Soluciones positivas para problemas elípticos sublineales y singulares

Ivan V. Medri

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación como parte de los requerimientos para la obtención del grado de Doctor en Matemática de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Marzo de 2018

Director: Uriel Kaufmann

Soluciones positivas para problemas elípticos sublineales y singulares

(Resumen)

Sea Ω un dominio suave y acotado de $\mathbb{R}^n$, sea $m : \Omega \to \mathbb{R}$ una función que puede cambiar de signo en Ω y sea $p > 1$. En esta tesis estudiaremos los siguientes tres problemas.

Primero consideraremos el caso $n = 1$ y estudiaremos existencia y no existencia de soluciones estrictamente positivas de problemas elípticos $Lu = m(x)u^q$, con condiciones de borde Dirichlet, donde L es un operador diferencial uniformemente elíptico y $q \in (0, 1)$. Además caracterizaremos el conjunto de valores q para los cuales el problema admite una solución y, más aún, presentaremos algunos resultados de existencia para otras no linearidades. También estudiaremos existencia y unicidad de soluciones no negativas para problemas equivalentes en el caso n-dimensional, con $n > 1$.

En segundo lugar, dados $q \in (0, p - 1)$ y $0 \le c \in L^\infty(\Omega)$, estudiaremos existencia de soluciones estrictamente positivas, en el caso $n = 1$, de problemas de la forma $-(|u'|^{p-2} u')' + c(x)u^{p-1} = m(x)u^q$ en Ω, $u = 0$ en $\partial\Omega$. Mencionamos que nuestros resultados son nuevos incluso para el caso $c \equiv 0$.

Por último, dado $\gamma > 0$, estudiaremos existencia y no existencia de soluciones positivas de problemas singulares de la forma $-\Delta_p u = m(x)u^{-\gamma}$ en Ω, $u = 0$ en $\partial\Omega$, para $n \ge 1$. A su vez, algunos resultados de existencia para otros tipos de no linearidades serán derivados de lo anterior.

Palabras claves: problemas elípticos, no linearidades indefinidas, p-Laplaciano, problemas singulares, soluciones estrictamente positivas, sub y supersoluciones.

MSC 2010: 34B16, 34B18, 34B15, 34C25, 35J25, 35J61.

Positive solutions for sublinear and singular elliptic problems

(Abstract)

Let Ω be smooth bounded domain of $\mathbb{R}^n$, let $m : \Omega \to \mathbb{R}$ be a function that may change sign in Ω and let $p > 1$. We study three problems.

First we consider the case $n = 1$ and we study the existence and nonexistence of strictly positive solutions for the elliptic problems $Lu = m(x)u^q$, with zero boundary conditions, where L is a strongly uniformly elliptic differential operator and $q \in (0, 1)$. We also characterize the set of values q for which the problem admits a solution, and in addition some existence results for other nonlinearities is presented. Moreover, we study the existence and uniqueness of certain nonnegative solutions of the equivalent higher dimensional problems, i.e., the case $n > 1$.

Second, let $q \in (0, p-1)$ and $0 \leq c \in L^\infty(\Omega)$. We study the existence of strictly positive solutions in the case $n = 1$ for problems of the form $-(|u'|^{p-2} u')' + c(x)u^{p-1} = m(x)u^q$ in Ω, $u = 0$ in $\partial\Omega$. We mention that our results are new even in the case $c \equiv 0$.

Finally, let $\gamma > 0$ and $n \geq 1$. We study the existence and nonexistence of positive solutions for singular problems of the form $-\Delta_p u = m(x)u^{-\gamma}$ in Ω, $u = 0$ in $\partial\Omega$. As a consequence we also derive existence results for other related nonlinearities.

Keywords and phrases: elliptic problems, indefinite nonlinearities, p-Laplacian, singular problems, strictly positive solutions, sub and supersolutions.

MSC 2010: 34B16, 34B18, 34B15, 34C25, 35J25, 35J61.

Índice general

Introducción

La existencia de soluciones no negativas o positivas a problemas elípticos no lineales ha sido estudiada intensivamente durante los últimos 50 años debido a su interés tanto teórico como en aplicaciones. Más precisamente, problemas con condición de borde del tipo

$$\begin{cases} Lu = f(x,u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio suave y acotado, L es un operador elíptico lineal de segundo orden y f es un término de reacción no lineal con $f(x,0) \geq 0$ para todo x, aparecen muy frecuentemente en aplicaciones (dinámica de poblaciones, reacciones químicas, combustión, etc) y las soluciones positivas son, en muchas situaciones, las únicas relevantes. La existencia de soluciones positivas en estos problemas y sus propiedades ha sido tratada utilizando diversas técnicas del análisis funcional no lineal como teoría del grado, sub y supersoluciones, bifurcación, métodos variacionales y combinaciones de éstos.

En particular, no-linealidades de la forma

$$f(x,u) = m(x)\, u^q,$$

donde m es una función que cambia de signo en Ω han recibido considerable atención. Cuando $q \in \left(1, \frac{n+2}{n-2}\right)$ (problema superlineal) es conocido que (1) admite una solución no negativa (y no trivial) si y sólo si $m > 0$ en un conjunto de medida positiva. Un resultado similar es cierto si $q = 1$ (problema lineal de autovalores con peso indefinido) en el sentido que la condición anterior sobre m es necesaria y suficiente para la existencia de un (único) autovalor principal positivo respecto del peso m. Más aún, como consecuencia directa del principio del máximo fuerte y del lema de Hopf, con adecuadas hipótesis de regularidad, en ambos casos la solución es estrictamente positiva en Ω y su derivada normal exterior es estrictamente negativa en $\partial\Omega$.

En esta tesis hemos estudiado, en una primera etapa, la existencia de soluciones *estrictamente positivas* en Ω para el problema sublineal (i.e. $0 < q < 1$), con L un operador general de segundo orden. En particular, utilizando técnicas de sub y supersoluciones y cotas a priori, hemos hallado condiciones suficientes y condiciones necesarias en el caso unidimensional. Hacemos notar que el problema sublineal es *mucho* más delicado que los anteriores (inclusive cuando $n = 1$), al no poder aplicarse el principio del máximo fuerte ni el lema de Hopf. De hecho, es posible la existencia de soluciones no negativas con *dead cores* y/o derivada normal nula en partes o en la totalidad de $\partial\Omega$.

Posteriormente, también trabajamos en el problema sublineal para el caso n-dimensional. En esta etapa hallamos resultados de existencia y/o de unicidad para soluciones positivas en ciertos subdominios de Ω. Además, analizamos la continuidad respecto de ciertos parámetros iniciales para poder deformar nuestro problema partiendo de uno similar donde las soluciones estrictamente positivas están ya suficientemente estudiadas.

Adaptando las ideas empleadas en el caso de un operador elíptico lineal, hemos estudiado también operadores que involucran al p-Laplaciano unidimensional, más precisamente, $Lu := -(|u'|^{p-2}\, u')' + c(x)\, u^{p-1}$, y no-linealidades de la forma $f(x,u) = m(x)u^q$ con $q \in (0, p-1)$.

Finalmente, hemos considerado, también con m cambiando de signo, la existencia de soluciones positivas a problemas *singulares* para $Lu := -(|u'|^{p-2}\, u')'$, siendo ahora $f(x,u) = m(x)u^{-\gamma}$ con $\gamma > 0$. Aquí nos hemos basado en el teorema de Schauder. Más aún, para estos problemas, también tratamos el caso n-dimensional, esto es, tomando $Lu := -\Delta_p u$ sobre un dominio suave y acotado en $\mathbb{R}^n$.

La tesis se organiza de la siguiente forma.

En los **Capítulos 1 al 4** se exponen definiciones y herramientas básicas que necesitaremos a lo largo de este trabajo. En particular el Capítulo 1 introduce los Espacios de Sobolev y sus propiedades. Este está dividido en dos partes, una abarca el caso unidimensional y la otra, mayores dimensiones. Esto fue hecho de esta forma por dos razones. Una es que el caso unidimensional es, a mi parecer, mucho más intuitivo ya que las funciones en $W^{1,p}(\Omega)$ (con Ω acotado) quedan caracterizadas por ser exactamente las primitivas de funciones en espacios L^p. Otra es que la teoría unidimensional es más sencilla de comprender sin necesidad de recurrir a demasiadas fuentes externas y esto hace que muchos de los resultados de esta tesis, que son en dimensión 1, puedan comprenderse casi de forma autocontenida. En los Capítulos del 2 al 4, exponemos la teoría de las ecuaciones lineales, quasilineales y algo de teoría no lineal (en particular diversos teoremas de sub y supersoluciones) que es necesaria para el resto de la tesis.

En el **Capítulo 5** trabajamos con el caso unidimensional de problemas sublineales de la forma

$$\begin{cases} Lu = m(x)\,u^q & \text{en } \Omega \\ u > 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

donde $\Omega := (a, b)$ es un intervalo acotado, $q \in (0, 1)$, m una función que cambia de signo en Ω y L un operador elíptico de segundo orden de la forma

$$Lu := -a(x)u'' + b(x)u' + c(x)u.$$

Los resultados principales de este capítulo son los Teoremas 5.10 y 5.14 (condiciones suficientes para la existencia de soluciones) y el Teorema 5.20 (condiciones necesarias).

En el **Capítulo 6** estudiamos problemas sublineales para un operador lineal elíptico en el caso n-dimensional (es decir, cuando $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio suave y acotado). A diferencia del capítulo anterior, aquí estudiamos existencia y/o unicidad de soluciones no negativas. Los resultados principales son el Teorema 6.5, el Corolario 6.12 y el Teorema 6.13. En el primero probamos que, fijados ciertos subconjuntos de Ω, existe a lo sumo una solución no negativa que es, al mismo tiempo, positiva en algunos de estos subconjuntos y cero en otros. En el segundo demostramos la existencia de una solución estrictamente positiva en Ω^+ (que puede entenderse, en el caso de m continua, como el conjunto donde $m > 0$). Estos dos resultados nos darán entonces existencia y unicidad de la solución mencionada. Por último, el Teorema 6.13, analiza la continuidad respecto de un parámetro $\lambda > 0$ de la solución de

$$\begin{cases} Lu = (m^+(x) - \lambda m^-(x))u^q & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \\ u > 0 & \text{en } \Omega^+, \end{cases}$$

para poder probar que, al menos cualitativamente, si la parte negativa de m es pequeña respecto de la parte positiva, entonces la existencia de soluciones de (2) está garantizada en el caso n-dimensional. Aquí utilizaremos el hecho de que el problema con $\lambda = 0$ posee solución estrictamente positiva.

En el **Capítulo 7** pasamos a estudiar problemas unidimensionales que involucran al operador p-Laplaciano, específicamente

$$\begin{cases} -\Delta_p u + c(x)u^{p-1} = m(x)u^q & \text{en } \Omega \\ u > 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

con $q \in (0, p-1)$ (caso sublineal). Las técnicas utilizadas son adaptaciones de algunas de las vistas en el Capítulo 5 para poder incluir al operador p-Laplaciano. Los resultados principales son los Teoremas 7.8 y 7.10. Estos dan condiciones suficientes para la existencia de soluciones de (3). En particular, el segundo de ellos, generaliza el primer inciso del Teorema 5.10, mencionado anteriormente. A diferencia del capítulo donde tratamos con el operador lineal unidimensional, aquí la demostraciones están dadas con mayor detalle y damos algunas ideas de cómo llegamos a los resultados obtenidos (ver por ejemplo el apartado final).

Por último, en el **Capítulo 8** trabajamos con problemas singulares asociados al p-Laplaciano. Esto es, problemas de la forma (3), con $q < 0$, y tomando $c \equiv 0$. Dividimos este capítulo en dos secciones. La primera trata el problema unidimensional, y los resultados principales son el Teorema 8.4, Teorema 8.8 y Teorema 8.10. Respectivamente, el primero da una condición suficiente que asegura la existencia de soluciones de nuestro problema para $0 > q \approx 0$. El segundo es una condición suficiente donde se determina explícitamente si dado un q particular existe solución. Finalmente, el Teorema 8.10 da dos condiciones necesarias. Cabe mencionar que la primera de las condiciones suficientes (es decir el Teorema 8.4) resulta ser "casi" necesaria, ver Observación 8.11. La segunda sección está dedicada a problemas en mayores dimensiones, y los resultados principales son el Teorema 8.15 y el Teorema 8.16. Respectivamente, una condición suficiente y una necesaria. Estas son similares a algunas dadas en el caso unidimensional pero las demostraciones son más complicadas y se necesitan hipótesis distintas sobre la integrabilidad de la función m.

Mencionamos que las referencias existentes en la literatura (referidas a los problemas estudiados) se encuentran al comienzo de los respectivos capítulos.

Algunos de los resultados de los Capítulos 5, 7 y 8 de esta tesis aparecen en [KM1], [KM2] y [KM3] respectivamente.

Capítulo 1

Espacios de Sobolev

1.1. Espacios de Sobolev unidimensionales

En esta sección daremos las definiciones básicas de los espacios funcionales sobre los que trabajaremos. Contar con estas nociones nos permitirá formular en términos precisos nuestros problemas, es decir, podremos enuciar claramente nuestras ecuaciones diferenciales y lo que entendemos por solución.

Denotaremos por Ω a un intervalo abierto y acotado en $\mathbb{R}$ y por k a un entero no negativo.

Derivadas débiles

Empezamos debilitando la noción usual de derivada para lo cual precisamos de la siguiente definición.

Definición 1.1. Sea $C_c^\infty(\Omega)$ el espacio de las funciones infinitamente derivables, $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$, con soporte compacto en Ω. Llamaremos a una función ϕ perteneciente a $C_c^\infty(\Omega)$, una *función de prueba*.

Teniendo en mente la fórmula de integración por partes, damos la siguiente noción de derivada.

Definición 1.2. Sean u, $v \in L^1_{loc}(\Omega)$. Diremos que v es una *derivada débil* de u (o una *derivada en sentido débil* de u), denotada por $v = u'$, siempre que v cumpla

$$\int_\Omega u\phi' = -\int_\Omega v\phi$$

para toda función de prueba $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Notemos que esta definición de derivada coincide en gran parte con la de *derivada en el sentido de las distribuciones*, con la diferencia que, en nuestro caso, requerimos que la derivada sea una función.

Más abajo daremos un lema que nos permitirá hablar de "la" derivada débil de una función en lugar de "una" derivada débil. Para demostrarlo necesitamos previamente el próximo resultado.

Lema 1.3. *Sea $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega u\phi = 0 \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Entonces, $u \equiv 0$ ppx en Ω.

Observación 1.4. El lema anterior puede ser interpretado en el siguiente sentido. Integrar una función u contra toda función de prueba puede considerarse como calcular todos los posibles promedios ponderados de u en subdominios de Ω. Desde esta interpretación no es difícil convencerse de la veracidad del lema. La demostración formal tampoco es complicada y puede encontrarse en [B, Corolario 4.24].

Lema 1.5. *(Unicidad de la derivada débil) Sea $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Si existe una derivada débil de u, es única salvo por un conjunto de medida cero.*

Demostración. Supongamos que v, $\tilde{v} \in L^1_{loc}(\Omega)$ satisfacen

$$\int_\Omega u\phi' = -\int_\Omega v\phi = -\int_\Omega \tilde{v}\phi$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Entonces,

$$\int_\Omega (v - \tilde{v})\phi = 0$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Luego, $v = \tilde{v}$ *ppx* en Ω. □

El próximo lema nos muestra que, al igual que sucede con las derivadas clásicas, si una función tiene derivada débil exactamente nula en Ω, entonces dicha función es constante.

Lema 1.6. *[B, Lema 8.1] Sea $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega u\phi' = 0 \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Entonces, existe una constante C tal que $u = C$ ppx en Ω.

De manera análoga podemos dar nociones "débiles" de derivadas de órdenes superiores.

Definición 1.7. Sean u, $v \in L^1_{loc}(\Omega)$. Diremos que v es una *k-ésima derivada débil* de u, denotada por $v = u^{(k)}$, siempre que v cumpla

$$\int_\Omega u\phi^{(k)} = (-1)^k \int_\Omega v\phi$$

para toda función de prueba $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Inmediatamente, por lo visto anteriormente, se tiene que, si existe una k-ésima derivada débil de una función localmente integrable, ésta es única.

Observación 1.8.

I Se puede hablar de derivada clásica en un punto del dominio pero no se habla de derivada débil en un punto sino en todo un abierto Ω. Un comentario que puede pasar desapercibido es que, sin embargo, sí existe una noción local de la derivada débil. Uno no necesita siempre trabajar en todo Ω, si toma cualquier abierto incluido en Ω también tiene noción de derivada allí. Más aún, lo que es de esperarse que suceda, efectivamente sucede; si una función u tiene derivada débil $u' = v$ sobre Ω, entonces para cualquier abierto $\Omega' \subset \Omega$, $u_{|\Omega}$ tiene derivada débil $v_{|\Omega}$.

II Notemos que el proceso inverso al primer inciso también vale. Es decir, si una función es débilmente derivable en dos abiertos Ω_1 y Ω_2, entonces lo es en la unión y su derivada coincide con las de las funciones restricción.

III Si una función u es de clase $C^1(\Omega)$, entonces es derivable en sentido débil y sus derivadas clásica y débil coinciden.

IV Si $u \in C(\Omega)$ y si u' existe en sentido débil cumpliendo $u' \in C(\Omega)$, entonces $u \in C^1(\Omega)$ y por tanto la derivada clásica existe y coincide con la débil.

Ejemplo 1.9. Calculemos en un ejemplo la derivada débil de una función y notemos que esta nueva noción de derivada extiende a la clásica. Sean $\Omega = (-1, 1)$ y $u(x) = |x|$. Es claro que la derivada clásica de u en 0 no existe. Sin embargo, tomando una función de prueba arbitraria ϕ (que por lo tanto se anula en el borde de Ω) e integrando por partes, podemos ver sí existe la derivada débil de u en Ω como sigue,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} |x|\, \phi'(x)dx &= \int_{-1}^{0} (-x)\phi'(x)dx + \int_{1}^{0} x\phi'(x)dx \\
&= \left(\phi(0) - \phi(-1) - \int_{-1}^{0} (-1)\phi(x)dx\right) \\
&\quad + \left(\phi(1) - \phi(0) - \int_{1}^{0} 1\phi(x)dx\right) \\
&= -\left(\int_{-1}^{0} (-1)\phi(x)dx + \int_{1}^{0} 1\phi(x)dx\right) \\
&= -\int_{-1}^{1} v(x)\phi(x)dx,
\end{aligned}$$

donde

$$v := \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

que es integrable en Ω. Notar que también podríamos haber definido v por

$$v := \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x < 1, \end{cases}$$

y coincide con la anterior definición salvo en un punto (que es un conjunto de medida cero).

Espacios de Sobolev

Fijaremos $1 \leq p \leq \infty$ y definiremos los llamados *Espacios de Sobolev*, cuyos miembros son funciones con derivadas débiles de varios órdenes que viven en espacios de Lebesgue L^p. Estos espacios tienen ventajas a la hora de hacer cálculo que no tienen las distribuciones. Por ejemplo, el producto de funciones en espacios de Sobolev vuelve a caer en uno de estos espacios y valen la regla de diferenciación del producto e integración por partes, como se enunciará luego.

Definición 1.10. El espacio de Sobolev

$$W^{1,p}(\Omega)$$

consiste de todas las funciones integrables $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tales que u' existe en sentido débil y pertenece a $L^p(\Omega)$. Análogamente, el espacio de Sobolev

$$W^{k,p}(\Omega)$$

consiste de todas las funciones integrables $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tales que, para todo $j \leq k$, $u^{(j)}$ existe en sentido débil y pertenece a $L^p(\Omega)$.

Ejemplo 1.11.

I Tomando $\Omega = (-1, 1)$ y $u(x) = |x|$, por lo visto en el Ejemplo 1.9, tenemos que $u \in W^{1,1}(\Omega)$.

II Usando la fórmula de integración por partes, si $u \in C^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ y si $u' \in L^p(\Omega)$, entonces $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Como estamos en el caso unidimensional, con Ω un intervalo acotado, las funciones del $W^{1,p}(\Omega)$ se pueden ver básicamente como las primitivas de funciones en $L^p(\Omega)$. Esto se desprende de los siguientes dos resultados cuyas pruebas también se pueden encontrar en [B, p. 204–206].

Teorema 1.12. *Sea $g \in L^1_{loc}(\Omega)$. Para $x_0 \in \Omega := (a, b)$ definamos*

$$v(x) := \int_{x_0}^{x} g(t)dt \quad \text{para } x \in \Omega.$$

Entonces, $v \in C(\Omega)$ y

$$\int_\Omega v\phi' = -\int_\Omega g\phi \quad \forall \phi \in c_c^\infty(\Omega).$$

Demostración. Sea ϕ una función de prueba arbitraria. Por como hemos definido la función v, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega v\phi' &= \int_\Omega \left(\int_{x_0}^{x} g(t)dt \right) \phi'(x)dx \\ &= -\int_a^{x_0} \int_x^{x_0} g(t)\phi'(x)dtdx + \int_{x_0}^{b} \int_{x_0}^{x} g(t)\phi'(x)dtdx. \end{aligned}$$

Luego, por el Teorema de Fubini resulta

$$\begin{aligned} \int_\Omega v\phi' &= -\int_a^{x_0} g(t) \left(\int_a^t \phi'(x)dx \right) dt + \int_{x_0}^{b} g(t) \left(\int_t^b \phi'(x)dx \right) dt \\ &= -\int_\Omega g(t)\phi(t)dt. \end{aligned}$$

□

Teorema 1.13. *Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Entonces, $u \in C(\overline{\Omega})$ (en el sentido que u es igual ppx a una función continua). Más aún,*

$$u(x) - u(y) = \int_x^y u'(t)dt \quad \forall x, y \in \overline{\Omega}.$$

Demostración. Fijemos $x_0 \in \Omega$ y consideremos

$$\tilde{u}(x) := \int_{x_0}^x u'(t)dt.$$

Por el Teorema 1.12 tenemos que

$$\int_\Omega \tilde{u}\phi' = -\int_\Omega u'\phi \quad \forall \phi \in c_c^\infty(\Omega).$$

Por lo tanto, $\int_\Omega (u - \tilde{u})\phi' = 0$ para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Entonces, por el Lema 1.6, existe una constante C tal que $u = \tilde{u} + C$ *ppx* en Ω. □

El primer resultado muestra que, si trabajamos sobre intervalos acotados, toda primitiva v (en el sentido que es la integral definida más posiblemente una constante) de una función $g \in L^p(\Omega)$ está en $W^{1,p}(\Omega)$. Más aún, su derivada débil es $v' = g$. Recíprocamente, el segundo resultado dice que toda función del $W^{1,p}(\Omega)$ es la integral de su derivada más una constante (i.e. una primitiva). Resumiendo tenemos que, en el caso unidimensional, una función v está en $W^{1,p}(\Omega)$ si y sólo si es la primitiva de una función en $L^p(\Omega)$. Cabe aclarar que esto vale porque estamos considerando Ω un intervalo acotado.

Teorema 1.14. *[E, p. 247] (Propiedades elementales) Asumamos que u, $v \in W^{k,p}(\Omega)$ y $j \leq k$. Entonces*

(i) $u^{(j)} \in W^{k-j,p}(\Omega)$ *y* $(u^{(i)})^{(j)} = (u^{(j)})^{(i)} = u^{(i+j)}$ *para todo* i, j *con* $i + j \leq k$.

(ii) Para cada λ, $\mu \in \mathbb{R}$, $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(\Omega)$ *y* $(\lambda u + \mu v)^{(j)} = \lambda u^{(j)} + \mu v^{(j)}$.

(iii) Si Ω' *es un subconjunto abierto de* Ω, *entonces* $u \in W^{k,p}(\Omega')$.

(iv) Si $f \in C_c^\infty(\Omega)$, *entonces* $fu \in W^{k,p}(\Omega)$ *y vale la regla de Leibnitz*

$$(fu)^{(j)} = \sum_{i \leq j} \binom{j}{i} f^{(i)} u^{(j-i)}.$$

Definición 1.15. Si $u \in W^{k,p}(\Omega)$, definimos su norma por

$$||u||_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\sum_{j \leq k} \int_\Omega \left| u^{(j)} \right|^p dx \right)^{1/p} & (1 \leq p < \infty) \\ \sum_{j \leq k} ||u^{(j)}||_\infty & (p = \infty) \end{cases}$$

Definición 1.16. Sea $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Decimos que una sucesión $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ converge a u en $W^{k,p}(\Omega)$ si

$$\lim_{m \to \infty} ||u_m - u||_{W^{k,p}(\Omega)} = 0$$

y escribimos

$$u_m \to u \text{ en } W^{k,p}(\Omega).$$

A partir de lo enunciado hasta el momento es posible probar que los espacios de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ son espacios de Banach. Para su demostración ver por ejemplo [E, p. 249].

Definición 1.17. El espacio de Sobolev local

$$W_{loc}^{1,p}(\Omega)$$

consiste de todas las funciones localmente integrables $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tales que u' existe en sentido débil y pertenece a $L_{loc}^p(\Omega)$. Análogamente, el espacio de Sobolev local

$$W_{loc}^{k,p}(\Omega)$$

consiste de todas las funciones localmente integrables $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tales que, para todo $j \leq k$, $u^{(j)}$ existe en sentido débil y pertenece a $L_{loc}^p(\Omega)$.

Definición 1.18. Sea $u \in W^{k,p}_{loc}(\Omega)$. Escribimos

$$u_m \to u \text{ en } W^{k,p}_{loc}(\Omega)$$

si

$$u_m \to u \text{ en } W^{k,p}(\Omega')$$

para todo intervalo Ω' con $\Omega' \subset\subset \Omega$ (es decir, $\overline{\Omega'}$ es compacto y está contenido en Ω).

Proposición 1.19. *[B, Corolario 8.10] (Diferenciación de un producto en $\mathbb{R}$) Sean u, $v \in W^{1,p}(\Omega)$, con $1 \leq p \leq \infty$. Entonces,*

$$uv \in W^{1,p}(\Omega)$$

y

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Más aún, se cumple la fórmula de integración por partes

$$\int_{x_0}^{x} u'v = u(x)v(x) - u(x_0)v(x_0) - \int_{x_0}^{x} uv' \quad \forall x, y \in \overline{\Omega}.$$

Observación 1.20. Si u y v son funciones en $W^{1,p}_{loc}(\Omega)$, entonces $uv \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ y se cumple

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Como aplicación de la fórmula de integración por partes se puede ver que es posible formar funciones en $W^{1,p}(\Omega)$ "pegando de manera continua" funciones en espacios de Sobolev sobre distintos dominios disjuntos contenidos en Ω. Más precisamente tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.21. *Supongamos $a < c < b$ y sean $\Omega = (a, b)$, $\Omega_1 = (a, c)$ y $\Omega_2 = (c, b)$ intervalos abiertos acotados en $\mathbb{R}$. Sean $u_1 \in W^{1,p}(\Omega_1)$ y $u_2 \in W^{1,p}(\Omega_2)$. Pongamos*

$$u = \begin{cases} u_1 & \text{en } \Omega_1 \\ u_2 & \text{en } \Omega_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

Si $u \in C(\overline{\Omega})$, entonces $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y su derivada débil está dada por

$$u' = \begin{cases} u_1' & \text{en } \Omega_1 \\ u_2' & \text{en } \Omega_2. \end{cases}$$

En particular, pegar funciones de clase C^1 a trozos también sirve para definir funciones en $W^{1,p}$, pero hay que tener cuidado de incluir la frontera!! Sean $u_1 \in C^1(\overline{\Omega_1})$ y $u_2 \in C^1(\overline{\Omega_2})$, con Ω_1 y Ω_2 como en el teorema. Si la función u definida en (1.1) pertenece a $C(\overline{\Omega})$, entonces $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Hechas las aclaraciones del caso probemos el teorema.

Demostración. Por hipótesis $u \in C(\overline{\Omega})$, por lo tanto es integrable. Sea ϕ una función de prueba en Ω, entonces, usando que $u_1 \in W^{1,p}(\Omega_1)$ y $u_2 \in W^{1,p}(\Omega_2)$, por el Teorema 1.13 y la Proposición 1.19 anterior, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_a^b u(x)\phi'(x)dx &= \int_a^c u_1(x)\phi'(x)dx + \int_c^b u_2(x)\phi'(x)dx \\
&= \left(u_1(c)\phi(c) - u_1(a)\phi(a) - \int_a^c u_1'(x)\phi(x)dx \right) \\
&\quad + \left(u_2(b)\phi(b) - u_2(c)\phi(c) - \int_c^b u_2'(x)\phi(x)dx \right) \\
&= -\left(\int_a^c u_1'(x)\phi(x)dx + \int_c^b u_2'(x)\phi(x)dx \right) \\
&= -\int_a^b u'(x)\phi(x)dx.
\end{aligned}$$

$\square$

Proposición 1.22. *[B, Corolario 8.11] (Regla de la cadena) Sea $G \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $G(0) = 0$, y sean u, $v \in W^{1,p}(\Omega)$. Entonces*

$$G \circ u \in W^{1,p}(\Omega) \quad y \quad (G \circ u)' = (G' \circ u)u'.$$

En varias ocasiones utilizaremos la regla de la cadena para diferenciar funciones de la forma u^γ. Cuando $\gamma \geq 1$, ésta se puede aplicar sin dificultad. Para el caso $\gamma < 1$ obtendremos resultados de diferenciación local como hacemos notar en el siguiente lema.

Lema 1.23. *Sea $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ cumpliendo $u > 0$ en Ω y sea $\gamma < 1$. Entonces, $u^\gamma \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ y su derivada débil está dada por*

$$(u^\gamma)' = \gamma u^{\gamma-1}u'.$$

Observación 1.24. A priori las hipótesis pueden parecer un tanto rebuscadas. Para ver que no lo son, sólo hace falta pensar en el caso clásico $u \in C^1(\Omega)$ y notar que u^γ sólo será derivable cuando $u \neq 0$. Además, la derivada puede no ser integrable si la función u se aproxima a cero en algún punto de la frontera.

Demostración. Sea $\Omega' \subset\subset \Omega$. Entonces, por definición de $W^{1,p}_{loc}(\Omega)$, sabemos que $u \in W^{1,p}(\Omega')$ y en particular, por el Teorema 1.13, $u \in C(\overline{\Omega'})$. Como Ω' está contenido en un conjunto compacto y $u > 0$ en Ω, tenemos que existen constantes positivas $C_2 > C_1 > 0$ tales que $u_{|_{\Omega'}} > C_2 > C_1 > 0$. Tomemos una función "cut-off"$\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ cumpliendo

$$\eta := \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq C_1 \\ 0 < \eta(x) < 1 & \text{si } C_1 < x < C_2 \\ 1 & \text{si } C_2 \geq x \end{cases}$$

y definamos

$$G(x) := \eta(x)x^\gamma.$$

Es fácil ver que que $G(0) = 0$, $G \in C^\infty(\mathbb{R})$ y $G'(x) = \gamma x^{\gamma-1}$ si $x \geq C_2$. Sea $\phi \in C^\infty_c(\Omega')$, aplicando la regla de la cadena a $G \circ u$ sobre Ω' obtenemos $u^\gamma \equiv G \circ u \in W^{1,p}(\Omega')$ y

$$\int_\Omega (G \circ u)\,\phi' = \int_{\Omega'} (G \circ u)\,\phi' = -\int_{\Omega'} (G \circ u)'\,\phi = -\int_{\Omega'} (G' \circ u)\,u'\phi = -\int_{\Omega'} \gamma u^{\gamma-1}u'\phi = -\int_\Omega \gamma u^{\gamma-1}u'\phi.$$

Como las elecciones de Ω' y ϕ fueron arbitrarias, queda demostrado que $u^\gamma \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ y su derivada débil es $(u^\gamma)' = \gamma u^{\gamma-1}u'$. □

Otra aplicación de la regla de la cadena que utilizaremos más adelante está dada en el siguiente lema. Como es usual, denotaremos por $u^+ := \max\{u, 0\}$ y $u^- := \max\{-u, 0\}$.

Lema 1.25. *Si u, $u' \in L^1_{loc}(\Omega)$, entonces*

$$(u^+)' = \chi_{\{u>0\}}u'.$$

La fórmula análoga vale para u^-.

Demostración. Para $\varepsilon > 0$, sea $h_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y satisfaciendo

$$\begin{aligned} 0 \leq h_\varepsilon(x) \leq 1 &\quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}, \\ h_\varepsilon(x) = 0 &\quad \text{para todo } x \leq 0, \\ h_\varepsilon(x) = 1 &\quad \text{para todo } x \geq \varepsilon. \end{aligned}$$

Notemos que $\lim_{\varepsilon\to 0} h_\varepsilon(x) = 1$ para todo $x > 0$. Definimos además $H_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^x h_\varepsilon(r)dr$. Entonces, $H_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$, $H'_\varepsilon = h_\varepsilon$, y para todo $x > 0$,

$$H_\varepsilon(x) = \int_0^\varepsilon h_\varepsilon(r)dr + x - \varepsilon \longrightarrow x \quad \text{si } \varepsilon \to 0,$$

por lo que,

$$H_\varepsilon(u) \longrightarrow \begin{cases} u(x) & \text{si } u(x) > 0 \\ 0 & \text{si } u(x) \leq 0 \end{cases}$$

Es decir, $H_\varepsilon(u) \to u^+$ *ppx* en Ω. Además, por regla de la cadena tenemos $(H_\varepsilon(u))' = h_\varepsilon(u)u'$. Luego, para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, resulta

$$-\int_\Omega H_\varepsilon(u)\phi' = \int_\Omega h_\varepsilon(u)u'\phi.$$

Pasando al limite en la última igualdad obtenemos,

$$-\int_\Omega u^+\phi' = \int_\Omega \chi_{\{u>0\}}u'\phi,$$

y esto concluye la demostración. $\square$

Como estaremos interesados en resolver ecuaciones con condiciones de Dirichlet, introducimos la siguiente definición.

Definición 1.26. Denotamos por

$$W_0^{k,p}(\Omega)$$

a la clausura de $C_c^\infty(\Omega)$ en $W^{k,p}(\Omega)$.

Observación 1.27. Notemos que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ si y sólo si existen funciones $u_m \in C_c^\infty(\Omega)$ tales que $u_m \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Se puede caracterizar a $W_0^{1,p}(\Omega)$ como aquellas funciones $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tales que $u = 0$ en $\partial\Omega$ (ver [B, Teorema 8.12]). $\square$

1.2. Espacios de Sobolev en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$. Análogamente a la sección anterior empezamos debilitando la noción usual de derivada. Denotaremos por $C_c^\infty(\Omega)$ al espacio de funciones infinitamente diferenciables, $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$, con soporte compacto en Ω y una función $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ será llamada *una función de prueba*.

Definición 1.28. Supongamos u, $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ y α un multi-índice. Diremos que v es la α-ésima derivada parcial débil de u, denotada por

$$D^\alpha u = v,$$

siempre que v cumpla

$$\int_\Omega uD^\alpha\phi = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v\phi$$

para toda función de prueba $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Lema 1.29. *(Unicidad de la derivada parcial) La derivada parcial α-ésima de u, si existe, es única salvo por un conjunto de medida cero.*

Demostración. La demostración es análoga al caso unidimensional. $\square$

Definición 1.30 (Espacios de Sobolev)**.** Sea $1 \le p \le \infty$ y sea k un entero no negativo. El espacio de Sobolev

$$W^{k,p}(\Omega)$$

consiste de todas las funciones localmente integrables $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tales que para cada multi-índice α con $|\alpha| \le k$, $D^\alpha u$ existe en el sentido débil y pertenece a $L^p(\Omega)$. Si $u \in W^{k,p}(\Omega)$, definimos su norma por

$$||u||_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|\le k}\int_\Omega |D^\alpha u|^p\,dx\right)^{1/p} & (1 \le p < \infty) \\ \sum_{|\alpha|\le k}||D^\alpha u||_\infty & (p = \infty). \end{cases}$$

De manera análoga al caso unidimensional, el espacio $W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ se define como el espacio de funciones en $L^p_{loc}(\Omega)$ cuyas derivadas débiles hasta orden k existen y están en $L^p_{loc}(\Omega)$.

Definición 1.31. Sea $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$, $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Decimos que u_m converge a u en $W^{k,p}(\Omega)$, denotado por

$$u_m \to u \text{ en } W^{k,p}(\Omega),$$

si

$$\lim_{m\to\infty} ||u_m - u||_{W^{k,p}(\Omega)} = 0.$$

Escribimos

$$u_m \to u \text{ en } W^{k,p}_{loc}(\Omega)$$

si

$$u_m \to u \text{ en } W^{k,p}(\Omega')$$

para todo $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Teorema 1.32. *[E, p. 247] (Propiedades de las derivadas débiles) Asumamos que u, $v \in W^{k,p}(\Omega)$, $|\alpha| \leq k$. Entonces,*

(i) $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$ y $D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta}u$ para todos los multi-índices α, β con $|\alpha|+|\beta| \leq k$.

(ii) Para cada λ, $\mu \in \mathbb{R}$, $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(\Omega)$ y $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$, $|\alpha| \leq k$.

(iii) Si Ω' es un subconjunto abierto de Ω, entonces $u \in W^{k,p}(\Omega')$.

(iv) Si $f \in C_c^\infty(\Omega)$, entonces $fu \in W^{k,p}(\Omega)$ y

$$D^\alpha(fu) = \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta f D^{\alpha-\beta}u \qquad \textit{(Regla de Leibnitz).}$$

Teorema 1.33. *[E, p. 249] Sean $k \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p \leq \infty$. Los espacios de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ son espacios de Banach.*

Proposición 1.34. *[B, Proposición 9.4] (Diferenciación del producto) Sean $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Entonces, $uv \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ y*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_i}v + u\frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Proposición 1.35. *[B, Proposición 9.5] (Diferenciación de la composición) Sea $G \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $G(0) = 0$ y $|G'(s)| \leq M$ $\forall s \in \mathbb{R}$ y alguna constante M. Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Entonces,*

$$G \circ u \in W^{1,p}(\Omega) \quad y \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(G \circ u) = (G' \circ u)\frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Lema 1.36. *Sea $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega)$ cumpliendo $u > 0$ en Ω y sea $\gamma < 1$. Entonces, $u^\gamma \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ y sus derivadas débiles están dadas por*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u^\gamma\right) = \gamma u^{\gamma-1}\frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Demostración. La demostración es análoga a la demostración del Lema 1.23 del caso unidimensional. □

Definición 1.37. Denotamos por

$$W_0^{k,p}(\Omega)$$

a la clausura de $C_c^\infty(\Omega)$ en $W^{k,p}(\Omega)$.

Observación 1.38. Notemos $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ si y sólo si existen funciones $u_m \in C_c^\infty(\Omega)$ tales que $u_m \to u$ en $W^{k,p}(\Omega)$. Interpretamos $W_0^{1,p}(\Omega)$ como aquellas funciones $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tales que "$u = 0$ en $\partial\Omega$".

Lema 1.39. *[B, Corolario 9.19] (Desigualdad de Poincaré) Sean $1 \leq p \leq \infty$ y Ω un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ acotado en al menos una dirección. Entonces, existe una constante C, que depende sólo de p y Ω, tal que, para toda función $u \in W_0^{1,p}$ se tiene,*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|(|\nabla u|)\|_{L^p(\Omega)}.$$

En particular, la expresión $\|(|\nabla u|)\|_{L^p(\Omega)}$ es una norma en $W_0^{1,p}(\Omega)$ y es equivalente a la norma $||u||_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Lema 1.40. *Sea $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $u \geq 0$. Entonces, existe una sucesión $\{\phi_n\} \subset C_c^\infty(\Omega)$, con $\phi_n \geq 0$ $\forall n$, tal que*

$$\phi_n \to u \text{ en } W^{1,p}(\Omega).$$

Demostración. Adaptar la prueba dada en [C, p. 50] usando el Lema 1.39 (Poincaré). □

En general mayores condiciones de regularidad pueden ser encontradas para funciones en espacios de Sobolev. Por ejemplo, en el caso unidimensional vimos que las funciones del $W^{1,p}(\Omega)$ son continuas hasta la frontera. En dimensiones mayores este resultado particular no es cierto, pero bajo ciertas condiciones es posible mejorar la regularidad de nuestras funciones. El Teorema 1.43, que daremos más abajo, es el que resume estos resultados. Antes de enunciarlo debemos introducir los espacios de Hölder.

