

II Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales *Actas*, II (2): 56-61, 2009. La Plata.

EXPERIENCIA EN EL LABORATORIO DE MATEMÁTICA MEDIANTE EL SOPORTE DE COMPUTADORAS

GUALA, G. ; OSCHEROV, V.; PÉREZ MILLÁN, C.

Universidad Nacional del Sur; Avda. Alem 1253, 8000, Bahía Blanca;
gguala@bvconline.com.ar

RESUMEN

Nuestro propósito es presentar una experiencia desarrollada en el marco del Proyecto de Investigación: *El uso de nuevas tecnologías en la enseñanza del cálculo*¹. En él enfocamos el uso de nuevas tecnologías como un modo de superar la metodología habitual de dar las respuestas antes de que surjan las preguntas. Incorporamos el uso de un Laboratorio de Matemática mediante el soporte de computadoras para el que tuvimos en cuenta tanto las aplicaciones de la Matemática como la exigencia actual de un uso crítico, reflexivo y creativo de las TIC dentro del sistema educativo en general y de la Matemática en particular. La experiencia consistió en trabajar en el *Laboratorio de Matemática mediante el soporte de computadoras* con alumnos de primer año de Ingeniería Civil y Licenciatura en Física. El contenido desarrollado fue: Sucesiones y Series. Los alumnos estaban organizados en comisiones. Les proporcionamos las herramientas para utilizar una planilla de cálculo, Excel, y una Guía de Laboratorio. Ella contenía actividades exploratorias para cuya resolución admitíamos la consulta al docente. Este trabajo se complementaba con la entrega de un informe que mostraba los resultados del trabajo en comisión. La actividad consistió en el armado y estudio de la convergencia de una serie geométrica. La mayoría de las comisiones logró presentar resultados satisfactorios.

Palabras clave: educación matemática; enseñanza del cálculo; laboratorio de matemática; nuevas tecnologías y enseñanza; sucesiones y series.

¹ Proyecto de Grupos de Investigación (PGI) subsidiado por la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la UNS. Nuestro equipo de investigación está constituido por Docentes de los Departamentos de: Matemática, Humanidades y Física; y por alumnos del profesorado de Matemática que realizan tareas docentes en el Departamento de Matemática de la UNS.

INTRODUCCIÓN

El propósito de este trabajo es presentar una experiencia realizada en el marco del proyecto de Investigación: *El uso de nuevas tecnologías en la enseñanza del cálculo*, que desarrollamos a partir de enero de 2007.

La investigación que realizamos en el período 2004-2006 nos permitió analizar procesos de enseñanza y aprendizaje del Cálculo, considerándolo como herramienta para solucionar problemas específicos de Matemática y de otras disciplinas. En el proyecto arriba mencionado continuamos en esta línea de investigación incorporando el uso de nuevas tecnologías. Rediseñamos las propuestas de actividades y enfocamos el uso de estas nuevas herramientas como un modo de superar la metodología habitual de dar las respuestas antes de que surjan las preguntas y promover así una real construcción de los conocimientos.

Tuvimos en cuenta por un lado las muchas y variadas aplicaciones de la Matemática y, por otro la exigencia actual de un uso crítico, reflexivo y creativo de las TIC dentro del sistema educativo en general y de la Matemática en particular, tal como lo ha señalado C. Laborde (2000), para desarrollar en el ámbito de la educación universitaria un Laboratorio de Matemática mediante el soporte de computadoras provistas de programas matemáticos específicos (Derive) o planillas de cálculo (Excel).

Creemos que si bien la incorporación de las TIC's facilitan los cálculos y permiten la visualización de situaciones complejas (por tanto son herramientas que ayudan y simplifican muchas tareas), sin embargo, en sí mismas no las resuelven. Estos medios son soportes en la enseñanza que aventajan a otros por su nivel de interacción, es decir, son medios que pueden transformar los métodos tradicionales, si sus posibilidades se utilizan constructivamente sobre la base de una propuesta integradora.

Pensamos el Laboratorio de Matemática como una estrategia pedagógico didáctica de utilización de material (en este caso software), en la que se encuentra un conjunto de actividades matemáticas para ser desarrolladas autónomamente por los participantes a través del uso de esos medios, proceso que proporciona un ambiente de aprendizaje en el que se genera la relación entre actividad matemática y material informático, relación que contribuye a la construcción y fundamentación del pensamiento matemático.

