**	1	[1, 7]	6	0 %
	Segundo	2	[1, 5]	3	18,05 %
Desaprobados	**Inicial**	1	[1, 7]	4	0 %
	Segundo	2	[1, 3]	2	38,03 %
Regulares	**Inicial**	1	[1, 7]	3	0 %
	Segundo	2	[4, 7]	6	0 %

CONCLUSIONES

La ventaja de la técnica presentada en este trabajo, es que no sólo detecta si hay cambio en la proporción analizada y su ubicación, sino que también nos da una medida de la evidencia de dicho cambio dada por el p-valor del test. Es de destacar que la prueba de contraste de hipótesis convencional ofrece virtualmente el mismo grado de significación que esta técnica de computación intensiva que hemos presentado, Noreen [6] señala que cuando una prueba de remuestreo es apropiada no está claro porque alguien desearía usar una técnica paramétrica convencional.
Tradicionalmente para la detección de cambios en procesos que dependen del tiempo se emplean las metodologías de cartas de control, las cuales fundamentan su análisis en gráficos que nos muestran la evolución del parámetro estudiado en función del tiempo, la problemática del empleo de estas técnicas se encuentra en la necesidad de poseer una cierta experiencia para la detección de posibles cambios mediante la simple observación gráfica, la cual da buenos resultados siempre y cuando el observador tenga una experiencia adecuada.
El presente método permite introducir una herramienta nueva en el problema, basada en la aplicación de la simulación para el estudio de un proceso continuo. Lo cual permite agilizar el análisis de los resultados en la evolución de un parámetro determinado que represente un elemento fundamental en el problema en cuestión.

Respecto a los cambios detectados, se ha podido asignar una causa concreta al cambio producido en la evolución de los alumnos aprobados, en este caso y para ambos cuatrimestre se observa un cambio significativo del año 2008 al 2009, en ese período se produjo un cambio en la evaluación de los alumnos, se recortó la extensión de los exámenes, sin reducir los contenidos y dificultades, además se produjeron algunos cambios en el plantel docente. Los resultados demuestran un incremento en el nivel de aprobación de los alumnos, lo cual redundó en una mejora en el desempeño de los mismos. Con respecto a los alumnos desaprobados, se observan cambios significativos en el período 2007 a 2008 para el primer cuatrimestre y 2006 a 2007 en el segundo cuatrimestre. Estos cambios no tienen una causa asignable específica. Por último, el caso de los alumnos regulares no presenta variaciones significativas en el primer cuatrimestre, y por el contrario se encuentran un cambio de nivel inicial para el año 2005 a 2006 y de segundo nivel del 2008 al 2009. Respecto al cambio de primer nivel no se encuentra una causa concreta asignable, pudiendo deberse a varios factores en conjunción. Finalmente, respecto al cambio de segundo nivel debemos acotar que no deben ser considerados en este caso puesto que la cantidad de períodos analizados no es la adecuada para contabilizar efectos de segundo nivel.
Finalmente podemos enfatizar que la técnica Bootstrap fue presentada para un test de hipótesis en particular, pero el método resulta aplicable a cualquier otro test de hipótesis, sin la necesidad de poseer un gran conocimiento de estadística, sino solamente de un buen poder de cómputo para realizar la simulación requerida. Hoy en día con los avances de la informática la simulación supera a la inferencia estadística teórica.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Chen, J., y Gupta, A.K., "Parametric statistical change point analysis", *Ed. Birkhäuser, Boston, USA,* 2000. *(libro)*

[2] Efron, B., "Better bootstrap confidence intervals", *Journal of the American Statistical Association,* 82, pp.171-200, 1987. *(artículo en publicación)*

[3] Efron, B. y Tibshirani, R.J., "An Introduction to the Bootstrap", *Nueva York: Ed. Chapman & Hall,* 1993. *(libro)*

[4] Vostrikova, L..J., "Detecting "disorder" in multidimensional random processes", *Soviet Mathematics Doklady,* 24, pp. 55-59,1981. *(artículo en publicación)*

[5] Davison, A.C. y Hinkley, D.V., "Bootstrap Methods and Their Applications", *Nueva York: Ed. Cambridge University Press,* 1997. *(libro)*

[6] Noreen, E., "Computer-Intensive Methods for Testing Hypotheses: an Introduction", *Ed. John Wiley & Sons,* 1989. *(libro)*