Recordemos, para Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y k un entero no negativo, el espacio de funciones

$$C^k(\overline{\Omega}) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : \partial^\alpha f \text{ es uniformemente continua y acotada } \forall 0 \leq |\alpha| \leq k\}.$$

Definición 1.41 (Espacios de Hölder)**.** Decimos que una función f es uniformente Hölder continua en Ω con exponente $0 \leq \gamma \leq 1$ si

$$\sup_{x,y \in \Omega,\ x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\gamma} < \infty.$$

En particular, si $\gamma = 1$, decimos que f es Lipschitz. Dado k un entero no negativo, el espacio de funciones *Hölder continuas* $C^{k,\gamma}(\Omega)$ es el subespacio de funciones en $C^k(\overline{\Omega})$ cuyas $k-$ésimas derivadas son uniformemente Hölder continuas en Ω con exponente γ.

Definición 1.42. Un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y su frontera son de clase $C^{k,\gamma}$, $0 \leq \gamma \leq 1$, si en cada punto $x_0 \in \partial\Omega$ existe una bola $B = B(x_o)$ y un mapeo uno a uno $\psi : B \to D \subset \mathbb{R}^n$ tales que,

$$(i)\ \psi(B \cap \Omega) \subset \mathbb{R}^n_+, \quad (ii)\ \psi(B \cap \partial\Omega) \subset \partial\mathbb{R}^n_+, \quad (iii)\ \psi \in C^{k,\gamma}(B) \text{ y } \psi^{-1} \in C^{k,\gamma}(D)$$

(donde $\mathbb{R}^n_+$ denota los vectores $(x_1, ...x_n) \in \mathbb{R}^n$ con $x_i \geq 0$ $\forall i = 1, ..., n$).

Teorema 1.43. *(Teorema de Inmersión de Sobolev) Sea Ω un abierto acotado de clase $C^{0,1}$ en $\mathbb{R}^n$.*

(i) Si $kp < n$, entonces $W^{k,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$, $p^* = \frac{np}{n-kp}$, y la inclusión es una aplicación continua. Más aún, la inclusión es compacta llegando a $L^q(\Omega)$ para cualquier $q < p^*$.

(ii) Si $kp = n$, entonces $W^{k,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, para todo $q \in [1, \infty)$, y la inclusión es continua y compacta.

(iii) Si $kp > n$, entonces $W^{k,p}(\Omega) \subset C^m(\overline{\Omega})$ para $0 \leq m < k - \frac{n}{p}$, y la inclusión es una aplicación continua y compacta.

Demostración. Para una demostración de los incisos (i) y (iii) ver [GT, Teorema 7.26]. Para el inciso (ii) ver [B, Corolario 9.4 y Teorema 9.16]. □

Por último, necesitaremos la siguiente versión generalizada del teorema de la divergencia.

Lema 1.44. *[CT, Lema A.1] Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera C^2. Asumamos que el campo $V : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ satisface $V \in [C(\overline{\Omega})]^n$ y div $V = f \in L^1(\Omega)$ en el sentido de las distribuciones en Ω. Entonces, tenemos que*

$$\int_{\partial\Omega} \langle V(x), \eta(x)\rangle dS(x) = \int_\Omega f(x)dx,$$

donde, como es usual, denotamos por $\eta \equiv \eta(x_0) \in \mathbb{R}^n$ al vector normal unitario exterior a $\partial\Omega$ en $x_0 \in \partial\Omega$, y por $dS(x)$ a la medida de superficie en $\partial\Omega$. Notemos que la relación div $V = f$ con $f \in L^1(\Omega)$ significa

$$-\int_\Omega \langle V, \nabla\phi\rangle dx = \int_\Omega f\phi \quad \text{para todo } \phi \in C_0^1(\Omega).$$

Notemos que en el caso unidimensional, el Teorema 1.43 y el Lema 1.44 están "resumidos" en el Teorema 1.13 (para el análogo al lema trabajar con u''). Es en este sentido que decimos que el caso unidimensional es mucho más sencillo y a la vez más intuitivo que el n-dimensional.

Capítulo 2

Problemas elípticos lineales

2.1. Problemas elípticos lineales

En esta sección nos interesa estudiar problemas de la forma

$$\begin{cases} Lu = f(x) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

donde Ω es un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ y $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ es una función incógnita, $u = u(x)$. Aquí $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función dada y L denota un operador diferencial lineal de segundo orden de alguna de las formas

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a^{ij}(x)u_{x_j}\right)_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u \tag{2.2}$$

o

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u \tag{2.3}$$

con coeficientes a^{ij}, b^i, $c \in L^\infty(\Omega)$ y $c \geq 0$. En algunos casos pediremos condiciones extras sobre los coeficientes para poder trabajar con distintos tipos de soluciones.

Definición 2.1. Diremos que la EDP $Lu = f$ está en forma de divergencia si L está dado por (2.2), y en forma de no-divergencia si está dado por (2.3). Esta nomenclatura se desprende del hecho que si tomamos la matriz A dada por $A(i,j) := a^{ij}$, entonces el primer término de (2.2) es de la forma

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \left(a^{ij}(x)u_{x_j}\right)_{x_i} = -div(A\nabla u).$$

Observación 2.2. Si los coeficientes de mayor orden a^{ij} $(i = 1, ..., n)$ son funciones $C^1(\overline{\Omega})$, y siempre que las derivadas parciales involucradas existan y valga la regla del producto, el operador en forma de divergencia puede ser reescrito en forma de no divergencia y viceversa. De hecho la ecuación en forma de divergencia (2.2) se reescribe de la forma

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} \tilde{b}^i(x)u_{x_i} + c(x)u \tag{2.4}$$

donde $\tilde{b}^i := b^i - \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}_{x_j}$. Recíprocamente, sumando y restando $\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}_{x_j} u_{x_i}$ a la ecuación (2.3), y notando que $(a^{ij}_{x_j} u_{x_i} + a^{ij}u_{x_i x_j}) = (a^{ij}u_{x_i})_{x_j}$ obtenemos (2.2). $\square$

Observación 2.3. De ahora en más pediremos la condición de simetría

$$a^{ij} = a^{ji} \quad i, j = 1, ..., n.$$

Definición 2.4. Diremos que el operador diferencial L es (uniformemente) elíptico si existe una constante $\theta > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta \left|\xi\right|^2 \tag{2.5}$$

para casi todo $x \in \Omega$ y todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

La condición de elipticidad significa que para cada punto $x \in \Omega$, la matriz simétrica A es definida positiva, y su autovalor más pequeño es mayor o igual que θ.

Definimos a continuación los tres tipos de soluciones de (2.1) (clásicas, débiles y fuertes) con las que trabajaremos.

Definición 2.5. (Solución clásica) Consideremos el problema con valores en la frontera (2.1) con L en cualquiera de las dos formas (2.2) o (2.3). Diremos que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ es una *solución clásica* si la ecuación se cumple con las derivadas en sentido usual.

Definición 2.6. (Solución débil) Sea L un operador en forma de divergencia (2.2), sean $a^{ij}, b^i, c \in L^\infty(\Omega)$ $(i, j = 1, ..., n)$ y $f \in L^2(\Omega)$. Diremos que u es una *solución débil* del problema (2.1) si

$$B[u, v] = \langle f, v\rangle \tag{2.6}$$

para todo $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, donde $\langle,\rangle$ denota el producto interno clásico en $L^2(\Omega)$ y $B[u, v]$ es la forma bilineal asociada al operador dada por

$$B[u, v] := \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i}v + c(x)uv \tag{2.7}$$

para todo u, $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Definición 2.7. (Solución fuerte) Sea L en forma de no divergencia (2.3), sea $p > 1$ y sean $a^{ij} \in C(\overline{\Omega})$, b^i, $c \in L^\infty$ y $f \in L^p(\Omega)$. Diremos que $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ es una *solución fuerte* de (2.1) si la igualdad se cumple *ppx* en Ω, donde las derivadas deben interpretarse en sentido débil.

Enunciamos a continuación los dos teoremas que utilizaremos sobre existencia y unicidad de soluciones débiles y fuertes. Notar que las hipótesis sobre la forma del operador (divergencia o no divergencia) y las hipótesis sobre la regularidad de los coeficientes cambian.

Teorema 2.8. *[GT, Teorema 8.3] Sea L un operador uniformemente elíptico en forma de divergencia (2.2) con coeficientes a^{ij}, b^i, $c \in L^\infty(\Omega)$, para $i, j = 1, \ldots, n$, y con $c \geq 0$. Supongamos $f \in L^2(\Omega)$. Entonces, existe una única solución débil $u \in W^{1,2}(\Omega)$ del problema (2.1).*

Teorema 2.9. *[GT, Teorema 9.15] Sea Ω un dominio $C^{1,1}$ en $\mathbb{R}^n$. Sea L un operador uniformemente elíptico en forma de no divergencia con coeficientes $a^{ij} \in C(\overline{\Omega})$, b^i, $c \in L^\infty(\Omega)$, para $i, j = 1, \ldots, n$, y con $c \geq 0$. Supongamos $f \in L^p(\Omega)$, con $1 < p < \infty$. Entonces, existe una única solución fuerte $u \in W_0^{1,p} \cap W^{2,p}(\Omega)$ del problema (2.1).*

Una pregunta que puede surgir al tener dos definiciones de solución es si estas coinciden. Notemos primero que no siempre se pueden definir simultáneamente ambos tipos de soluciones ya que piden operadores en formas distintas (se puede decir que son operadores distintos, incluso problemas distintos). Por lo tanto, para hablar de si coinciden o no tendríamos que lograr primero que los operadores coincidan. Se menciono antes, un poco rápidamente, que si los coeficientes de mayor orden tienen cierta regularidad, sea como sea que esté originalmente escrito el operador, este se puede considerar como un operador en forma de divergencia o de no divergencia. Esto es porque uno puede encontrar un problema equivalente utilizando reglas de diferenciación del producto, y es por eso que hay que tener mucho cuidado con la regularidad, ya que no siempre es aplicable la regla del producto. Para ser precisos enunciamos el siguiente lema.

Lema 2.10. *Sea Ω un dominio $C^{1,1}$ en $\mathbb{R}^n$. Sea L un operador uniformemente elíptico en forma de divergencia o no divergencia tal que los coeficientes de mayor orden $a^{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, con b^i, $c \in L^\infty\Omega$ para $i, j = 1, \ldots, n$ y con $c \geq 0$. Sea $f \in L^p$, con $p = 2$ si $n = 1$, o $n < p < \infty$ si $n > 1$. Entonces, el problema (2.1) tiene una única solución débil y fuerte (simultánemante) $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$.*

Demostración. Esto se desprende de la Observación 2.2, el Teorema 2.8 y el Teorema 2.9. Notar que en dimensión uno, la regla del producto se cumple trivialmente. Para que se cumpla en mayores dimensiones, debemos asegurar que nuestras soluciones están en $L^\infty(\Omega)$, esto sale de notar que pedimos $p > n$ y usar el Teorema de Inmersión de Sobolev. $\square$

Teorema 2.11. *[E, p. 300] (Estimaciones de energía) Sea $\mathcal{L}$ un operador autoadjunto en forma de divergencia con $c \geq 0$ en Ω. Entonces, existen constantes α, $\beta > 0$ tales que*

$$\beta||u||^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq B[u, u]$$

para toda $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Definición 2.12. Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $x \in \partial\Omega$, decimos que Ω satisface la condición de bola interior en x si existe una bola $B(y, r) \subset \Omega$ tal que $\partial B(y, r) \cap \partial\Omega = \{x\}$. Diremos que el abierto satisface la condición de bola interior si lo hace para cada $x \in \partial\Omega$.

Lema 2.13. *[T, Lema 3.26] (Boundary point lemma) (Lema de Hopf) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con la propiedad de bola interior. Sea $u \in W^{2,r}(\Omega)$, con $r > n$, satisfaciendo $Lu \leq 0$ en Ω. Si u alcanza un máximo local estricto en un punto $x_0 \in \partial\Omega$, entonces $\partial_\eta u(x_0) > 0$ (donde η es el vector normal unitario exterior a $\partial\Omega$) siempre que $c \geq 0$ en Ω y $u(x_0) \geq 0$.*

Teorema 2.14. *[GT, Teorema 9.6](Principio del Máximo Fuerte) Si $u \in W^{2,n}_{loc}(\Omega)$ satisface $\mathcal{L}u \leq 0$ en Ω y $c = 0$ ($c \geq 0$), entonces u no puede alcanzar un máximo (máximo no negativo) en Ω a menos que sea constante.*

Por último consideremos el llamado problema de autovalores para operadores lineales elípticos en forma de no divergencia,

$$\begin{cases} Lu = \lambda m(x)u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.8}$$

Diremos que $\lambda := \lambda(L, m, \Omega)$ es un *autovalor* si existe al menos una solución (fuerte) no trivial u de (2.8). Llamaremos a dichas soluciones, *autofunciones*. Un autovalor se dirá *principal* si toda autofunción asociada a dicho autovalor es estrictamente positiva en Ω. A su vez, un autovalor se dirá *simple* si el conjunto de sus autofunciones es un espacio vectorial de dimensión uno.

Teorema 2.15. *[FHT, Teorema 3.1] Asumamos que Ω y los coeficientes de L satisfacen las hipótesis del Teorema 2.9. Supongamos además que $0 \leq m \not\equiv 0$ en Ω y que $m \in L^r(\Omega)$, con $r = 2$ si $n = 1$, o $n < r < \infty$ si $n > 1$. Entonces, el problema (2.8) posee un único autovalor principal positivo simple, que denotaremos $\lambda_1(\Omega, m)$. Más aún, las autofunciones son $C_0^1(\overline{\Omega})$.*

Observación 2.16. Es fácil ver que si los coeficientes de orden superior $a^{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, entonces, bajo las hipótesis del teorema anterior, las soluciones de (2.8) pueden entenderse en sentido débil y fuerte. $\square$

Capítulo 3

Teoría general del p-Laplaciano

3.1. Sobre el operador Δ_p en el caso unidimensional

Introducimos de manera formal, para el caso unidimensional, al operador p-Laplaciano como

$$-\Delta_p u := -\left(|u'|^{p-2}u'\right)' \quad \text{con } 1 < p < \infty.$$

Trabajaremos en una primera instancia con problemas de la forma

$$\begin{cases} -\Delta_p u = h(x) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

donde $\Omega := (a,b) \subset \mathbb{R}$ es un intervalo acotado y $h \in L^q(\Omega)$, con $q \in [1,\infty]$. La noción de solución de estos problemas será la dada en la siguiente definición.

Definición 3.1. (Solución débil) Sea $\Omega := (a,b) \subset \mathbb{R}$ un intervalo acotado. Sea $1 < p < \infty$ y $h \in L^q(\Omega)$, con $q \in [1,\infty]$. Decimos que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ es *solución débil* del problema (3.1) si para toda $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ se tiene que

$$\int_\Omega |u'|^{p-2}u'v' = \int_\Omega h(x)v, \tag{3.2}$$

donde las derivadas se entienden en sentido débil.

Uno podría preguntarse por qué se pide $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y $h \in L^q(\Omega)$, con $q \in [1,\infty]$. Una posible motivación es la siguiente. El problema (3.1) se puede insertar en el método de cálculo de variaciones. Es decir, se puede probar que hallar soluciones de (3.1) es equivalente a buscar puntos críticos del funcional

$$\mathcal{J}_p(u) := \int_\Omega \frac{|u'|^p}{p} - h(x)u \; dx, \tag{3.3}$$

donde a priori el funcional está definido de manera formal (de hecho ésta es la forma en la que generalmente se prueba existencia y unicidad de soluciones). Notemos ahora que el primer término de $\mathcal{J}_p$ nos fuerza a pedir $u' \in L^p(\Omega)$, lo que implica, por lo visto en la sección de Espacios de Sobolev unidimensionales, que $u \in W^{1,p}(\Omega)$. A su vez, ya elegido el espacio donde vivirá u, el segundo término nos dirá que deberíamos pedir, como mínimo, $h \in L^{p'}(\Omega)$. Como estamos trabajando en una dimensión, las funciones del $W^{1,p}(\Omega)$ son continuas hasta la frontera, y gracias a esto podemos pedirle aún menos a la función h, pues sólo necesitaremos que sea integrable.

Enunciaremos a continuación un resumen de los resultados que necesitaremos sobre el problema (3.1). Primero daremos un teorema de existencia y unicidad. Analizaremos la regularidad o diferenciabilidad de la solución. Más aún, algo notable cuando se trabaja con el p-Laplaciano unidimensional es que podemos dar una fórmula explícita (módulo una constante) de la misma. Luego, gracias a la existencia y unicidad, podremos definir el operador solución o inverso del p-Laplaciano y enunciar sus principales propiedades. Finalmente, daremos un teorema de comparación que utilizaremos más adelante.

Teorema 3.2. *Sea $\Omega := (a,b) \subset \mathbb{R}$ un intervalo acotado. Sean $1 < p < \infty$ y $h \in L^q(\Omega)$, con $q \in [1,\infty]$. Entonces, existe una única solución débil $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de (3.1). Más aún, $u \in C^1([a,b])$, con $(|u'|^{p-2}u') \in W^{1,1}((a,b))$ y cumple la ecuación ppx en Ω. De hecho, sea*

$$\varphi_p(t) := |t|^{p-2}t \quad \textit{para } t \neq 0, \quad \varphi_p(0) := 0,$$

se puede ver que

$$u(x) = \int_a^x \varphi_p^{-1}\left(c_h - \int_a^y h(t)dt\right) dy, \tag{3.4}$$

donde c_h es la única constante tal que $u(b) = 0$.

Observación 3.3. Para cualquier $1 < p < \infty$, es fácil ver que $\varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un homeomorfismo creciente con inversa $(\varphi_p)^{-1} = \varphi_{p'}$. Definamos la aplicación

$$\begin{aligned} \Phi_p : C(\overline{\Omega}) &\to C(\overline{\Omega}) \\ f &\mapsto \varphi_p \circ f. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Por ser Ω acotado y φ_p uniformemente continua sobre compactos, se tiene que Φ_p es continua con la topología de la convergencia uniforme. Además, es inversible, con inversa $(\Phi_p)^{-1} = \Phi_{p'}$.

Demostración. Comenzaremos probando que, si existe solución débil $u \in W^{1,p}(\Omega)$ de (3.1), se tiene que cumplir $\varphi_p(u') \in W^{1,1}(\Omega)$ y $u \in C(\overline{\Omega})$. Para ello, notemos que $u' \in L^p(\Omega)$, y por ende $\varphi_p(u') \in L^{p'}(\Omega)$ ya que

$$\int_\Omega |\varphi_p(u')|^{p'} = \int_\Omega |u'|^p < \infty.$$

Además, por (3.2), se cumple

$$\int_\Omega \varphi_p(u')v' = \int_\Omega |u'|^{p-2}u'v' = \int_\Omega h(x)v$$

para toda $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. En particular, también se cumple para toda $v \in C_c^\infty(\Omega)$, lo que nos dice que $-h \in L^q(\Omega)$, con $q \geq 1$, es la derivada débil de $\varphi_p(u')$. Esto nos da que $\varphi_p(u') \in W^{1,r}(\Omega) \subset W^{1,1}(\Omega)$, con $r = min\{p', q\}$, y que

$$(\varphi_p(u'))' = -h \quad ppx \text{ en } \Omega. \tag{3.6}$$

Utilizando ahora el Teorema 1.13 e integrando la última igualdad obtenemos que se debe cumplir

$$\varphi_p(u')(x) = -\int_a^x h(s)ds + \varphi_p(u')(a). \tag{3.7}$$

Aplicando $\varphi_p^{-1} = \varphi_{p'}$ a ambos lados, se tiene

$$u'(x) = \varphi_p^{-1}\left(-\int_a^x h(s)ds + \varphi_p(u')(a)\right) \tag{3.8}$$

y es fácil ver que $u' \in C(\overline{\Omega})$ por ser composición de funciones continuas. Esto sumado a que $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ nos da $u \in C^1(\overline{\Omega})$.

Dada ahora la regularidad de u notemos que integrando una vez más la fórmula (3.8) y teniendo en cuenta las condiciones de contorno, obtenemos que, de existir solución, ésta debe ser de la forma (3.4).

Para finalizar esta demostración hace falta probar que efectivamente existe una única función u de la forma (3.4) que es solución de (3.1). Tomemos entonces c cualquier constante y notemos que

$$\left(-\int_a^x h(s)ds + c\right) \in W^{1,q}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega}).$$

Entonces,

$$\varphi_p^{-1}\left(-\int_a^x h(s)ds + c\right) \in C(\overline{\Omega}).$$

Definiendo

$$u_c(x) := \int_a^x \varphi_p^{-1}\left(c - \int_a^y h(t)dt\right) dy,$$

obtenemos que $u_c \in C^1(\overline{\Omega}) \subset W^{1,p}(\Omega)$ y que cumple (3.8) y (3.7), con c en lugar de $\varphi_p(u')(a)$, y por lo tanto también cumple (3.6). Sólo fata ver que podemos elegir un único valor c_h y por ende una única función u_{c_h} que cumpla las condiciones de contorno dadas. Trivialmente se ve que $u_c(a) = 0$ para cualquier valor de c. Para probar que existe c_h tal que $u_{c_h}(b) = 0$, utilizaremos Bolzano. Definimos $\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$\ell(c) := u_c(b) = \int_a^b \varphi_p^{-1}\left(c - \int_a^y h(t)dt\right) dy.$$

Sean

$$\begin{aligned}
T :\ & \mathbb{R} \to C(\overline{\Omega}), && c \to c - \int_a^x h(s)ds \\
\Phi_{p'} :\ & C(\overline{\Omega}) \to C(\overline{\Omega}), && f \to \varphi_p^{-1}(f) \\
H :\ & C(\overline{\Omega}) \to \mathbb{R}, && f \to \int_a^b f(s)ds,
\end{aligned}$$

donde $C(\overline{\Omega})$ tiene la topología de la norma infinito. Es fácil ver que estas funciones son continuas (para $\Phi_{p'}$ ver Observación 3.3). Como $\ell(c) = H \circ \Phi_{p'} \circ T(c)$, obtenemos que $\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua. Además, por inspección podemos ver que es estrictamente creciente y por lo tanto inyectiva. Tomemos ahora

$$c_0 := -\int_a^b |h(s)|ds, \qquad c_1 := \int_a^b |h(s)|ds. \tag{3.9}$$

Como $\ell(c_0) \leq 0 \leq \ell(c_1)$ (notar que $sgn(\varphi_p^{-1}(x)) = sgn(x)$, donde sgn es la función *signo*), utilizando Bolzano y el crecimiento de la función vemos que existe un único valor de $c = c_h$ tal que $u_{c_h}(b) = \ell(c_h) = 0$. Esto concluye la demostración. □

Observación 3.4. De la demostración anterior se puede ver que $c_h = (\varphi_p(u'))(a)$. Utilizando esto y (3.9), se tiene que $(\varphi_p(u'))(a) \leq \int_a^b |h(s)|ds$.

Teorema 3.5. *El operador solución o inverso del p-Laplaciano, denotado por $\mathcal{S}$, es continuo como operador $\mathcal{S} : L^q(\Omega) \to C^1(\overline{\Omega})$, para $q \in [1, \infty]$ y compacto como operador $\mathcal{S} : L^q(\Omega) \to C(\overline{\Omega})$, para $q \in (1, \infty)$.*

Demostración. Tomemos una sucesión $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $L^q(\Omega)$ tal que $h_n \rightharpoonup h$ (converge débilmente) si $n \to \infty$. Probaremos por absurdo que $\mathcal{S}(h_n)$ converge a $\mathcal{S}(h)$. Esto nos dará la continuidad deseada. Más aún, dirá que el operador $\mathcal{S} : L^q(\Omega) \to C^1(\overline{\Omega})$ es completamente continuo. Supongamos entonces que $\mathcal{S}(h_n)$ no converge a $\mathcal{S}(h)$ en norma $C^1(\overline{\Omega})$. Entonces, existe un $\varepsilon > 0$ y una subsucesión de $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$, que seguiremos llamando $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$, tal que

$$||\mathcal{S}(h_n) - \mathcal{S}(h)||_{C^1(\overline{\Omega})} \geq \varepsilon \tag{3.10}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Llamemos $u_n := \mathcal{S}(h_n)$, por el Teorema 3.2, tenemos

$$-\left(\varphi_p(u_n')\right)' = h_n \quad ppx \text{ en } \Omega.$$

Usando que la sucesión $\{h_n\}$ es acotada en $L^q(\Omega)$ por ser débilmente convergente, probemos que $\{\varphi_p(u_n')\}$ es equiacotada y equicontinua en $C(\overline{\Omega})$. Para ello, notemos que

$$\begin{aligned}
-\left(\varphi_p(u_n')\right)(x) &= \int_a^x h_n(s)ds + -\left(\varphi_p(u_n')\right)(a) \\
&\leq \int_a^x h_n(s)ds + \int_a^b |h_n(s)|ds \quad \text{(Ver Observación 3.4)} \\
&\leq K||h_n||_q < C.
\end{aligned}$$

Esto prueba la equiacotación. Para la equicontinuidad, dado $\tilde{\varepsilon} > 0$, tomemos $\delta := (\tilde{\varepsilon})^{q'}$ y calculemos

$$\begin{aligned}
|\left(\varphi_p(u_n')\right)(x+\delta) - \left(\varphi_p(u_n')\right)(x)| &\leq \int_x^{x+\delta} |h_n(s)|ds \\
&\leq \left(\int_x^{x+\delta} 1\right)^{\frac{1}{q'}} ||h_n||_1 \\
&\leq \delta^{\frac{1}{q'}} C \leq \tilde{\varepsilon}
\end{aligned}$$

independientemente de n y x. Esto da la equicontinuidad. Estamos en condiciones de aplicar Ascoli-Arzelà a la sucesión $\{\varphi_p(u'_n)\}$, por lo cual existe una subsucesión convergente en norma $C(\overline{\Omega})$. Renombramos nuevamente esta subsucesión por $\{\varphi_p(u'_n)\}$. Como la aplicación $\Phi_{p'} : C(\overline{\Omega}) \to C(\overline{\Omega})$, definida en la Observación 3.3, es continua y $u'_n = \Phi_{p'}(\varphi_p(u_n))$ tenemos que $\{u'_n\}_{n=1}^{\infty}$ es uniformemente convergente. Esto nos permite usar Ascoli-Arzelà con la sucesión $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, obteniendo que existe una subsucesión convergente en $C^1(\overline{\Omega})$. Tomemos $u = \lim_{n\to\infty} u_n$ y notemos que, por (3.10),

$$||u_n - \mathcal{S}(h)||_{C^1(\overline{\Omega})} \geq \varepsilon. \tag{3.11}$$

Por definición de $u_n = \mathcal{S}(h_n)$ tenemos que

$$\int_a^b \varphi_p(u'_n)v' = \int_a^b h_n v$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $v \in C_c^\infty(\Omega)$. Recordando que $\Phi_p : C(\overline{\Omega}) \to C(\overline{\Omega})$ es continua y que $h_n \rightharpoonup h$ en $L^q(\Omega)$ podemos pasar al límite la última igualdad y obtenemos

$$\int_a^b \varphi_p(u')v' = \int_a^b hv \tag{3.12}$$

para todo $v \in C_c^\infty(\Omega)$ y por lo tanto para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Dado que $u \in C^1(\overline{\Omega})$ y cumple $u(a) = u(b) = 0$ (por ser límite en norma $C^1(\overline{\Omega})$ de las u_n) y (3.12), tenemos que $u = \mathcal{S}(h)$. Esto contradice (3.11) lo que prueba que $\mathcal{S}(h_n) \to \mathcal{S}(h)$ en norma $C^1(\overline{\Omega})$. Como se dijo al principio de la demostración esto nos da la continuidad de $\mathcal{S} : L^q(\Omega) \to C^1(\overline{\Omega})$. En efecto, si $h_n \to h$ en $L^q(\Omega)$, entonces $h_n \rightharpoonup h$ y por lo que hemos visto $\mathcal{S}(h_n) \to \mathcal{S}(h)$ en norma $C^1(\overline{\Omega})$.

Para probar la compacidad sólo hace falta notar que si $q > 1$, entonces toda sucesión acotada es débilmente convergente (por la compacidad débil de la bola en espacios reflexivos) y por lo tanto el operador $\mathcal{S}$ lleva sucesiones acotadas en subsucesiones convergentes, lo cual implica la compacidad. □

Lema 3.6. *(Principio de Comparación) Sean u, $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tales que $u \leq v$ en $\partial\Omega$ y $-\Delta_p u \leq -\Delta_p v$ en sentido débil en Ω, esto es,*

$$\int_a^b |u'|^{p-2}u'\phi' \leq \int_a^b |v'|^{p-2}v'\phi' \quad \text{para toda } 0 \leq \phi \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.13}$$

Entonces, $u \leq v$ en Ω.

Demostración. Tomemos como función de prueba a $(u-v)^+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$. De (3.13) y el Lema 1.25 obtenemos,

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_a^b (|u'|^{p-2}u'\phi' - |v'|^{p-2}v')((u-v)^+)' \\ &= \int_{u>v} (|u'|^{p-2}u'\phi' - |v'|^{p-2}v')(u'-v'), \end{aligned}$$

pero como $\varphi_p(s) = |s|^{p-2}s$ es creciente (ver Observación 3.3), el integrando en el último renglón es no negativo. Esto nos dice que o bien $|\{u > v\}| = 0$ o que $((u-v)^+)' \equiv 0$ y por lo tanto $(u-v)^+ \equiv cte$. Usando que $u \leq v$ en $\partial\Omega$ y lo anterior, obtenemos $u \leq v$ en Ω. □

Trabajaremos a continuación con problemas más generales de la forma

$$\begin{cases} -\Delta_p u + c|u|^{p-2}u = h(x) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.14}$$

donde $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ es un intervalo acotado, $c \in L^\infty(\Omega)$ y $h \in L^q(\Omega)$, con $q \in [p', \infty]$.

Definiremos qué entendemos por solución. Daremos luego un teorema de existencia, unicidad y regularidad de las soluciones. La demostración de la existencia y unicidad se basa en la formulación variacional minimizando un funcional de energía. Por ser muy ortogonal a lo exhibido hasta el momento no daremos su demostración. En cambio, sí probaremos, gracias al Principio de Comparación dado, la regularidad de las soluciones.

Definición 3.7. (Solución débil) Sea $\Omega := (a, b) \subset \mathbb{R}$ un intervalo acotado. Sea $1 < p < \infty$ y $h \in L^q(\Omega)$, con $q \in [p', \infty]$. Decimos que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ es *solución débil* del problema (3.14) si para toda $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ se tiene que

$$\int_\Omega |u'|^{p-2}u'v' + c|u|^{p-2}u\ v = \int_\Omega h(x)v, \tag{3.15}$$

donde las derivadas se entienden en sentido débil.

Teorema 3.8. *Sea $\Omega := (a, b) \subset \mathbb{R}$ un intervalo acotado. Sean $1 < p < \infty$ y $h \in L^q(\Omega)$, con $q \in [p', \infty]$. Entonces, existe una única solución débil $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de (3.14). Más aún, $u \in C^1([a, b])$, con $(|u'|^{p-2}u') \in W^{1,1}((a, b))$ y cumple la ecuación ppx en Ω.*

Demostración. Como mencionamos antes, no daremos la demostración de la existencia y unicidad. El lector interesado puede encontrarla en [BS, Teorema 2.6.12]. Para la regularidad, fijemos $u \in W^{1,p}(\Omega)$ la única solución débil de (3.14) y trabajemos con el problema

$$\begin{cases} -\Delta_p v = h(x) - c|u|^{p-2}u & \text{en } \Omega \\ v = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.16}$$

donde la función incógnita es v. Notemos que $h(x) - c|u|^{p-2}u \in L^{p'}(\Omega)$. Entonces, podemos aplicar el Teorema 3.2 y obtenemos que $v \in C^1([a, b])$, con $(|v'|^{p-2}v') \in W^{1,1}((a, b))$ y cumple la ecuación *ppx* en Ω. Para concluir esta demostración sólo debemos probar que $u \equiv v$. Para ello, usamos el Lema 3.14. Por ser u y v soluciones débiles de (3.14) y (3.16) respectivamente, tenemos que

$$\int_\Omega |u'|^{p-2}u'\phi' = \int_\Omega h(x)\phi - c|u|^{p-2}u\ \phi = \int_\Omega |v'|^{p-2}v'\phi' \quad \forall \phi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Además, por ser funciones del $W_0^{1,p}(\Omega)$ ambas se anulan en la frontera. Utilizando el Lema 3.14 en ambos sentidos obtenemos $u \equiv v$ como queríamos. □

Finalmente enunciaremos algunos resultados sobre problemas de autovalores asociados al p-Laplaciano.

Lema 3.9. *Sea $0 \leq c \in L^\infty(\Omega)$ y sea $m \in L^{p'}(\Omega)$ con $0 \leq m \not\equiv 0$. Entonces, existen un autovalor principal positivo $\lambda_1(m, \Omega) > 0$ y $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ que satisfacen*

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}\, u')' + c(x)u^{p-1} = \lambda_1(m, \Omega)m(x)u^{p-1} & \textit{en } \Omega \\ u > 0 & \textit{en } \Omega \\ u = 0 & \textit{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.17}$$

Más aún, $\lambda_1(m, \Omega)$ es único y simple. Una solución u del problema (3.17) es llamada autofución principal positiva asociada al autovalor principal positivo $\lambda_1(m, \Omega)$ y se cumple que $u \in C^1([a, b])$, con $(|u'|^{p-2}u') \in W^{1,1}((a, b))$ y satisface la ecuación ppx en Ω.

Demostración. Para la primer parte ver [CQ, Teorema 1] para el caso $m > 0$ en Ω y [CQ, Proposición 6 (iv) y Teorema 7 (i)] para el caso $m \geq 0$. La última parte del Lema (o sea, las propiedades de regularidad de las autofunciones) se deduce aplicando el mismo razonamiento que en la prueba anterior del Teorema 3.8 utilizando que $u \in L^\infty(\Omega)$ por [CQ, Remark 3]. □

En particular, tomando $c \equiv 0$ y $m \equiv 1$ en el lema anterior obtenemos

Lema 3.10. *Sea $\Omega := (a, b)$. Existen un autovalor principal positivo $\lambda_1(m, \Omega) > 0$ y $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ que satisfacen:*

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}\, u')' = \lambda_1(m, \Omega)u^{p-1} & \textit{en } \Omega \\ u > 0 & \textit{en } \Omega \\ u = 0 & \textit{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.18}$$

Más aún, $\lambda_1(m, \Omega)$ es único y simple. Además, u alcanza su máximo en $x_0 := (a + b)/2$ y es un múltiplo positivo de la función $sin_p(\pi_p(x - a)/(b - a))$, donde $\pi_p = 2\pi(p - 1)^{1/p}/p \sin(\pi/p)$, la cual es estrictamente positiva, simétrica y creciente en (a, x_0).

Demostración. Hasta el "además" sale de lo dicho anteriormente. El "además" puede encontrarse en [GP, Sección 6.3]. Para una definición precisa de la definición de sin_p ver [Lind]. □

3.2. Sobre el operador Δ_p en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Cuando trabajamos en dimensiones mayores a uno el operador p-Laplaciano se define de manera formal como

$$-\Delta_p u := -div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) \quad \text{con } 1 < p < \infty.$$

Es fácil notar que esto generaliza la definición dada en la sección anterior. Expondremos en este caso sólo algunos resultados respecto del problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = h(x) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.19}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto acotado y $h \in L^{p'}(\Omega)$. Como es usual la noción de solución débil esta dada por

Definición 3.11. (Solución débil) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto acotado, $1 < p < \infty$ y $h \in L^{p'}(\Omega)$. Decimos que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ es *solución débil* del problema (3.19) si para toda $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ se tiene que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\langle \nabla u, \nabla v\rangle = \int_\Omega h(x)v. \tag{3.20}$$

Notar que, cuando trabajamos en dimensiones mayores que uno, pedimos que la función $h \in L^{p'}(\Omega)$ a diferencia de lo que se vio anteriormente, donde solo exigíamos $h \in L^q(\Omega)$, con $q > 1$. La motivación de esto es análoga al caso unidimensional observando el funcional asociado

$$\mathcal{J}_p(u) := \int_\Omega \frac{|\nabla u|^p}{p} - h(x)u\, dx. \tag{3.21}$$

La diferencia radica en que aquí sólo podemos asegurar que $u \in L^p(\Omega)$ (respecto de sus condiciones de integrabilidad) y por lo tanto debemos exigirle mejores condiciones de integración a la función h.

A continuación expondremos los resultados análogos al Teorema 3.2, el Teorema 3.5 y el Lema 3.14 para el caso multidimensional. Es decir, existencia, unicidad y regularidad de la solución, regularidad del operador solución o inverso del p-Laplaciano y un Principio de Comparación. A diferencia del caso unidimensional, no tendremos una fórmula explícita de la solución y las propiedades de regularidad requerirán mayores exigencias respecto al espacio de salida del operador solución. Las demostraciones en algunos casos son significativamente más difíciles y por ello sólo mencionamos las referencias para el lector interesado.

Teorema 3.12. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado. Sean $1 < p < \infty$ y $h \in L^q(\Omega)$, con $q \in [p', \infty]$. Entonces, existe una única solución débil $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de (3.19). Más aún, si $q > n$, entonces $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, para algún $\alpha \in (0,1)$. Además, en el caso particular que $h \equiv cte$ tenemos aún mejores condiciones de regularidad ya que obtenemos $|\nabla u|^{p-2}\nabla u \in W_{loc}^{1,2}(\Omega)$.*

Demostración. La existencia y unicidad se obtienen mediante técnicas de minimización del funcional de energía (3.21), una demostración completa se puede ver en [BS, Teorema 2.6.8]. Para el "más aún", consultar [PZ, Proposición 2.1]. Allí se demuestra que $u \in C^1(\overline{\Omega})$ pero con la misma demostración se puede ver que $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, para algún $\alpha \in (0,1)$. Para facilitar la lectura en caso que el lector esté interesado mencionamos que los resultados necesarios (particulares) de los papers citados en dicha demostración son [GV, Proposición 1.3] y [Lieb, Teorema 1]. Para el "además", cuando $h \equiv cte$, ver [DaSc, Corolario 2.2]. □

Teorema 3.13. *El operador solución o inverso del p-Laplaciano, denotado por $\mathcal{S}$, es continuo y compacto como operador $\mathcal{S} : L^\infty(\Omega) \to C^1(\overline{\Omega})$.*

Demostración. Esto se encuentra probado en [A, Proposition 2.1 (iii)]. □

Finalmente el Principio de Comparación es exactamente el mismo que en el caso unidimensional reemplazando las derivadas unidimensionales por gradientes.

Lema 3.14. *[GP, Corolario 6.5.3] (Principio de Comparación) Sean u, $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tales que $u \le v$ en $\partial\Omega$ y $-\Delta_p u \le -\Delta_p v$ en sentido débil en Ω, esto es,*

$$\int_a^b |\nabla u|^{p-2}\langle \nabla u, \nabla \phi\rangle \le \int_a^b |\nabla v|^{p-2}\langle \nabla v, \nabla \phi\rangle \quad \text{para toda } 0 \le \phi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Entonces, $u \le v$ en Ω.