Otras de las razones a considerar para la utilización de las TICs en la enseñanza es que el campo profesional se ha visto ampliamente modificado por las mismas. La formación de alumnos que se insertarán en este campo no puede quedar al margen de estos desarrollos. Como afirman Cabero y otros (2003) "La llegada de las Tecnologías de la Información y la Comunicación al sector educativo viene enmarcada por una situación de cambios (...), que no pueden ser considerados al margen de los cambios que se desarrollan en la sociedad relacionado con la innovación tecnológica, con los cambios en las relaciones sociales y con una nueva concepción de la relación tecnología-sociedad que determinan las relaciones tecnología-educación"

Nos referiremos ahora a la experiencia

Contextualización y descripción de la experiencia.

Según los planes de estudios de las carreras de Ingeniería Civil y de Licenciatura en Física, la materia Análisis Matemático I tiene asignados dos días de clases, de cuatro horas teórico-prácticas cada uno. Es materia del primer cuatrimestre de primer año, es decir los alumnos recién inician el ciclo universitario. Concurren a clase 90 alumnos.

La experiencia consiste en incorporar en la enseñanza y en el aprendizaje de la materia sesiones en el Laboratorio de Matemática en las que se utilizan computadoras. Por problemas de capacidad física del Laboratorio de Computación, hemos constituido dos grupos de alumnos que alternan su trabajo integrando Comisiones: mientras uno de ellos utiliza el

Laboratorio de Computación desarrollando las Guías de Laboratorio (GL)², el otro trabaja en el aula con Guías de Actividades (GA). Las GL proponen problemas en cuya resolución se utiliza soporte informático. Este trabajo se complementa con la entrega de un informe que los alumnos confeccionan a partir de preguntas orientadoras. La consigna es resolver los problemas de la GL durante el tiempo de laboratorio para lo cual cuentan con la posibilidad de consultar a los docentes. La idea es crear un entorno diferente para el aprendizaje y para la comunicación entre los participantes. Es una estrategia en la que interactúan varios alumnos para construir aprendizaje a través de la discusión, reflexión y toma de decisiones con recursos informáticos que actúan como mediadores. Teniendo en cuenta las dos metáforas del conocimiento, la metáfora de la adquisición y la metáfora de la participación, Sfard (1998), esta idea de aprendizaje colaborativo pertenece en parte a la metáfora de la participación. .

En las actividades que realicen en el informe los alumnos deben detallar: cuál es su razonamiento y cómo construyeron sus respuestas. En este caso tendrán que discutir al interior del grupo, y en función de lo realizado anteriormente, cómo se resuelve la situación planteada. Si tienen dificultades las deben expresar en el informe pero en primera instancia no se admiten consultas. Las GA requieren, para desarrollar y resolver los problemas propuestos, procedimientos algebraicos, analíticos, geométricos, etc. Así mismo alentamos a los alumnos a que, en lo posible, comparen los resultados obtenidos utilizando las herramientas informáticas en el Laboratorio. Fuera del horario de clases, los alumnos disponen del uso del Laboratorio y de la atención del equipo de docentes que les ofrece horarios de consulta.

En este contexto, el primer informe realizado, que es el objeto de este trabajo, fue “Sucesiones y Series Numéricas”.

Los alumnos tuvieron una explicación sobre el trabajo en una planilla de cálculo y en paralelo con las clases prácticas tuvieron las clases teóricas. La GA se basa en la exploración de sucesiones. En las clases teóricas se introdujeron los contenidos propios de las series numéricas. En particular se le dio mayor importancia a las series geométricas, el informe proponía un ejercicio para el cual necesitaban esta clase de series.

De las actividades incluidas en la fase exploratoria podemos citar la siguiente: (Solow, (1999) Laboratorio 19)

Actividad 6: $\left(\left(1 + \frac{r}{n} \right)^n \right)$ – *variaciones sobre un tema.*

a) Es un hecho bien conocido e importante que $\left(\left(1 + \frac{r}{n} \right)^n \right)$ converge a e^r . Haciendo $r=1$, $\ln(2)$ y $\ln(3)$, reúna evidencia en apoyo de este hecho.

b) Investigue el comportamiento de dos sucesiones relacionadas: $\left(\left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^n \right)$ y

$\left(\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^n \right)$. Discuta cómo difieren en su comportamiento ambas sucesiones cuando n

toma valores grandes. En su opinión, ¿cuál es la razón de esta diferencia?

² En las Guías planteamos problemas siguiendo la línea propuesta en: Solow, A. (Editor) (1999) *Learning by Discovery. A Lab Manual for Calculus*. MAA Notes Number 27. The Mathematical Association of America.

RESULTADOS

Las actividades propuestas para ser desarrolladas en el primer informe se detallan a continuación.