Teorema 3.15. *[PS, Teorema 1.1.1] (Principio del Máximo Fuerte) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, acotado y conexo. Sea $u \in C^1(\Omega)$ satisfaciendo $-\Delta_p u \geq 0$ en sentido débil en Ω y $u \geq 0$ en Ω. Si $u(x_0) = 0$ en algún punto $x_0 \in \Omega$, entonces $u \equiv 0$ en Ω.*

Lema 3.16. *(Boundary point lemma para el p-Laplaciano) (Lema de Hopf para el p-Laplaciano) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con la propiedad de bola interior. Sea $u \in C^1(\overline{\Omega})$ satisfaciendo $-\Delta_p u \geq 0$ en sentido débil en Ω y $u > 0$ en Ω. Si $u(x_0) = 0$ en algún punto $x_0 \in \partial\Omega$, entonces $\partial_\eta u(x_0) < 0$, donde η es el vector normal unitario exterior a $\partial\Omega$.*

Demostración. Resulta de adaptar el [PS, Teorema 5.5.1] al caso del p-Laplaciano. □

Capítulo 4

Sub y supersoluciones

4.1. Teoremas de sub y super soluciones

En esta sección introducimos los teoremas que utilizaremos en la mayoría de nuestras demostraciones. Comenzaremos estableciendo las hipótesis necesarias sobre el problema a tratar, definiremos las nociones de solución débil, y las de sub y super soluciones débiles y finalmente daremos dos teoremas que nos darán existencia de soluciones en presencia de sub y supersoluciones bien ordenadas.

Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$ con frontera $\partial\Omega$ y sea $\mathcal{A}$ un operador quasilineal elíptico de segundo orden en forma de divergencia:

$$(\mathcal{A}u)(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(\mathcal{A}_i(x, u(x), \nabla u(x))) \text{ para todo } x \in \Omega \tag{4.1}$$

donde $\mathcal{A}_i$ (i=1,...,n) satisface las siguientes condiciones:

A1 Cada $\mathcal{A}_i : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ satisface las condiciones de Carathéodory, i.e. $\mathcal{A}_i(x, t, \xi)$ es medible en $x \in \Omega$ para todo par $(t, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ fijo y continua en (t, ξ) para casi todo x fijo en Ω.

A2 Existen constantes $p \in (1, \infty)$ y $c_0 \geq 0$, y una función $k_0 \in L^{p'}(\Omega)$, con $p' = p/(p-1)$, tales que, para $i = 1, ..., n$ y para casi todo $x \in \Omega$ y $(t, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$,

$$|\mathcal{A}_i(x, t, \xi)| \leq k_0(x) + c_0(|t|^{p-1} + |\xi|^{p-1}).$$

A3 Para casi todo $x \in \Omega$, todo $t \in \mathbb{R}$ y ξ, $\xi' \in \mathbb{R}^n$ con $\xi \neq \xi'$,

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathcal{A}_i(x, t, \xi) - \mathcal{A}_i(x, t, \xi'))\,(\xi - \xi') > 0.$$

A4 Para algún $\alpha > 0$ y $k_1 \in L^{p'}(\Omega)$, para casi todo $x \in \Omega$ y todo par $(t, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$,

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i(x, t, \xi)\xi_i \geq \alpha\,|\xi|^p - k_1(x).$$

Observación 4.1. Si

$$\mathcal{A}u = \sum_{i,j=1}^{n} \left(a^{ij}(x) u_{x_j}\right)_{x_i},$$

entonces (A1)-(A4) se cumplen con $\mathcal{A}_i u = \sum_{j=1}^{n} a^{ij}(x) u_{x_j}$ y $p = 2$, siempre que $a^{ij} \in L^\infty(\Omega)$ y

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha\,|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \text{ y para casi todo } x \in \Omega.$$

□

Observación 4.2. Si
$$\mathcal{A}u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \sum_{i=1}^{n}\left(|\nabla u|^{p-2}u_{x_i}\right)_{x_i},$$
entonces (A1)-(A4) se cumplen con $\mathcal{A}_i u = |\nabla u|^{p-2}u_{x_i}$. □

Como una consecuencia de (A1) y (A2), la forma semilineal
$$a(u,v) = \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \mathcal{A}_i(x,u,\nabla u)v_{x_i}dx$$
está definida en $W^{1,p}(\Omega)\times W^{1,p}(\Omega)$.

Consideremos ahora el problema de valores en la frontera dado por
$$\begin{cases} -\mathcal{A}u + f(x,u,Du) = 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.2}$$
donde $\mathcal{A}$ está dada por (4.1) y f es una función Carathéodory. Definiremos a continuación qué entendemos por solución débil de (4.2).

Definición 4.3. (Solución Débil) Diremos que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ es una solución débil de (4.2) si $f(x,u(x),\nabla u(x))$ pertenece a $L^{p'}(\Omega)$ y
$$a(u,\phi) + \int_\Omega f(x,u,\nabla u)\phi\ dx = 0 \quad \forall \phi \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{4.3}$$

Definición 4.4. (Sub y Supersoluciones débiles) Una función v es llamada subsolución débil de (4.2) si $v \in W^{1,p}(\Omega)$, $v \leq 0$ en $\partial\Omega$, $f(x,v(x),\nabla v(x))$ pertenece a $L^{p'}(\Omega)$ y
$$a(v,\phi) + \int_\Omega f(x,v,Dv)\phi\ dx \leq 0 \quad \forall \phi \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ con } \phi \geq 0 \quad ppx \in \Omega, \tag{4.4}$$
donde por $v \leq 0$ en $\partial\Omega$ entendemos $v^+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Análogamente, una función w se dice supersolución si $w \in W^{1,p}(\Omega)$, $w \geq 0$ en $\partial\Omega$, $f(x,w(x),\nabla w(x))$ pertenece a $L^{p'}(\Omega)$ y
$$a(w,\phi) + \int_\Omega f(x,w,Dw)\phi\ dx \geq 0 \quad \forall \phi \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ con } \phi \geq 0 \quad ppx \in \Omega, \tag{4.5}$$
donde por $w \geq 0$ en $\partial\Omega$ entendemos $w^- \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Teorema 4.5. *(Teorema de sub y supersoluciones débiles)(Versión no singular) Supongamos que v y w son sub y supersoluciones débiles de (4.2), respectivamente, y $v \leq w$ ppx $\in \Omega$. Supongamos además que existen una constante $c_1 > 0$ y una función $k_1 \in L^{p'}(\Omega)$ tales que*
$$|f(x,t,\xi)| \leq k_1(x) + c_1|\xi|^{p-1} \tag{4.6}$$
para casi todo $x \in \Omega$, todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ y todo $t \in [v(x),w(x)]$. Entonces, (4.2) tiene una solución débil u que satisface $v \leq u \leq w$ ppx en Ω.

Demostración. [D, p. 41] □

Observación 4.6. Consideremos problemas uniformemente elípticos de la forma
$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{n}\left(a^{ij}(x)u_{x_j}\right)_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u = m(x)u^q & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.7}$$
con $q > 0$, $m \in L^r(\Omega)$, con $r = 2$ si $n = 1$ 0 $n < r < \infty$ si $n > 1$, $a^{ij}, b^i, c \in L^\infty(\Omega)$, y tomemos $p = 2$ en las definiciones dadas anteriormente.

Si existen sub y supersoluciones bien ordenadas $v \leq w$, ambas en $L^\infty(\Omega)\cap W^{1,2}(\Omega)$, es fácil ver que, por la Observación 4.1, y tomando $f(x,t,\xi) := m(x)t^q - \sum_{i=1}^{n} b^i(x)\xi_i - c(x)t$, se cumplen las hipótesis necesarias para aplicar el Teorema 4.5. Por lo tanto, eso será suficiente para que exista solución de (4.7). □

Observación 4.7. La observación anterior también es válida para problemas de la forma

$$\begin{cases} -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + c(x)u = m(x)u^q & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.8}$$

con $0 < q < p-1$, $m \in L^{p'}(\Omega)$ y $c \in L^\infty(\Omega)$, cuando tenemos sub y supersoluciones bien ordenadas $v \leq w$, ambas en $L^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$. Para demostrar esto, sólo hace falta ver la Observación 4.2 y tomar $f(x,t,\xi)$ como en la observación anterior con $b^i \equiv 0$ en Ω. □

En esta tesis utilizaremos el Teorema 4.5 para resolver problemas como los dados en las dos observaciones anteriores. En estos casos, tenemos una ventaja adicional dada por el siguiente lema.

Lema 4.8. *[D, Lema 4.10] Sea $\mathcal{A}$ un operador quasilineal elíptico de segundo orden en forma de divergencia como en (4.1). Supongamos que valen (A1) — (A4) para $\mathcal{A}_i$ y también que*

(A5) $\mathcal{A}_i(x,t,\xi) = \mathcal{A}_i(x,\xi)$ es independiente de t (para cada $i = 1\cdots n$).

Si v_1 y v_2 son subsoluciones débiles de (4.2), entonces la función v dada por el máximo entre v_1 y v_2,

$$v := \max\{v_1, v_2\},$$

es subsolución débil de (4.2). Similarmente, si w_1 y w_2 supersoluciones débiles de (4.2), entonces $w := \min\{w_1, w_2\}$ también lo es.

Notemos que el Teorema 4.5 no es aplicable a problemas de la forma

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.9}$$

cuando la función $f(x,\cdot)$ es singular en 0, en el sentido que

$$\lim_{t\to 0} f(x,t) = \infty. \tag{4.10}$$

Como también estamos interesados en problemas singulares, daremos otro teorema de sub y supersoluciones con una condición más relajada sobre f. Empezamos debilitando ligeramente los conceptos de sub y supersolución.

Definición 4.9. Una función $v \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ es una subsolución de (4.9) si

(i) $v > 0$ en Ω, $v = 0$ en $\partial\Omega$ y

(ii) para todo $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\phi \geq 0$,

$$\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\langle\nabla v, \nabla\phi\rangle dx \leq \int_\Omega f(x,v)\phi dx.$$

Análogamente, decimos que $w \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ es una supersolución si

(i) $w > 0$ en Ω, $w = 0$ en $\partial\Omega$ y

(ii) para todo $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\phi \geq 0$,

$$\int_\Omega |\nabla w|^{p-2}\langle\nabla w, \nabla\phi\rangle dx \leq \int_\Omega f(x,w)\phi dx.$$

Finalmente, para problemas singulares tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.10. *(Teorema de sub y supersoluciones débiles)(Versión singular) Supongamos que v y w son sub y supersoluciones respectivamente de (4.9), en el sentido de la definición anterior, que cumplen $v \leq w$ en Ω. Supongamos también que existe una función $k_1 \in L^{p'}_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$|f(x,t)| \leq k_1(x) \tag{4.11}$$

para casi todo $x \in \Omega$, todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ y todo $t \in [v(x), w(x)]$. Entonces, existe una $u \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ solución de (4.9) con $v \leq u \leq w$.

Demostración. Ver [LS, Teorema 4.1] □

Finalmente, hacemos notar que, para hallar subsoluciones para problemas singulares, utilizaremos el siguiente teorema de punto fijo.

Teorema 4.11. *(Teorema de Schauder) Sea X un espacio de Banach, $\emptyset \neq K \subset X$ un conjunto cerrado, acotado y convexo, y $F : K \to K$ un mapeo continuo y compacto. Entonces, existe un punto fijo de F.*

Capítulo 5

Problema sublineal unidimensional

Dados $\alpha < \beta$, tomamos $\Omega := (\alpha, \beta)$ y sea $m \in L^2(\Omega)$ una función que cambia de signo en Ω. Sea $q \in (0,1)$ y sea L un operador diferencial uniformemente elíptico de segundo orden dado por

$$Lu := -a(x)u'' + b(x)u' + c(x)u, \tag{5.1}$$

donde a, $b \in C(\overline{\Omega})$, $0 \leq c \in L^\infty(\Omega)$ y $a(x) \geq \lambda > 0$ para todo $x \in \Omega$. Nuestro objetivo en este capítulo será analizar la existencia y no existencia de soluciones del problema

$$\begin{cases} Lu = m(x)u^q & \text{en } \Omega \\ u > 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.2}$$

donde el concepto de solución estará dado por la siguiente definición.

Definición 5.1. Por solución (fuerte) de (5.2) nos referimos a una función $u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$, con $u > 0$ en Ω, que satisface la ecuación *ppx* en Ω.

En contraste con los problemas superlineales (es decir, $q > 1$) donde cualquier solución no negativa (no trivial) es automáticamente positiva, para los problemas sublineales como (5.2) esto es mucho menos claro, incluso en el caso unidimensional.

El problema (5.2) ha sido considerado en [GK1] para el operador de Laplace. Allí varias condiciones suficientes para la existencia de soluciones positivas han sido probadas asumiendo cierta simetría en m. En el presente capítulo adaptaremos las técnicas utilizadas en dicho trabajo para obtener resultados en el caso de un operador general. Más precisamente, entre los Teoremas 5.10 y 5.14 damos 4 condiciones suficientes para la existencia de soluciones estrictamente positivas. Cabe destacar que dichas condiciones son no comparables entre sí. Además, como una consecuencia de estos resultados, caracterizamos el conjunto de q's tales que (5.2) tiene solución. Por otro lado, condiciones necesarias sobre m son establecidas en el Teorema 5.20.

En relación con resultados previos que se encuentran en la literatura, mencionamos que en [HMV, Teorema 4.4] se demuestra que una condición suficiente para que exista solución de (5.2) es que la solución φ del problema $L\varphi = m$ en Ω, $\varphi = 0$ en $\partial\Omega$, satisfaga $\varphi > 0$ en Ω. Aunque el resultado anterior es cierto también para el caso n-dimensional, está lejos de ser una condición necesaria en el sentido que existen ejemplos donde (5.2) tiene solución pero con la correspondiente φ satisfaciendo $\varphi < 0$ en Ω (ver [GK1]).

Finalmente, para el correspondiente problema en el caso n-dimensional, considerando el operador Laplaciano, resultados de existencia de soluciones pueden encontrarse en [GK2] además del ya citado [GK1], como así también en [KQU]. En este último se ve que existe solución de (5.2) para todo q suficientemente cercano a 1, y más aún, la solución está en el interior del cono positivo en $C_0^1(\overline{\Omega})$. Este hecho, para un operador general en el caso unidimensional, se desprende a su vez de las condiciones suficientes dadas en este capítulo.

5.1. Resultados auxiliares

Una primera observación es que, como $a(x) \geq \lambda > 0$ para todo $x \in \Omega$ y $a \in C(\overline{\Omega})$, consideraremos sin pérdida de generalidad que L está dado por

$$Lu := -u'' + b(x)u' + c(x)u, \tag{5.3}$$

con b y c como ya especificamos.

Observación 5.2. Es inmediato verificar que (5.2) posee una solución si y sólo si tiene una solución con τm en lugar de m, para cualquier $\tau > 0$. □

Ya que emplearemos las técnicas de sub y supersoluciones de la Sección 4.1, por comodidad, reescribimos los conceptos de sub y supersolución adaptados al caso unidimensional y en particular al problema (5.2).

Definición 5.3. Decimos que $0 \leq v \in W^{1,2}(\Omega)$, es una subsolución (débil) de (5.2) si

$$\int_\Omega v'\phi' + bv'\phi + cv\phi \leq \int_\Omega mv^q\phi \text{ para todo } 0 \leq \phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

y $v = 0$ en $\partial\Omega$. Análogamente, decimos que $0 \leq w \in W^{1,2}(\Omega)$ es una supersolución si cumple

$$\int_\Omega w'\phi' + bw'\phi + cw\phi \geq \int_\Omega mw^q\phi \text{ para todo } 0 \leq \phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

y $w \geq 0$ en $\partial\Omega$.

Veremos a continuación que es fácil hallar supersoluciones arbitrariamente grandes, en el sentido que explicaremos abajo.

Lema 5.4. *(Existencia de supersolución arbitrariamente grande) Si $m^+ \not\equiv 0$ entonces el problema (5.2) tiene una supersolución arbitrariamente grande, es decir, para todo $k \in \mathbb{R}_{>0}$ existe una supersolución $w \in W^{1,2}(\Omega)$ cumpliendo $w \geq k$ en $\overline{\Omega}$. En particular, dada cualquier subsolución $v \in C(\overline{\Omega})$ siempre es posible hallar una supersolución $w \geq v$.*

Demostración. Sea $u > 0$ una solución fuerte de $Lu = m^+$ en Ω, $u = 0$ en $\partial\Omega$. Sea $k \geq (||u||_\infty + 1)^{q/(1-q)}$. Entonces $k(u+1)$ es una supersolución ya que

$$L(k(u+1)) \geq kLu \geq (k(||u||_\infty + 1))^q m^+ \geq (k(u+1))^q m \qquad ppx \text{ en } \Omega \tag{5.4}$$

y $u = k > 0$ en $\partial\Omega$. □

El siguiente lema es una consecuencia directa de la fórmula de integración por partes y será útil para "pegar subsoluciones", una idea que aparece en casi todos los teoremas sobre condiciones suficientes para la existencia de soluciones positivas.

Lema 5.5. *Para $i = 1, \cdots, n$ sea $u_i \in W^{2,2}(x_{i-1}, x_i)$ o $u_i \in C^2(x_{i-1}, x_i) \cap C^1([x_{i-1}, x_i])$ tal que*

$$u_i(x_i) = u_{i+1}(x_i), \quad u_i'(x_i) \leq u_{i+1}'(x_i) \quad y \tag{5.5}$$

$$-u_i'' + bu_i' + cu_i \leq mu_i^q \quad ppx \in (x_{i-1}, x_i) \text{ para todo } i = 1, \cdots, n. \tag{5.6}$$

Sea $\Omega := (x_0, x_n)$ y tomemos $u(x) := u_i(x)$ para todo $x \in \Omega$. Entonces, $u \in W^{1,2}(\Omega)$ y

$$\int_\Omega u'\phi' + bu'\phi + cu\phi \leq \int_\Omega mu^q\phi \text{ para todo } 0 \leq \phi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

En particular, si también se cumple que $u \leq 0$ en $\partial\Omega$, entonces u es una subsolución de (5.2).

Demostración. Demostraremos este lema para el caso $n = 2$. La demostración para $n > 2$ es análoga.

Por lo visto en la Sección 1.1 sabemos que $u \in C(\overline{\Omega})$, más aún $u \in W^{2,2}(\Omega)$ con

$$u' := \begin{cases} u_1' & \text{en } (x_0, x_1) \\ u_2' & \text{en } (x_1, x_2). \end{cases}$$

Sea $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, entonces

$$\int_{x_0}^{x_2} u'(x)\phi'(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} u_1'(x)\phi'(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} u_2'(x)\phi'(x)dx. \tag{5.7}$$

Aplicando integración por partes en el primer término de la derecha obtenemos

$$\int_{x_0}^{x_1} u_1'(x)\phi'(x)dx = u_1'(x_1)\phi(x_1) - \int_{x_0}^{x_1} u_1''(x)\phi(x)dx.$$

Para el segundo término del miembro de la derecha en (5.7) vale lo análogo y juntando ambas cosas tenemos

$$\int_{x_0}^{x_1} u'(x)\phi'(x)dx = \phi(x_1)\left(u_1'(x_1) - u_2'(x_1)\right) - \int_{x_0}^{x_1} u_1'(x)'\phi(x)dx - \int_{x_1}^{x_2} u_2'(x)'\phi(x)dx.$$

Por último, por hipótesis (5.5) (5.6), se sigue

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_2} u'(x)\phi'(x) + (b(x)u'(x) + c(x)u(x))\phi(x)dx &\leq \int_{x_0}^{x_1} m(x)u_1^q(x)\phi(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} m(x)u_2^q(x)\phi(x)dx \\ &= \int_{x_0}^{x_2} m(x)u^q(x)\phi(x)dx.\end{aligned}$$

□

Cuando utilicemos el lema anterior para construir subsoluciones de nuestros problemas, la hipótesis (5.5) será consecuencia del siguiente resultado.

Lema 5.6. *Dados $\alpha < x_0 < x_1 < \beta$, definimos $\Omega_1 := (\alpha, x_1)$, $\Omega_2 := (x_0, x_1)$ y $\Omega_3 := (x_0, \beta)$. Sean $u_i \in C^1(\overline{\Omega_i})$, con $i = 1, 2, 3$, funciones que satisfacen*

$$\begin{gathered} u_1(\alpha) = u_2(x_0) = u_2(x_1) = u_3(\beta) = 0, \\ u_i > 0 \ \text{ en } \Omega_i, \ \text{ para } i = 1,2,3, \\ ||u_1||_\infty, \ ||u_3||_\infty \leq 1 = ||u_2||_\infty. \end{gathered}$$

Entonces, existen $x_0 < \underline{x}_0 < \overline{x}_1 < x_1$ tales que

$$\begin{aligned} u_1(\underline{x}_0) &= u_2(\underline{x}_0), \qquad & u_2(\overline{x}_1) &= u_3(\overline{x}_1), \\ u_1'(\underline{x}_0) &\leq u_2'(\underline{x}_0), \qquad & u_2'(\overline{x}_1) &\leq u_3'(\overline{x}_1). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Demostración. Elijamos

$$\begin{aligned} \underline{x}_0 &:= \sup\left\{x \in \Omega_2 : \ u_1(y) > u_2(y) \text{ para todo } y \in (x_0, x_1]\right\}, \\ \overline{y} &:= \text{máx}\left\{x \in \Omega_2 : \ u_2(x) = 1\right\}, \\ \underline{y} &:= \text{mín}\left\{x \in \Omega_2 : \ u_2(x) = 1\right\}. \end{aligned}$$

Observamos que tal $\underline{x}_0 \in \Omega_2$ existe ya que $u_1(\alpha) = u_2(x_0) = 0$ y $u_1(x_1) \leq 1 = ||u_1||_\infty$. Más aún, como u_1 y u_2 son funciones de clase C^1, de la definición de $\underline{x}_0$ se sigue que

$$u_1(\underline{x}_0) = u_2(\underline{x}_0) \quad \text{y} \quad u_1'(\underline{x}_0) \leq u_2'(\underline{x}_0).$$

Para la última desigualdad es suficiente notar que

$$\frac{u_1(x) - u_1(\underline{x}_0)}{x - \underline{x}_0} \leq \frac{u_2(x) - u_2(\underline{x}_0)}{x - \underline{x}_0}$$

para todo $x \in (x_0, \underline{x}_0)$. También es claro que $\underline{x}_0 < \underline{y}$. Análogamente, existe $\overline{x}_1 \in \Omega_2$ tal que $u_2(\overline{x}_1) = u_3(\overline{x}_1)$ y $u_2'(\overline{x}_1) \leq u_3'(\overline{x}_1)$, y satisface $\overline{x}_1 > \overline{y}$. En particular $\underline{x}_0 < \overline{x}_1$. □

Los siguientes lemas dan algunas cotas superiores para la norma L^∞ de la solución no negativa de (5.2). Para evitar sobrecargar la notación de ahora en adelante escribimos

$$\overline{B}_\alpha(x) := e^{\int_\alpha^x b(r)dr}, \quad \underline{B}_\alpha(x) := e^{-\int_\alpha^x b(r)dr}.$$

Lema 5.7. *Sea $0 \leq u \in W^{2,2}(\Omega)$ tal que $Lu \leq mu^q$ en Ω. Entonces*

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} \leq [\int_\alpha^\beta \overline{B}_\alpha(x)||m^+\underline{B}_\alpha||_{L^1(\alpha,x)}dx]^{1/(1-q)}. \tag{5.9}$$

Demostración. Ya que $\underline{B}_\alpha$, $u' \in W^{1,2}(\Omega)$, podemos aplicar la regla de diferenciación del producto y obtener

$$\begin{aligned} -(\underline{B}_\alpha u')' &\leq -(\underline{B}_\alpha u')' + \underline{B}_\alpha cu \\ &= \underline{B}_\alpha(-u'' + bu' + cu) \\ &\leq \underline{B}_\alpha m u^q \leq \underline{B}_\alpha m^+ ||u||^q_{L^\infty(\Omega)}. \end{aligned}$$

Integrando en (α, x) para $x \in (\alpha, \beta)$ (ver Teorema 1.13) y notando que $\underline{B}_\alpha(\alpha)u'(\alpha) = u'(\alpha) \geq 0$ obtenemos

$$-\underline{B}_\alpha(x)u'(x) \leq ||u||^q_{L^\infty(\Omega)} \int_\alpha^x \underline{B}_\alpha(t)m^+(t)dt.$$

Dividiendo por $\underline{B}_\alpha(x) > 0$ e integrando ahora en (y, β) para $y \in (\alpha, \beta)$, ya que $u(\beta) = 0$, obtenemos

$$0 \leq \frac{u(y)}{||u||^q_{L^\infty(\Omega)}} \leq \int_y^\beta [\overline{B}_\alpha(x) \int_\alpha^x \underline{B}_\alpha(t)m^+(t)dt]dx \text{ para todo } y \in (\alpha, \beta)$$

de lo cual se sigue el lemma. □

Sean

$$M^+ := \{x \in \Omega : m \geq 0\} \quad \text{ y } \quad M^- := \{x \in \Omega : m < 0\}. \tag{5.10}$$

Lema 5.8. *Sea $0 \leq u \in W^{2,2}(\Omega)$ tal que $Lu \leq mu^q$ en Ω y sea M^+ dada por (5.10). Si $c > 0$ en M^+, entonces*

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} \leq [\sup_{x \in M^+} \frac{m^+(x)}{c(x)}]^{1/(1-q)}.$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad asumimos $u \not\equiv 0$. Más aún, supongamos primero que $||u||_{L^\infty(\Omega)} > 1$. Sea $x_0 \in \Omega$ un punto donde u alcanza su máximo absoluto. Entonces existe un $\delta > 0$ tal que $u \geq 1$ en $I_\delta(x_0) := (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Existen también x_1, $x_2 \in I_\delta(x_0)$ que satisfacen $x_1 < x_0 < x_2$ y $u'(x_2) \leq 0 \leq u'(x_1)$. Tenemos que

$$-(\underline{B}_\alpha u')' + \underline{B}_\alpha cu \leq \underline{B}_\alpha m u^q \leq \underline{B}_\alpha m^+ u^q \text{ en } \Omega$$

y por lo tanto en $I_\delta(x_0)$ obtenemos $-(\underline{B}_\alpha u')' \leq \underline{B}_\alpha(m^+ - c)u$ (pues $u \geq 1$ en $I_\delta(x_0)$). Integrando en (x_1, x_2) obtenemos

$$0 \leq \underline{B}_\alpha(x_1)u'(x_1) - \underline{B}_\alpha(x_2)u'(x_2) = \int_{x_1}^{x_2} -(\underline{B}_\alpha u')' \leq \int_{x_1}^{x_2} \underline{B}_\alpha(m^+ - c)u. \tag{5.11}$$

Como $u \geq 1$ en (x_1, x_2) y $\underline{B}_\alpha \geq e^{-||b^+||_\infty(x_2-\alpha)}$ en (x_1, x_2), de (5.11) se sigue que existe un $E \subset (x_1, x_2)$ con $|E| > 0$ (medida de Lebesgue) tal que $m^+(x) \geq c(x)$ *ppx* en E. Más aún, debido a que $c > 0$ *ppx* en M^+ debe valer que $m^+ > 0$ *ppx* en E. En particular, $E \subset M^+$ y por lo tanto

$$1 \leq \sup_{x \in E} \frac{m^+(x)}{c(x)} \leq \sup_{x \in M^+} \frac{m^+(x)}{c(x)}. \tag{5.12}$$

Sea ahora u como en el enunciado del lema y tomemos $\varepsilon > 0$. Entonces,

$$L\left(\frac{u}{||u||_\infty - \varepsilon}\right) \leq \frac{m}{(||u||_\infty - \varepsilon)^{1-q}} \left(\frac{u}{||u||_\infty - \varepsilon}\right)^q.$$

Aplicando la primera parte de la prueba con $m/(||u||_\infty - \varepsilon)^{1-q}$ y $u/(||u||_\infty - \varepsilon)$ en lugar de m y u respectivamente, de (5.12) deducimos que

$$(||u||_\infty - \varepsilon)^{1-q} \leq \sup_{x \in M^+} \frac{m^+(x)}{c(x)},$$

y como ε es arbitrario, esto completa la prueba. □

Necesitaremos el próximo resultado cuando caractericemos el conjunto de q's tal que (5.2) tiene solución.

Lema 5.9. *Supongamos que (5.2) tiene solución $u \in W^{2,2}(\Omega)$, y sea $\tilde{q} \in (q, 1)$. Entonces, existe $v \in W^{2,2}(\Omega)$ solución de (5.2) con $\tilde{q}$ en lugar de q.*

Demostración. Sea $\gamma := (1-q)/(1-\tilde{q})$. Sea $0 \leq \phi \in C_c^\infty(\Omega)$, y sea Ω' un abierto tal que $supp(\phi) \subset \Omega' \subset\subset \Omega$. Uno puede chequear que $u^\gamma \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega')$. Más aún, notando que $\gamma > 1$ y $\gamma - 1 + q = \gamma\tilde{q}$ encontramos que

$$\begin{aligned} L(u^\gamma) &= -\gamma(u''u^{\gamma-1} + (\gamma-1)u^{\gamma-2}(u')^2) + b\gamma u^{\gamma-1}u' + cu^\gamma \\ &\leq \gamma u^{\gamma-1}(-u'' + bu' + cu) \leq \gamma u^{\gamma-1} m u^q \\ &= \gamma m (u^\gamma)^{\tilde{q}} \text{ en } \Omega'. \end{aligned}$$

Multiplicando la desigualdad anterior por ϕ, integrando sobre Ω' y usando la fórmula de integración por partes obtenemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega (u^\gamma)'\phi' + b(u^\gamma)'\phi + cu^\gamma\phi &= \int_{\Omega'} [-(u^\gamma)'' + b(u^\gamma)' + cu^\gamma]\phi \\ &\leq \gamma \int_\Omega m(u^\gamma)^{\tilde{q}}\phi. \end{aligned}$$

Ahora, sea $0 \leq v \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Existe una sucesión $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ con $\phi_n \geq 0$ en Ω y tal que $\phi_n \to v \in W^{1,2}(\Omega)$ (ver Lema 1.40). Empleando la desigualdad anterior con ϕ_n en lugar de ϕ y pasando al límite vemos que u^γ es una subsolución de (5.2) con γm en lugar de m. Entonces, teniendo en cuenta el Lema 5.4 y la Observación 5.2, obtenemos una solución $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ de (5.2), y por el Lema 2.10, $v \in W^{2,2}(\Omega)$. □

5.2. Resultados principales

De ahora en más consideraremos C_q la constante dada por

$$C_q := \frac{2(1+q)}{(1-q)^2} \tag{5.13}$$

y, para cualquier intervalo I, $\lambda_1(m, I)$ denotará el autovalor principal positivo para m en I. Notar que $C_q = \infty$ cuando $q \to 1$.

Condiciones suficientes

Teorema 5.10. *Asumimos $b \equiv 0$. Sea $m \in L^2(\Omega)$ con $m^- \in L^\infty(\Omega)$ y supongamos que existen $\alpha \leq x_0 < x_1 \leq \beta$ tales que $0 \not\equiv m \geq 0$ en $I := (x_0, x_1)$. Sea $\gamma := máx\{(\beta - x_0), (x_1 - \alpha)\}$ y sea C_q como arriba.*

(i) Si vale que

$$\frac{||m^-||_{L^\infty(\Omega)}}{||c||_{L^\infty(\Omega)}} senh^2\left[\gamma\sqrt{\frac{||c||_{L^\infty(\Omega)}}{C_q}}\right] \leq \frac{1}{\lambda_1(m, I)}, \tag{5.14}$$

entonces existe una solución $u \in W^{2,2}(\Omega)$ del problema (5.2).

(ii) Si vale que

$$\frac{||m^-||_{L^\infty(\Omega)}}{||c||_{L^\infty(\Omega)}} \left(cosh\left[\gamma\sqrt{(1-q)||c||_{L^\infty(\Omega)}}\right] - 1\right) \leq \frac{1}{\lambda_1(m, I)}, \tag{5.15}$$

entonces existe una solución $u \in W^{2,2}(\Omega)$ del problema (5.2).

Demostración. A partir del Lema 5.4 y la Observación 5.2 es suficiente construir una subsolución u estrictamente positiva en Ω para el problema (5.2) con τm en lugar de m, para algún $\tau > 0$. Más aún, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $\alpha < x_0 < x_1 < \beta$ (de hecho, de la prueba que daremos a continuación quedará claro cómo proceder si $x_0 = \alpha$ o $x_1 = \beta$). Para dar tal u emplearemos el Lema 5.5 con $n = 3$ y τm en lugar de m en (5.2).

Consideramos $u_2 > 0$ con $||u_2||_{L^\infty(\Omega)} = 1$ la autofunción positiva principal (normalizada) asociada al peso m en I, esto es, satisfaciendo

$$\begin{aligned} Lu_2 &= \lambda_1(m, I) m u_2 \quad \text{en } I \\ u_2 &= 0 \quad \text{en } \partial I. \end{aligned}$$

Como $m \geq 0$ en I, para $\tau > 0$ tenemos que $Lu_2 = \lambda_1(m, I)mu_2 \leq \tau m u_2^q$ cuando

$$\lambda_1(m, I) \leq \tau. \tag{5.16}$$

Por otro lado, supongamos que vale (5.14) y tomemos τ satisfaciendo

$$\frac{||m^-||_{L^\infty(\Omega)}}{||c||_{L^\infty(\Omega)}} \mathrm{senh}^2 \left[\gamma \sqrt{\frac{||c||_{L^\infty(\Omega)}}{C_q}}\right] \leq \frac{1}{\tau} \leq \frac{1}{\lambda_1(m, I)}. \tag{5.17}$$

Notar que en particular vale (5.16). Sea $x \in [\alpha, x_1]$ y definimos

$$f(x) := \sqrt{\frac{\tau ||m^-||_{L^\infty(\Omega)}}{||c||_{L^\infty(\Omega)}}} \mathrm{senh}\left[\frac{||c||_{L^\infty(\Omega)}}{C_q}(x - \alpha)\right].$$

Se puede ver que $C_q(f')^2 - ||c||_{L^\infty(\Omega)} f^2 ||m^-||_{L^\infty(\Omega)} = \tau$ en (α, x_1). Más aún, $f(\alpha) = 0$, y para todo $x \in (\alpha, x_1)$, $f(x) > 0$ y $f', \ f'' \geq 0$. Fijando $k := \dfrac{2}{(1-q)}$ tenemos

$$kq = k - 2, \quad k(k-1) = C_q. \tag{5.18}$$

Ahora consideramos $u_1 := f^k$. Teniendo presente (5.18) y los hechos mencionados previamente, se sigue que

$$\begin{aligned} Lu_1 &= -k[(k-1)f^{k-2}(f')^2 + f^{k-1}f''] + cf^k \\ &\leq -C_q f^{k-2}(f')^2 + ||c||_\infty f^k \\ &= -f^{k-2}\tau ||m^-||_\infty \\ &\leq \tau m u_1^q \quad \text{ en } (\alpha, x_1). \end{aligned} \tag{5.19}$$

Más aún, como f es creciente tenemos que $||u_1||_\infty = [f(x_1)]^k$. Entonces, usando la primera desigualdad en (5.17) y el hecho que $x_1 - \alpha \leq \gamma$, uno puede verificar que $||u_1||_\infty \leq 1$.

De manera similar, si para $x \in [x_0, \beta]$ definimos $u_3 := g^k$, donde g está dada por

$$g(x) := \sqrt{\frac{\tau ||m^-||_{L^\infty(\Omega)}}{||c||_{L^\infty(\Omega)}}} \mathrm{senh}\left[\frac{||c||_{L^\infty(\Omega)}}{C_q}(\beta - x)\right],$$

se tiene $Lu_3 \leq \tau m u_3^q$ en (x_0, β), $||u_3||_\infty \leq 1$, $u_3(\beta) = 0$ y $u_3(x) > 0$ para $x \in (x_0, \beta)$. Observamos que, por el Lema 5.6, existen $\underline{x}_0, \overline{x}_1 \in I$, con $\underline{x}_0 < \overline{x}_1$ tales que

$$\begin{aligned} u_1(\underline{x}_0) &= u_2(\underline{x}_0) \quad \text{ y } \quad u_1'(\underline{x}_0) \leq u_2'(\underline{x}_0), \\ u_2(\overline{x}_1) &= u_3(\overline{x}_1) \quad \text{ y } \quad u_2'(\overline{x}_1) \leq u_3'(\overline{x}_1). \end{aligned}$$

Por lo tanto, definiendo u por

$$u := \begin{cases} u_1 & \text{en } [\alpha, \underline{x}_0] \\ u_2 & \text{en } [\underline{x}_0, \overline{x}_1] \\ u_3 & \text{en } [\overline{x}_1, \beta] \end{cases}$$

tenemos que $u = 0$ en $\partial\Omega$ y u satisface la hipótesis del Lema 5.5, por lo que queda probada la parte (i). Cabe mencionar que si $x_0 = \alpha$, entonces para construir u sólo usamos u_2 y u_3, y si $x_1 = \beta$ no necesitamos u_3.

Probemos ahora la parte (ii). Consideramos u_2 como antes. Fijamos τ tal que

$$\frac{||m^-||_{L^\infty(\Omega)}}{||c||_{L^\infty(\Omega)}} \left(\cosh\left[\gamma\sqrt{(1-q)||c||_{L^\infty(\Omega)}}\right] - 1\right) \leq \frac{1}{\tau} \leq \frac{1}{\lambda_1(m, I)}. \tag{5.20}$$

Tomamos $k := \dfrac{1}{(1-q)}$ y para $x \in [\alpha, x_1]$ definimos

$$f(x) := \frac{\tau ||m^-||_\infty}{||c||_\infty} \left(\cosh\left[\sqrt{\frac{||c||_\infty}{k}}(x - \alpha)\right] - 1\right).$$

Entonces, $f(\alpha)=0$, $f>0$ en (α,x_1) y $f'\geq 0$. Más aún, de la primera desigualdad en (5.20) resulta $||u_1||_\infty \leq 1$ y también se puede observar que $kf''-||c||_\infty f=\tau||m^-||_\infty$. Definimos ahora $u_1:=f^k$. Observando que $kq=k-1$, se deriva que

$$\begin{aligned}
Lu_1 &= -k[(k-1)f^{k-2}(f')^2+f^{k-1}f'']+cf^k\\
&\leq -kf^{k-1}(f')^2+||c||_\infty f^k\\
&= -f^{k-1}\tau||m^-||_\infty\\
&\leq \tau m u_1^q \quad \text{ en } (\alpha,x_1).
\end{aligned}$$

Del mismo modo, si $x\in[x_0,\beta]$ tomamos $u_3(x):=g^k$, donde g viene dada por

$$g(x):=\frac{\tau||m^-||_\infty}{||c||_\infty}\left(\cosh\left[\sqrt{\frac{||c||_\infty}{k}}(\beta-x)\right]-1\right),$$

y entonces se tiene $Lu_3\leq \tau m u_3^q$ en (x_0,β), $||u_3||_\infty\leq 1$, $u_3(\beta)=0$ y $u_3>0$ en (x_0,β). Luego, la prueba de (ii) puede ser terminada como en la parte (i). □

La parte (i) de este teorema será generalizada en el Capítulo 7 para operadores que involucran al p-Laplaciano. Específicamente en el Teorema 7.10 parte (i).

Observación 5.11. Mencionamos que las desigualdades (5.14) y (5.15) en las hipótesis (i) y (ii) respectivamente, no son comparables. En efecto, primero verifiquemos que para $q\approx 1$ (5.14) es mejor que (5.15). Sea $\kappa:=\gamma\sqrt{||c||_\infty}$. Como

$$\frac{1}{\sqrt{C_q}}=(1-q)\sqrt{\frac{1}{2(1+q)}},$$

es suficiente observar que

$$0\leq \lim_{q\to 1^-}\frac{\operatorname{senh}^2\left[\kappa(1-q)\sqrt{\frac{1}{2(1+q)}}\right]}{\cosh\left[\kappa\sqrt{1-q}\right]-1}\leq \lim_{q\to 1^-}\frac{\operatorname{senh}^2(\kappa(1-q))}{\cosh(\kappa\sqrt{1-q})-1}=0.$$

Ahora mostremos que para $0<q\approx 0$ (5.15) es mejor que (5.14). Es suficiente probarlo para $q=0$ pues la dependencia respecto de q es continua en ambas desigualdades. Para $q=0$, (5.14) y (5.15) se vuelven respectivamente

$$\begin{aligned}
\frac{||m^-||_\infty}{||c||_\infty}\operatorname{senh}^2(\kappa/\sqrt{2}) &\leq \frac{1}{\lambda_1(m,I)},\\
\frac{||m^-||_\infty}{||c||_\infty}(\cosh(\kappa)-1) &\leq \frac{1}{\lambda_1(m,I)}
\end{aligned}$$

y sólo necesitamos ver que para todo $x>0$ vale $\operatorname{senh}^2(x/\sqrt{2})>\cosh(x)-1$ (lo cual es fácil de verificar). □

Observación 5.12. Si en (5.14) tomamos límite para $||c||_{L^\infty(\Omega)}\to 0$, llegamos a la condición

$$\frac{\gamma^2}{C_q}||m^-||_{L^\infty(\Omega)}\leq \frac{1}{\lambda_1(m,I)}. \tag{5.21}$$

Esta condición aparece para $Lu=-u''$ en [GK1, Teorema 2.1]. □

Observación 5.13. En el enunciado del Teorema 5.10 uno puede reemplazar la condición (5.14) por

$$\frac{||m^-||_{L^\infty(\Omega)}}{||c||_{L^\infty(M^-)}}\operatorname{senh}^2\left[\gamma\sqrt{\frac{||c||_{L^\infty(M^-)}}{C_q}}\right]\leq \frac{1}{\lambda_1(m,I)} \tag{5.22}$$

$$c\leq m^+ \quad \text{ en } M^+, \tag{5.23}$$

donde M^+ y M^- están dados en (5.10). En efecto, observamos primero que si vale (5.22) entonces razonando como en (5.19) se puede comprobar que $Lu_1 \leq \tau m u_1^q$ en $(x_0, \beta) \cap M^-$. Por otro lado, si se cumple (5.23) entonces, como en la prueba del teorema elegimos f que satisfaga $f'' \geq 0$ y $||f^k||_\infty \leq 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} Lu_1 &= -k\left[(k-1)f^{k-2}(f')^2 + f^{k-1}f''\right] + cf^k \\ &\leq cf^k \leq m^+ f^k \\ &\leq m^+ f^{kq} = m u_1^q \quad \text{ en } (x_0, \beta) \cap M^+. \end{aligned}$$

Razonando de manera análoga para u_3 se puede concluir como en la prueba del teorema. Una observación similar es válida para (5.15). □

Teorema 5.14. *Sea $m \in L^2(\Omega)$, supongamos que existen $\alpha \leq x_0 < x_1 \leq \beta$ tales que $0 \not\equiv m \geq 0$ en $I := (x_0, x_1)$, y sea C_q la misma constante dada en (5.13).*

(i) Si $m^- \in L^\infty(\Omega)$ y se satisface

$$0 < \frac{(\gamma_b ||\underline{B}_\alpha||_{L^\infty(\Omega)})^2}{C_q - ||c||_{L^\infty(\Omega)}(\gamma_b ||\underline{B}_\alpha||_{L^\infty(\Omega)})^2} ||m^-||_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda_1(m, I)}, \tag{5.24}$$

donde

$$\gamma_b := \text{máx}\left\{||\overline{B}_\alpha||_{L^1(\alpha, x_1)}, ||\overline{B}_\alpha||_{L^1(x_0, \beta)}\right\},$$

entonces existe una solución $u \in W^{2,2}(\Omega)$ de (5.2).

(ii) Si $c \equiv 0$ y se satisface

$$(1-q)\mathcal{M} \leq \frac{1}{\lambda_1(m, I)}, \tag{5.25}$$

donde

$$\mathcal{M} := \text{máx}\left\{\int_{x_0}^{\beta} \overline{B}_\alpha(x) ||m^- \overline{B}_\alpha||_{L^1(x,\beta)} dx, \int_{\alpha}^{x_1} \overline{B}_\alpha(x) ||m^- \overline{B}_\alpha||_{L^1(\alpha,x)} dx\right\},$$

entonces existe una solución $u \in W^{2,2}(\Omega)$ de (5.2).

Demostración. La prueba sigue de las ideas de la demostración del Teorema 5.10 y por lo tanto omitiremos algunos detalles. Comenzaremos probando la parte (i). Primero tomamos u_2 como en el ya mencionado teorema y elegimos τ tal que

$$\frac{(\gamma_b ||\underline{B}_\alpha||_{L^\infty(\Omega)})^2}{C_q - ||c||_{L^\infty(\Omega)}(\gamma_b ||\underline{B}_\alpha||_{L^\infty(\Omega)})^2} ||m^-||_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{1}{\tau} \leq \frac{1}{\lambda_1(m, I)}.$$

Para $x \in [\alpha, x_1]$ definimos

$$u_1(x) := \left(\sigma \int_\alpha^x \overline{B}_\alpha(y) dy\right)^k,$$

donde

$$\sigma := \left[\frac{||\underline{B}_\alpha||^2_{L^\infty(\Omega)}\left(\tau ||m^-||_{L^\infty(\Omega)} + ||c||_{L^\infty(\Omega)}\right)}{C_q}\right]^{1/2}, \quad k := \frac{1}{1-q}.$$

Se tiene que $u_1(\alpha) = 0$, $u_1 > 0$ en (α, x_1) y que u_1 es creciente. Más aún, luego de algunos cómputos uno puede verificar que $||u_1||_\infty \leq 1$ y

$$\begin{aligned} -\left(\underline{B}_\alpha(x) u_1{\prime}(x)\right)' &\leq -k(k-1)\sigma^2 \left(\sigma \int_\alpha^x \overline{B}_\alpha(y) dy\right)^{k-2} \overline{B}_\alpha(x) \\ &\leq -||\underline{B}_\alpha||_{L^\infty(\Omega)}\left(\tau ||m^-||_{L^\infty(\Omega)} + ||c||_{L^\infty(\Omega)}\right) \left(\sigma \int_\alpha^x \overline{B}_\alpha(y) dy\right)^{kq} \\ &\leq \underline{B}_\alpha(\tau m - c) u_1^q \leq \underline{B}_\alpha(\tau m u_1^q - c u_1); \end{aligned}$$

esto es, $Lu_1 \leq \tau m u_1^q$ en (α, x_1). La existencia de u_3 se sigue de forma similar.

Probemos ahora la parte (ii). Consideramos τ tal que

$$(1-q)\mathcal{M} \leq \frac{1}{\tau} \leq \frac{1}{\lambda_1(m,I)}. \tag{5.26}$$

Para $x \in [\alpha, x_1]$ definimos

$$u_1(x) := \left(\sigma \int_\alpha^x \overline{B}_\alpha(y) ||m^- \underline{B}_\alpha + \varepsilon||_{L^1(\alpha,y)} dy\right)^k,$$

donde

$$\sigma := \tau(1-q), \quad k := \frac{1}{1-q} \quad \text{y} \quad \varepsilon > 0.$$

Tomando ε suficientemente chico y usando (5.26) se puede ver que $||u_1||_\infty \leq 1$. Además, haciendo algunos cáculos se llega a

$$\begin{aligned}
-\left(\underline{B}_\alpha(x) u_1\prime(x)\right)' &\leq -k\sigma^k \left(\int_\alpha^x \overline{B}_\alpha(y) ||m^- \underline{B}_\alpha + \varepsilon||_{L^1(\alpha,y)} dy\right)^{k-1} (m^-(x)\underline{B}_\alpha(x) + \varepsilon) \\
&\leq -\tau m^-(x) \underline{B}_\alpha \left(\sigma \int_\alpha^x \overline{B}_\alpha(y) ||m^- \underline{B}_\alpha + \varepsilon||_{L^1(\alpha,y)} dy\right)^{kq} \\
&\leq \tau \underline{B}_\alpha m u_1^q.
\end{aligned}$$

Análogamente se puede definir u_3 y podemos concluir la pueba de la parte (ii). □

Observación 5.15. Las desigualdades en las hipótesis de las partes (i) y (ii) nuevamente no son comparables. Esto se debe a que una involucra la norma en L^∞ de m^- y la constante C_q, mientras que la otra no.

Observación 5.16.

(i) Se puede verificar que (5.14) es mejor que (5.24) cuando $b \equiv 0$ (notando que en dicho caso $\underline{B}_\alpha = \overline{B}_\alpha = 1$ y $\gamma_b = \gamma$). Si además $c \equiv 0$, (5.24) se convierte exactamente en (5.21), esto es, la condición se deduce del Teorema 5.10 para el operador Laplaciano.

(ii) En el caso en que $b \equiv 0$, (5.15) puede leerse como

$$(1-q)\,\text{máx}\left\{\int_{x_0}^\beta ||m^-||_{L^1(t,\beta)} dt, \int_\alpha^{x_1} ||m^-||_{L^1(\alpha,t)} dt < \frac{1}{\lambda_1 m, I}\right\}, \tag{5.27}$$

que es sustancialmente mejor que la condición dada en [GK1, Teorema 2.1] para $Lu = -u''$. Además, (5.27) claramente no es comparable (por la misma razón que en la observación previa) con las desigualdades del Teorema 5.10 en el caso en que $c \equiv 0$.

□

Corolario 5.17. *Sea*

$$K_b := \int_\alpha^\beta \overline{B}_\alpha(x) ||\underline{B}_\alpha||_{L^2(\alpha,x)} dx.$$

Si (5.25) vale con $\dfrac{m}{K_b ||m^+||_{L^2(\alpha,x)}} - c$ *en lugar de* m*, entonces existe una solución* $u \in W^{2,2}(\Omega)$ *de (5.2).*

Demostración. Aplicando la desigualdad de Hölder en (5.9) se puede ver que $||u||_{L^\infty(\Omega)}^{1-q} \leq ||m^+||_{L^2(\alpha,\beta)} K_b$ para toda subsolución no negativa de (5.2). Consideremos $\tau := 1/(K_b ||m^+||_{L^2(\alpha,\beta)})$ y sea u la solución de (5.2), con $\tau m - c$ en lugar de m, dada por (ii) del Teorema 5.14. Se sigue que $||u||_\infty \leq 1$ y luego

$$-u'' + bu' = (\tau m - c)u^p - cu.$$

Usando la Observación 5.2 se concluye este corolario. □

Observación 5.18.

(i) Dados **cualquier operador** L y **cualquier** $m \in L^2(\Omega)$ con $0 \not\equiv m \geq 0$ en algún $I \subset \Omega$, podemos notar que el corolario previo implica que (5.2) tiene solución si q es suficientemente cercano a 1.

(ii) Dados **cualquier operador** L y **cualquier** $m \in L^2(\Omega)$ con $m^- \in L^\infty(\Omega)$ y $0 \not\equiv m \geq 0$ en algún $I \subset \Omega$, podemos observar que (5.24) dice que (5.2) posee una solución para $\overline{m} := m\chi_{\Omega - I} + km\chi_I$ si $k > 0$ es suficientemente grande.

$\square$

Corolario 5.19. *Sea $m \in C(M^+) \cap L^2(\Omega)$ con $m^+ \not\equiv 0$ y sea $\mathcal{P}$ el conjunto de los $q \in (0,1)$ tales que (5.2) admite alguna solución $u \in W^{2,2}(\Omega)$. Entonces, $\mathcal{P} = (0,1)$ o bien $\mathcal{P} = (q,1)$ o bien $\mathcal{P} = [q,1)$ para algún $q > 0$.*

Demostración. De la parte (i) de la observación anterior se tiene que $\mathcal{P} \neq \emptyset$. Sea $q^* := \text{ínf}\{\mathcal{P}\}$. Si $\mathcal{P} \neq (0,1)$, el Lema 5.9 implica que $q^* > 0$ y que (5.2) tiene solución para $q > q^*$. Entonces, o bien $\mathcal{P} = (q^*,1)$ o bien $\mathcal{P} = [q^*,1)$ $\square$

Condiciones necesarias

Escribimos

$$\begin{aligned} I_R(x_0) &:= (x_0 - R, x_0 + R), \\ \mathcal{I} &:= \{I_R(x_0) :\ m \leq 0 \text{ en } I_R(x_0)\}. \end{aligned} \tag{5.28}$$

Teorema 5.20. *Sean C_q e $\mathcal{I}$ los dados previamente. Supongamos que existe $u \in W^{2,2}(\Omega)$ solución de (5.2). Entonces,*

$$\sup_{I_R(x_0) \in \mathcal{I}} \left\{ \left[\frac{\gamma_{b,R}}{||\overline{B}_\alpha||_{L^\infty(I_R(x_0))}} \right]^2 \inf_{I_R(x_0)} m^- \right\} \leq C_q \int_\alpha^\beta \overline{B}_\alpha(x) ||m^+ \underline{B}_\alpha||_{L^1(\alpha,x)} dx, \tag{5.29}$$

donde

$$\gamma_{b,R} := \text{mín} \left\{ \int_{x_0}^{x_0+R} \overline{B}_\alpha(y)dy, \int_{x_0-R}^{x_0} \overline{B}_\alpha(y)dy \right\}.$$

Sea M^+ dado en (5.10). Si además $c > 0$ en M^+, entonces (5.29) debe también valer con $C_q \sup_{x \in M^+} \left\{ \dfrac{m^+(x)}{c(x)} \right\}$ en el lado derecho de la desigualdad.

Demostración. Procederemos por el absurdo. Supongamos que (5.29) no es válida y sea $I_R(x_0) \in \mathcal{I}$ tal que

$$C_q \int_\alpha^\beta \overline{B}_\alpha(x) ||m^+ \underline{B}_\alpha||_{L^1(\alpha,x)} dx \leq \left[\frac{\gamma_{b,R}}{||\overline{B}_\alpha||_{L^\infty(I_R(x_0))}} \right]^2 \inf_{I_R(x_0)} \{m^-\}. \tag{5.30}$$

Para $x \in \overline{I_R(x_0)}$, definimos una función w como sigue. Si $x \in [x_0, x_0 + R]$, tomamos

$$w(x) := \left(\sigma \int_{x_0}^x \overline{B}_\alpha(y)dy \right)^k,$$

donde

$$\sigma = \left[\frac{\text{ínf}_{I_R(x_0)} m^-}{C_q ||\overline{B}_\alpha||^2_{L^\infty(I_R(x_0))}} \right]^{1/2}, \quad k := \frac{2}{1-q},$$

y si $x \in [x_0 - R, x_0]$ tomamos

$$w(x) := \left(\sigma \int_x^{x_0} \overline{B}_\alpha(y)dy \right)^k,$$

con los mismos σ y k. En el intervalo (x_0, x_0+R) se puede ver que

$$\begin{aligned}(\underline{B}_\alpha w')' - \underline{B}_\alpha c w &\le k(k-1)\sigma^2 \left(\sigma \int_\alpha^x \overline{B}_\alpha(y)dy\right)^{k-2} \overline{B}_\alpha \\ &\le \frac{\inf_{I_R(x_0)} m^-}{||\overline{B}_\alpha||_{L^\infty(I_R(x_0))}} \left(\sigma \int_\alpha^x \overline{B}_\alpha(y)dy\right)^{kq} \\ &\le \underline{B}_\alpha m^- w^q,\end{aligned}$$

es decir, $Lw \ge -m^- w^q$. Lo mismo vale en $(x_0 - R, x_0)$.

Sea u una solución de (5.2). Afirmamos que $u \le w$ en $I_R(x_0)$. En efecto, si esto no ocurre, sea $\mathcal{O} := \{x \in I_R(x_0) : \ w(x) < u(x)\}$. Como $Lu = -m^- u^q$ en $I_R(x_0)$, tenemos que $L(w-u) \ge m^-(u^q - w^q) \ge 0$ en $\mathcal{O}$. Sea $\overline{x} \in \partial\mathcal{O}$. Entonces, $w(\overline{x}) = u(\overline{x})$ o bien $\overline{x} = x_0 + R$ o bien $\overline{x} = x_0 - R$. Si $\overline{x} = x_0 + R$, por el Lema 5.7 y (5.30) obtenemos

$$\begin{aligned}u(\overline{x})^{1-q} &\le ||u||^{1-q}_{L^\infty(\Omega)} \\ &\le \int_\alpha^\beta \overline{B}_\alpha(x) ||m^+ \underline{B}_\alpha||_{L^1(\alpha,x)} dx \\ &\le \left[\frac{\int_{x_0}^{x_0+R} \overline{B}_\alpha(y)dy}{||\overline{B}_\alpha||_{L^\infty(I_R(x_0))}}\right]^2 \frac{\inf_{I_R(x_0)} m^-}{C_q} \\ &= w(\overline{x})^{1-q}.\end{aligned}$$

Es posible dar la misma desigualdad si $\overline{x} = x_0 - R$. Entonces el Principio del Máximo nos dice que $u \le w$ en $\mathcal{O}$, lo cual no es posible. Luego, $u \le w$ en $I_R(x_0)$; pero $u > 0$ en Ω y $w(x_0) = 0$. Absurdo.

Para concluir la prueba notamos que la última afirmación de este teorema puede ser derivada como arriba aplicando el Lema 5.8 en lugar del Lema 5.7. □

Observación 5.21.

(i) Del teorema anterior se sigue que dados b, m y q fijos, existe $0 \le c_0 \in L^\infty(\Omega)$ tal que para toda $c \in L^\infty(\Omega)$, con $c \ge c_0$, el problema (5.2) **no admite solución**. Notamos que dados L, m y q fijos con $0 \not\equiv m \le 0$ en algún $I \subset \Omega$, **tampoco existe una solución para** $\underline{m} := m\chi_{\Omega - I} + km\chi_I$ si $k > 0$ es suficientemente grande.

(ii) Observamos que (5.29) siempre es válida para q suficientemente cercano a 1. Mencionamos que esto también se puede deducir de la Obervación 5.18.

Como consecuencia de los teoremas anteriores podemos derivar un resultado de existencia para problemas de la forma

$$\begin{cases} Lu = m(x)f(u) & \text{en } \Omega \\ u > 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{5.31}$$

para ciertas funciones $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$. Establezcamos la siguiente hipótesis.

(H1) Existen constantes positivas k_1 y k_2, y $q_1 \in (0,1)$ tales que

$$k_1 \xi^{q_1} \le f(\xi) \le k_2 \xi^{q_1} \qquad \text{para todo } \xi \in [0, \underline{K}],$$

donde

$$\underline{K} := \left[k_1 \int_\alpha^\beta \overline{B}_\alpha(x) ||m^+ \underline{B}_\alpha||_{L^1(\alpha,x)} dx\right]^{1/(1-q_1)}$$

y existen constantes positivas k_3 y $\overline{K}$, y $q_2 \in (0,1)$ tales que

$$f(\xi) \le k_3 \xi^{q_2} \qquad \text{para todo } \xi \in [\overline{K}, \infty).$$

Notar que no hemos hecho suposiciones respecto de la monotonía o concavidad de la función f.

Corolario 5.22. *Sea f que satisface (H1) y supongamos que (5.2) tiene una solución con $k_1 m^+ - k_2 m^-$ en lugar de m. Entonces, existe una solución $u \in W^{2,2}(\Omega)$ del problema (5.31).*

Demostración. Sea u la solución de (5.2) con $k_1 m^+ - k_2 m^-$ en lugar de m. Se sigue del Lema 5.7 que $||u||_\infty \leq \underline{K}$ y entonces por (H1) deducimos que

$$Lu = (k_1 m^+ - k_2 m^-) u^{q_1} \leq m f(u) \quad \text{ en } \Omega.$$

Por otro lado, sea $\phi > 0$ la solución de $L\phi = m^+$ en Ω, $\phi = 0$ en $\partial\Omega$. Sea $k \geq \text{máx}\left\{\overline{K}, (k_3(||\phi||_\infty + 1)^{q_2})^{1/(1-q_2)}\right\}$. Nuevamente por (H1) y razonando como en (5.4) vemos que

$$L(k(\phi+1)) \geq k m^+ \geq k_3 (k(\phi+1))^{q_2} m^+ \geq m f(k(\phi+1)) \quad \text{ en } \Omega,$$

y queda probado el corolario. □

Capítulo 6

Problema sublineal en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

En este capítulo estudiaremos cuestiones de existencia y unicidad de soluciones (no idénticamente nulas) de problemas de la forma

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = m(x)u^q & \text{en } \Omega \\ u \geq 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{6.1}$$

donde $q \in (0,1)$, Ω es un abierto acotado $C^{1,1}$ de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{L}$ es un operador lineal elíptico de segundo orden y $m \in L^r(\Omega)$, con $r > n$, es una función que cambia de signo en Ω.

Notamos que en general la solución de (6.1) no tiene por qué ser única. En particular, el caso $\mathcal{L}u = -\Delta u$ ha sido considerado en [BPT] para funciones $m \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ y soluciones $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Allí se demuestra que tendremos unicidad si exigimos a la solución ser estrictamente positiva en ciertos subconjuntos de Ω y exactamente nula en otros. Sin embargo, es posible tener varias soluciones que sean no negativas en Ω (ver nuevamente [BPT, Corolario 2.3]).

A su vez, también para el operador Laplaciano, en [DS1], se demuestra la unicidad (pero no la existencia) de la solución estrictamente positiva en Ω. Resultados de existencia de la misma, pueden encontrarse en [GK1] y [GK2]. Siguiendo con el Laplaciano, en [KQU], se ve que la solución de (6.1) es única para todo q suficientemente cercano a 1 y más aún, que la solución está en el interior del cono positivo en $C_0^1(\overline{\Omega})$.

Para un operador general y $m \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, en [DS2], se ve la unicidad (pero no la existencia) de la solución estrictamente positiva $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, mientras que condiciones necesarias y/o suficientes para la existencia de soluciones estrictamente positivas, en el caso unidimensional, han sido dadas en el Capítulo 5 de esta tesis.

Los resultados principales de este capítulo son el Teorema 6.5, el Corolario 6.12 y el Teorema 6.13.

En el Teorema 6.5, generalizamos los resultados de unicidad de los trabajos mencionados a soluciones estrictamente positivas en ciertos subdominios de Ω para operadores lineales elípticos más generales que el Laplaciano. A su vez, trabajamos con pesos $m \in L^r(\Omega)$ y la teoría de soluciones fuertes en lugar de clásicas. Cabe destacar que dicho teorema implica en particular que, de existir, hay una única solución estrictamente positiva en el conjunto Ω^+ que definiremos formalmente luego, pero puede entenderse, en el caso donde m es continua, como el conjunto donde $m > 0$.

En el Corolario 6.12 demostramos la existencia de la solución estrictamente positiva en Ω^+. Combinando ambos resultados tendremos entonces existencia y unicidad de dicha solución. Esto nos da una ventaja por sobre la literatura preexistente ya que ahora podemos buscar directamente la solución $u > 0$ en Ω^+ y, de encontrarla, esta nos dice exactamente si hay solución estrictamente positiva en todo el dominio o no analizando sus ceros.

Por último, el Teorema 6.13 dice que, restringiéndonos a un operador autoadjunto, podemos hallar una rama de soluciones positivas en Ω^+ deformando desde $\lambda = 0$ al problema

$$\begin{cases} Lu = (m^+ - \lambda m^-)u^q & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \\ u > 0 & \text{en } \Omega^+. \end{cases} \tag{6.2}$$

Más aún, por Principio del Máximo, probaremos que para λ suficientemente chico las soluciones serán estrictamente positivas. Además, si llamamos u_λ a la solución asociada a cada λ, tendremos que la aplicación

$\lambda \mapsto u_\lambda$ es decreciente y por lo tanto existirá un λ_0 tal que para $\lambda < \lambda_0$ existe solución estrictamente positiva de (6.1) y para $\lambda > \lambda_0$ no existirá solución estrictamente positiva.

Cabe destacar que algunos de los resultados que expondremos serán válidos también para no linealidades de la forma $m(x)g(u)$ en lugar de $m(x)u^q$, donde $g(s)$ se comporta de forma similar a s^q. Ver condiciones I-VII más abajo.

6.1. Sobre la unicidad de las soluciones

Asumiremos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto acotado $C^{1,1}$ y que $m \in L^r(\Omega)$, con $r > n$, es una función que cambia de signo en $\overline{\Omega}$. Definimos de manera precisa al operador $\mathcal{L}$ por

$$\mathcal{L}u \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u$$

con coeficientes $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, b_i, $c \in L^\infty(\Omega)$, con $c \geq 0$ en Ω.

Comenzaremos analizando la unicidad de soluciones no negativas (y no triviales) de problemas un poco más generales que los mencionados al comienzo de este capítulo, dados por

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = m(x)g(u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{6.3}$$

con g cumpliendo las siguientes propiedades.

(I) $g \in C^\alpha([0,\infty)) \cap C^2((0,\infty))$ para algún $\alpha \in (0,1)$.

(II) $g(s) \geq 0$ para $s > 0$.

(III) $g'(s) > 0$ para $s > 0$.

(IV) $g(0) = 0$.

(V) $g(s)$ es estrictamente cóncava en $(0,\infty)$.

(VI) $\frac{s}{g(s)}$ es no decreciente para $s > 0$.

(VII) Existe una función $h : [0,\infty) \to \mathcal{R}$ dada por

$$h(s) := \int_0^s \frac{1}{g(t)}\,dt \text{ si } s > 0$$
$$h(0) := 0.$$

En particular, la función $g(s) = s^q$, con $0 < q < 1$, cumple dichas propiedades. Otra posible función es, por ejemplo, $g(s) = s^q(c + \arctan(s))$, con $c > 0$ y $0 < q < 1$.

Observación 6.1. Notemos que de (I) y (V) se desprende que existen constantes C_0 y C_1 tales que

$$g(s) \leq C_0 + C_1 s \quad \forall s \in [0,\infty). \tag{6.4}$$

Veremos a continuación la definición precisa del conjunto Ω^+ mencionado en la introducción de este capítulo. Daremos luego un lema que nos servirá para clasificar las soluciones no negativas de (6.3). Usando esto, describiremos ciertos conjuntos de soluciones donde buscaremos la unicidad. Todo esto nos servirá para poder enunciar el Teorema 6.5. Varios resultados que son usados en la demostración de dicho teorema serán enunciados y demostrados luego del mismo, no lo hacemos antes pues son resultados más bien técnicos y entorpecerían la exposición del teorema.

Definición 6.2. Denotaremos por Ω^+ al mayor subconjunto abierto de Ω donde $m > 0$ *ppx* y asumiremos de ahora en más que

- Ω^+ tiene una cantidad a lo sumo numerable de componentes conexas Ω_k^+, $k \in M := \{1, 2, ..., r\}$, con $r \leq \infty$,

- $|(supp\ m^+) - \Omega^+| = 0$ y
- todos los $x \in \partial\Omega^+ \cap \Omega$ cumplen la condición de esfera interior respecto a Ω^+.

En particular, notemos que todo esto se cumple si tanto Ω como Ω^+ tienen frontera C^2.

Lema 6.3. *Sea u una solución fuerte no negativa de (6.3), entonces*

(I) $u \equiv 0$ o $u > 0$ en cada Ω_k^+,

(II) si $u > 0$ en $\Omega_k^+ \Rightarrow u > 0$ en $\overline{\Omega_k^+} \cap \Omega$.

Demostración. Notemos que $\mathcal{L}u \geq 0$ en Ω_k^+, entonces u no puede alcanzar un mínimo no positivo a menos que sea constante, de lo cual se desprende (i). Para demostrar (ii) tomemos $x_0 \in \partial\overline{\Omega_k^+} \cap \Omega$ con $u(x_0) = 0$. Como u alcanza su mínimo allí deberíamos tener $\nabla u(x_0) = 0$. Por otro lado, en vista del Lema de Hopf, $\nabla u(x_0) \neq 0$, de lo que obtenemos un absurdo. Por lo tanto $u(x)$ no puede anularse en $\partial\overline{\Omega_k^+} \cap \Omega$. □

Definición 6.4.

(I) Para cualquier subconjunto $I \subset M$ sea S_I la clase de soluciones fuertes de (6.3) que son positivas en $\Omega_I^+ := \bigcup_{k\in I} \Omega_k^+$,

(II) N_I denota el conjunto $\{u \in S_I : u \equiv 0 \text{ en } \Omega^+ - \Omega_I^+\}$.

Teorema 6.5. *Sea g una función que cumple las hipótesis I-VII del comienzo de la sección. Entonces, para cualquier subconjunto finito de índices $I \subset M$, N_I tiene como máximo un elemento. Si $I \subset M$ es infinito, el teorema sigue siendo válido siempre que $\overline{\Omega^+} \subset (\bigcup_{k\in M} \overline{\Omega_k^+}) \cup \partial\Omega$.*

Demostración. Supongamos que existen dos soluciones distintas u_1, $u_2 \in N_I$. Sea

$$\Omega' := \{x \in \Omega : u_1(x) > u_2(x)\}.$$

Como $u_1 = u_2$ en $\partial\Omega$, entonces $u_1 = u_2$ en $\partial\Omega'$. Sean $v_i = h(u_i)$ para $(i = 1, 2)$. Por la monotonía de g tenemos

$$v_1 > v_2 \text{ en } \Omega', \quad v_1 = v_2 \text{ en } \partial\Omega'.$$

Entonces existe un punto $x_0 \in \Omega'$ donde la función diferencia

$$\delta := v_1 - v_2$$

alcanza su máximo. Distinguimos dos casos.
(i) Supongamos $v_2(x_0) > 0$ para algún $x_0 \in \Omega'$ donde δ alcanza su máximo. Denotamos por W a la máxima componente conexa de $\Omega_1' := \{x \in \Omega' : v_2(x) > 0\}$ que contenga a x_0. (Notar que en ∂W no necesariamente se cumple $u_1 = u_2$.) Entonces, $\delta \in W_{loc}^{2,r}(W)$ y por el Lema 6.7 con $\varepsilon = 0$ y las hipótesis sobre g tenemos

$$\mathcal{L}_2\delta - l(x)\delta - g'(u_1)\langle A\nabla v_1 + v_2, \nabla\delta\rangle = c(x)\left[\frac{u_2}{g(u_2)} - \frac{u_1}{g(u_1)}\right] \leq 0,$$

con $l(x) \leq 0$. Por el Principio del Máximo Fuerte (Teorema 2.14) si δ alcanza un máximo no negativo en el interior de W tendremos que es constante en W y por lo tanto todas sus derivadas se anulan. Teniendo en cuenta esto y la ecuación (6.7) en la demostración del Lema 6.7, con $\varepsilon = 0$, obtenemos

$$-\left[g'(u_1) - g'(u_2)\right]\langle A\nabla v_2, \nabla v_2\rangle = c(x)\left[\frac{u_2}{g(u_2)} - \frac{u_1}{g(u_1)}\right] \leq 0$$

de lo cual, por ser g' decreciente,

$$|A|\,|\nabla v_2|^2 \leq 0, \tag{6.5}$$

entonces $|\nabla v_1| = |\nabla v_2| = 0$ y $u_i \equiv cte$, para $i = 1, 2$ en W. Ahora, u_2 es igual a u_1 en $\partial\Omega$ ó $u_2 \equiv 0$. Ambos casos conllevan a un absurdo pues supusimos $0 \neq u_2 \neq u_1$ en W.

(ii) Supongamos ahora que $v_2(x_0) = 0$ para todo x_0 donde δ alcanza su máximo. Probaremos primero que $x_0 \notin \overline{\Omega^+}$ y luego utilizaremos un argumento similar a (i) para llegar a un absurdo. Definimos

$$C := \{x \in \Omega' : \delta(x) = \delta(x_0)\}.$$

Notemos que $v_2 \equiv 0$ y $v_1 > 0$ en C. Además, como $u_i \in N_I$, tenemos $u_1 \equiv 0 \equiv v_1$ en $\overline{\Omega^+ - \Omega_I^+}$, entonces

$$C \cap (\overline{\Omega^+ - \Omega_I^+}) = \emptyset.$$

De acuerdo al Lema 6.3 (ii), $v_2 > 0$ en $\overline{\Omega_I^+} \cap \Omega$ para todo $k \in I$. Si $\partial\Omega_k^+ \cap \partial\Omega$ es no vacío, entonces $u_1 = u_2$, por lo que $\delta = 0$ allí. De lo cual

$$C \cap \overline{\Omega_I^+} = \emptyset.$$

Como I es finito (o bajo la hipótesis $\overline{\Omega^+} \subset (\bigcup_{k\in M} \overline{\Omega_k^+}) \cup \partial\Omega)$ lo anterior implica

$$C \cap \overline{\Omega^+} = \emptyset.$$

Ahora, como C es cerrado, sabemos que está a una distancia positiva de $\overline{\Omega^+}$. Existe entonces un entorno $U \supset C$ tal que $\overline{U} \cap \overline{\Omega^+} = \emptyset$ y $\delta(x) > 0$ en $\overline{U}$. Además, la monotonía de h implica

$$\min_{\overline{W}}(u_1 - u_2) > 0, \tag{6.6}$$

con $\overline{W}$ componente conexa de U. Se puede tomar $dist(C, \partial U) > 0$, por lo que $dist(C, \partial W) > 0$ y existe un $b < \delta(x_0)$ tal que $\delta(x) \leq b < \delta(x_0)$ para todo $x \in \partial W$. Definimos

$$\begin{aligned} v_{2\varepsilon} &:= h(u_2 + \varepsilon), \\ \delta_\varepsilon &:= v_1 - v_{2\varepsilon}. \end{aligned}$$

Entonces $\delta_\varepsilon \leq \delta$ en Ω. Por (6.6) se puede elegir ε tal que

$$\begin{aligned} &u_1 > u_2 + \varepsilon, \\ &\delta(x_0) > b \end{aligned}$$

de lo cual se desprende que $\delta_\varepsilon(x) \leq \delta(x) \leq b < \delta_\varepsilon(x_0)$ para todo $x \in \partial W$. De aquí que δ_ε no es constante sobre $\overline{W}$.
Por otro lado, por el Lema 6.7 y recordando que $m(x) \leq 0$ en W se tiene

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_2\delta_\varepsilon - l(x)\delta_\varepsilon - g'(u_1)\langle A\nabla v_1 + v_{2\varepsilon}, \nabla\delta_\varepsilon\rangle = \\ &c(x)\left[\frac{u_2}{g(u_2+\varepsilon)} - \frac{u_1}{g(u_1)}\right] + m(x)\left(1 - \frac{g(u_2)}{g(u_2+\varepsilon)}\right) \leq 0. \end{aligned}$$

Utilizando el Principio del Máximo Fuerte, δ_ε no puede tener un máximo no negativo en $\overline{W}$ a menos que sea constante, de lo cual obtenemos un absurdo. □

A continuación enunciamos dos lemas que se utilizaron en la demostración anterior.

Lema 6.6. *Sea $0 \leq u \in W^{2,r}(\Omega)$, $0 < \varepsilon$ y $\mathcal{L}$ como al principio. Definamos*

$$v_\varepsilon := h(u + \varepsilon) = \int_0^{u+\varepsilon} \frac{1}{g(s)}\, dt.$$

Entonces

$$\mathcal{L}v_\varepsilon = \frac{\mathcal{L}u}{g(u+\varepsilon)} + c(x)\left[v_\varepsilon - \frac{u}{g(u+\varepsilon)}\right] + g'(u+\varepsilon)\langle A\nabla v_\varepsilon, \nabla v_\varepsilon\rangle.$$

Además, si $u > 0$, podemos tomar $\varepsilon = 0$ y la fórmula anterior sigue valiendo.

Demostración. Notemos primero que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} &= \frac{1}{g(u+\varepsilon)}\frac{\partial u}{\partial x_i} \\
\frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial x_j \partial x_i} &= -\frac{g'(u+\varepsilon)}{g^2(u+\varepsilon)}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{1}{g(u+\varepsilon)}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \\
&= -g'(u+\varepsilon)\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} + \frac{1}{g(u+\varepsilon)}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}v_\varepsilon = &-\sum a_{ij}(x)\left[-g'(u+\varepsilon)\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} + \frac{1}{g(u+\varepsilon)}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}\right] \\
&+\sum \frac{b_i(x)}{g(u+\varepsilon)}\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)v_\varepsilon \\
=& \frac{1}{g(u+\varepsilon)}\left[-\sum a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} + \sum b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u\right] \\
&+ c(x)\left[v_\varepsilon - \frac{u}{g(u+\varepsilon)}\right] + \sum a_{ij}(x)g'(u+\varepsilon)\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} \\
=& \frac{\mathcal{L}u}{g(u+\varepsilon)} + c(x)\left[v_\varepsilon - \frac{u}{g(u+\varepsilon)}\right] + g'(u+\varepsilon)\langle A\nabla v_\varepsilon, \nabla v_\varepsilon\rangle.
\end{aligned}$$

Esto prueba la primera parte del lema. Para el “además”, notemos que la hipótesis $0<\varepsilon$ sólo se utiliza para la derivabilidad de v_ε y para que $g(u+\varepsilon)$ sea no nula y no es necesaria si $u>0$. □

Lema 6.7. *Sea $\Omega \subset \mathcal{R}^n$ abierto acotado. Sean $u_1 > u_2 \geq 0$ funciones que cumplen $\mathcal{L}u_i = m(x)g(u_i)$ para $i=1,2$ y $u_1 > u_2 + \varepsilon$ para algún $\varepsilon > 0$. Definamos*

$$v_1 := h(u_1) = \int_0^{u_1} \frac{1}{g(s)}\, dt \quad y \quad v_{2\varepsilon} := h(u_2+\varepsilon) = \int_0^{u_2+\varepsilon} \frac{1}{g(s)}\, dt.$$

Entonces, $\delta_\varepsilon := v_1 - v_{2\varepsilon}$ satisface la ecuación

$$\begin{gathered}
\mathcal{L}_2\delta_\varepsilon - l(x)\delta_\varepsilon - g'(u_1)\langle A\nabla v_1 + v_{2\varepsilon}, \nabla\delta_\varepsilon\rangle = \\
c(x)\left[\frac{u_2}{g(u_2+\varepsilon)} - \frac{u_1}{g(u_1)}\right] + m(x)\left(1 - \frac{g(u_2)}{g(u_2+\varepsilon)}\right),
\end{gathered}$$

con $\mathcal{L}_2 u := \mathcal{L}u - c(x)u$ y $l(x) \leq 0$ para todo $x \in \Omega$. Además, si $u_2 > 0$ la fórmula anterior sigue valiendo con $\varepsilon = 0$.

Demostración. Por el lema anterior y la linealidad de $\mathcal{L}$ tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\delta_\varepsilon =& \frac{\mathcal{L}u_1}{g(u_1)} + c(x)\left[v_1 - \frac{u_1}{g(u_1)}\right] + g'(u_1)\langle A\nabla v_1, \nabla v_1\rangle \\
&- \frac{\mathcal{L}u_2}{g(u_2+\varepsilon)} - c(x)\left[v_{2\varepsilon} - \frac{u_2}{g(u_2+\varepsilon)}\right] - g'(u_2+\varepsilon)\langle A\nabla v_{2\varepsilon}, \nabla v_{2\varepsilon}\rangle \\
=& m(x)\left(1 - \frac{g(u_2)}{g(u_2+\varepsilon)}\right) + c(x)\left[\delta\varepsilon + \frac{u_2}{g(u_2+\varepsilon)} - \frac{u_1}{g(u_1)}\right] \\
&+ g'(u_1)\langle A\nabla v_1 + v_{2\varepsilon}, \nabla\delta_\varepsilon\rangle + \left[g'(u_1) - g'(u_2+\varepsilon)\right]\langle A\nabla v_{2\varepsilon}, \nabla v_{2\varepsilon}\rangle.
\end{aligned}$$

Despejando obtenemos

$$\begin{gathered}
\mathcal{L}_2\delta_\varepsilon - g'(u_1)\langle A\nabla v_1 + v_{2\varepsilon}, \nabla\delta_\varepsilon\rangle - \left[g'(u_1) - g'(u_2+\varepsilon)\right]\langle A\nabla v_{2\varepsilon}, \nabla v_{2\varepsilon}\rangle = \\
m(x)\left(1 - \frac{g(u_2)}{g(u_2+\varepsilon)}\right) + c(x)\left[\frac{u_2}{g(u_2+\varepsilon)} - \frac{u_1}{g(u_1)}\right].
\end{gathered} \tag{6.7}$$

Ahora notemos que, por teorema del valor intermedio

$$g'(u_1) - g'(u_2 + \varepsilon) = g''(\theta_1(x))[u_1 - (u_2 + \varepsilon)],$$

con $u_2 + \varepsilon \leq \theta_1 \leq u_1$. A su vez

$$\begin{aligned}\delta_\varepsilon &= h(u_1) - h(u_2 + \varepsilon)\\ &= h'(\theta_2(x))[u_1 - (u_2 + \varepsilon)]\\ &= \frac{u_1 - (u_2 + \varepsilon)}{g(\theta_2(x))},\end{aligned}$$

con $u_2 + \varepsilon \leq \theta_2 \leq u_1$. Entonces

$$[g'(u_1) - g'(u_2 + \varepsilon)]\, \langle A\nabla v_{2\varepsilon}, \nabla v_{2\varepsilon}\rangle = g''(\theta_1(x))g(\theta_2(x))\langle A\nabla v_{2\varepsilon}, \nabla v_{2\varepsilon}\rangle\delta_\varepsilon.$$

Es fácil ver que $l(x) := g''(\theta_1(x))g(\theta_2(x))\langle A\nabla v_{2\varepsilon}, \nabla v_{2\varepsilon}\rangle$ es menor o igual que cero y con esto concluye la demostración de la primera parte. El "además"se sigue de la misma forma que en el lema anterior. □

6.2. Sobre la existencia de soluciones

El próximo resultado importante de este capítulo es el Corolario 6.12 que nos da existencia de soluciones (fuertes) positivas en Ω^+ del problema (6.1). Para demostrarlo utilizaremos principalmente el Teorema de Sub y Supersoluciones (Teorema 4.5) que nos da soluciones débiles. Es por ello que antes de llegar al corolario damos un teorema auxiliar que nos permite pasar de soluciones débiles a fuertes. Luego, damos dos lemas donde aplicamos el mencionado Teorema de Sub y Supersoluciones. De todo lo anterior, se desprenderá el corolario.