Temas para el Primer Informe

Fecha de entrega: Jueves, 16 de abril de 2009

Se lanza hacia arriba una pelota desde el suelo con velocidad inicial v . Ignorando la resistencia del aire, subirá a una altura dada por la expresión $v^2/(2g)$ donde g denota el valor de la aceleración de la gravedad $g = 9,8 \text{ (m/seg}^2\text{)}$ y volverá al suelo en un tiempo $2v/g$. Según lo “vivo” que sea el rebote, la pelota alcanzará una cierta fracción de la altura anterior. El **coeficiente de restitución** r , definido como el cociente entre la velocidad de impacto y la de rebote, mide esa propiedad. El segundo ascenso se inicia con velocidad $r.v$, el tercero con velocidad $r^2.v$, etc.

Puede parecer que bajo estas condiciones idealizadas, la pelota rebota durante un tiempo infinito. Para ver que esto no es así, dé argumentos para mostrar que en la pelota tarda un tiempo $t_2 = \frac{2v}{g}(1+r)$ en completar dos rebotes, tarda $t_3 = \frac{2v}{g}(1+r+r^2)$ en completar tres, etc.

Tomando los valores particulares $r=0,5$ y $v=3 \text{ (m/seg)}$, determine numéricamente algunos valores de esa sucesión, represéntelos gráficamente y por último halle una expresión general para t_n y el valor al que converge esa sucesión. Dé argumentos para explicar por qué después de ese tiempo, dejará de rebotar.

¿Qué puede decir del espacio recorrido por la pelota después de haber realizado n rebotes sucesivos? ¿Y sobre la longitud total recorrida hasta que se detiene?³

A partir de la evaluación de los informes entregados, a cada uno de ellos se les asignó una calificación de acuerdo con el nivel de elaboración, la explicitación del procedimiento, los recursos gráficos utilizados y la conclusión presentada.

En esta oportunidad consideramos lo realizado por uno de los grupos de alumnos constituido por 12 comisiones, de 4 alumnos cada una.

La mayoría de las comisiones trabajaron con la planilla de cálculo para explorar el valor de la serie, tal como habían hecho con las sucesiones propuestas en el trabajo práctico y también mostraron gráficamente situaciones que avalaban la conjetura de que la serie era convergente. Cabe resaltar que el gráfico no fue el argumento central para demostrar la convergencia sino que utilizaron correctamente los conocimientos adquiridos sobre series geométricas.

En la Fig. 1 se muestra las calificaciones que se dieron a los 12 informes

³ Problema adaptado del texto de Smith y Minton (2003), pag. 546.