Teorema 6.8. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, con $|\Omega| < \infty$. Sea $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ tal que existen constantes C_0 y C_1 para las cuales $f(s) \leq C_0 + C_1 s$ para todo $s \in [0, \infty)$. Sea $m \in L^r(\Omega)$ con $r > n$ y $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ solución débil de*

$$\begin{cases} Lu = mf(u) & \text{en } \Omega\\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{6.8}$$

Entonces, $u \in W^{2,r}(\Omega)$ y es solución fuerte de (6.8). Más aún,

$$||u||_{W^{2,r}(\Omega)} \leq P(||m||_{L^r(\Omega)}) + ||m||^k_{L^r(\Omega)}(C_0 + C_1||u||_{W_0^{1,2}(\Omega)}), \tag{6.9}$$

donde $k \in \mathbb{N}$ y $P(t)$ es un polinomio, ambos dependiendo solamente de la dimensión n y las constantes C_0 y C_1.

Antes de comenzar con la demostración enunciamos un pequeño lema de fácil demostración que nos servirá para reducir un poco los cálculos.

Lema 6.9 (Lemita)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con $|\Omega| < \infty$. Sean $u \in L^{s_1}(\Omega)$, $v \in L^{s_2}(\Omega)$ con s_1, $s_2 < \infty$. Entonces, $uv \in L^r(\Omega)$ con $r = \frac{s_1 s_2}{s_1 + s_2}$.*

Procedamos ahora a demostrar el teorema.

Demostración. Para demostrar esto procedemos por casos. Primero lo haremos cuando $n \leq 2$ y luego cuando $n \geq 3$. La idea es usar el típico argumento iterativo de regularidad ("Bootstrap"), sólo que para $n \leq 2$ con un par de iteraciones es suficiente. Como es usual, las constantes se simbolizaran como C_i pero no tendrán siempre el mismo valor.

Empecemos con el caso $n \leq 2$. Tomemos u_1 solución fuerte de

$$\begin{cases} Lu_1 = m(x)f(u) & \text{en } \Omega\\ u_1 = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{6.10}$$

Veremos que tal solución existe y coincide con u ($u_1 \equiv u$) por ser también solución débil. Además analizaremos su regularidad. Procedemos por pasos.

1. $f(u) \in L^q(\Omega)$ para cualquier $1 \leq q < \infty$. Esto sale del Teorema de Inmersión de Sobolev (casos $kp \geq n$), pues $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ entonces $u \in L^q(\Omega)$ para todo $1 \leq q < \infty$ y por lo dicho al principio de esta demostración, $f(u) \in L^q(\Omega)$.

2. $mf(u) \in L^{\tilde{r}}(\Omega)$ para $\tilde{r} \in [n, r)$. Por Lemita 6.9, el hecho que $m \in L^r(\Omega)$ con $r > n$ y el paso a) tenemos que $mf(u) \in L^s(\Omega)$ con $s(q) := \frac{qr}{q+r}$ para cualquier $1 \leq q < \infty$. Como $\lim_{q\to\infty} \frac{qr}{q+r} = r > n$, podemos tomar $\tilde{q}$ suficientemente grande tal que $s(\tilde{q}) > \tilde{r}$.

3. $u \equiv u_1 \in W^{2,\tilde{r}}(\Omega)$. Esto sale del Teorema de existencia de soluciones fuertes y el paso b).

4. $||u||_{W^{2,\tilde{r}}(\Omega)} \leq ||m||_{L^r(\Omega)}(C_0 + C_1||u||_{W_0^{1,2}(\Omega)})$. En efecto,

$$\begin{aligned}
||u||_{W^{2,\tilde{r}}(\Omega)} &\leq ||mf(u)||_{L^{\tilde{r}}(\Omega)} && \text{(Regularidad } L^p\text{)}\\
&\leq ||m||_r ||f(u)||_{\tilde{q}} && \text{(Hölder o Lemita 6.9)}\\
&\leq ||m||_r (C_0 + C_1||u||_{\tilde{q}}) && \text{(Cota sobre } f(u)\text{)}\\
&\leq ||m||_r (C_0 + C_1||u||_{W_0^{1,2}(\Omega)}) && \text{(Inmersión de Sobolev).}
\end{aligned}$$

5. $u \in W^{2,r}(\Omega)$. Por el punto anterior en Inmersión de Sobolev (caso $kp > n$) tenemos que $u \in C(\overline{\Omega}) \subset L^\infty(\Omega)$. Entonces, $f(u) \in L^\infty(\Omega)$ y $mf(u) \in L^r(\Omega)$ pues $m \in L^r(\Omega)$. Usando nuevamente el Teorema de existencia de soluciones fuertes obtenemos $u \in W^{2,r}(\Omega)$.

6. $||u||_{W^{2,r}(\Omega)} \leq ||m||_{L^r(\Omega)} C_0 + ||m||^2_{L^r(\Omega)}(C_1 + C_2||u||_{W_0^{1,2}(\Omega)})$. En efecto,

$$\begin{aligned}
||u||_{W^{2,r}(\Omega)} &\leq ||m||_r (C_0 + C_1||u||_\infty) && \text{(Análogo a 4)}\\
&\leq ||m||_r (C_0 + C_1||u||_{W_0^{2,\tilde{r}}(\Omega)}) && \text{(Inmersión de Sobolev)}\\
&\leq ||m||_{L^r(\Omega)} C_0 + ||m||^2_{L^r(\Omega)}(C_1 + C_2||u||_{W_0^{1,2}(\Omega)}) && \text{(Usando el punto 4).}
\end{aligned}$$

Veamos ahora el caso $n \geq 3$. Tomemos la sucesión $\{u_i\}_{i=0}^\infty$ definida por $u_0 \equiv u$ y u_i la solución fuerte de (6.10) con u_i en lugar de u_1 y u_{i-1} en lugar de u. Veremos que tal sucesión está bien definida, que $u_i \equiv u$ para todo i y analizaremos su regularidad. Nuevamente procedemos por pasos.

1. u_i está bien definida para todo $i \geq 1$. Además si $n - 2i > 0$, se cumple que $u_i \in W^{2,\frac{2n}{n-2(i-1)}}(\Omega)$. Esto se prueba por inducción.

   Cuando $i = 1$ tenemos que $u_0 \in W^{1,2}(\Omega)$ y por Inmersión de Sobolev, $u_0 \in L^{2^*}(\Omega)$ con $2^* = \frac{2n}{n-2}$. Entonces, $mf(u) \in L^s(\Omega)$ con $s = \frac{2^*n}{2^*+n} = 2$. De aquí que existe solución fuerte $u_1 \in W^{2,2}(\Omega)$ de (6.10) y coincide con u_0 por ser además solución débil. Esto nos da la buena definición para todo i pues si $u_i \equiv u_0$ entonces $u_{i+1} \equiv u_0$ con la misma justificación que recién.

   Veamos ahora el paso inductivo. Sean i con $n - 2(i+1) > 0$ y $u_i \in W^{2,\frac{2n}{n-2(i-1)}}(\Omega)$ queremos probar que $u_{i+1} \in W^{2,\frac{2n}{n-2i}}(\Omega)$. Lo hacemos de forma similar a lo hecho en el caso $n \leq 2$.

   I) $f(u_i) \in L^q(\Omega)$ con $q = \frac{2n}{n-2(i+1)}$. Esto sale de la hipotesis inductiva para u_i e Inmersión de Sobolev (caso $kp < n$, usar $n - 2i > 2$), seguido por la observación al principio de esta demostración sobre la acotación de $f(u)$.

   II) $mf(u_i) \in L^s(\Omega)$ con $s = \frac{2n}{n-2i}$. Sale de I), Lemita 6.9 y que $m \in L^n(\Omega)$ (pues $r > n$).

   III) $u_{i+1} \in W^{2,\frac{2n}{n-2i}}(\Omega)$. Por II) y Teorema de soluciones fuertes.

   Esto concluye el primer paso.

2. Tomando $r(i) := \frac{2n}{n-2(i-1)}$ tenemos que

$$||u_1||_{W^{2,r(1)}(\Omega)} \leq ||m||_{L^r(\Omega)}(C_0 + C_1||u||_{W_0^{1,2}(\Omega)}).$$
$$||u_i||_{W^{2,r(i)}(\Omega)} \leq ||m||_{L^r(\Omega)}(C_0 + C_1||u_{i-1}||_{W^{2,r(i-1)}(\Omega)}) \quad \forall i > 1.$$

   Esto sale como los puntos 4 y 6 del caso $n \leq 2$.

3. $\exists i$ tal que $u_i \in L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1,\infty)$. Tomamos el primer j tal que $n-2j \leq 0$. Entonces $u_{j-1} \in W^{2,\frac{2n}{n-2j+4}}(\Omega)$ por el paso anterior. Por Inmersión de Sobolev (caso $kp \geq n$ usar $n-2j \leq 0$) tenemos que $u_{j-1} \in L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1,\infty)$. Tomamos $i = j-1$ y listo.

4. $\exists i$ tal que $u_i \in W^{2,\tilde{r}}(\Omega)$, con $\tilde{r} \in [n,r)$. Además, $u_i \equiv u$. Eligimos j tal que $u_j \in L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1,\infty)$. Lo mismo sucede para $f(u_j)$. Tomamos $i = j+1$ y procedemos como en los puntos 2 y 3 del caso $n \leq 2$.

5. $u \in W^{2,r}(\Omega)$. Idem punto 5 caso $n \leq 2$.

6. $||u||_{W^{2,r}(\Omega)} \leq P(||m||_{L^r(\Omega)}) + ||m||^k_{L^r(\Omega)}(C_0 + C_1||u||_{W_0^{1,2}(\Omega)})$. Idem punto 6 caso $n \leq 2$ pero utilizando el punto 2 tantas veces como sea necesario.

$\square$

Lema 6.10. *Tomemos $g(u) := u^q$ con $0 < q < 1$. Entonces, existe una supersolución arbitrariamente grande de (6.3).*

Demostración. Utilizando el Teorema 2.9 y el Principio del Máximo Fuerte (Teorema 2.14), tomemos $v > 0$ la solución fuerte del problema $\mathcal{L}v = m^+$ en Ω, $v = 0$ en $\partial\Omega$. Notemos que, como $m \in L^r(\Omega)$, esta solución es débil y fuerte (ver Teorema 2.10). Además, utilizando el Teorema de Inmersión de Sobolev tenemos que $u \in C(\overline{\Omega})$. Sea ahora $k \geq (||v||_\infty + 1)^{q/(1-q)}$. Entonces, $k(v+1)$ es supersolución ya que

$$\mathcal{L}(k(v+1)) \geq k\mathcal{L}v \geq (k(||v||_\infty + 1))^q m^+ \geq (k(v+1))^q m \quad \text{ppx en } \Omega$$

y $v = k > 0$ en $\partial\Omega$. Utilizando que también es solución débil e integrando contra una función de prueba la desigualdad anterior, obtenemos que $k(v+1)$ es supersolución en el sentido de la Definición 4.3. Esto concluye la demostración. $\square$

Lema 6.11. *Sea $m \in L^r(\Omega)$ con $r > n$. Sea Ω_i^+ una componente conexa de Ω^+ con la propiedad de bola interior y tomemos $g(u) := u^q$ con $q < 1$ en (6.3). Entonces, existe una solución fuerte no negativa no trivial $u \in W_0^{1,r}(\Omega) \cap W^{2,r}(\Omega)$ de (6.3) que es estrictamente positiva en Ω_i^+.*

Demostración. Por el Teorema de Sub y Supersoluciones y los Lemas 6.3 y 6.10 sólo hace falta construir una subsolución no negativa u que cumpla $u \not\equiv 0$ en Ω_i^+.
Tomemos $B(x_0,R) \subset \Omega_i^+$. Sea v la autofunción principal con $||v||_\infty = 1$ del problema

$$\begin{cases} Lv = \lambda m(x) v & \text{en } B(x_0,R) \\ v = 0 & \text{en } \partial B(x_0,R). \end{cases}$$

Por el Teorema 2.15, esta ecuación se cumple *ppx* en $B(x_0,R)$ y v resulta $C^1(\overline{B}(x_0,R))$ con derivada normal exterior $\frac{\partial v}{\partial \eta} < 0$ en $\partial B(x_0,R)$.
Definimos ahora u como

$$u_i := \begin{cases} \lambda^{\frac{1}{q-1}} v & \text{en } B(x_0,R) \\ 0 & \text{en } \Omega - B(x_0,R). \end{cases}$$

Veamos que es subsolución. Notemos que $Lu < mu^q$ puntualmente en $B(x_0,R)$. Además, por el Teorema de la divergencia (Teorema 1.44), para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ se cumple

$$\begin{aligned} &-\int_\Omega \langle A\nabla u, \nabla\phi\rangle = -\int_{B(x_0,R)} \langle A\nabla u, \nabla\phi\rangle = \\ &\int_{B(x_0,R)} div(A\nabla u)\phi - \int_{\partial B(x_0,R)} \langle A\nabla u, n\rangle\phi = \\ &\int_{B(x_0,R)} div(A\nabla u)\phi - \int_{\partial B(x_0,R)} \langle A\nabla u, \frac{\nabla u}{|\nabla u|}\rangle\phi \leq \\ &\int_{B(x_0,R)} div(A\nabla u)\phi. \end{aligned}$$

Usando esta desigualdad, el hecho que $u \equiv 0$ en $B(x_0,R)^c$ y que $Lu < mu^q$ puntualmente en $B(x_0,R)$, tenemos

$$-\int_\Omega \langle A\nabla u, \nabla\phi\rangle + \langle b, \nabla u\rangle\phi + cu\phi \leq$$
$$\int_{B(x_0,R)} (div(A\nabla u) + \langle b, \nabla u\rangle + cu)\phi \leq$$
$$\int_{B(x_0,R)} mu^q\phi \leq \int_\Omega mu^q\phi \quad \forall\phi \in C_c^\infty(\Omega)$$

y queda probado que u es una subsolución débil. Luego utilizando el Teorema 6.8 se demuestra que $u \in W^{2,r}(\Omega)$. □

Corolario 6.12. *Sea $g(s) = s^q$ con $q < 1$. Si Ω^+ tiene una cantidad finita de componentes conexas, entonces existe una única solución no negativa, no trivial de (6.3) y estrictamente positiva en Ω^+. Más aún, la solución está acotada inferiormente por una función que no depende de m^-.*

Demostración. La existencia se desprende fácilmente de la demostración del lema anterior y el hecho que el máximo de subsoluciones es subsolución (ver Lema 4.8). La unicidad es consecuencia del Teorema 6.5. El "más aún" sale de notar que la subsolución propuesta es independiente de m^-. □

El corolario anterior nos permitirá definir el operador solución $S_m : [0,\infty) \to W_0^{1,r}(\Omega) \cap W^{2,r}(\Omega)$ dado por $S_m(\lambda) = u$ si u es solución de

$$\begin{cases} Lu = (m^+ - \lambda m^-)u^q & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \\ u > 0 & \text{en } \Omega^+. \end{cases} \tag{6.11}$$

Más aún, finalizamos el capítulo con el siguiente teorema. Por comodidad, en la demostración, llamaremos $Crit(n)$ al exponente crítico de Sobolev de acuerdo a la dimensión. Esto es $Crit(n) = 2^*$, si $n > 2$, y $Crit(n) = \infty$, si $n \leq 2$.

Teorema 6.13. *Sea L un operador elíptico lineal de segundo orden autoadjunto. Sea $\lambda \in [0,\infty)$ y sea S_m el operador definido en el párrafo anterior asociado a L. Entonces, S_m es continuo de $[0,\infty) \to C^1(\overline{\Omega})$*

Demostración. Escribimos $f(u) = u^q$. Tomemos una sucesión $\lambda_n \to \lambda$ y sean $\{u_n\}$ y u las soluciones de (6.11) asociadas a $\{\lambda_n\}$ y λ respectivamente. Demostraremos que $u_n \to u$ en $C^1(\overline{\Omega})$. Para ello procedemos en varios pasos.

1. La sucesión $\{u_n\}$ es acotada en $W_0^{1,2}(\Omega)$.

D. Primero notemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe una constante C_ε tal que $u^q < C_\varepsilon + \varepsilon u$. Usando esto y el Lema 2.11, tenemos que

$$\begin{aligned} ||u_n||^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} &= \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \leq K\int_\Omega \langle A\nabla u_n, \nabla u_n\rangle + cu_n^2 \\ &\leq K\int_\Omega m^+u_n^q u_n \leq K\int_\Omega m^+(C_\varepsilon + \varepsilon u_n)u_n \\ &= KC_\varepsilon\int_\Omega m^+u_n + K\varepsilon\int_\Omega m^+u_n^2 \\ &\leq C_\varepsilon||m^+||_r||u_n||_{r'} + K\varepsilon||m^+||_r||u_n||^2_{2r'} \\ &\leq \tilde{C}_\varepsilon||u_n||_{W_0^{1,2}(\Omega)} + \varepsilon K||u_n||^2_{W_0^{1,2}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Tomando $\varepsilon \approx 0$ se puede ver que $\{u_n\}$ es acotado en $W_0^{1,2}(\Omega)$.

2. Existe un $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ y una subsucesión tal que $u_n \to v$ en $W_0^{1,2}(\Omega)$.

D. Por 1 tenemos que $||u_n||_{W_0^{1,2}(\Omega)} < C$, entonces, por la inmersión compacta de Sobolev (Teorema 1.43), existe un $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ y una subsucesión, que por comodidad seguiremos llamando $\{u_n\}$, tales que

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup v \quad \text{en } W_0^{1,2}(\Omega) \\ u_n &\to v \quad \text{en } L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, Crit(n)). \end{aligned}$$

Tomando $u_n - v$ como función de prueba y siguiendo los cálculos del punto 1 tenemos

$$\begin{aligned} ||u_n - v||^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} &\le K \int f(u_n - v)(u_n - v)m^+ \\ &\le C_\varepsilon ||m^+||_r ||u_n - v||_{r'} + K\varepsilon ||u_n - v||^2_{2r'} ||m^+||_r \end{aligned}$$

y esto último tiende a cero cuando $n \to \infty$ pues $r' < 2r' < Crit(n)$.

3. v es solución débil del problema

$$\begin{cases} Lv = (m^+ - \lambda m^-)f(v) & \text{en } \Omega \\ v = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

D. Sabemos que para todo n se cumple

$$\int \langle A\nabla u_n, \nabla \phi\rangle + cu_n\phi = \int (m^+ - \lambda_n m^-)f(u_n)\phi \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{6.12}$$

Como $u_n \rightharpoonup v$ en $W_0^{1,2}(\Omega)$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int \langle A\nabla u_n, \nabla \phi\rangle + cu_n\phi = \int \langle A\nabla v, \nabla\phi\rangle + cv\phi. \tag{6.13}$$

Además, como $u_n \to v$ en $L^{q_0}(\Omega)$ para $q_0 = 2r' < Crit(n)$, tenemos que existe una función $w \in L^{q_0}(\Omega)$ y una subsucesión, que nuevamente llamamos $\{u_n\}$, que cumplen

$$\begin{aligned} u_n &\to v \quad ppx, \\ |u_n| &< w. \end{aligned}$$

Entonces $(m^+ - \lambda_n m^-)f(u_n)\phi \to (m^+ - \lambda m^-)f(v)\phi$ *ppx* y se ve que

$$\begin{aligned} \left|(m^+ - \lambda_n m^-)f(u_n)\phi\right| &\le \left(\left|m^+\right| + K\left|m^-\right|\right)|\phi|\,|C_\varepsilon + \varepsilon u_n| \\ &\le |M|\,|\phi|\,(C_\varepsilon + \varepsilon\,|w|), \end{aligned}$$

con $M(x) := |m^+(x)| + K\,|m^-(x)|$. Utilizando la desigualdad de Hólder generalizada con exponentes r, $2r'$ y $2r'$ obtenemos

$$\int |M|\,|\phi|\,(C_\varepsilon + \varepsilon\,|w|) \le ||M||_r ||\phi||_{2r'} ||(C_e + \varepsilon\,|w|)||_{2r'} < \infty.$$

Entonces podemos usar el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue en el lado derecho de (6.12) y concluir que

$$\lim_{n\to\infty} \int (m^+ - \lambda_n m^-)f(u_n)\phi = \int (m^+ - \lambda_n m^-)f(v)\phi. \tag{6.14}$$

Combinando (6.12), (6.13) y (6.14) concluimos el punto 3.

4. $u_n \to v$ en $C^1(\overline{\Omega})$.

D. Por Teorema 6.8, u_n y v son soluciones fuertes de sus respectivos problemas. Además, por la cota (6.9) dada en el mismo teorema y utilizando el punto 1, tenemos que

$$\begin{aligned} ||u_n||_{2,r} &\le P(||m^+ - \lambda_n m^-||_{L^r(\Omega)}) + ||m^+ - \lambda_n m^-||^k_{L^r(\Omega)}(C_0 + C_1||u||_{W_0^{1,2}(\Omega)}) \\ &\le M < \infty. \end{aligned}$$

Ahora, por Inmersión de Sobolev compacta (caso $kp > n$), existe $\tilde{v} \in C^1(\overline{\Omega})$ y una subsucesión tal que $\lim_{n\to\infty} u_n = \tilde{v}$ en $C^1(\overline{\Omega})$. Como esto implica convergencia *ppx*, se tiene $\tilde{v} \equiv v$. De lo cual se desprende el punto 4.

5. $v > 0$ en Ω^+.

D. Por Corolario 6.12 existe una función $\tilde{w}$ que no depende de $\lambda_n m^-$ tal que $\tilde{w} \leq u_n$ para todo n. Entonces, por 4, $\tilde{w} \leq v$. Ahora recordemos la propiedad fundamental de $\tilde{w}$. Dada cualquier componente conexa Ω_i^+ de Ω^+, se cumple que $\tilde{w} \not\equiv 0$ en Ω_i^+, por lo cual $v \not\equiv 0$ en Ω_i^+. Utilizando el Lema 6.3 se deduce entonces que $v > 0$ en Ω_i^+ para toda componente conexa de Ω^+. Luego, $v > 0$ en Ω^+.

$\square$

Capítulo 7

Problema sublineal para ecuaciones con el p-Laplaciano

Sea $a < b$, sea $\Omega := (a, b)$, y sean $p > 1$, $q \in (0, p-1)$. Sean $m \in L^{p'}(\Omega)$ una función que cambia de signo en Ω y $0 \leq c \in L^{\infty}(\Omega)$. El objetivo de este capítulo es estudiar la existencia de soluciones de problemas de la forma

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2} u')' + c(x)u^{p-1} = m(x)u^q & \text{en } \Omega \\ u > 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{7.1}$$

donde el concepto de solución estará dado por la siguiente definición.

Definición 7.1. Por solución de (7.1) nos referimos a una $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, con $u > 0$ en Ω, que cumple la ecuación en el sentido de las distribuciones, o sea,

$$\int_\Omega |u'|^{p-1} u'\phi' + c(x)u^{p-1}\phi = \int_\Omega m u^q \phi \quad \forall \phi \in C_c^{\infty}(\Omega). \tag{7.2}$$

Llamaremos al problema (7.1) de tipo sublineal por analogía al caso $p = 2$, donde $q < 1$. Nos referiremos, en cambio, al caso $q > p - 1$ como de tipo superlineal.

Es sabido que cuando $c \equiv 0$ y $0 \not\equiv m \geq 0$, el problema (7.1) admite una solución. Para una demostración de esto ver [DH, Teorema 5.1]. Además, en el caso particular $p = 2$, la ecuación es llamada Ecuación de Emden-Fowler Generalizada y fue ampliamente estudiada, ver por ejemplo [CK] y sus referencias.

Por otro lado, si permitimos que m cambie de signo y bajo la suposición que $m(x) \geq m_0 > 0$ en algún $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, se puede probar que el problema

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2} u')' = m(x)u^q & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{7.3}$$

admite solución no negativa (no trivial). Para esto ver [DH, Teorema 5.2].

Sin embargo, notamos que en general, las soluciones no negativas (no triviales) de (7.3) pueden no ser estrictamente positivas en Ω (en contraste con el caso superlineal). En el caso $p = 2$ y $c \equiv 0$, algunas condiciones suficientes para la existencia de soluciones estrictamente positivas de (7.3), bajo ciertas hipótesis sobre m, han sido expuestas en [GK1], mientras que (para $p = 2$) el caso de un operador general que incluye la posibilidad $c \not\equiv 0$ fue estudiado en el Capítulo 5 de esta tesis.

En este capítulo exhibiremos ciertas condiciones suficientes (y no comparables) para la existencia de soluciones de (7.1). Los resultados principales son el Teorema 7.8 y el Teorema 7.10.

7.1. Resultados auxiliares

Por comodidad, reescribimos los conceptos de sub y supersolución de la Sección 4.1 adaptados al caso unidimensional y en particular al problema (7.1).

Definición 7.2. Decimos que $0 \leq v \in W^{1,p}(\Omega)$ es una subsolución (débil) de (7.1) si

$$\int_\Omega |v'|^{p-2} v'\phi + c(x)v^{p-1}\phi \leq \int_\Omega m(x)v^q\phi \quad \text{para toda } 0 \leq \phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

y $v = 0$ en $\partial\Omega$. Análogamente, decimos que $0 \leq w \in W^{1,p}(\Omega)$ es una supersolución si cumple

$$\int_\Omega |w'|^{p-2} w'\phi + c(x)w^{p-1}\phi \geq \int_\Omega m(x)w^q\phi \quad \text{para toda } 0 \leq \phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

y $w \geq 0$ en $\partial\Omega$.

Notemos en la definición anterior una pequeña diferencia entre la sub y la supersolución. Mientras que la sub debe ser exactamente cero en la frontera, a la super sólo le exigimos que sea mayor que cero allí.

Veremos a continuación que es fácil hallar supersoluciones arbitrariamente grandes. Esto disminuye muchísimo la dificultad de la aplicación del método de sub y supersoluciones ya que sólo necesitaremos hallar subsoluciones. Más aún, no debemos preocuparnos por acotar dichas subsoluciones pues la super es, como dijimos, *arbitrariamente grande*.

Lema 7.3. *(Existencia de supersolución arbitrariamente grande) Si $m^+ \not\equiv 0$, entonces el problema (7.1) tiene una supersolución arbitrariamente grande, es decir, para todo $k \in \mathbb{R}_{>0}$ existe una supersolución $w \in W^{1,p}(\Omega)$ cumpliendo $w \geq k$ en $\overline{\Omega}$. En particular, dada cualquier subsolución $v \in C(\overline{\Omega})$ siempre es posible hallar una supersolución $w \geq v$.*

Demostración. Sea $u \geq 0$ solución de (3.14) con m^+ en lugar de h, y sea $k \geq (||u||_\infty + 1)^{q/p-1-q}$. Se tiene que $u \in C^1(\overline{\Omega})$, que $|u'|^{p-2} u' \in W^{1,1}(\Omega)$ y que u cumple la ecuación (3.14) *ppx*. Entonces $w := k(u+1)$ es una supersolución ya que $u = k > 0$ en $\partial\Omega$ y se cumple

$$\begin{aligned} -(|k(u+1)'|^{p-2} k(u+1)')' + c(k(u+1))^{p-1} &\geq k^{p-1}\left(-(|u'|^{p-2} u')' + cu^{p-1}\right) \\ &= k^{p-1}m^+ \geq (k(||u||_\infty + 1))^q m^+ \geq (k(u+1))^q m, \end{aligned}$$

donde todas las igualdades y desigualdades son *ppx* en Ω. Es fácil ver que $k(u+1) \geq k$ en Ω, lo cual finaliza la prueba. ☐

Observación 7.4. (Idea de la prueba) En principio, si uno busca hallar una supersolución w de (7.1), se podría proceder de la siguiente manera. Consideramos u solución de (3.14) con m^+ en lugar de h. Sabemos, por Principio del Máximo, que $u > 0$ en Ω. Sea k una constante a determinar. Por la homogeneidad de nuestro operador se tiene

$$\begin{aligned} -(|(ku)'|^{p-2} (ku)')' - c(ku)^{p-1} &= (k)^{p-1}\left(-|u'|^{p-2} u')' - cu^{p-1}\right) \\ &= (k)^{p-1}m^+ \geq (k)^{p-1}m. \end{aligned}$$

Podríamos entonces simplemente proponer nuestras supersoluciones como $w := ku$, con k tal que $k^{p-1} \geq k^q u^q$. Como $u \in C(\overline{\Omega})$, podríamos pedir $k \geq (||u||_\infty)^{\frac{q}{p-1-q}}$. El problema radica, en realidad, en que uno busca una supersolución "arbitrariamente grande". Esto quiere decir, que luego sirva para aplicar el Teorema de Sub y Supersoluciones de la siguiente forma: Dada una subsolución v quisiéramos poder encontrar entre nuestras supersoluciones ku, una mayor a v, es decir, tal que $w = ku \geq v$ para algún k suficientemente grande. A priori uno pensaría que siempre es posible hallar dicho k. Sin embargo, teniendo en cuenta que $u \equiv 0$ en la frontera, en el caso que además tuviera derivada (normal) nula allí, podría no existir k que cumpla la condición deseada. Pensemos por ejemplo en las funciones $u(x) = x^2$ y $v(x) = \sqrt{x}$ definidas en $\Omega = (0,1)$. Pero este problema se soluciona de manera simple ya que sabemos a priori que las subsoluciones que hallaremos serán de clase $C(\overline{\Omega})$ (y por lo tanto acotadas). Entonces, podemos tomar la supersolución de la forma $w = k(u+1)$ como hemos hecho en la demostración del Lema. Otro método posible (en $\mathbb{R}$) consiste en usar el Lema de Hopf para el operador p-Laplaciano (Lema 3.16) para garantizar una supersolución cuya derivada no sea nula en la frontera y luego acotar la subsolución por alguna función de clase $C^1(\overline{\Omega})$ de manera que no tenga pendiente infinita allí. Esto puede ser útil en algunos casos (por ejemplo para el problema singular del Capítulo 8, que requiere que la supersolución sea nula en la frontera) pero conlleva tener que probar mayores condiciones de regularidad tanto en la sub como en la supersolución. Tomar en cambio la supersolución como lo hicimos en la demostración del Lema ($w := k(u+1)$) nos garantiza que para cualquier subsolución $v \in C(\overline{\Omega})$ siempre tendremos una supersolución mayor (pues tomamos $k \geq \text{máx}\{(||u||_\infty+1)^{q/p-1-q},\ ||v||_\infty\}$ y queda $w \geq v$ en Ω). $\square$

Para poder hallar condiciones suficientes que garanticen la existencia de soluciones de nuestro problema sólo resta encontrar subsoluciones. A continuación enunciamos dos lemas que utilizaremos para la construcción de las mismas. El primero es similar al Lema 5.5 dado previamente, pero requiere una pequeña adaptación y también debilitar ligeramente algunas de las hipótesis.

Recordemos del Capítulo 3 la función

$$\varphi_p(t) := |t|^{p-2}t,$$

cuyas propiedades hemos estudiado anteriormente y serán de utilidad en lo que sigue.

Lema 7.5. *(Lema de pegado para subsoluciones) Sean $\Omega = (a,b)$, $p > 1$, $0 \leq q < p-1$ y $m \in L^{p'}(\Omega)$. Dados $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, definimos $\Omega_i := (x_{i-1}, x_i)$, para $i = 1, \ldots, n$. Sean $u_i : \overline{\Omega_i} \to \mathbb{R}$, funciones que satisfacen*

1. *$u_1(a) = 0$, $u_n(b) = 0$ y $u_i > 0$ en Ω_i.*
2. *$u_i \in W^{1,p}(\Omega_i)$.*
3. *$\varphi_p(u_i') \in W^{1,1}_{loc}(\Omega_i)$.*
4. *$-(\varphi_p(u_i'))' + c(x)\varphi_p(u_i) \leq m(x)u_i^q$ ppx en Ω_i.*

Si además se cumple que

$$u_i(x_i) = u_{i+1}(x_i) \quad \text{y} \quad u_i'(x_i) \leq u_{i+1}'(x_i) \quad \text{para todo } i = 1, \ldots, n-1, \tag{7.4}$$

entonces la función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ definida por $u(x) := u_i(x)$ si $x \in (x_{i-1}, x_i)$, es subsolución débil del problema

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))' + c(x)\varphi_p(u) = m(x)u^q & \text{en } \Omega \\ u > 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{7.5}$$

Demostración. Demostraremos este lema para el caso $n = 2$. La demostración para $n > 2$ es análoga. Primero notemos que $u_1'(x_1)$ y $u_2'(x_1)$ están bien definidos. En efecto, por Hipótesis 3 la función $\varphi_p(u_i') \in C(\overline{\Omega_i})$, para $i = 1, 2$. Entonces, por ser φ_p un homeomorfismo, tenemos que $u_i' \in C(\overline{\Omega_i})$.

Por lo visto en la Sección 1.1 sabemos que $u \in C([a,b])$, más aún $u \in W_0^{1,p}(a,b)$ con

$$u' := \begin{cases} u_1' & \text{en } (a, x_1) \\ u_2' & \text{en } (x_1, b). \end{cases}$$

Teniendo en cuenta las hipótesis y usando integración por partes probemos que u es una subsolución débil de (7.5). Sea entonces $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ y tomemos $\delta > 0$ tal que $supp(\phi) \subset (a+\delta, b-\delta)$. Luego,

$$\begin{aligned} \int_a^b |u'(x)|^{p-2}u'(x)\phi'(x)dx = &\int_{a+\delta}^{x_1} |u_1'(x)|^{p-2}u_1'(x)\phi'(x)dx \\ &+ \int_{x_1}^{b-\delta} |u_2'(x)|^{p-2}u_2'(x)\phi'(x)dx. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Como $a < a+\delta < x_1 < b$, se tiene $|u_1'|^{p-2}u_1' \in W^{1,1}(a+\delta, x_1)$ y es posible aplicar integración por partes (Proposición 1.19) en el primer término de la derecha obteniendo

$$\begin{aligned} \int_{a+\delta}^{x_1} |u_1'(x)|^{p-2}u_1'(x)\phi'(x)dx = &-\int_{a+\delta}^{x_1} (|u_1'(x)|^{p-2}u_1'(x))'\phi(x)dx \\ &+ |u_1'(x_1)|^{p-2}u_1'(x_1)\phi(x_1). \end{aligned}$$

Análogamente, podemos aplicar el mismo razonamiento al segundo término del miembro de la derecha en (7.6). Juntando ambos resultados tenemos

$$\begin{aligned}\int_a^b |u'(x)|^{p-2}u'(x)\phi'(x)dx = &-\int_{a+\delta}^{x_1}(|u_1'(x)|^{p-2}u_1'(x))'\phi(x)dx\\ &-\int_{x_1}^{b-\delta}(|u_2'(x)|^{p-2}u_2'(x))'\phi(x)dx\\ &+\phi(x_1)\left(|u_1'(x_1)|^{p-2}u_1'(x_1)-|u_2'(x_1)|^{p-2}u_2'(x_1)\right).\end{aligned}$$

Por último, por Hipótesis 4, (7.4) y el crecimiento de φ_p, se sigue

$$\begin{aligned}\int_a^b |u'(x)|^{p-2}u'(x)\phi'(x)-c(x)|u(x)|^{p-2}u(x)dx \leq &\int_{a+\delta}^{x_1} m(x)u_1^q(x)\phi(x)dx\\ &+\int_{x_1}^{b-\delta} m(x)u_2^q(x)\phi(x)dx\\ &=\int_a^b m(x)u^q(x)\phi(x)dx.\end{aligned}$$

□

En los resultados principales de este capítulo, cuando construyamos subsoluciones de nuestros problemas utilizando el lema anterior, la hipótesis (7.4) será garantizada, al igual que en el Capítulo 5, por el siguiente lema (que reescribimos a continuación). Para su prueba referimos al Lema 5.6.

Lema 7.6. *Dados $a < x_0 < x_1 < b$, definimos $\Omega_1 := (a, x_1)$, $\Omega_2 := (x_0, x_1)$ y $\Omega_3 := (x_0, b)$. Sean $u_i \in C^1(\overline{\Omega_i})$, con $i = 1, 2, 3$, funciones que satisfacen*

$$\begin{gathered}u_1(a)=u_2(x_0)=u_2(x_1)=u_3(b)=0,\\ u_i>0 \ \text{ en } \Omega_i, \ \text{ para } i=1,2,3,\\ ||u_1||_\infty, \ ||u_3||_\infty \leq 1 = ||u_2||_\infty.\end{gathered}$$

Entonces, existen $x_0 < \underline{x}_0 < \overline{x}_1 < x_1$ tales que

$$\begin{aligned}&u_1(\underline{x}_0)=u_2(\underline{x}_0), \qquad u_2(\overline{x}_1)=u_3(\overline{x}_1),\\ &u_1'(\underline{x}_0)\leq u_2'(\underline{x}_0), \qquad u_2'(\overline{x}_1)\leq u_3'(\overline{x}_1).\end{aligned} \tag{7.7}$$

Por último, notemos que si bien nuestro problema es no lineal, cuenta con la siguiente propiedad.

Observación 7.7. El problema (7.1) es homogéneo en el sentido que existe solución u si y sólo si existe v solución del mismo problema pero con τm en lugar de m. En efecto, es fácil ver que $v = \rho u$, con $\rho = \tau^{\frac{1}{(p-1)-q}}$.

7.2. Resultados principales

Para evitar sobrecargar la notación, para $y \geq a$, $z \leq b$ y $\varepsilon \geq 0$ tomamos

$$M_{a,\varepsilon}^- := \int_a^y (m^-(x)+\varepsilon)dx, \quad \text{y} \quad M_{b,\varepsilon}^- := \int_z^b (m^-(x)+\varepsilon)dx.$$

Si $\varepsilon = 0$ simplemente escribimos $M_a^-(y)$ y $M_b^-(z)$.

Teorema 7.8. *Sea $m \in L^{p'}(\Omega)$ y supongamos que existen $a \leq x_0 < x_1 \leq b$ con $0 \not\equiv m \geq 0$ en $I := (x_0, x_1)$. Sean*

$$\gamma := \max\{x_1-a, b-x_0\} \tag{7.8}$$

$$\mathcal{M}_p := \max\left\{M_a^-(x_1)^{2-p}\left(\int_a^{x_1} M_a^-(x)dx\right)^{p-1}, M_b^-(x_0)^{2-p}\left(\int_{x_0}^b M_b^-(x)dx\right)^{p-1}\right\}. \tag{7.9}$$

(i) Sean $p \geq 2$ y $q \in (p-2, p-1)$. Si

$$\gamma^{p-2}\mathcal{M}_2 < \frac{p-1}{(p-1-q)^{p-1}}\frac{1}{\lambda_1(m,I)} \tag{7.10}$$

y

$$\gamma^p ||c||_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{(2-p+1)(p-1)}{(p-1-q)^p}, \tag{7.11}$$

entonces existe una solución de (7.1).

(ii) Sea $p \in (1,2]$. Si

$$\mathcal{M}_p < \frac{(p-1)^p}{(p-1-q)^{p-1}}\frac{1}{\lambda_1(m,I)} \tag{7.12}$$

y

$$\gamma^p ||c||_{L^\infty(\Omega)} \leq \left(\frac{p-1}{p-1-q}\right)^p q, \tag{7.13}$$

entonces existe una solución de (7.1).

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $a < x_0 < x_1 < b$ (quedará claro de la demostración como proceder en caso contrario). Teniendo en cuenta que siempre existe supersolución arbitrariamente grande debido al Lema 7.3, es suficiente construir una subsolución débil u para (7.1) estrictamente positiva en Ω. Más aún, por la homogeneidad del problema es suficiente dar una subsolución para (7.1) con τm en lugar de m, para algún $\tau > 0$. (Ver Observación 7.7.)

Probemos (i). Debido a (7.10) tenemos que

$$\gamma^{p-2}\frac{(p-1-q)^{p-1}}{p-1}\max\left\{\int_a^{x_1} M_a^-(x)dx, \int_{x_0}^b M_b^-(x)dx\right\} < \frac{1}{\lambda_1(m,I)}$$

y eligiendo $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño podemos fijar τ tal que

$$\gamma^{p-2}\frac{(p-1-q)^{p-1}}{p-1}\max\left\{\int_a^{x_1} M_{a,\varepsilon}^-(x)dx, \int_{x_0}^b M_{b,\varepsilon}^-(x)dx\right\} \leq \frac{1}{\tau} \leq \frac{1}{\lambda_1(m,I)}. \tag{7.14}$$

Sea $x \in [a, x_1]$ y definamos

$$u_1(x) := \left(\sigma \int_a^x M_{a,\varepsilon}^-(y)dy\right)^k \tag{7.15}$$

donde

$$k := \frac{1}{p-1-q} \quad \text{ y } \quad \sigma := \frac{\tau\gamma^{p-2}}{(p-1)k^{p-1}}. \tag{7.16}$$

Observemos que $k > 1$ pues $0 < p-1-q < 1$ ya que $p-2 < q < p-1$. Probaremos ahora que u_1 cumple las siguientes propiedades.

1. $u_1(a) = 0$, $u_1 > 0$ en $(a, x_1]$, u_1 es estrictamente creciente y $u_1(x_1) = ||u_1||_\infty \leq 1$.

D. Trivialmente resulta $u_1(a) = 0$. Como la función $M_{a,\varepsilon}^-$ que es estrictamente positiva en $(a, x_1]$ y u_1 es esencialmente la integral de esta elevada a la $k > 1$, se sigue que $u_1 > 0$ en $(a, x_1]$ y que u_1 es estrictamente creciente. Finalmente, $u_1(x_1) = ||u_1||_\infty$ por ser creciente y $u_1(x_1) \leq 1$ por la desigualdad (7.14) y las definiciones (7.15) y (7.16).

2. $u_1 \in W^{1,p}((a, x_1))$ con

$$u_1'(x) = \sigma^k k\left(\int_a^x M_{a,\varepsilon}^-(y)dy\right)^{k-1} M_{a,\varepsilon}^-(x).$$

D. Tomemos $u_1 = (\sigma f)^k$ con

$$f := \int_a^x M_{a,\varepsilon}^-(y)dy = \int_a^x\int_a^y (m^-(s)+\varepsilon)dsdy \qquad \text{para } x \in [a, x_1].$$

Notemos que f es la integral de la función $M^-_{a,\varepsilon} \in C([a, x_1])$, por lo que $f \in C^1([a, x_1])$ con derivadas clásica y débil

$$f' = M^-_{a,\varepsilon} > 0 \text{ en } (a, x_1).$$

Como $k > 1$, utilizando regla de la cadena deducimos que $u_1 \in C^1([a, x_1]) \subset W^{1,p}((a, x_1))$ con

$$u_1' = \sigma^k k f^{k-1} f' > 0 \text{ en } (a, x_1) \tag{7.17}$$

en sentido clásico y débil.

3. $\varphi_p(u_1') = (|u_1'|^{p-2}u_1') \in W^{1,1}_{loc}((a, x_1))$. Más aún, en este caso $u_1 \in W^{2,1}_{loc}((a, x_1))$ con

$$u_1''(x) = \sigma^k k(k-1)\left(\int_a^x M^-_{a,\varepsilon}(y)dy\right)^{k-2} (M^-_{a,\varepsilon}(x))^2 + \sigma^k k\left(\int_a^x M^-_{a,\varepsilon}(y)dy\right)^{k-1} (m^-(x)+\varepsilon)$$

y por lo tanto

$$(\varphi(u'))' = (p-1)(u_1')^{p-2}u_1'' =$$
$$(k\sigma^k)^{p-1}\left(l\left(\int_a^x M^-_{a,\varepsilon}(y)dy\right)^{l-1} M^-_{a,\varepsilon}(x)^p + (p-1)\left(\int_a^x M^-_{a,\varepsilon}(y)dy\right)^{l} M^-_{a,\varepsilon}(x)^{p-2}(m^-(x)+\varepsilon)\right).$$

D. Como $u_1 > 0$, para ver que $\varphi_p(u_1') \in W^{1,1}_{loc}((a, x_1))$, por la regla de la cadena dada en el Lema 1.23, basta probar que $u_1' \in W^{1,1}_{loc}((a, x_1))$. Por 2 sólo resta probar que u_1' tiene derivada débil en $L^1_{loc}((a, x_1))$ y calcularla. Para ello analizaremos la fórmula (7.17). Notemos que la función f es una *2-primitiva* de la función $(m^- + \varepsilon) \in L^{p'}((a, x_1))$. Esto nos dice que $f \in W^{2,p'}((a, x_1))$ y $f'' = m^- + \varepsilon$ en sentido débil. En particular $f' \in W^{1,p'}((a, x_1))$. Además, como $f > 0$ en (a, x_1), utilizando la regla de la cadena del Lema 1.23 obtenemos $f^{k-1} \in W^{1,p'}_{loc}((a, x_1))$ con $(f^k)' = (k-1)f^{k-1}f'$. Ahora podemos aplicar regla de diferenciación de producto (Proposición 1.19) en (7.17) y obtenemos que $u_1' \in W^{1,p'}_{loc}((a, x_1)) \subset W^{1,1}_{loc}((a, x_1))$ y

$$u_1'' = \sigma^k k(f^{k-1}f')' = \sigma^k k\left((k-1)f^{k-2}(f')^2 + f^{k-1}f''\right).$$

4. Se cumple

$$-(|u_1'|^{p-2}u_1')' + c|u_1|^{p-2}u_1 \leq \tau m u_1^q \quad ppx \text{ en } (a, x_1). \tag{7.18}$$

D. Sea $l := (k-1)(p-1)$. Por comodidad enunciamos los siguientes resultados de fácil comprobación que utilizaremos para probar la desigualdad:

(*a*) $l > 0$ (pues $q > p-2$).

(*b*) $l - 1 + p = k(p-1)$.

(*c*) $l + p - 2 = kq$.

(*d*) $k^{p-1}l \geq \gamma^p||c||_\infty$ (por (7.12)).

(*e*) $\int_a^x M_{a,\varepsilon}(y)dy \leq (x-a)M^-_{a,\varepsilon}$ para todo $x \in [a, x_1]$ (pues $M^-_{a,\varepsilon}$ es estrictamente creciente).

(*f*) $(x-a) \leq (x_1 - a) \leq \gamma$ para todo $x \in [a, x_1]$.

Veamos ahora que se cumple la desigualdad enunciada. Teniendo en cuenta lo anterior, la parte 3 y que

$p \geq 2$, calculamos en (a, x_1),

$$
\begin{aligned}
-(|u_1'(x)|^{p-2}u_1')' &= -(k\sigma^k)^{p-1}\left(l\left(\int_a^x M_{a,\varepsilon}^-(y)dy\right)^{l-1} M_{a,\varepsilon}^-(x)^p\right. \\
&\qquad \left. +(p-1)\left(\int_a^x M_{a,\varepsilon}^-(y)dy\right)^{l} M_{a,\varepsilon}^-(x)^{p-2}(m^-(x)+\varepsilon)\right) \\
&\leq -(k\sigma^k)^{p-1}\left(\frac{1}{\gamma^p}\left(\int_a^x M_{a,\varepsilon}^-(y)dy\right)^{k(p-1)}\right. && \text{(por } (e) \text{ y } (f))\\
&\qquad \left. +\frac{(p-1)}{\gamma^{p-2}}\left(\int_a^x M_{a,\varepsilon}^-(y)dy\right)^{kq} m^-\right) && \text{(por } (c), (e) \text{ y } (f))\\
&\leq -||c||_\infty \sigma^{k(p-1)}\left(\int_a^x M_{a,\varepsilon}^-(y)dy\right)^{k(p-1)} && \text{(por (7.11))}\\
&\qquad -\tau m^-\sigma^{kq}\left(\int_a^x M_{a,\varepsilon}^-(y)dy\right)^{kq} && \text{(por } (c) \text{ y (7.16))}\\
&\leq -cu_1^{p-1} - \tau m^- u_1^q && \text{(por (7.15))}\\
&\leq -cu_1^{p-1} + \tau m u_1^q.
\end{aligned}
$$

Ahora, de manera similar, para $x \in [x_0, b]$ definimos u_3 por

$$u_3(x) := (\sigma \int_x^b M_{b,\varepsilon}^-(y)dy)^k,$$

con k y σ dados por (7.16). Entonces u_3 cumple las siguientes propiedades, análogas a las de u_1.

1. $u_3(b) = 0$, $u_3 > 0$ en $[x_0, b)$, u_3 es estrictamente decreciente y $||u_3||_\infty \leq 1$.

2. $u_3 \in W^{1,p}((x_0, b))$.

3. $\varphi_p(u_3') \in W_{loc}^{1,1}((x_0, b))$.

4. Se cumple

$$-(|u_3'|^{p-2}u_3')' + cu_3^{p-1} \leq \tau m u_3^q \quad ppx \text{ en } (x_0, b). \tag{7.19}$$

Por otro lado, sea u_2 la autofunción principal positiva asociada al peso m en I con $||u_2||_{L^\infty(I)} = 1$, esto es, satisfaciendo (3.17) con I en lugar de Ω. Entonces, la función u_2 cumple las siguientes propiedades que son similares a las de enunciadas para u_1 y u_3.

1. $u_2(x_0) = 0$, $u_2(x_1) = 0$, $u_2 > 0$ en (x_0, x_1) y $||u_2||_\infty = 1$.

2. $u_2 \in W^{1,p}(I)$.

3. $\varphi_p(u_2') \in W_{loc}^{1,1}(I)$.

4. Se cumple

$$-(|u_2'|^{p-2}u_2')' + cu_2^{p-1} \leq \lambda_1(m, I)mu_2^{p-1} \leq \tau m u_2^q \quad \text{en } I. \tag{7.20}$$

En este caso, las propiedades 2 y 3 se deducen de la regularidad de la autofunción principal, dada en el Lema 3.9, y la propiedad 4 sigue de que $m \geq 0$ en I, de que $||u_2||_\infty = 1$ y de la segunda desigualdad en (7.14), recordando que $q < p - 1$.

De las propiedades número 1 para u_1, u_2 y u_3 se tiene

$$
\begin{aligned}
&u_1(a) = u_3(b) = u_2(x_0) = u_2(x_1) = 0 \text{ y}\\
&||u_1||_\infty,\ ||u_3||_\infty \leq 1 = ||u_2||_\infty.
\end{aligned}
$$

Por el Lema 7.6 podemos encontrar $\underline{x}_0$, $\overline{x}_1 \in I$ con $\underline{x}_0 < \overline{x}_1$ y tales que

$$\begin{aligned} u_1(\underline{x}_0) &= u_2(\underline{x}_0), \qquad & u_2(\overline{x}_1) &= u_3(\overline{x}_1),\\ u_1'(\underline{x}_0) &\le u_2'(\underline{x}_0), \qquad & u_2'(\overline{x}_1) &\le u_3'(\overline{x}_1). \end{aligned} \tag{7.21}$$

Ahora definamos una función u por

$$u := \begin{cases} u_1 & \text{en } [a, \underline{x}_0] \\ u_2 & \text{en } [\underline{x}_0, \overline{x}_1] \\ u_3 & \text{en } [\overline{x}_1, b]. \end{cases} \tag{7.22}$$

Notemos que por (7.21) y por las propiedades 1, 2, 3 y 4 de u_1, u_2 y u_3 podemos aplicar el Lema 7.5 y resulta que u es una subsolución débil de (7.1) con τm en lugar de m. Como se dijo al principio de esta demostración, esto termina de probar la parte (i).
Probemos (ii). Primero, por hipótesis (7.12) se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{(p-1-q)^{p-1}}{(p-1)^p}\left(\int_a^{x_1} M_a^-(x)dx\right)^{p-1} &< \frac{1}{M_a^-(x_1)^{2-p}\lambda_1(m)},\\ \frac{(p-1-q)^{p-1}}{(p-1)^p}\left(\int_{x_0}^{b} M_b^-(x)dx\right)^{p-1} &< \frac{1}{M_b^-(x_0)^{2-p}\lambda_1(m)}. \end{aligned}$$

Entonces, eligiendo $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño podemos conseguir τ tal que

$$\frac{(p-1-q)^{p-1}}{(p-1)^p}\left(\int_a^{x_1} M_{a,\varepsilon}^-(x)dx\right)^{p-1} \le \frac{1}{\tau} \le \frac{1}{M_{a,\varepsilon}^-(x_1)^{2-p}\lambda_1(m)}, \tag{7.23}$$

$$\frac{(p-1-q)^{p-1}}{(p-1)^p}\left(\int_{x_0}^{b} M_{b,\varepsilon}^-(x)dx\right)^{p-1} \le \frac{1}{\tau} \le \frac{1}{M_{b,\varepsilon}^-(x_0)^{2-p}\lambda_1(m)}. \tag{7.24}$$

Sea $M_\varepsilon := \max\{M_{a,\varepsilon}^-(x_1), M_{b,\varepsilon}^-(x_0)\}$. Construiremos una subsolución estrictamente positiva para (7.1) con $\tau M_\varepsilon^{p-2} m$ en lugar de m. Para $x \in [a, x_1]$ tomamos u_1 como en (7.15) con

$$k := \frac{p-1}{p-1-q} \quad \text{y} \quad \sigma := \frac{1}{k}\left(\frac{\tau}{p-1}\right)^{1/(p-1)}$$

en lugar de (7.16). Nuevamente, esta función u_1 cumple las cuatro propiedades siguientes.

1. $u_1(a) = 0$, $u_1 > 0$ en $(a, x_1]$, u_1 es estrictamente creciente y $u_1(x_1) = ||u_1||_\infty \le 1$.

D. Usando la primer desigualdad en (7.23) se puede ver que $||u_1||_\infty \le 1$.

2. $u_1 \in W^{1,p}((a, x_1))$ con

$$u_1'(x) = \sigma^k k\left(\int_a^x M_{a,\varepsilon}^-(y)dy\right)^{k-1} M_{a,\varepsilon}^-(x).$$

3. $\varphi_p(u_1') \in W^{1,1}_{loc}$. Más aún, $u_1 \in W^{2,1}_{loc}((a, x_1))$ con

$$u_1''(x) = \sigma^k k(k-1)\left(\int_a^x M_{a,\varepsilon}^-(y)dy\right)^{k-2} (M_{a,\varepsilon}^-(x))^2 + \sigma^k k\left(\int_a^x M_{a,\varepsilon}^-(y)dy\right)^{k-1} (m^-(x)+\varepsilon).$$

4. Se cumple

$$-(|u_1'|^{p-2}u_1')' + c|u_1|^{p-2}u_1 \le \tau m u_1^q \quad ppx \text{ en } (a, x_1).$$

D. Tomando l como en la parte (i) obtenemos $l = kq$ y también como antes tendremos $l - 1 + p = k(p-1)$ y $k^{p-1} l \ge \gamma^p ||c||_\infty$. Más aún, recordando que en este caso $p \le 2$ y procediendo como en la parte (i), deducimos que en (a, x_1) vale

$$
\begin{aligned}
-(|u_1'(x)|^{p-2}\, u_1')' &\le -(k\sigma^k)^{p-1}\left(\frac{1}{\gamma^p}\left(\int_a^x M_{a,\varepsilon}^-(y)dy\right)^{l-1+p}\right. \\
&\qquad \left. +(p-1)\left(\int_a^x M_{a,\varepsilon}^-(y)dy\right)^{l} M_{a\varepsilon}(x_1)^{p-2}m^-\right) \\
&\le -(k\sigma^k)^{p-1}\left(\frac{1}{\gamma^p}\left(\int_a^x M_{a,\varepsilon}^-(y)dy\right)^{k(p-1)}\right. \\
&\qquad \left. +(p-1)\left(\int_a^x M_{a,\varepsilon}^-(y)dy\right)^{kq} M_{\varepsilon}(x_1)^{p-2}m^-\right) \\
&\le -||c||_\infty \sigma^{k(p-1)}\left(\int_a^x M_{a,\varepsilon}^-(y)dy\right)^{k(p-1)} \\
&\qquad -\tau M_\varepsilon^{p-2}m^-\sigma^{kq}\left(\int_a^x M_{a,\varepsilon}^-(y)dy\right)^{kq} \\
&\le -cu_1^{p-1} - \tau M_\varepsilon^{p-2} m^- u_1^q \\
&\le -cu_1^{p-1} + \tau M_\varepsilon^{p-2} m u_1^q.
\end{aligned}
$$

Como u_3 puede ser definida análogamente y, teniendo en cuenta la definición de M_ε y la segunda desigualdad en (7.23) y (7.24), u_2 puede ser elegida como en (i) (esto es, como la autofunción principal positiva respecto al peso m en I, normalizada). Procediendo como en (i) se demuestra el teorema. □

Observación 7.9.

(i) Notemos que cuando $m \in C(\Omega)$ la condición $0 \not\equiv m \ge 0$ en I es necesaria para tener una solución no negativa y no trivial de (7.1) (por Principio del Máximo).

(ii) Observemos también que si $p = 2$ entonces (7.10) y (7.11) coinciden con (7.12) y (7.13) y que las condiciones resultantes extienden al Teorema 5.14 (ii).

□

Para $p > 1$ y $q \in (0, p-1)$ fijamos

$$
C_{p,q} := \left(\frac{p}{p-1-q}\right)^{p-1} \frac{(p-1)(q+1)}{p-1-q}. \tag{7.25}
$$

Notemos que para cualquier $p > 1$,

$$
lim_{q \to (p-1)^-} C_{p,q} = \infty.
$$

Asumiremos de aquí en adelante que $m^- \in L^\infty(\Omega)$. En el siguiente teorema supondremos $c \not\equiv 0$. El caso $c = 0$ es considerado en el corolario que se explicitará más abajo.

Teorema 7.10. *Asumamos que $c \not\equiv 0$. Sea $m \in L^{p'}(\Omega)$ con $m^- \in L^\infty(\Omega)$ y supongamos que existen $a \le x_0 < x_1 \le b$ tales que $0 \not\equiv m \ge 0$ en $I := (x_0, x_1)$. Sean γ y $C_{p,q}$ dados por (7.8) y (7.25) respectivamente.*

(i) Asumamos que $p \ge 2$. Si

$$
\frac{||m^-||_{L^\infty(\Omega)}}{||c||_{L^\infty(\Omega)}} sinh^p\left(\left(\frac{||c||_{L^\infty(\Omega)}}{C_{p,q}}\right)^{1/p}\gamma\right) \le \frac{1}{\lambda_1(m, I)}, \tag{7.26}
$$

entonces existe solución de (7.1).

(ii) Asumamos $p \in (1, 2)$. Si

$$
\frac{||m^-||_{L^\infty(\Omega)}}{||c||_{L^\infty(\Omega)}} (e^{(||c||_{L^\infty(\Omega)}/C_{p,q})^{1/p}\gamma} - 1)^p \le \frac{1}{\lambda_1(m, I)}, \tag{7.27}
$$

entonces existe solución de (7.1).

Demostración. Esta demostración sigue las líneas de la prueba del teorema anterior y por lo tanto omitiremos los detalles. Sólo indicaremos brevemente cómo construir u_1 en ambos casos ((i) y (ii)). Supongamos primero que vale (7.26). Sea τ tal que

$$\frac{||m^-||_{L^\infty(\Omega)}}{||c||_{L^\infty(\Omega)}} sinh^p\left(\left(\frac{||c||_{L^\infty(\Omega)}}{C_{p,q}}\right)^{1/p}\gamma\right) \leq \frac{1}{\tau} \leq \frac{1}{\lambda_1(m,I)} \tag{7.28}$$

y para $x \in [a, x_1]$ definamos

$$f(x) := \left(\frac{\tau||m^-||_\infty}{||c||_\infty}\right)^{1/p} sinh\left(\left(\frac{||c||_\infty}{C_{p,q}}\right)^{1/p}(x-a)\right).$$

Es fácil ver que

$$(C_{p,q}^{1/p}f')^2 - (||c||_\infty^{1/p}f)^2 = (\tau||m^-||)^{2/p} \quad \text{en } (a, x_1).$$

Más aún, $f(a) = 0$, f es creciente (en particular, usando (7.28) y el hecho que $x_1 - a \leq \gamma$, vemos que $||f||_\infty \leq 1$) y $f'' \leq 0$ en (a, x_1). Elijamos ahora

$$k := \frac{p}{p-1-q} \quad \text{y} \quad l := (k-1)(p-1). \tag{7.29}$$

Entonces $l - 1 = kq$, $l - 1 + p = k(p-1)$ y $k^{p-1}l = C_{p,q}$. Definamos $u_1 = f^k$. Tomando en cuenta lo mencionado anteriormente y que $p \geq 2$, encontramos que, en (a, x_1),

$$\begin{aligned}
-(|u_1'|^{p-2}u_1')' + cu_1^{p-1} &\leq -k^{p-1}(lf^{l-1}(f')^p \\
&\quad + (p-1)f^l(f')^{p-2}f'') \\
&\quad + ||c||_\infty f^{k(p-1)} \\
&\leq -k^{p-1}lf^{l-1}(f')^p + ||c||_\infty f^{k(p-1)} \\
&= -f^{l-1}(C_{p,q}(f')^p - ||c||_\infty f^p) \\
&\leq -f^{l-1}((C_{p,q}^{1/p}f')^2 - (||c||_\infty^{1/p}f)^2)^{p/2} \\
&= -f^{l-1}\tau||m^-||_\infty \\
&\leq \tau m u_1^q.
\end{aligned} \tag{7.30}$$

Supongamos ahora que vale (7.27). En este caso tomamos τ y f tales que

$$\frac{||m^-||_{L^\infty(\Omega)}}{||c||_{L^\infty(\Omega)}}(e^{(||c||_{L^\infty(\Omega)}/C_{p,q})^{1/p}\gamma} - 1)^p \leq \frac{1}{\tau} \leq \frac{1}{\lambda_1(m,I)}$$

y

$$f(x) := \sigma(e^{\lambda(x-a)} - 1),$$

donde

$$\sigma := \left(\frac{\tau||m^-||_\infty}{||c||_\infty}\right)^{1/p} \quad \text{y} \quad \lambda := \left(\frac{||c||_\infty}{C_{p,q}}\right)^{1/p}.$$

Sean k y l dados por (7.29), y sea $u_1 := f^k$. Razonando como en (7.30) llegamos a

$$\begin{aligned}
-(|u_1'|^{p-2}u_1')' + cu_1^{p-1} &\leq -f^{l-1}((C_{p,q}^{1/p}f')^2 - (||c||_\infty^{1/p}f)^2)^{p/2} \\
&= -f^{l-1}(C_{p,q}(\sigma\lambda)^p e^{p\lambda(x-a)} - ||c||_\infty\sigma^p(e^{\lambda(x-a)} - 1)^p) \\
&\leq -f^{l-1}||c||_\infty\sigma^p \\
&= -f^{l-1}\tau||m^-||_\infty \leq \tau m u_1^q.
\end{aligned}$$

□

Observación 7.11. Siguiendo la demostración anterior se puede ver que en realidad (ii) vale para cualquier $p > 1$. Sin embargo, la desigualdad (7.26) es mejor que (7.27).

Corolario 7.12. *Sea m como en el teorema anterior y supongamos que $c \equiv 0$. Si*

$$\frac{||m^-||_{L^\infty(\Omega)}\gamma^p}{C_{p,q}} \leq \frac{1}{\lambda_1(m,I)}, \tag{7.31}$$

entonces existe una solución de (7.1).

Demostración. Es suficiente notar que el lado izquierdo de (7.26) o (7.27) tiende al lado izquierdo de (7.31) cuando $||c||_\infty$ tiende a cero. Alternativamente, uno puede proceder como en la demostración del teorema tomando (para $p > 1$) $f(x) := (x - a)/\gamma$. □

Observación 7.13. Supongamos que c cambie de signo en Ω. Una inspección de las pruebas de los teoremas muestra que uno puede aún proceder de la misma forma que antes, reemplazando c por c^+ para construir las funciones u_1 y u_3. Más aún, si el autovalor principal positivo $\lambda_1(m, I)$ existe (para condiciones suficientes y necesarias respecto a esto ver [CQ, Sección 2]) y si el problema (3.14) con m^+ en lugar de h admite una solución no negativa, entonces todos los resultados para el caso $c \geq 0$ pueden ser extendidos a c cambiando de signo en Ω.

Construya su propia subsolución

Como el lector habrá notado en las demostraciones de los teoremas anteriores hay una estructura que se repite a la hora de hallar condiciones suficientes para la existencia de soluciones de (7.1). La clave, en su mayor parte, está en encontrar subsoluciones. Veremos aquí cómo es el procedimiento básico que utilizamos para tal tarea.

Lo que deseamos en este apartado es que el lector pueda contruir su propia subsolución. Por ende, evitaremos cuestiones técnicas como ser en qué espacio viven nuestras soluciones o si se puede aplicar integración por partes. Asumamos en una primera instancia, que todas las reglas usuales del cálculo son aplicables y que nuestras funciones son super diferenciables.

Empecemos nuestra búsqueda. Primero, tomemos un intervalo $(x_0, x_1) \subset \Omega$ tal que $0 \not\equiv m \geq 0$ y partamos el dominio Ω en tres subintervalos no disjuntos $I_1 := (a, x_1)$, $I_2 := (x_0, x_1)$ e $I_3 := (x_0, b)$.

La idea es hallar funciones positivas $u_i : I_i \to \mathbb{R}$ que cumplan la desigualdad $Lu_i \leq \tau m u_i^q$ en sus intervalos de definición y que se "peguen bien". Por lo pronto, pegarse bien significará que se crucen en dos puntos $\underline{x}_0$ y $\overline{x}_1$ de forma que podamos definir una función por partes u como en (7.22) y que, en los puntos de cruce, la derivada de la función a la izquierda sea menor que la derivada de la función a la derecha. Estas condiciones sirven para que la función u sea una subsolución (ver Lema 7.5). Para garantizar esto pedimos ciertas propiedades sobre las u_i como las enunciadas bajo el ítem 1 en las demostraciones previas. Es decir,

- $u_1(a) = 0$, $u_1 > 0$ en $(a, x_1]$, u_1 es estrictamente creciente y $u_1(x_1) = ||u_1||_\infty \leq 1$,
- $u_2(x_0) = 0$, $u_2(x_1) = 0$, $u_2 > 0$ en (x_0, x_1) y $||u_2||_\infty = 1$,
- $u_3(b) = 0$, $u_3 > 0$ en $[x_0, b)$, u_3 es estrictamente decreciente y $||u_3||_\infty \leq 1$.

Veamos ahora cómo hallar las funciones en cada caso particular. Comencemos por el intervalo I_2. Allí tomamos la autofunción con $||u_2||_\infty = 1$ del problema

$$\begin{cases} Lu_2 = -\left(|u_2'|^{p-2}\, u_2'\right)' + c(x)u_2^{p-1} = m\lambda_1(m, I_2)u_2^{p-1} & \text{en } I_2 \\ u_2 = 0 & \text{en } \partial I_2. \end{cases}$$

Entonces vale $Lu_2 = m\lambda_1(m, I)u_2^{p-1} \leq \tau m u_2^q$ *ppx* en I_2 siempre que exista τ cumpliendo

$$\lambda_1(m, I_2) \leq \tau. \tag{7.32}$$

Esta elección de u_2 es la razón por la cual trabajamos con τm en lugar de m y pedimos $||u_2||_\infty = 1$ y $0 \leq m \not\equiv 0$ en (x_0, x_1). Las condiciones sobre la norma de u_2 y el signo de m garantizan que $m u_2^{p-1} < m u_2^q$ ya que $p - 1 > q$. Pedir τm surge de que sólo logramos $Lu_2 \leq \lambda_1 m u_2^q$ y no podemos a priori deshacernos del λ_1.

En el intervalo I_1, proponemos una función del estilo

$$u_1 := f^k \qquad \text{(Con } f \text{ y } k \text{ a determinar).}$$

Queremos que

$$Lf^k = -\left(|(f^k)'|^{p-2}(f^k)'\right)' + cf^{k(p-1)} \leq -\tau m^- f^{kq} \leq \tau m f^{kq}.$$

Desarrollando esta expresión y asumiendo $f,\ f' \geq 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} -(p-1)k^{p-1}&\left[(k-1)f^{kp-p-k}(f')^p + f^{(k-1)(p-1)}(f')^{p-2}f''\right] \\ &+cf^{k(p-1)} + \tau m^- f^{kq} \leq 0. \end{aligned} \tag{7.33}$$

Notemos que el lado izquierdo de esta expresión consta de 4 términos, algunos de los cuales podemos saber su signo de antemano y otros no. Esto nos permite crear sistemas de ecuaciones "asociando" y/o "descartando" términos. Por ejemplo, podríamos pedir

$$\begin{cases} -(p-1)k^{p-1}(k-1)f^{kp-p-k}(f')^p + cf^{k(p-1)} \leq 0 \\ -(p-1)k^{p-1}f^{(k-1)(p-1)}(f')^{p-2}f'' + \tau m^- f^{kq} \leq 0. \end{cases}$$

Simplificando un poco queda

$$\begin{cases} -(p-1)k^{p-1}(k-1)(f')^p + cf^p \leq 0 \\ -(p-1)k^{p-1}(f')^{p-2}f'' + \tau m^- f^{kq-kp+k+p-1} \leq 0. \end{cases}$$

Eligiendo adecuadamente k podemos simplificar aún más la expresión, sobre todo el exponente $kq-kp+k+p-1$ en la segunda ecuación. Por ejemplo, tomando $kq-kp+k+p-1=0$, $k=(p-1)/(p-1-q)$ nos queda un sistema "fácil de resolver". Una solución de la segunda ecuación, con condición inicial $f(a)=0$ y $f'(a)=\varepsilon^{\frac{1}{p-1}}$ (para garantizar $u_1(a)=0$), podría ser

$$f(x) = \int_a^x \left(\int_a^y \frac{\tau m^-(x)}{k^{p-1}}dx + \varepsilon\right)^{\frac{1}{p-1}} dy \quad \text{(Sale cambiando el } \leq \text{ por un } = \text{ y resolviendo).} \tag{7.34}$$

Notemos que efectivamente $f'>0$ y más aún $f''>0$. Luego podemos deducir $f(x) \leq (x-a)f'(x)$. Utilizando esto en la primer ecuación nos queda que debemos pedir

$$c(x) \leq \frac{1}{(x-a)^p}\frac{q(p-1)^p}{(p-1-q)^p} \quad \forall x \in (a, x_1). \tag{7.35}$$

Por último, sólo hace falta recordar que necesitamos que las funciones propuestas se crucen. Para ello tomábamos $||u_1||_\infty \leq 1$, lo cual vale siempre que exista τ que cumpla

$$\int_a^{x_1}\left(\int_a^y \frac{\tau m^-(x)}{k^{p-1}}dx + \varepsilon\right)^{\frac{1}{p-1}} dy \leq 1.$$

Como ε puede ser tomado tan pequeño como se quiera, lo anterior es equivalente a que

$$\int_a^{x_1}\left(\int_a^y \frac{\tau m^-(x)}{k^{p-1}}dx\right)^{\frac{1}{p-1}} dy < 1.$$

Teniendo en cuenta (7.32), notamos que para hallar simultaneamente u_1 y u_2 debemos pedir que exista un τ cumpliendo

$$\int_a^{x_1}\left(\int_a^y \frac{m^-(x)}{k^{p-1}}dx\right)^{\frac{1}{p-1}} dy < \frac{1}{\tau^{\frac{1}{p-1}}} < \frac{1}{\lambda_1^{\frac{1}{p-1}}}. \tag{7.36}$$

Esto es lo que solemos poner como hipótesis en nuestros teoremas. El proceso para hallar u_3 es análogo al de u_1 y agregaría dos condiciones del estilo (7.35) y (7.36) cambiando básicamente a por x_0 y x_1 por b. Obviamente, una vez que hemos hallado todas funciones u_i, habría que garantizar que se cumplen todas las reglas del cálculo necesarias para que u sea subsolución. Es por ello que se pide $u_i \in W^{1,p}(I_i) \cap W^{2,1}_{loc}(I_i)$ (ver ítems 2 y 3 en la demostración del Teorema 7.8 para tener una idea de como se comprueba este hecho). De verificarse esto último, obtenemos un nuevo teorema de la forma

Teorema 7.14. *Sea $m \in L^{p'}(\Omega)$ y supongamos que existen $a \leq x_0 < x_1 \leq b$ con $0 \not\equiv m \geq 0$ en $I := (x_0, x_1)$. Si se cumplen simultaneamente*

$$c(x) \leq \frac{1}{(x-a)^p} \frac{q(p-1)^p}{(p-1-q)^p} \quad \forall x \in (a, x_1),$$
$$c(x) \leq \frac{1}{(b-x)^p} \frac{q(p-1)^p}{(p-1-q)^p} \quad \forall x \in (x_0, b) \quad y$$
$$\max \left\{ \int_a^{x_1} \left(\int_a^y m^-(x)dx \right)^{\frac{1}{p-1}} dy, \int_{x_0}^b \left(\int_y^b m^-(x)dx \right)^{\frac{1}{p-1}} dy \right\} < \frac{p-1}{(p-1-q)} \cdot \frac{1}{(\lambda_1(m,I))^{\frac{1}{p-1}}},$$

entonces existe solución de (7.1).

Notemos finalmente que para hallar la subsolución dada por la f definida en (7.34) hemos elegido asociar los términos de la expresión (7.33) en una forma particular y hemos fijado un k a voluntad. Modificando la forma de asociar los términos y tomando distintos valores para k podemos hallar subsoluciones distintas que darán condiciones suficientes distintas. A su vez, también podría intentarse un procedimiento similar tomando $u_1 = g \circ f$, con distintas opciones para g y f a determinar. Obviamente los sistemas que queden dependerán de la elección de g. En nuestro caso, tomando $g(x) = x^k$, quedaban ecuaciones, dentro de todo, fáciles de resolver. Con lo dicho hasta acá, el lector ya está capacitado para armar su propia subsolución con teorema incluido. Diviértase.

Capítulo 8

Problema singular para ecuaciones con el p-Laplaciano

En este capítulo trabajaremos con problemas singulares de la forma

$$\begin{cases} -\Delta_p u = m u^{-\gamma} & \text{en } \Omega \\ u > 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{8.1}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto y acotado, $\gamma \in (0,1)$ y $m \in L^q(\Omega)$ (con q a determinar) es una función que cambia de signo en Ω. La noción de solución de este tipo de problemas es ligeramente diferente de las que hemos utilizado hasta el momento pues exige distintas condiciones de regularidad.

Definición 8.1. Por solución de (8.1) nos referimos a una $u \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $u > 0$ en Ω, $u = 0$ en $\partial\Omega$, que cumple la ecuación en el sentido de las distribuciones, o sea,

$$\int_\Omega |u'|^{p-1} u' \phi' = \int_\Omega m u^{-\gamma} \phi \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{8.2}$$

Este tipo de problemas aparecen en aplicaciones como teoría de fluidos no newtonianos o flujo de un gas en un medio poroso (ver por ejemplo [RST, GR]). En el caso $p = 2$ y para m no negativo han sido estudiados ampliamente (citamos entre otros a [WG, LOA, ALO1, ALO2, LZ, MHC, SG]). También para el caso $p = 2$ pero con m que cambia de signo, estos problemas han sido considerados recientemente en [GK3]. Por último, resultados para un p general y $m > 0$ en Ω pueden encontrarse en [LS, Secciones 5 y 6].

Nuestro objetivo en este capítulo es estudiar la existencia y no existencia de soluciones de (8.1) para $1 < p < \infty$ cuando no se piden restricciones sobre el signo de m en Ω. Notamos en particular que algunos de los resultados de esta tesis mejoran los encontrados en [GK3] para el caso del Laplaciano.

Trabajaremos principalmente con el método de sub y supersoluciones para problemas singulares (ver Teorema 4.10). Como ha sucedido en los problemas presentados en capítulos anteriores, la mayor dificultad será encontrar subsoluciones estrictamente positivas. Para hallarlas utilizaremos el Teorema de punto fijo de Schauder aplicado a ciertos problemas relacionados. Dividiremos el capítulo en dos secciones. En la sección sobre el problema unidimensional los resultados principales son el Teorema 8.4, Teorema 8.8 y Teorema 8.10. El primero da una condición suficiente que asegura la existencia de soluciones de (8.1) siempre que $\gamma > 0$ sea suficientemente pequeño. El segundo es una condición suficiente donde se determina explícitamente si dado un γ particular existe solución de la ecuación en función de otros parámetros. Finalmente, el Teorema 8.10 da dos condiciones necesarias. Cabe mencionar que la primera de las condiciones suficientes (Teorema 8.4) resulta ser "casi" necesaria, ver Observación 8.11.

Finalmente, en la sección sobre problemas en mayores dimensiones los resultados principales son el Teorema 8.15 y el Teorema 8.16 . Respectivamente, una condición suficiente y una necesaria. Estos resultados son los análogos al Teorema 8.4 y Teorema 8.10 de la sección unidimensional. Sus demostraciones, como podrán observar, son adaptaciones de sus versiones en dimensión uno, pero requieren hipótesis distintas sobre la función m para garantizar las mismas condiciones de regularidad. Por completitud y para que se observen los cambios que deben realizarse al pasar de una a mayores dimensiones, escribimos las demostraciones en ambos casos.

8.1. Resultados en una dimensión

Durante toda esta sección consideraremos $\Omega := (a, b)$ un intervalo abierto y acotado de $\mathbb{R}$ y se entenderá el problema dado en (8.1) como el caso unidimensional. Comenzamos dando un lema que garantiza que siempre existe supersolución arbitrariamente grande de tal problema.