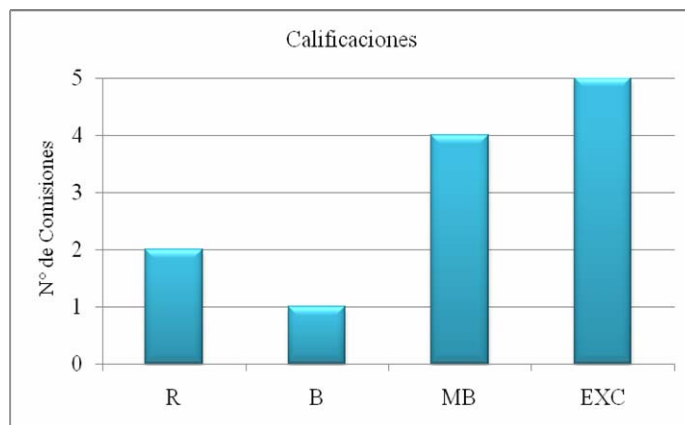


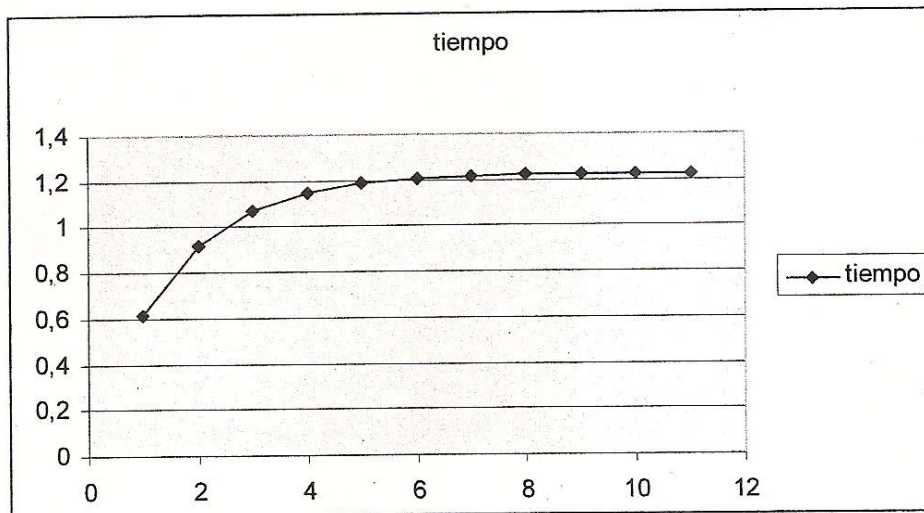
Figura 1. Calificaciones

Mostramos, a modo de ejemplo, el procedimiento realizado por una comisión para definir la serie, y un gráfico demostrativo del límite de la serie. Pertenecen a dos informes distintos y ambos se refieren al cálculo del tiempo.

Bajo las condiciones idealizadas dadas, parece que la pelota rebota durante un tiempo infinito, pero esto no es así, ya que:

- En el primer rebote tarda $t_1=2v/g$
 - En el segundo rebote tarda $t_2=2vr/g$
 - En el tercer rebote tarda $t_3=2vr^2/g$
- Y así sucesivamente.

Por lo tanto, en completar el primer rebote tarda $t=t_1$, en completar los primeros dos rebotes tarda $t_2= t_1 + t_2=2v/g + 2vr/g=(2v/g)(1+r)$, en completar tres tarda $t_3= t_1 + t_2 + t_3= 2v/g + 2vr/g + 2vr^2/g = (2v/g)(1+r+r^2)$, y así sucesivamente.



$$T_n = 2v/g (1+r+r^2+\dots+r^n)$$

CONCLUSIONES

La introducción de recursos informáticos actuó como factor de motivación para los alumnos. El desarrollo de una guía de problemas con una herramienta que les permitiera la visualización fue de una gran ayuda particularmente al tratar contenidos como sucesiones y series.

Así mismo el informe requería vincular con una situación física que se podían imaginar. Varias comisiones hicieron alusión a la situación, a la concepción intuitiva de que el tiempo de rebotes de la pelota no podría ser infinito, porque la pelota cada vez rebotaba a menos altura hasta que dejaría de rebotar o sacaron conclusiones vinculando al coeficiente r con la situación física:

“teniendo en cuenta que no se consideran las variables como la del rozamiento y la resistencia del aire (...) a partir del t_{13} se que los valores van siendo despreciables, y notando que tarda menos tiempo se deduce que con cada rebote posterior la pelota se aleja muy poco del suelo haciéndose insignificante dicho rebote y llegamos a la conclusión de que ya dejó de rebotar”.

“al ser $r < 1$, la velocidad con que asciende después de cada rebote irá disminuyendo, tendiendo este valor v a cero. (...) Decimos que el coeficiente de restitución está determinado por: $0 < r < 1$ ya que si $r > 1$ o $r = 1$ la pelota rebotaría infinitamente. Si $r = 0$ la pelota no rebotaría, y si $r < 0$, la velocidad sería negativa y este caso sería absurdo”.

Estos factores son los que permitieron un resultado positivo donde hay un 75% de los informes en los que los alumnos realizaron satisfactoriamente el procedimiento y lograron explicitar el proceso de construcción.

Cabe aclarar que la ejercitación previa tenía mayor dificultad, pero era orientada en las clases. El trabajo en espacios de consulta, la resolución de problemas y el uso de la computadora, a lo que se agrega una “invitación” a la reflexión, creemos que fue lo que condujo a que en una instancia tan temprana del recorrido universitario se lograran buenos resultados.

Nuestra intención es continuar con este tipo de actividades, que conduzcan al uso habitual de la computadora como herramienta didáctica, favoreciendo un aprendizaje significativo del Cálculo.

BIBLIOGRAFÍA

Cabero, J; Castaño, C; Cebreiro, B; Gisbert, M.; Martinez, F; Morales, J;Prendes, M.;Romero, R; Salinas, J.(2003): Las Nuevas Tecnologías en la Actividad Universitaria. *Píxel-Bit, Revistade Medios y Educación*. N° 20. pp 81-100.

Solow, A. (Editor) (1999): *Learning by Discovery. A Lab Manual for Calculus*. MAA Notes Number 27. The Mathematical Association of America.

Laborde, C. (2000): *Why technology is indispensable today in the teaching and learning of mathematics ?* Contribution to the T₃ World-Wide conference in Tokyo – 6-8 August 2000

Sfard, Anna (1988): *On two metaphors for learning and the dangers of choosing just one*. Educational Researcher, March 1988, pp 4-13.

Smith, R.; Minton R. (2003) *Cálculo, Volumen 1*, México, Mac Graw- Hill, 2a. edición.