Lema 8.2. *(Existencia de supersolución arbitrariamente grande) Sea $m \in L^q(\Omega)$, con $q > 1$ y $m^+ \not\equiv 0$. Entonces, el problema (8.1) tiene una supersolución arbitrariamente grande. Es decir, dada cualquier subsolución $v \in C^1(\overline{\Omega})$ es posible encontrar una supersolución $w \geq v$ en $\overline{\Omega}$.*

Demostración. Sea $\psi := \mathcal{S}(m^+)$ y elijamos $\beta \in (0, 1)$ y $\sigma > 0$ satisfaciendo

$$\beta := \frac{p-1}{p-1+\gamma}, \quad \sigma := \beta^{\frac{-(p-1)}{1+\gamma}}. \tag{8.3}$$

Notemos que, por el Teorema 3.2 y regla de la cadena, tenemos

$$\psi \in C^1(\overline{\Omega}),\ |\psi'|^{p-2}\psi' \in W^{1,1}(\Omega), \tag{8.4}$$

$$-\Delta_p \psi \equiv m^+ \quad ppx \text{ en } \Omega, \tag{8.5}$$

$$\psi^\beta \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \text{ y}$$

$$\psi^\beta = 0 \text{ en } \partial\Omega.$$

Más aún, por el Principio del Máximo Fuerte (Teorema 3.15), se cumple que $\psi, \psi^\beta > 0$ en Ω. Calcularemos ahora cuanto vale $-\Delta_p(\psi^\beta)$, para ello primero vemos

$$\begin{aligned} (\psi^\beta)' &= \beta\psi^{\beta-1}\psi', \\ \left|(\psi^\beta)'\right|^{p-2}(\psi^\beta)' &= \beta^{p-2}\psi^{(\beta-1)(p-1)}\left|\psi'\right|^{p-2}\beta\psi^{(\beta-1)}\psi' \\ &= \beta^{(p-1)}\psi^{(\beta-1)(p-1)}\left|\psi'\right|^{p-2}\psi' \quad . \end{aligned}$$

Si bien las derivadas anteriores se entienden en sentido débil y clásico, las próximas que calcularemos se entenderán en sentido débil. Ahora, por (8.4) y tomando en cuenta que, por regla de la cadena, $\psi^{(\beta-1)(p-2)} \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$, aplicando la Observación 1.20, calculamos

$$\begin{aligned} -\Delta_p(\psi^\beta) &= -(\left|(\psi^\beta)'\right|^{p-2}(\psi^\beta)')' \\ &= -\left(\beta^{(p-1)}\psi^{(\beta-1)(p-1)}\left|\psi'\right|^{p-2}\psi'\right)' \\ &= -\beta^{(p-1)}\left(\psi^{(\beta-1)(p-1)}\right)'\left|\psi'\right|^{p-2}\psi' \\ &\quad -\beta^{(p-1)}\psi^{(\beta-1)(p-1)}(\left|\psi'\right|^{p-2}\psi')' \\ &= -\beta^{(p-1)}(\beta-1)(p-1)\psi^{(\beta-1)(p-1)-1}\left|\psi'\right|^{p-2}(\psi')^2 \\ &\quad -\beta^{(p-1)}\psi^{(\beta-1)(p-1)}(\left|\psi'\right|^{p-2}\psi')'. \end{aligned}$$

Usando lo anterior, (8.3) y (8.5) obtenemos, en el sentido de las distribuciones,

$$\begin{aligned} -\Delta_p(\psi^\beta) &\geq \beta^{(p-1)}\psi^{-\gamma\beta}m^+ \\ &\geq \sigma^{-1-\gamma}\psi^{-\gamma\beta}, \end{aligned}$$

entonces

$$-\Delta_p(\sigma\psi^\beta) \geq (\sigma\psi^\beta)^{-\gamma}m.$$

Luego, $\sigma\psi^\beta$ es supersolución en el sentido de las distribuciones de nuestro problema. Finalmente, utilizando el Lema de Hopf para ψ, sabemos que la derivada es no nula en la frontera. Esto nos dice que la derivada de ψ^β es infinita y por lo tanto dada cualquier $v \in C^1(\overline{\Omega})$, eligiendo σ suficientemente grande tenemos que $v \leq \sigma\psi^\beta$. $\square$

Observación 8.3. Notar que a diferencia del caso sublineal, aquí pedimos que $v \in C^1(\overline{\Omega})$ y no $C(\overline{\Omega})$. Esto se debe a que para problemas singulares utilizaremos el Teorema 4.10 (Sub y Super para problemas singulares), que exige a la supersolución ser exactamente cero en la frontera del dominio. Esto no nos permite hallar supersoluciones que superen a la norma infinito de la subsolución en todo $\overline{\Omega}$. Pedir, en cambio, $v \in C^1(\overline{\Omega})$ nos dice que la derivada normal será acotada en la frontera. Usando el Lema de Hopf se vio que con eso es suficiente para poder hallar supersoluciones arbitrariamente grandes.

El siguiente teorema nos dará condiciones suficientes para que exista solución de (8.1). Para enunciarlo precisamos antes de dos definiciones.

Denotaremos por δ_Ω la función distancia al borde del dominio Ω, es decir, $\delta_\Omega(x) := dist(x, \partial\Omega)$. En particular, ya que $\Omega = (a, b)$ es un intervalo abierto y acotado de $\mathbb{R}$, tenemos que $\delta_\Omega(x) := \min\{x - a, b - x\}$.

Además, denotaremos por

$$P^o := \text{interior del cono positivo en } C_0^1(\overline{\Omega}), \tag{8.6}$$

esto es, las funciones $v \in C^1(\overline{\Omega})$ con $v(a) = v(b) = 0$, $v > 0$ en Ω, $v'(a) > 0$ y $v'(b) < 0$.

Una pequeña relación entre ambas definiciones es la siguiente. Notemos que, dada una función f en el interior del cono positivo, existen $0 < k_1 < k_2$ constantes tales que $k_1\delta_\Omega < f < k_2\delta_\Omega$. El recíproco también es cierto siempre que $f \in C^1(\overline{\Omega})$.

Teorema 8.4. *Sean Ω un intervalo abierto y acotado de $\mathbb{R}$, $m \in L^q(\Omega)$, con $1 < q \leq \infty$, y $\gamma > 0$. Supongamos que se cumple*

$$\mathcal{S}(m) \in P^o, \text{ donde } \mathcal{S} \text{ es el inverso del } p\text{-Laplaciano},$$

entonces existe $\gamma_0 > 0$ tal que el problema (8.1) tiene solución $u \in P^o$ para todo $\gamma \in (0, \gamma_0]$.

Observación 8.5. (Esquema de la demostración)

Probaremos que existe una solución por medio del Teorema de Sub y Supersoluciones (Teorema 4.10) y luego veremos la regularidad de la misma usando el Teorema 3.2.

Para la primera parte, debido al Lema 8.2, ya contamos con una supersolución arbitrariamente grande de nuestro problema. Entonces, sólo hace falta hallar una subsolución.

Para determinar una sobsolución de (8.1) aplicaremos el Teorema de punto fijo de Schauder. Si, para algún γ suficientemente pequeño, hallamos una solución del problema

$$\begin{cases} -\Delta_p v = m^+ - m^- v^{-\gamma} & \text{en } \Omega \\ v > 0 & \text{en } \Omega \\ v = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

que tenga norma infinito menor que 1, entonces habremos encontrado una subsolución del problema original. Por lo tanto, querremos (para γ chico) un punto fijo del operador $\mathcal{T}(v) := \mathcal{S}(m^+ - m^- v^{-\gamma})$. Necesitamos entonces garantizar las hipótesis del Teorema de Schauder, esto es, dar un conjunto $\mathcal{C}$ que sea convexo, cerrado y acotado, tal que $\mathcal{T}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$ (i.e. que $\mathcal{C}$ sea $\mathcal{T}-$invariante) y que el operador $\mathcal{T} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ sea continuo y compacto. Propondemos

$$\mathcal{C} = \{v \in C(\overline{\Omega}) : f_1 \leq v \leq f_2\}$$

con funciones f_1 y f_2 a determinar. Como queremos que $\mathcal{C}$ sea $\mathcal{T}-$invariante miramos $\mathcal{T}(C(\overline{\Omega}))$. Por Principio de Comparación (Lema 3.14) se puede ver que $\mathcal{T}$ es creciente. Entonces, como $\mathcal{T}(v) = \mathcal{S}(m^+ - m^- v^{-\gamma}) \leq \mathcal{S}(m^+)$ para toda v (y para todo γ), tomaremos $f_2 = \mathcal{S}(m^+)$. La cota por abajo será más difícil de hallar y para darla se necesitará asumir γ suficientemente chico. Anticipamos que f_1 estará dada por la función distancia al borde δ_Ω multiplicada por una constante. Esto se debe a que siempre existe un número $\varepsilon > 0$ tal que

$$\varepsilon\delta_\Omega \leq \mathcal{S}(m^+)$$

por Lema de Hopf para el p-Laplaciano (Lema 3.16). Luego bastará ver que, si γ es suficientemente pequeño, se tiene

$$\varepsilon\delta_\Omega \leq \mathcal{S}(m^+ - m^-(\varepsilon\delta_\Omega)^{-\gamma}).$$

Podremos entonces tomar

$$\mathcal{C} = \{v \in C(\overline{\Omega}) : \varepsilon\delta_\Omega \leq v \leq \mathcal{S}(m^+)\}$$

ya que, como $\mathcal{T}$ es creciente, se verifica

$$\varepsilon\delta_\Omega \leq \mathcal{T}(\varepsilon\delta_\Omega) \leq \mathcal{T}(v) \leq \mathcal{T}(\mathcal{S}(m^+)) \leq \mathcal{S}(m^+) \qquad \forall v \in \mathcal{C},$$

quedando así $\mathcal{C}$ invariante por el operador $\mathcal{T}$.

Por último, aclaramos que, para garantizar que siempre podemos conseguir una subsolución cuya norma infinito sea menor que 1, usaremos la homogeneidad del operador p-Laplaciano.

Demostración. Notemos que el problema es homogéneo en el sentido que tiene solución para m si y sólo si también lo hace para τm con $\tau > 0$. En efecto, una función u es solución de (8.1) si y sólo si $\tau^{\frac{1}{p-1+\gamma}} u$ es solución de (8.1) con τm en lugar de m, donde τ es una constante. Podemos trabajar entonces con τm en lugar de m y asumir $\mathcal{S}(\tau m^+) = \tau^{\frac{1}{p-1}}\mathcal{S}(m^+) \leq 1$ eligiendo τ suficientemente pequeño. Por comodidad, seguiremos denotando m a τm y asumiremos $\mathcal{S}(m^+) \leq 1$.

Para hallar la subsolución procedemos en varios pasos que iremos demostrando en caso de ser necesario. Fijamos q_0 tal que $1 < q_0 < q$.

1. Como $\mathcal{S}(m) \in P^o$ podemos fijar $0 < \varepsilon < 1$ tal que $\varepsilon\delta_\Omega < 1$ y $S(m) > 2\varepsilon\delta_\Omega$ en Ω.

2. Se cumple que $||m - (m^+ - (\varepsilon\delta_\Omega)^{-\gamma} m^-)||_{q_0} \to 0$ si $\gamma \to 0$.

D. Definamos

$$g_\gamma := m - \left(m^+ - (\varepsilon\delta_\Omega)^{-\gamma} m^-\right) = m^- \left((\varepsilon\delta_\Omega)^{-\gamma} - 1\right).$$

Probemos que $g_\gamma \to 0$ en $||\cdot||_{q_0}$, cuando $\gamma \to 0$. Para esto usaremos el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue.
Por un lado, $|(\varepsilon\delta_\Omega)^{-\gamma} - 1| \to 0$ para todo $x \in \Omega$, cuando $\gamma \to 0$. Por lo tanto también $|g_\gamma|^{q_0} \to 0$ tiende a 0 *ppx* en Ω.
Por otro lado, se puede ver que dado $1 \leq r < \infty$, existe γ_0 suficientemente pequeño tal que $(\delta_\Omega)^{-\gamma} \in L^r(\Omega)$ para todo $\gamma < \gamma_0$. En nuestro caso considerando $r = \frac{q_0 q}{q - q_0}$, resulta que $|g_\gamma|^{q_0} \in L^1(\Omega)$ a partir de un γ_0. En efecto, usando desigualdad de Hölder con $\frac{q}{q_0}$ y $(\frac{q}{q_0})' = \frac{q}{q-q_0}$, se tiene

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left|m^-((\varepsilon\delta_\Omega)^{-\gamma} - 1)\right|^{q_0} &\leq \left(\int_\Omega \left|m^-\right|^{\frac{q_0 q}{q_0}}\right)^{\frac{q_0}{q}} \left(\int_\Omega \left|(\varepsilon\delta_\Omega)^{-\gamma} - 1\right|^{\frac{q_0 q}{q-q_0}}\right)^{\frac{q-q_0}{q}} \\ &= \left(||m^-||_q ||(\varepsilon\delta_\Omega)^{-\gamma} - 1||_{\frac{q q_0}{q-q_0}}\right)^{q_0}.\end{aligned}$$

(Notar que si $q = \infty$, entonces, como Ω es acotado, m^- pertenece a $L^r(\Omega)$ para todo $r \geq 1$ y se puede usar la prueba anterior.)
Como se cumplen las hipótesis del Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue para $|g_\gamma|^{q_0}$, queda probada esta parte.

3. Existe γ_0 tal que, para todo $\gamma \in (0, \gamma_0]$, se verifica $m^-(\varepsilon\delta_\Omega)^{-\gamma} \in L^{q_0}(\Omega)$ y $\mathcal{S}(m^+ - m^-(\varepsilon\delta_\Omega)^{-\gamma}) \geq \varepsilon\delta_\Omega$.

D. Como $m \in L^q(\Omega)$ (por hipótesis), se cumple que

$$m^- \in L^q(\Omega) \subset L^{q_0}(\Omega). \tag{8.7}$$

Además, por 2, existe γ_0 tal que, si $\gamma < \gamma_0$, $||g_\gamma||_{q_0} < \varepsilon$ y por lo tanto

$$g_\gamma \in L^{q_0}(\Omega). \tag{8.8}$$

Usando (8.7) y (8.8) se desprende que $m^-(\varepsilon\delta_\Omega)^{-\gamma} = g_\gamma + m^- \in L^{q_0}(\Omega))$ si $\gamma < \gamma_0$.
Para ver que $\mathcal{S}(m^+ - m^-(\varepsilon\delta_\Omega)^{-\gamma}) \geq \varepsilon\delta_\Omega$ notemos que
a) $m^+ - m^-(\varepsilon\delta_\Omega)^{-\gamma} \to m$ en $L^{q_0}(\Omega)$. (Por el punto 2.)
b) $\mathcal{S} : L^{q_0}(\Omega) \to C^1(\overline{\Omega})$ es continuo. (Teorema 3.5)
c) $\mathcal{S}(m^+ - m^-(\varepsilon\delta_\Omega)^{-\gamma}) \to \mathcal{S}(m)$ en norma $C^1(\overline{\Omega})$, cuando $\gamma \to 0$. (Por a) y b))
d) Como $\mathcal{S}(m) > 2\varepsilon\delta_\Omega$, se tiene que $\mathcal{S}(m^+ - m^-(\varepsilon\delta_\Omega)^{-\gamma}) > \varepsilon\delta_\Omega$ para γ suficientemente pequeño. (Por 1 y c))

4. Tomemos $\gamma \in (0, \gamma_0]$. Sean

$$\mathcal{C} := \{v \in C(\overline{\Omega}) : \varepsilon\delta_\Omega \leq v \leq \mathcal{S}(m^+) \text{ en } \Omega\} \text{ y}$$
$$u := \mathcal{T}(v) := \mathcal{S}(m^+ - m^- v^{-\gamma}).$$

Entonces,

$$\varepsilon\delta_\Omega \leq \mathcal{S}(m^+ - m^-(\varepsilon\delta_\Omega)^{-\gamma}) \leq u = \mathcal{S}(m^+ - m^- v^{-\gamma}) \leq \mathcal{S}(m^+). \tag{8.9}$$

D. La primera desigualdad sale del punto 3. Para la segunda y tercera desigualdad notemos que,

$$m^+ - m^-(\varepsilon\delta_\Omega)^{-\gamma} \leq m^+ - m^- v^{-\gamma} \leq m^+ \qquad \forall v \in \mathcal{C},$$

entonces, por Principio de Comparación (Proposición 3.14),

$$\mathcal{S}(m^+ - m^-(\varepsilon\delta_\Omega)^{-\gamma}) \leq \mathcal{S}(m^+ - m^- v^{-\gamma}) \leq \mathcal{S}(m^+) \qquad \forall v \in \mathcal{C}.$$

5. La aplicación $v \mapsto m^+ - m^- v^{-\gamma}$ es continua de $\mathcal{C}$ en $L^{q_0}(\Omega)$.

D. Obviamos esta demostración ya que es muy similar a la realizada en el punto 2. La diferencia es que ahora debemos probar que $||m^- (v^{-\gamma} - w^{-\gamma})||_{q_0} \to 0$ si $v \to w$ uniformemente en $\overline{\Omega}$ para $v, w \in \mathcal{C}$.

6. El operador $\mathcal{T}$ definido en el punto 4 cumple $\mathcal{T}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$. Además, $\mathcal{T} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es compacto.

D. $\mathcal{T}$ es la composición de la aplicación definida en el punto 5 y el inverso del p-Laplaciano. La primera es continua y el segundo es compacto de $L^{q_0}(\Omega) \to C(\overline{\Omega})$ (Teorema 3.5). Entonces, $\mathcal{T} : \mathcal{C} \to C(\overline{\Omega})$ es compacto. Para ver que $\mathcal{T}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$ sólo falta usar la desigualdad (8.9). Finalmente, es fácil ver que $\mathcal{C}$ es cerrado en $C(\overline{\Omega})$ y por lo tanto se concluye que $\mathcal{T} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es compacto. Notar que $\mathcal{T}(\mathcal{C}) \subset C(\overline{\Omega})$ por la misma demostración que la compacidad.

7. Existe solución $v \in C^1(\overline{\Omega})$, en sentido de las distribuciones, de

$$\begin{cases} -\Delta_p v = m^+ - m^- v^{-\gamma} & \text{en } \Omega \\ v = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

D. Schauder. $\mathcal{T} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es compacto y es fácil ver que $\mathcal{C}$ cumple las hipótesis del Teorema de Schauder (ver Teorema 4.11). Entonces, existe un punto fijo del operador. Es decir, existe $v \in \mathcal{C}$ tal que $v = \mathcal{S}(m^+ - m^- v^{-\gamma})$. Además, por el punto 5, $m^+ - m^- v^{-\gamma} \in L^{q_0}(\Omega)$. Usando la regularidad del inverso del p-Laplaciano (Teorema 3.2), se obtiene que $v = \mathcal{S}(m^+ - m^- v^{-\gamma}) \in C^1(\overline{\Omega})$.

8. La función v hallada en el punto anterior es subsolución en el sentido de las distribuciones de nuestro problema.

D. Por definición del conjunto $\mathcal{C}$ y lo dicho al principio de esta demostración, $v \leq \mathcal{S}(m^+) \leq 1$. Entonces,

$$m^+ - m^- v^{-\gamma} \leq (m^+ - m^-) v^{-\gamma}.$$

Usando el punto 7 tenemos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |v'|^{p-2} v'\phi' dx &\leq \int_\Omega (m^+ - m^-) v^{-\gamma} \phi dx \\ &= \int_\Omega m v^{-\gamma} \phi dx \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega) \end{aligned}$$

y esto es la definición exacta de subsolución en el sentido de las distribuciones.

Para finalizar la demostración del Teorema sólo falta un paso más.

Aff. Existe solución $u \in C^1(\overline{\Omega})$ de (8.1) para γ suficientemente pequeño.

D. Sabemos que existe supersolución arbitrariamente grande de nuestro problema por Lema 8.13. Por el punto 8 existe subsolución, luego podemos aplicar el Teorema de Sub y Supersoluciones (ver Teorema 4.10). Entonces, obtendríamos una solución $u \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ con $u \geq \varepsilon\delta_\Omega$ en Ω.
Usando esto y eligiendo γ_0 suficientemente pequeño podemos probar que $m^+u^{-\gamma} \in L^{q_0}(\Omega)$, con $1 < q_0 < q$ para todo $\gamma \in (0, \gamma_0]$. En efecto, aplicando la desigualdad de Hölder de forma similar a la prueba de la parte 2, se tiene

$$\int_\Omega (m^+u^{-\gamma})^{q_0} \leq (||m^+||_q)^{q_0} \left(\int_\Omega u^{-\gamma \frac{q_0 q}{q-q_0}} \right)^{\frac{q-q_0}{q}} < \infty \qquad \text{si } \gamma \frac{q_0 q}{q-q_0} < 1.$$

Ahora, como $m^-u^{-\gamma} \in L^{q_0}(\Omega)$ (ver punto 5 e hipótesis sobre m), tenemos que $mu^{-\gamma} \in L^{q_0}(\Omega)$, con $1 < q_0 < q$. Por Teorema 3.2, se ve que $u = \mathcal{S}(mu^{-\gamma}) \in C^1(\overline{\Omega})$ como queríamos.

□

Se podría considerar que el teorema anterior es, en cierto sentido "cualitativo", ya que, si bien da condiciones suficientes, deja varios parámetros de las hipótesis no "cuantificados". Por ejemplo habla de γ suficientemente pequeño. En lo que sigue, trataremos de dar condiciones exactas sobre dichos parámetros. Es decir, daremos una fórmula que nos dirá cuándo γ califica como "suficientemente pequeño". La idea básica es la misma que en el teorema anterior, pero esta vez definimos explícitamente el conjunto $\mathcal{C}$ tomando un ε fijo. Como el lector habrá notado, el operador solución o inverso del p-Laplaciano, denotado $\mathcal{S}$, ha tenido un rol fundamental en la demostración del teorema anterior. Es por ello que antes del próximo teorema daremos un lema, que nos será de utilidad, donde encontramos estimaciones a priori de las soluciones $S(h)$ del problema quasilineal asociado al p-Laplaciano.

Lema 8.6. *Sean $1 < p < \infty$ y $h \in L^q(\Omega)$ con $q > 1$.*

(i) *(Cota por arriba) Si $h \geq 0$, entonces en $\overline{\Omega}$ se cumple que*

$$\mathcal{S}(h) \leq \left(\int_a^b h(t)\ dt \right)^{\frac{1}{p-1}} \delta_\Omega. \tag{8.10}$$

(ii) *(Cota por abajo) Sea $I = (x_0, x_1) \subset \Omega$ y tomemos $x_I = \frac{x_0+x_1}{2}$. Si*

$$\inf_I(h) > \lambda_1(I) \max\{(x_I - a)^{p-1} \int_a^{x_0} h^-(t)\ dt, (b - x_I)^{p-1} \int_{x_1}^b h^-(t)\ dt\}, \tag{8.11}$$

entonces en $\overline{\Omega}$ se cumple que

$$\mathcal{S}(h) \geq (\min\{H_a, H_b\})^{\frac{1}{p-1}} \delta_\Omega, \tag{8.12}$$

donde

$$H_a := \frac{\inf_I(h)}{\lambda_1(I)(x_I - a)^{p-1}} - \int_a^{x_0} h^-(t)\ dt,$$
$$H_b := \frac{\inf_I(h)}{\lambda_1(I)(b - x_I)^{p-1}} - \int_{x_1}^b h^-(t)\ dt.$$

Notar que la hipótesis requerida en (ii) pide, en particular, que h restringida al intevalo I sea estrictamente positiva (en símbolos, $h_{|_I} > 0$).

Observación 8.7. El inciso (ii) se traduce gráficamente a que, para ciertas hipótesis sobre h, $\mathcal{S}(h)$ se ve encerrada por múltiplos (que dependen de h) de la función distancia al borde de Ω. Esto guarda una gran similitud con lo que observamos sobre las funciones del cono positivo antes del enunciado del Teorema 8.4. En particular establece un Principio del Máximo Fuerte y un Lema de Hopf para el operador p-Laplaciano, incluso cuando h cambia de signo.

Demostración. (i) Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $h \not\equiv 0$, pues si $h \equiv 0$ entonces $\mathcal{S}(h) \equiv 0$ y se cumple (i) trivialmente. Luego, con $h \geq 0$, por el Principio del Máximo Fuerte, tenemos que $\mathcal{S}(h) \geq 0$. Además, notemos que, por la fórmula para $S(h)$, su derivada

$$(\mathcal{S}(h))'(x) = \varphi_p^{-1}(c_h - \int_a^x h(t)\ dt) \tag{8.13}$$

es no creciente pues $h \geq 0$ y φ_p^{-1} es no decreciente. Por lo tanto, $\mathcal{S}(h)$ es cóncava y positiva en Ω y debe cumplirse

$$(\mathcal{S}(h))'(b) < 0 < (\mathcal{S}(h))'(a). \tag{8.14}$$

De aquí se deduce

$$0 < c_h < \int_a^b h(t)\ dt \tag{8.15}$$

pues como φ_p es creciente,

$$\begin{aligned} &0 < (\mathcal{S}(h))'(a) = \varphi_p^{-1}(c_h) \quad \Rightarrow \quad 0 < c_h \quad \text{y} \\ &0 > (\mathcal{S}(h))'(b) = \varphi_p^{-1}(c_h - \int_a^b h(t)\ dt) \quad \Rightarrow \quad c_h < \int_a^b h(t)\ dt. \end{aligned}$$

Utilizando esto (y la hipótesis $h \geq 0$) obtenemos,

$$\begin{aligned} &(\mathcal{S}(h))'(a) = \varphi_p^{-1}(c_h) < \varphi_p^{-1}(\int_a^b h(t)\ dt) = \left(\int_a^b h(t)\ dt\right)^{\frac{1}{p-1}} \qquad \text{y} \\ &(\mathcal{S}(h))'(b) = \varphi_p^{-1}(c_h - \int_a^b h(t)\ dt) > \varphi_p^{-1}(- \int_a^b h(t)\ dt) = -\left(\int_a^b h(t)\ dt\right)^{\frac{1}{p-1}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$|(\mathcal{S}(h))'(b)| < \left(\int_a^b h(t)\ dt\right)^{\frac{1}{p-1}}. \tag{8.16}$$

Luego, considerando la función lineal a trozos $\left(\int_a^b h(t)\ dt\right)^{\frac{1}{p-1}} \delta_\Omega$ y usando la concavidad de $\mathcal{S}(h)$ obtenemos

$$\mathcal{S}(h) < \left(\int_a^b h(t)\ dt\right)^{\frac{1}{p-1}} \delta_\Omega \tag{8.17}$$

puesto que para todo punto $x \in (a, \frac{a+b}{2})$,

$$\left(\left(\int_a^b h(t)\ dt\right)^{\frac{1}{p-1}} \delta_\Omega\right)'(x) = \left(\int_a^b h(t)\ dt\right)^{\frac{1}{p-1}} > (\mathcal{S}(h))'(a) \geq (\mathcal{S}(h))'(x)$$

y, similarmente, para todo $y \in (b, \frac{a+b}{2})$,

$$\left(\left(\int_a^b h(t)\ dt\right)^{\frac{1}{p-1}} \delta_\Omega\right)'(y) = -\left(\int_a^b h(t)\ dt\right)^{\frac{1}{p-1}} < (\mathcal{S}(h))'(b) \leq (\mathcal{S}(h))'(y).$$

Veamos ahora (ii). Consideramos $I := (x_0, x_1) \subset \Omega$ y sean $\lambda_1(I) > 0$ y $\Phi > 0$, con $||\Phi||_{L^\infty(I)} = 1$, el autovalor principal y su autofunción (normalizada) positiva correspondientes al p-Laplaciano en I. Si se cumple la hipótesis (8.11), en particular vale $\operatorname{ínf}_I(h) > 0$ y consideramos $\lambda^* := \lambda_1(I)/\operatorname{ínf}_I(h)$. Empezamos construyendo alguna $0 < u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $-\Delta_p u \leq \lambda^* h$ en sentido débil en Ω (subsolución). Su construcción está inspirada en algunos de los cómputos realizados en las pruebas de los Teoremas 5.14 y 7.8. Primero notemos que, como $0 < \Phi \leq 1$,

$$-\Delta_p \Phi = \lambda_1(I)\Phi^{p-1} \leq \lambda^* h \quad \text{ en } I. \tag{8.18}$$

Por otro lado, notando que $\lambda^* h^- \leq \lambda^* h$, procedemos a construir las siguientes funciones. Sea $x_I := (x_0+x_1)/2$. Definimos en $[a, x_I]$

$$v(x) := \int_a^x \left(c_a + \lambda^* \int_a^y h^- \right)^{1/(p-1)} dy,$$

donde

$$c_a := \frac{1}{(x_I - a)^{p-1}} - \lambda^* \int_a^{x_0} h^-.$$

Notemos que $c_a > 0$ por (8.11). Es fácil verificar que v creciente, convexa y es solución del problema

$$\begin{cases} -\Delta_p v = -\lambda^* h^- & \text{en } (a, x_I) \\ v > 0 & \text{en } (a, x_I) \\ v(a) = 0 \\ v(x_I) \leq 1. \end{cases}$$

La última desigualdad vale porque la hipótesis (8.11) implica que $h > 0$ en I y entonces

$$||v||_{L^\infty(a,x_I)} \leq v(x_I) = \int_a^{x_I} \left(c_a + \lambda^* \int_a^{x_0} h^- \right)^{1/(p-1)} dy = 1.$$

Similarmente, definimos en $[x_I, b]$ la función

$$w(x) := \int_x^b \left(c_b + \lambda^* \int_y^b h^- \right)^{1/(p-1)} dy,$$

con

$$c_b := \frac{1}{(b - x_I)^{p-1}} - \lambda^* \int_{x_1}^b h^- > 0.$$

Tenemos que w es decreciente, convexa y es solución del problema

$$\begin{cases} -\Delta_p w = -\lambda^* h^- & \text{en } (x_I, b) \\ w > 0 & \text{en } (x_I, b) \\ w(b) = 0 \\ w(x_I) \leq 1. \end{cases}$$

Además, se cumple que $v(a) = w(b) = \Phi(x_0) = \Phi(x_1) = 0$ y $||v||_\infty, ||w||_\infty \leq 1 = ||\Phi||_\infty$ y que Φ es creciente en $[x_0, x_I]$ y decreciente en $[x_I, x_1]$ (ver Lema 3.10). Aplicando el Lema 7.6, hallamos un $\underline{x}_0 \in (x_0, x_I)$ y un $\overline{x}_1 \in (x_I, x_1)$ tales que

$$\begin{aligned} v(\underline{x}_0) &= \Phi(\underline{x}_0), & \Phi(\overline{x}_1) &= w(\overline{x}_1), \\ v'(\underline{x}_0) &\leq \Phi'(\underline{x}_0), & \Phi'(\overline{x}_1) &\leq w'(\overline{x}_1). \end{aligned} \tag{8.19}$$

Definimos una función u de la siguiente forma

$$u := \begin{cases} v & \text{en } [a, \underline{x}_0] \\ \Phi & \text{en } [\underline{x}_0, \overline{x}_1] \\ w & \text{en } [\overline{x}_1, b]. \end{cases}$$

(Mencionamos que si $x_0 = a$, a la hora de construir u sólo utilizamos Φ y w, si $x_1 = b$ no precisamos de w, y si $I = \Omega$ simplemente definimos $u = \Phi$.) Teniendo en consideración el párrafo previo, (8.18), (8.19) y realizando una simple integración por partes se arriba a $-\Delta_p u \leq \lambda^* h$ en sentido débil en Ω. Más aún, como $v'(a) = c_a^{1/(p-1)}$ y $w'(b) = c_b^{1/(p-1)}$, por la convexidad de v y w y por las ya mencionadas propiedades de monotonía de Φ, se sigue

$$u \geq (\text{mín}\{c_a, c_b\})^{1/(p-1)} \delta_\Omega \quad \text{en } \overline{\Omega}.$$

Por el Principio de Comparación Débil (Lema 3.14) la misma estimación es válida para $\mathcal{S}(\lambda^* h)$. Más aún, por la homogeneidad del operador p-Laplaciano obtenemos

$$\mathcal{S}(h) \geq \frac{(\min\{c_a, c_b\})^{1/(p-1)}}{\lambda^*} \delta_\Omega \quad \text{en } \overline{\Omega},$$

que a la vez produce (8.12) y esto concluye la prueba. $\square$

Teorema 8.8. *Sea $m \in L^{p'}(\Omega)$ y $\gamma > 0$. Supongamos que $m^-\delta_\Omega^{-\gamma} \in L^q(\Omega)$ con $q > 1$. Si para algún $I = (x_0, x_1) \subset \Omega$ se cumple*

$$\frac{(\text{ínf}_I\, m^+)^{p-1+\gamma}}{(\int_a^b m^+)^\gamma} \geq c_{\gamma,p,\Omega,I} \,\text{máx}\left(\int_a^{x_0} m^-\delta_\Omega^{-\gamma}, \int_{x_1}^b m^-\delta_\Omega^{-\gamma}\right)^{p-1}, \tag{8.20}$$

donde

$$c_{\gamma,p,\Omega,I} := \left(\frac{p-1}{\gamma}\right)^\gamma \left(\frac{p-1+\gamma}{p-1}\right)^{p-1+\gamma} \left(\frac{b-a}{2}\right)^{\gamma(p-1)} \left(c_I^{p-1}\lambda_1(I)\right)^{p-1+\gamma},$$

entonces el problema (8.1) tiene una solución $u \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, y $u \in P^o$ siempre que $m^+\delta_\Omega^{-\gamma} \in L^r(\Omega)$ con $r > 1$.

Demostración. Seguiremos a grandes razgos la demostración del Teorema 8.4, pero como estamos tratando de cuantificar, todos los parámetros que vayan apareciendo deberán ser explicitados. Por ejemplo, comenzamos trabajando con el problema equivalente para τm, donde

$$\tau := \left(\frac{2}{b-a}\right)^{p-1} \left(\int_a^b m^+\right)^{-1}. \tag{8.21}$$

Como $\delta_\Omega \leq (b-a)/2$ en Ω, empleando (8.10) se puede comprobar que $S(\tau m^+) \leq 1$ en Ω.

Asumiremos que

$$\text{máx}\left(\int_a^{x_0} m^-\delta_\Omega^{-\gamma}, \int_{x_1}^b m^-\delta_\Omega^{-\gamma}\right) = \int_a^{x_0} m^-\delta_\Omega^{-\gamma}, \tag{8.22}$$

ya que el otro caso es completamente análogo. Definimos entonces

$$\mathcal{C} := \{v \in C(\overline{\Omega}) := r\varepsilon\delta_\Omega \leq v \leq S(\tau m^+) \text{ en } \Omega\},$$

donde,

$$c_1 := \frac{\text{ínf}_I\, m^+}{\lambda_1(I)c_I^{p-1}}, \qquad c_2 := \int_a^{x_0} m^-\delta_\Omega^{-\gamma},$$
$$\varepsilon := \left(\frac{\tau c_2 \gamma}{p-1}\right)^{1/(p-1+\gamma)}.$$

(Mencionemos que si (8.22) no es válida tomamos $c_2 := \int_{x_1}^b m^-\delta_\Omega^{-\gamma}$). Se puede verificar que (8.20) implica

$$c_1^{p-1+\gamma} \geq \left(\frac{p-1}{\tau\gamma}\right)^\gamma \left(\frac{p-1+\gamma}{p-1}\right)^{p-1+\gamma} c_2^{p-1}. \tag{8.23}$$

Tomando en cuenta esto y la definición de c_I, observamos que

$$\begin{aligned}
\lambda_1(I)(x_I - a)^{p-1}\int_a^{x_0} m^-(\varepsilon\delta_\Omega)^{-\gamma} &\leq \lambda_1(I)c_I^{p-1}\varepsilon^{-\gamma}\int_a^{x_0} m^-\delta_\Omega^{-\gamma} \\
&= \lambda_1(I)c_I^{p-1}\left(\left(\frac{p-1}{\tau\gamma}\right)^\gamma c_2^{p-1}\right)^{1/(p-1+\gamma)} \\
&\leq \lambda_1(I)c_I^{p-1}c_1\frac{p-1}{p-1+\gamma} \\
&< \text{ínf}_I\, m^+ \\
&= \text{ínf}_I(m^+ - m^-(\varepsilon\delta_\Omega)^{-\gamma}).
\end{aligned}$$

Entonces podemos aplicar la cota (8.12) con $m^+ - m^-v^{-\gamma}$ en lugar de h, y también con $\tau(m^+ - m^-v^{-\gamma})$, obteniendo

$$\mathcal{S}(\tau(m^+ - m^-\varepsilon\delta_\Omega)^{-\gamma})) \geq (\tau(c_1 - c_2\varepsilon^{-\gamma}))^{1/(p-1)}\delta_\Omega \tag{8.24}$$

si usamos la igualdad (8.22).

Dado ahora $v \in \mathcal{C}$, definimos, de forma análoga al teorema previo, $u := \mathcal{T}(v) := \mathcal{S}(\tau(m^+ - m^- v^{-\gamma}))$. Podemos deducir

$$\mathcal{S}(\tau m^+) \geq u \geq \mathcal{T}((\varepsilon\delta_\Omega)^{-\gamma})) \geq (\tau(c_1 - c_2\varepsilon^{-\gamma}))^{1/(p-1)}\delta_\Omega \geq \varepsilon\delta_\Omega,$$

pues la primera y segunda desigualdad valen por Principios del Máximo (como ya usamos en el teorema anterior), la tercera está dada por (8.24) y la última desigualdad es una consecuencia de (8.23). Por lo tanto $u = \mathcal{T}(v) \in \mathcal{C}$.

Ahora la prueba puede ser terminada como en el teorema anterior usando primero el Teorema de Schauder y luego el Teorema Sub y Supersoluciones. □

Observación 8.9. (Aclaraciones sobre la demostración)

Dado γ fijo, este teorema nos garatiza que si se cumple la condición (8.20), entonces obtendremos solución de nuestro problema. Ahora bien, ¿Cómo hemos hallado tal condición suficiente? La prueba del primer teorema de esta sección nos aportó un método para encontrar subsoluciones de (8.1) y así poder usar el usar el Teorema de Sub y Supersoluciones.

Recordemos que al inicio de la prueba del Teorema 8.4 mencionamos que necesitábamos una constante τ tal que $\mathcal{S}(\tau m^+) \leq 1$ (y luego habíamos renombrado τm por m). En la demostración del Teorema 8.8 dimos explícitamente un número τ que sólo dependía de Ω, m y p. Pero, ¿Cómo lo determinamos? Gracias al Lema 8.6 tenemos siempre (sin requerir hipótesis extra) una cota por arriba de $\mathcal{S}(\tau m^+)$. Entonces podemos pedir que dicha cota sea menor que 1, esto es,

$$\mathcal{S}(\tau m^+)(x) \leq \left(\int_a^b \tau m^+(t)\ dt\right)^{\frac{1}{p-1}} \delta_\Omega(x) \leq 1 \qquad \forall x \in [a,b].$$

Luego buscamos τ tal que

$$\tau \leq \frac{1}{(\delta_\Omega(x))^{p-1}\left(\int_a^b \tau m^+(t)\ dt\right)} \qquad \forall x \in [a,b].$$

Como la función de la derecha de la desigualdad anterior alcanza su mínimo cuando δ_Ω es máximo, pedimos τ como en la fórmula (8.21).

Por otra parte, si rastreamos en la prueba del Teorema 8.4 y en el esquema de su demostración (Observación 8.5), la parte que usa que γ sea suficientemente pequeño es la que necesita garantizar

$$\varepsilon\delta_\Omega \leq \mathcal{S}(\tau(m^+ - m^-(\varepsilon\delta_\Omega)^{-\gamma})).$$

Entonces dado γ podemos preguntarnos, ¿Cuándo existe ε que cumpla la desigualdad anterior (con τ dado por (8.21))? Para resolver esto asumamos que vale la hipótesis del segundo inciso en el Lema 8.6 tomando $h := \tau(m^+ - m^-(\varepsilon\delta_\Omega)^{-\gamma})$. Esta parte nos aporta una cota por abajo de $\mathcal{S}(\tau(m^+ - m^-(\varepsilon\delta_\Omega)^{-\gamma}))$. Así, buscamos ε tal que

$$\mathcal{S}(\tau(m^+ - m^-(\varepsilon\delta_\Omega)^{-\gamma})) \geq \frac{\operatorname{ínf}_I(h)}{\lambda_1(I)(x_I - a)^{p-1}} - \int_a^{x_0} h^-(t)\ dt\delta_\Omega \geq \varepsilon\delta_\Omega$$

(asumiendo, sin pérdida de generalidad, que el mínimo en la cota (8.12) es alcanzado por H_a). Utilizando la notación de la demostración del Teorema 8.8 estamos buscando ε tal que

$$\varepsilon^{p-1} + \tau c_2\varepsilon^{-\gamma} \leq \tau c_1. \tag{8.25}$$

Por ejemplo, podemos determinar ε como el mínimo de la función $f(x) = x^{p-1} + \tau c_2 x^{-\gamma}$, esto es

$$\varepsilon = \left(\frac{\tau c_2\gamma}{p-1}\right)^{1/(p-1+\gamma)}. \tag{8.26}$$

Falta ver que efectivamente dicho mínimo cumple la desigualdad deseada y que además era “legal” aplicar el lema. Veamos primero que para dicho ε se cumple la hipótesis del lema dada por la fórmula (8.11). En efecto,

$$\operatorname*{ínf}_I(\tau(m^+ - m^-(\varepsilon\delta_\Omega)^{-\gamma})) \geq \lambda_1(I)\left((x_I - a)^{p-1}\int_a^{x_0}(\tau(m^+(t) - m^-(t)(\varepsilon\delta_\Omega(t))^{-\gamma})))^-\right)$$

se satisface si y sólo si se cumple

$$\inf_I(m^+) \geq \lambda_1(I)(x_I - a)^{p-1}\left(\int_a^{x_0} m^-(t)\delta_\Omega(t)^{-\gamma}dt\right)\left(\frac{p-1}{\gamma\tau\int_a^{x_0} m^-(t)\delta_\Omega(t)dt}\right)^{\frac{\gamma}{p-1+\gamma}}.$$

Reemplazando τ por la fórmula (8.21) y haciendo pasajes de términos, queda la condición

$$\frac{(\inf_I(m^+))^{p-1+\gamma}}{(\int_a^b m^+)^\gamma} \geq \left(\lambda_1(I)(x_I - a)^{p-1}\right)^{p-1+\gamma}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{\gamma(p-1)}\left(\frac{p-1}{\gamma}\right)^\gamma\left(\int_a^{x_0} m^-(t)\delta_\Omega(t)^{-\gamma}dt\right)^{p-1}.$$

Ésta es similar a la condición que pide el teorema, solamente falta, en el lado derecho, el factor $(\frac{p-1+\gamma}{p-1})^{p-1+\gamma}$, que es mayor que 1. Por lo tanto las hipótesis del Teorema 8.8 implican que se cumple la desigualdad anterior.

Por último veamos que con el ε elegido se satisface (8.25). Si reemplazamos (8.26) en (8.25) queda que se debe cumplir

$$\left(\frac{\gamma\tau c_2}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-1+\gamma}} + \left(\frac{\gamma\tau c_2}{p-1}\right)^{\frac{-\gamma}{p-1+\gamma}}\tau c_2 \leq \tau c_1.$$

Dicha desigualdad se satisface si y sólo si

$$\frac{\frac{\gamma\tau c_2}{p-1} + \tau c_2}{\left(\frac{\gamma\tau c_2}{p-1}\right)^{\frac{\gamma}{p-1+\gamma}}} \leq \tau c_1$$

que, haciendo pasajes de términos, se cumple si y sólo si

$$(\tau c_2)^{p-1} \leq (\tau c_1)^{p-1+\gamma}\frac{(p-1)^{p-1}\gamma^\gamma}{(p-1+\gamma)^{p-1+\gamma}} = (\tau c_1)^{p-1+\gamma}\left(\frac{\gamma}{p-1}\right)^\gamma\left(\frac{p-1}{p-1+\gamma}\right)^{p-1+\gamma}.$$

Como podemos notar, aquí apareció el factor $(\frac{p-1+\gamma}{p-1})^{p-1+\gamma}$. Si reemplazamos τ, c_1 y c_2 por sus respectivas fórmulas llegaremos a la condición (8.20) requerida por el teorema.

A continuación damos un resultado que provee condiciones necesarias para obtener solución de (8.1).

Teorema 8.10. *Supongamos que (8.1) tiene solución $u \in C^1(\overline{\Omega})$ tal que $\varphi_p(u') \in W^{1,1}(\Omega)$. Entonces,*

$$\mathcal{S}(m) > 0 \quad \text{en } \Omega \quad y \tag{8.27}$$

$$\int_\Omega m > 0. \tag{8.28}$$

Demostración. Sea $u > 0$ solución de (8.1) y fijemos

$$\beta := \frac{p-1+\gamma}{p-1} \quad \text{(Notar que } (\beta-1)(p-1) = \gamma > 0).$$

Tomemos $0 \leq \phi \in C_c^\infty(\Omega)$ y sea Ω' un abierto tal que $supp(\phi) \subset \Omega' \subset\subset \Omega$. Por los cálculos hechos en la demostración del Lema 8.2, sabemos que

$$\begin{aligned}-\Delta_p u^\beta &= -\beta^{(p-1)}(\beta-1)(p-1)u^{(\beta-1)(p-1)-1}|u'|^p \\ &\quad + \beta^{(p-1)}u^{(\beta-1)(p-1)}(-\Delta_p u) \\ &\leq \beta^{(p-1)}u^{(\beta-1)(p-1)}m(x)u^{-\gamma} \\ &\leq \beta^{(p-1)}m(x) \quad ppx \text{ en } \Omega'.\end{aligned}$$

Multiplicando a ambos lados por ϕ, obtenemos

$$\int_\Omega \left|(u^\beta)'\right|^{p-2}(u^\beta)'\phi' \leq \beta^{p-1}\int_\Omega m(x)\phi.$$

Por otro lado, sea $0 \leq v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Entonces, existe una sucesión $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ con $\phi_j \geq 0$ en Ω y tal que $\phi_j \to v$ en $W^{1,p}(\Omega)$ (ver Lema 1.40). Utilizando la última desigualdad con ϕ_j en lugar de ϕ y pasando al límite obtenemos que $-\Delta_p(u^\beta) \leq \beta^{p-1}m(x)$ en sentido débil en Ω. Notando que $\beta > 1$ y por lo tanto $u^\beta \in C^1(\overline{\Omega})$, podemos aplicar el Principio de Comparación (Proposición 3.6) para deducir $0 < u^\beta \leq \beta\mathcal{S}(m)$ en Ω. Esto demuestra la primer desigualdad.

Para probar la segunda desigualdad trabajamos sobre $\Omega_\varepsilon := (a+\varepsilon, b-\varepsilon)$. Notar que $\Omega_\varepsilon \subset\subset \Omega$. Multiplicando (8.1) a ambos lados por u^γ e integrando obtenemos

$$-\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \Delta_p u \ u^\gamma = \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} m.$$

Notar que $(-\Delta_p u)_{|\Omega_\varepsilon}$ está bien definido como función. Además, $u^\gamma \in C^1(\overline{\Omega_\varepsilon})$ y $|u'|^{p-2} u' \in W^{1,1}(\Omega_\varepsilon)$ por lo que vale la regla de integración por partes. Entonces, la desigualdad anterior se transforma en

$$(\varphi_p(u')u^\gamma)(a+\varepsilon) - \varphi_p(u')u^\gamma)(b-\varepsilon)) + \gamma \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} |u'|^p \, u^{\gamma-1} \leq \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} m.$$

Como $u \equiv 0$ en $\partial\Omega$, haciendo tender ε a cero en la última desigualdad, obtenemos lo que queríamos. $\square$

Observación 8.11. Notemos que las condiciones (8.27) y (8.28) no son comparables. De hecho, supongamos $p = 2$, y sea $\Omega := (0, 3\pi)$ y $m(x) := sen(x)$. Entonces, $m = S(m)$ y $\int_0^{3\pi} m > 0$, pero $S(m) < 0$ en $(\pi, 2\pi)$.

Por otro lado, integrando (3.1) (con m en lugar de h) obtenemos que

$$\varphi_p\left(S(m)'(a)\right) - \varphi_p\left(S(m)'(b)\right) = \int_a^b m, \tag{8.29}$$

de lo cual se sigue que podríamos tener $S(m) > 0$ en Ω pero $\int_a^b m = 0$. (Tomar por ejemplo $p = 2$, $\Omega := (0, \pi)$, $m(x) := 2(sen^2(x) - cos^2(x))$ y $S(m)(x) = sen^2(x)$.)

Lo que es cierto de (8.29) es que $S(m) > 0$ en Ω implica que $\int_a^b m \geq 0$. Más aún, del Teorema 8.10 y (8.29) tenemos que si (8.1) tiene solución, entonces o bien $S(m)'(a) \neq 0$ o bien $S(m)'(b) \neq 0$. Es aún una pregunta abierta si es necesario que ambas derivadas sean no nulas. $\square$

Concluimos esta sección mostrando un resultado de existencia para problemas singulares unidimensionales de la forma

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = -(|u'|^{p-2} u')' = m(x)f(u) & \text{en } \Omega \\ u > 0 & \text{en } \delta_\Omega \\ u = 0 & \text{en } \delta_\Omega, \end{cases} \tag{8.30}$$

donde $\Omega = (a, b)$ y $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ es una función continua cumpliendo ciertas hipótesis. Explícitamente, pedimos la siguiente hipótesis.

(H) Existen c_f, $C_f > 0$ y $\gamma > 0$ tales que

$$c_f \xi^{-\gamma} \leq f(\xi) \leq C_f \xi^{-\gamma} \text{ para todo } \xi > 0.$$

Corolario 8.12. *Sea $m \in L^{p'}(\Omega)$, sea f satisfaciendo (H) y supongamos que (8.1) tiene una solución con $c_f m^+ - C_f m^-$ en lugar de m. Entonces existe una solución de (8.30).*

Demostración. Sea u una solución de (8.1) con $c_f m^+ - C_f m^-$ en lugar de m. Usando (H) encontramos que

$$\mathcal{L}u = \left(c_f m^+(x) - C_f m^-(x)\right) u^{-\gamma} \leq m(x) f(u) \quad \text{en } \Omega.$$

Por otro lado, sea $\psi := S(m^+) > 0$ y fijemos $\beta \in (0, 1)$ y $\sigma > 0$ satisfaciendo

$$\beta := \frac{p-1}{p-1+\gamma}, \quad \sigma \geq \frac{C_f^{1/(p-1+\gamma}}{\beta^\beta}.$$

Agrandando σ de ser necesario, recordando que $\beta < 1$ y que por el Lema 8.6 se cumple $S(m^+)'(a) > 0 > S(m^+)'(b)$, podemos asumir que $\sigma\psi^\beta \geq u$ en Ω. Ahora, procediendo como hicimos para hallar una supersolución y teniendo en cuenta (H), obtenemos

$$\mathcal{L}\left(\sigma\psi^\beta\right) \geq (\sigma\beta)^{p-1} m^+(x) \psi^{(\beta-1)(p-1)} \geq$$
$$C_f m^+(x) \left(\sigma\psi^\beta\right)^{-\gamma} \leq m^+(x) f\left(\sigma\psi^\beta\right) \geq m(x) f\left(\sigma\psi^\beta\right) \text{ en } \Omega'$$

para todo $\Omega' \subset\subset \Omega$, y de aquí se desprende el corolario. $\square$

8.2. Resultados en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Durante toda esta sección consideraremos Ω un conjunto abierto, acotado y $C^{1,1}$ de $\mathbb{R}^n$. Además, se entenderá el problema dado en (8.1) como el caso en dimensión n. Comenzamos, al igual que en la sección anterior, dando un lema que garantiza que siempre existe supersolución arbitrariamente grande de nuestro problema.

Lema 8.13. *(Existencia de supersolución arbitrariamente grande) Sea $m \in L^\infty(\Omega)$ y $m^+ \not\equiv 0$. Entonces, el problema (8.1) tiene una supersolución arbitrariamente grande. Es decir, dada cualquier subsolución $v \in C^1(\overline{\Omega})$ es posible encontrar una supersolución $w \geq v$ en $\overline{\Omega}$.*

Demostración. Sea $\psi := \mathcal{S}(||m^+||_\infty)$ y elijamos $\beta \in (0,1)$ y $\sigma > 0$ satisfaciendo

$$\beta := \frac{p-1}{p-1+\gamma}, \quad \sigma := \beta^{\frac{-(p-1)}{1+\gamma}}. \tag{8.31}$$

Notemos que, por el Teorema 3.12 y regla de la cadena, tenemos

$$\begin{gathered} \psi \in C^1(\overline{\Omega}),\ |\nabla\psi|^{p-2}\nabla\psi \in W^{1,2}_{loc}(\Omega), \\ -\Delta_p\psi \equiv ||m^+||_\infty \quad ppx \text{ en } \Omega, \\ \psi^\beta \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \text{ y} \\ \psi^\beta = 0 \text{ en } \partial\Omega. \end{gathered} \tag{8.32}$$

Más aún, por el Principio del Máximo Fuerte (Teorema 3.15), se cumple que $\psi, \psi^\beta > 0$ en Ω. Calcularemos ahora cuanto vale $-\Delta_p(\psi^\beta)$, para ello primero vemos

$$\begin{aligned} \nabla\psi^\beta &= \beta\psi^{\beta-1}\nabla\psi, \\ \left|\nabla\psi^\beta\right|^{p-2}\nabla\psi^\beta &= \beta^{p-2}\psi^{(\beta-1)(p-1)}\left|\nabla\psi\right|^{p-2}\beta\psi^{(\beta-1)}\nabla\psi \\ &= \beta^{(p-1)}\psi^{(\beta-1)(p-1)}\left|\nabla\psi\right|^{p-2}\nabla\psi. \end{aligned}$$

Ahora, por (8.32) y tomando en cuenta que, por regla de la cadena, $\psi^{(\beta-1)(p-2)} \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$, aplicando regla de diferenciación del producto, calculamos, en sentido débil,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\beta^{(p-1)}\psi^{(\beta-1)(p-1)}\left|\nabla\psi\right|^{p-2}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right) &= \beta^{(p-1)}\frac{\partial[\psi^{(\beta-1)(p-1)}]}{\partial x_i}\left|\nabla\psi\right|^{p-2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right) \\ &\quad + \beta^{(p-1)}\psi^{(\beta-1)(p-1)}\frac{\partial[\left|\nabla\psi\right|^{p-2}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}]}{\partial x_i} \\ &= \beta^{(p-1)}(\beta-1)(p-1)\psi^{(\beta-1)(p-1)-1}\left|\nabla\psi\right|^{p-2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)^2 \\ &\quad + \beta^{(p-1)}\psi^{(\beta-1)(p-2)}\frac{\partial[\left|\nabla\psi\right|^{p-2}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}]}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Sumando sobre todo i nos queda

$$\begin{aligned} -div\left(\left|\nabla\psi^\beta\right|^{p-2}\nabla\psi^\beta\right) &= -\beta^{(p-1)}(\beta-1)(p-1)\psi^{(\beta-1)(p-1)-1}\left|\nabla\psi\right|^p \\ &\quad - \beta^{(p-1)}\psi^{(\beta-1)(p-1)}div\left(|\nabla\psi|^{p-2}\nabla\psi\right). \end{aligned}$$

Usando (8.31) y que $\psi = \mathcal{S}(||m^+||_\infty)$ obtenemos

$$\begin{aligned} -\Delta_p(\psi^\beta) &\geq \beta^{(p-1)}\psi^{-\gamma\beta}||m^+||_\infty \\ &\geq \sigma^{-1-\gamma}\psi^{-\gamma\beta}, \end{aligned}$$

entonces

$$-\Delta_p(\sigma\psi^\beta) \geq (\sigma\psi^\beta)^{-\gamma}m.$$

Luego, $\sigma\psi^\beta$ es supersolución en el sentido de las distribuciones de nuestro problema. Finalmente, utilizando el Lema de Hopf para ψ, sabemos que la derivada normal unitaria es no nula en la frontera. Esto nos dice que la derivada normal unitaria de ψ^β es infinita y por lo tanto dada cualquier $v \in C^1(\overline{\Omega})$, eligiendo σ suficientemente grande, tenemos que $v \leq \sigma\psi^\beta$. □

Más abajo daremos el Teorema 8.15, que es el análogo al Teorema 8.4 y nos da condiciones suficientes para la existencia de soluciones de (8.1) en el caso de dimensiones mayores a uno. Antes de enunciarlo recordaremos dos conceptos que dimos para el caso unidimensional y tienen pequeñas variaciones aquí. También enunciaremos un resultado de análisis (Teorema de Dini) que se utilizará en la demostración.

Denotaremos por δ_Ω la función distancia al borde del dominio Ω, es decir, $\delta_\Omega(x) := dist(x, \partial\Omega)$. A diferencia del caso unidimensional, ahora no contamos con una expresión cerrada para esta función.

Además, denotaremos por

$$P^o := \text{interior del cono positivo en } C_0^1(\overline{\Omega}), \tag{8.33}$$

esto es, las funciones $v \in C^1(\overline{\Omega})$ que cumplen $v(x) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega$, $v > 0$ en Ω y poseen derivada normal exterior unitaria negativa en la frontera. Es decir,

$$\frac{\partial v}{\partial \eta}(x) < 0 \quad \forall x \in \partial\Omega, \tag{8.34}$$

donde η es el vector normal exterior unitario.

La misma relación que antes se cumple entre ambas definiciones. Dada una función f en el interior del cono positivo existen $0 < k_1 < k_2$ constantes tales que $k_1\delta_\Omega < f < k_2\delta_\Omega$. El recíproco también es cierto siempre que $f \in C^1(\overline{\Omega})$.

Teorema 8.14. *(Teorema de Dini) Sea X un espacio topológico compacto. Sea $\{g_n\}$ una sucesión monótonamente creciente o decreciente (es decir, $g_n(x) \leq g_{n+1}(x)$ para todos x y n) de funciones definidas en X, continuas, a valores reales, que converge puntualmente a una función continua f. Entonces, la convergencia es uniforme sobre X.*

Teorema 8.15. *Sean Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$, $m \in L^\infty(\Omega)$ y $\gamma > 0$. Supongamos que se cumple*

1. *$\mathcal{S}(m) \in P^o$, donde $\mathcal{S}$ es el inverso del p-Laplaciano,*
2. *$\exists \rho_0 > 0$ y $\Omega_{\rho_0} := \{x \in \Omega : \delta_\Omega(x) < \rho_0\}$ tales que $m^- \in C(\overline{\Omega_{\rho_0}})$ y $|m^-| < C\delta_\Omega(x)^\alpha$ para todo $x \in \Omega_{\rho_0}$ y $\alpha > 1 - \frac{1}{n}$.*

Entonces existe $\gamma_0 > 0$ tal que el problema (8.1) tiene solución $u \in P^o$ para todo $\gamma \in (0, \gamma_0]$.

Demostración. La demostración sigue los mismos pasos que la anterior (Teorema 8.4) cambiando L^q y L^{q_0} por L^∞ en todos lados excepto en la parte 9 (como aclararemos más abajo). Solamente cambian las pruebas de las partes 2 y 5 así como el remate final. De hecho, las partes 2 y 5 requieren de la hipótesis *2.* que se ha adicionado a este enunciado. Para ser más claros daremos el esquema de la demostración y explicitaremos las pruebas de las partes que cambian respecto del teorema en $\mathbb{R}$ con $q > 1$ arbitrario.

1. Como $\mathcal{S}(m) \in P^o$ podemos fijar $0 < \varepsilon < 1$ tal que $\varepsilon\delta_\Omega < 1$ y $S(m) > 2\varepsilon\delta_\Omega$ en Ω.
2. $||m - (m^+ - (\varepsilon\delta_\Omega)^{-\gamma}m^-)||_\infty \to 0$ si $\gamma \to 0$.

D. Definamos,

$$\begin{array}{ll} g_\gamma(x) := m - \left(m^+ - (\varepsilon\delta_\Omega)^{-\gamma}m^-\right) = m^-\left((\varepsilon\delta_\Omega)^{-\gamma} - 1\right) & \text{si } x \in \Omega \\ g_\gamma(x) := 0 & \text{si } x \in \partial\Omega \end{array}$$

y probemos que $g_\gamma \to 0$ uniformemente, cuando $\gamma \to 0$. Para ello, partimos el dominio en dos. Elijamos $0 < \rho_0 < 1$. Consideremos $x \in \Omega - \overline{\Omega_{\rho_0}}$, entonces $\delta_\Omega(x) > \rho_0$ y

$$\left|m^-\left((\varepsilon\delta_\Omega)^{-\gamma} - 1\right)\right| \leq ||m^-||_\infty \left|\frac{1}{(\varepsilon\rho_0)^{-\gamma}} - 1\right| \to 0 \quad \text{(Recordar que } \varepsilon\delta < 1)$$
$$\text{si } \gamma \to 0.$$

Como el lado derecho de la desigualdad no depende de x, la convergencia es uniforme en este subconjunto.
Tomemos ahora $x \in \overline{\Omega_{\rho_0}}$ y usemos el Teorema de Dini para probar que $g_\gamma \to 0$ uniformemente. Verifiquemos las hipótesis necesarias.
a) Las funciones g_γ son continuas. En efecto, por como están definidas se ve que lo son en $\overline{\Omega_{\rho_0}} - \partial\Omega$. Sólo falta ver qué pasa cuando $x \to \partial\Omega$. Calculemos,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\partial\Omega} |g_\gamma(x)| &= \lim_{x\to\partial\Omega} \left| m^-(x) \left(\frac{1-(\varepsilon\delta_\Omega)^\gamma}{(\varepsilon\delta_\Omega)^\gamma} \right) \right| \\
&\leq \lim_{x\to\partial\Omega} \left| (\delta_\Omega)^{\alpha-\gamma} \left(\frac{1-(\varepsilon\delta_\Omega)^\gamma}{(C\varepsilon)^\gamma} \right) \right| \quad \text{(Por hipótesis sobre } m^-\text{)} \\
&= 0 \quad \text{(Pues puedo tomar } \gamma < \alpha\text{)}.
\end{aligned}$$

Por definición de g_γ, esto concluye a).
b) $g_\gamma(x) \to 0$ para todo $x \in \overline{\Omega_{\rho_0}}$. Calculemos,

$$\begin{aligned}
\lim_{\gamma\to 0} |g_\gamma(x)| \leq \lim_{\gamma\to 0} & \left| (\delta_\Omega)^{\alpha-\gamma} \left(\frac{1-(\varepsilon\delta_\Omega)^\gamma}{(C\varepsilon)^\gamma} \right) \right| \\
\lim_{\gamma\to 0} \leq & \left| (\rho_0)^{\alpha-\gamma} \left(\frac{1-(\varepsilon\rho_0)^\gamma}{(C\varepsilon)^\gamma} \right) \right| \\
= 0 & \quad \text{(Pues } (\varepsilon\rho_0)^\gamma \to 1\text{)}.
\end{aligned}$$

Esto concluye b).
Como el resto de las hipótesis del Teorema de Dini se cumplen trivialmente, tenemos que $g_\gamma(x) \to 0$ uniformemente en $\overline{\Omega_{\rho_0}}$. Juntando esto con la convergencia uniforme sobre el complemento de este conjunto hemos probado 2.

3. Existe γ_0 tal que para todo $\gamma \in (0, \gamma_0]$, se verifica $m^-(\varepsilon\delta_\Omega)^{-\gamma} \in L^\infty(\Omega)$ y $\mathcal{S}(m^+ - m^-(\varepsilon\delta_\Omega)^{-\gamma}) \geq \varepsilon\delta_\Omega$.

D. Para ver la parte $\mathcal{S}(m^+ - m^-(\varepsilon\delta_\Omega)^{-\gamma}) \geq \varepsilon\delta_\Omega$, notar que
a) $m^+ - m^-(\varepsilon\delta_\Omega)^{-\gamma} \to m$ en $L^\infty(\Omega)$. (Por el punto 2)
b) $\mathcal{S} : L^\infty(\Omega) \to C^1(\overline{\Omega})$ es continuo. (Teorema 3.13)
c) $\mathcal{S}(m^+ - m^-(\varepsilon\delta_\Omega)^{-\gamma}) \to \mathcal{S}(m)$ en norma $C^1(\overline{\Omega})$, cuando $\gamma \to 0$. (Por a) y b))
d) Como $\mathcal{S}(m) > 2\varepsilon\delta_\Omega$, se tiene que $\mathcal{S}(m^+ - m^-(\varepsilon\delta_\Omega)^{-\gamma}) > \varepsilon\delta_\Omega$, para γ suficientemente pequeño. (Por 1 y c))

4. Tomemos $\gamma \in (0, \gamma_0]$. Sean,

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} &:= \{v \in C(\overline{\Omega}) : \varepsilon\delta_\Omega \leq v \leq \mathcal{S}(m^+) \text{ en } \Omega\} \quad \text{y} \\
u &:= \mathcal{T}(v) := \mathcal{S}(m^+ - m^- v^{-\gamma}).
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\varepsilon\delta_\Omega \leq \mathcal{S}(m^+ - m^-(\varepsilon\delta_\Omega)^{-\gamma}) \leq u = \mathcal{S}(m^+ - m^- v^{-\gamma}) \leq \mathcal{S}(m^+). \tag{8.35}$$

5. La aplicación $v \mapsto m^+ - m^- v^{-\gamma}$ es continua de $\mathcal{C}$ en $L^\infty(\Omega)$.

D. Esta demostración es muy similar a la realizada en el punto 2 y por eso la obviamos. (La diferencia es que ahora hay que ver que $||m^-(v^{-\gamma} - w^{-\gamma})||_\infty \to 0$ si $v \to w$ uniformemente en $\overline{\Omega}$ para v, $w \in \mathcal{C}$.)

6. El operador $\mathcal{T}$ definido en el punto 4 es compacto y cumple $\mathcal{T}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$.

D. $\mathcal{T}$ es la composición de la aplicación definida en el punto 5 y el inverso del p-Laplaciano. La primera es continua y el segundo es compacto de $L^\infty(\Omega) \to C(\overline{\Omega})$ (Teorema 3.13). Entonces, $\mathcal{T} : \mathcal{C} \to C(\overline{\Omega})$ es compacto. Para ver que $\mathcal{T}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$ sólo falta usar la desigualdad (8.35). Finalmente, es fácil ver que $\mathcal{C}$ es cerrado en $C(\overline{\Omega})$ y por lo tanto se concluye que $\mathcal{T} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es compacto. Notar que $\mathcal{T}(\mathcal{C}) \subset C(\overline{\Omega})$ por la misma demostración que la compacidad.

7. Existe solución $v \in C^1(\overline{\Omega})$, en sentido de las distribuciones, de

$$\begin{cases} -\Delta_p v = m^+ - m^- v^{-\gamma} & \text{en } \Omega \\ v = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

D. Schauder. $\mathcal{T} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es compacto y es fácil ver que $\mathcal{C}$ cumple las hipótesis del Teorema de Schauder (ver Teorema 4.11). Entonces, existe un punto fijo del operador. Es decir, existe $v \in \mathcal{C}$ tal que $v = \mathcal{S}(m^+ - m^- v^{-\gamma})$. Además, por el punto 5, $m^+ - m^- v^{-\gamma} \in L^\infty(\Omega)$. Usando la regularidad del inverso del p-Laplaciano en $\mathbb{R}^n$ (Teorema 3.12), se obtiene que $v = \mathcal{S}(m^+ - m^- v^{-\gamma}) \in C^1(\overline{\Omega})$.
(Notar que también es posible probar que $m^+ - m^- v^{-\gamma} \in L^\infty(\Omega)$ de otra manera ya que, por la definición de $\mathcal{C}$ y el punto 3, se puede ver que existe un $M > 0$ tal que

$$-M \leq m^+ - m^-(\varepsilon\delta_\Omega)^{-\gamma} \leq m^+ - m^- v^{-\gamma} \leq m^+ \leq M.)$$

8. La función v hallada en el punto anterior es subsolución en el sentido de las distribuciones de nuestro problema.

Afî. Existe solución $u \in C^1(\overline{\Omega})$ de (8.1) para γ suficientemente pequeño.

D. Por lo dicho al principio de la demostración y el punto 8 podemos aplicar el Teorema de Sub y Super-soluciones (ver Teorema 4.10). Entonces, obtendríamos una solución $u \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ con $u \geq \varepsilon\delta_\Omega$ en Ω.
Usando esto y eligiendo γ_0 lo suficientemente pequeño podemos probar que $m^+ u^{-\gamma} \in L^q(\Omega)$, con $q > n$ para todo $\gamma \in (0, \gamma_0]$. Pues,

$$\int_\Omega \left(m^+ u^{-\gamma}\right)^q \leq ||m^+||_\infty^q \int_\Omega u^{-\gamma q} \leq \left(\frac{||m^+||_\infty}{\varepsilon^\gamma}\right)^q \int_\Omega (\delta_\Omega)^{-\gamma q} < \infty \quad \text{si } \gamma q < n.$$

Ahora, como $m^- u^{-\gamma} \in L^\infty(\Omega)$ (ver punto 5 e hipótesis sobre m), tenemos que $m u^{-\gamma} \in L^q(\Omega)$, con $q > n$. Por Teorema 3.12, se ve que $u = \mathcal{S}(m u^{-\gamma}) \in C^1(\overline{\Omega})$ como queríamos.

□

Teorema 8.16. *Supongamos que (8.1) tiene solución $u \in C^1(\overline{\Omega})$ tal que $|\nabla u|^{p-2} \nabla u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Entonces,*

$$\mathcal{S}(m) > 0 \quad \textit{en } \Omega \quad \textit{y} \tag{8.36}$$
$$\int_\Omega m > 0. \tag{8.37}$$

Demostración. Sea $u > 0$ solución de (8.1) y fijemos

$$\beta := \frac{p-1+\gamma}{p-1} \quad \text{(Notar que } (\beta-1)(p-1) = \gamma > 0).$$

Tomemos $0 \leq \phi \in C_c^\infty(\Omega)$ y sea Ω' un abierto tal que $supp(\phi) \subset \Omega' \subset\subset \Omega$. Por los cálculos hechos en la demostración del Lema 8.13, sabemos que

$$\begin{aligned} -\Delta_p u^\beta &= -\beta^{(p-1)}(\beta-1)(p-1)u^{(\beta-1)(p-1)-1} |\nabla u|^p \\ &\quad + \beta^{(p-1)} u^{(\beta-1)(p-1)} (-\Delta_p u) \\ &\leq \beta^{(p-1)} u^{(\beta-1)(p-1)} m(x) u^{-\gamma} \\ &\leq \beta^{(p-1)} m(x) \quad \textit{ppx} \text{ en } \Omega'. \end{aligned}$$

Multiplicando a ambos lados por ϕ, obtenemos

$$\int_\Omega \langle \left|\nabla u^\beta\right|^{p-2} \nabla u^\beta, \nabla\phi \rangle \leq \beta^{p-1} \int_\Omega m(x)\phi.$$

Por otro lado, sea $0 \leq v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Entonces, existe una sucesión $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ con $\phi_j \geq 0$ en Ω y tal que $\phi_j \to v$ en $W^{1,p}(\Omega)$ (ver Lema 1.40). Utilizando la última desigualdad con ϕ_j en lugar de ϕ y pasando al límite obtenemos que $-\Delta_p(u^\beta) \leq \beta^{p-1}m(x)$ en sentido débil en Ω. Notando que $\beta > 1$ y por lo tanto $u^\beta \in C^1(\overline{\Omega})$, podemos aplicar el Principio de Comparación (Proposición 3.14) para deducir $0 < u^\beta \leq \beta\mathcal{S}(m)$ en Ω. Esto demuestra la primer desigualdad.

Para probar la segunda desigualdad trabajamos sobre $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : dist(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$. Notar que $\Omega_\varepsilon \subset\subset \Omega$. Multiplicando (8.1) a ambos lados por u^γ e integrando obtenemos

$$-\int_{\Omega_\varepsilon} \Delta_p u\ u^\gamma = \int_{\Omega_\varepsilon} m.$$

Notar que $(-\Delta_p u)_{|\Omega_\varepsilon}$ está bien definido como función. Además, $u^\gamma \in C^1(\overline{\Omega_\varepsilon})$ y $|\nabla u|^{p-2}\nabla u \in W^{1,1}(\Omega_\varepsilon, \mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, por lo que vale la regla de diferenciación del producto. Más aún, vale el Teorema de la Divergencia (Teorema 1.44) pues $|\nabla u|^{p-2}\nabla u\ u^\gamma \in W^{1,1}(\Omega_\varepsilon, \mathbb{R}^n) \cap C(\overline{\Omega_\varepsilon}, \mathbb{R}^n)$. Entonces, la desigualdad anterior se transforma en

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\varepsilon} m(x) &\geq \int_{\Omega_\varepsilon} \langle |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla u^\gamma\rangle - \int_{\Omega_\varepsilon} div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\ u^\gamma\right) \\
&= \int_{\Omega_\varepsilon} \gamma u^{\gamma-1}|\nabla u|^p - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^{p-2}\ u^\gamma\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\
&\geq -C\int_{\partial\Omega_\varepsilon} u^\gamma.
\end{aligned}$$

Como $u \equiv 0$ en $\partial\Omega$, haciendo tender ε a cero en la última desigualdad obtenemos lo que queríamos. $\square$

Bibliografía

[A] An Lê; *On the Local Hölder Continuity of the Innverse of the p-Laplace Operator*, Proc. of the Amer. Math. Soc. **135** (2007), 3553–3560.

[ALO1] R. Agarwal, H. Lü, D. O'Regan; *A necessary and sucient condition for the existence of positive solutions to thesingularp-Laplacian*, Z. Anal. Anwend. **22** (2003), 689–709.

[ALO2] R. Agarwal, H. Lü, D. O'Regan; *Existence theorems for the one-dimensional singularp-Laplacian equation with signchanging nonlinearities*, Appl. Math. Comput. **143** (2003), 15–38.

[B] H. Brezis; *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Universitext, Springer, New York, 2011.

[BPT] C. Bandle, A. Pozio, A. Tesei; *The aymptotic behavior of the solutions of degenerate parabolic equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **303** (1987), 487-501.

[BS] M. Badiale, E. Serra; *Semilinear Elliptic Equations for Beginners.* Universitext, Springer, London, 2011.

[C] M. Chipot; *Elliptic equations: an introductory course.* Birkhäuser Advanced Texts, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.

[CK] J. Chaparova, N. Kutev; *Positive solutions of the generalized Emden–Fowler equation in Hölder spaces*, J. Math. Anal. Appl. **352** (2009), 65-76.

[CQ] M. Cuesta, H. Ramos Quoirin; *A weighted eigenvalue problem for the p-Laplacian plus a potential*, NoDEA Nonlinear Differ. Equ. Appl. **16** (2009), 469–491.

[CT] M. Cuesta, P. Takac; *A strong Comparison Principle for Positive Solutions of Degenerate Elliptic Equations*, Differential Integral Equations **13** (2000), 721-746.

[D] Y. Du; *Order Structure and Topological Methods in Nonlinear Partial Differential Equations: Maximum Principles and Applications.* Series on Partial Differential Equations and Applications, World Scientific Publishing, Hackensack, 2006.

[DH] P. Drábek, J. Hernández; *Existence and uniqueness of positive solutions for some quasilinear elliptic problems*, Nonlinear Anal. **44** (2001), 189-204.

[DaSc] L. Damascelli, B. Sciunzi; *Regularity, monotonicity and symmetry of positive solutions of m-Laplace equations*, J. Differential Equations **206** (2004), 483–515.

[DS1] M. Delgado, A. Suárez; *On the uniqueness of positive solution of an elliptic equation*, Appl. Math. Lett. **18** (2005), 1089-1093.

[DS2] M. Delgado, A. Suárez; *On the structure of the positive solutions of the logistic equation with nonlinear diffusion*, J. Math. Anal. Appl **268** (2002), 200-216.

[E] L. C. Evans; *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1998.

[FHT] J. Fleckinger, J. Hernandez, F. Thelin; *Existence of multiple principal eigenvalues for some indefinite linear eigenvalue problems*, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana **7-B** (2004), 159–188.

[GK1] T. Godoy, U. Kaufmann; *On strictly positive solutions for some semilinear elliptic problems*, NoDEA Nonlinear Differ. Equ. Appl. **20** (2013), 779-795.

[GK2] T. Godoy, U. Kaufmann; *Existence of Strictly Positive Solutions for SublinearElliptic Problems in Bounded Domains*, Advanced Nonlinear Studies **14** (2014), 341–347.

[GK3] T. Godoy, U. Kaufmann; *On Dirichlet problems with singular nonlinearity of indenite sign*, J. Math. Anal. Appl. **428** (2015), 1239-1251.

[GP] L. Gasinski, N. Papageorgiou; *Nonlinear Analysis, Series in Mathematical Analysis and Applications*, 9, Chapman & Hall, Boca Raton, FL, 2006.

[GR] M. Ghergu, V. Radulescu; *Singular Elliptic Problems. Bifurcation and Asymptotic Analysis*. Oxford Lecture Ser. Math.Appl. **37**, Oxford University Press, Oxford, 2008.

[GS] J. García-Melián, J. Sabina de Lis; *Maximum and comparison principles for operators involving the p-Laplacian*, J. Math. Anal. Appl. **218** (1998), 49–65.

[GT] D. Gilbarg, N. S. Trudinger; *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer, Verlag, Berlin, Heidelberg, 2001.

[GV] M. Guedda, L. Véron, *Quasilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Ann. I. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **19**, (2002), 777–813.

[HMV] J. Hernandez, F. Mancebo, J. Vega; *On the linearization of some singular, nonlinear elliptic problems and applications*, Nonlinear Anal. **13** (1989), 879–902.

[KM1] U. Kaufmann, I. Medri; *Strictly positive solutions for one-dimensional nonlinear elliptic problems*, Electron. J. Differential Equations **2014** (2014), Paper No. 126, 1–13.

[KM2] U. Kaufmann, I. Medri; *Strictly positive solutions for one-dimensional nonlinear problems involving the p-Laplacian*, Bull. Aust. Math. Soc. **89** (2014), 243–251.

[KM3] U. Kaufmann, I. Medri; *One-dimensional singular problems involving the p-Laplacian and nonlinearities indefinite in sign*, Adv. Nonlinear Anal. **5** (2016), 251-259.

[KQU] U. Kaufmann, H. Ramos Quoirin, K. Umezu; *Positivity results for indefinite sublinear elliptic problems via a continuity argument*, J. Differential Equations **263** (2017), 4481-4502.

[Lieb] G. M. Lieberman; *Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations*, Nonlinear Anal. **13** (1988), 1203–1219.

[Lind] P. Lindqvist; *Some remarkable sine and cosine functions*, Ric. Mat. **44** (1995), 269–290.

[LOA] H. Lü, D. O'Regan, R. Agarwal; *Positive solutions for singularp-Laplacian equations with sign changing nonlinearitiesusing inequality theory*, Appl. Math. Comput. **165** (2005), 587–597.

[LS] N. H. Loc, K. Schmitt; *Applications of Sub-Supersolution Theorems to Singular Nonlinear Elliptic Problems*, Advanced Nonlinear Studies **11** (2011), 493–524.

[LZ] H. Lü, C. Zhong; *A note on singular nonlinear boundary value problems for the one-dimensionalp-Laplacian*, Appl.Math Lett. **14** (2001), 189–194.

[MHC] D. Ma, J. Han, X. Chen; *Positive solution of three-point boundary value problem for the one-dimensionalp-Laplacianwith singularities*, J. Math. Anal. Appl. **324** (2006), 118–133.

[MM1] R. Manásevich, J. Mawhin; *Periodic solutions for nonlinear systems with p-Laplacian-like operators*, J. Differential Equations **145** (1998), 367–393.

[MM2] R. Manásevich, J. Mawhin; *Boundary value problems for nonlinear perturbations of vector p-Laplacian-like operators*, J. Korean Math. Soc. **37** (2000), 665–685.

[PEM] M. del Pino, M. Elgueta, R. Manasevich; *A holomorphic deformation along p of a Leray-Schauder degree result and existence for* $(|u'|^{p-2}u')' + f(t,u) = 0,\ u(0) = u(T),\ p > 1$, J. Differential Equations **80** (1989), 1–13.

[PS] P. Pucci, J. Serrin; *The Maximun Principle*. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications **73**, Birkhäuser Verlag AG, 2007.

[PZ] K. Perera, Z. Zhang; *Multiple positive solutions of singular p-Laplacian problems by variational methods*, Boundary Value Problems (2005), 377–382.

[RST] I. Rachůnková, S. Staněk and M. Tvrdý; *Solvability of Nonlinear Singular Problems for Ordinary Dierential Equations*. Hindawi Publishing Corporation, New York, 2008.

[SG] B. Sun, W. Ge; *Existence and iteration of positive solutions for somep-Laplacian boundary value problems*, Nonlinear Anal. **67** (2007), 1820–1830.

[T] G. Troianiello; *Elliptic differential equations and obstacle problems*. University series in mathematics, Plenum Press, New York, 1987.

[WG] J. Wang, W. Gao; *A singular boundary value problem for the one-dimensionalp-Laplacian*, J. Math. Anal. Appl. **201** (1996), 851-866.